

DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.08

УДК 539.3

**Л.В. Степанова, Е.М. Яковлева**

Самарский государственный университет, Самара, Россия

**СМЕШАННОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛАСТИНЫ  
С ТРЕЩИНОЙ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО  
НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ**

Статья посвящена анализу напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в материале со степенным определяющим законом в условиях смешанного нагружения: при приложении к пластине с трещиной нормальной растягивающей и поперечной сдвиговой нагрузки. С помощью метода разложения по собственным функциям найдено напряженно-деформированное состояние вблизи вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями в предположении реализации плоского напряженного состояния. Вид смешанного нагружения задается параметром смешанности нагружения, изменяющимся от нуля до единицы. Нулевое значение отвечает поперечному сдвигу, значение, равное единице, соответствует нормальному отрыву. Показано, что метод разложения по собственным функциям приводит к нелинейной задаче на собственные значения, численное решение которой получено для всех значений параметра смешанности нагружения и всех практически важных значений показателя нелинейности материала. Найдено, что смешанное нагружение пластины с дефектом приводит к изменению особенности поля напряжений вблизи кончика трещины, к решению, отличному от классического решения Хатчинсона – Райса – Розенгрена. Решение нелинейной задачи на собственные значения также получено с помощью метода возмущений (метода малого параметра), в рамках которого вводится малый параметр, представляющий собой разность между собственным значением, отвечающим нелинейной задаче, и собственным значением, соответствующим невозмущенной линейной задаче. Проведенный анализ ясно указывает на изменение особенности поля напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования. Построены угловые распределения компонент тензора напряжений (собственные функции) в полном диапазоне значений параметра смешанности нагружения.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние вблизи кончика трещины, смешанное нагружение, параметр смешанности, нелинейная задача на собственные значения, метод возмущений.

**L.V. Stepanova, E.M. Yakovleva**

Samara State University, Samara, Russian Federation

## **MIXED-MODE LOADING OF THE CRACKED PLATE UNDER PLANE STRESS CONDITIONS**

The paper is devoted to the stress-strain analysis near the crack tip in a power-law material under mixed-mode loading. In the paper by the use of the eigenfunction expansion method the stress-strain state near the crack tip under plane stress conditions is found. The type of the mixed – mode loading is specified by the mixity parameter which is varying from 0 to 1. The value of the mixity parameter corresponding to Mode II crack loading is equal to 0 whereas the value corresponding to Mode I crack loading is equal to 1. It is shown that the eigenfunction expansion method results in the nonlinear eigenvalue problem. The numerical solution of the nonlinear eigenvalue problem for all the values of the mixity parameter and for all practically important values of the strain hardening (or creep) exponent is obtained. It is found that the mixed-mode loading of the cracked plate gives rise change of the stress singularity in the vicinity of the crack tip. The mixed – mode loading of the cracked plate results in the new asymptotics of the stress-strain fields which is different from the classical Hutchinson – Rice – Rosengren stress field. The approximate solution of the nonlinear eigenvalue problem is either obtained by the perturbation theory technique (small parameter method). In the framework of the small parameter method the small parameter presenting the difference between the eigenvalue of the nonlinear problem and the undisturbed linear problem is introduced. The analysis carried out shows clearly that the stress singularity in the vicinity of the crack tip is changing under mixed-mode loading in the case of plane stress conditions. The angular distributions of the stress and strain components (eigenvalue functions) in the full range of values of the mixity parameter are given.

**Keywords:** stress-strain state near the crack tip, mixed-mode loading, mixity parameter, nonlinear eigenvalue problem, perturbation technique.

### **1. О смешанном деформировании элементов конструкций с трещинами**

Определение напряженно-деформированного состояния в непосредственной окрестности вершины трещины является одной из актуальных задач современной механики разрушения [1–5], представляющей собой важную проблему с теоретической [1–3], вычислительной [4] и экспериментальной точек зрения [5]. В последнее время особый интерес вызывает анализ напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения при одновременном приложении растягивающей нормальной и поперечной сдвиговой нагрузок в материалах с нелинейными определяющими соотношениями [6–14]. Очевидно, что принцип суперпозиции решений, соответствующих трещине нормального отрыва и трещине поперечного сдвига, справедлив только для линейно-упругих материалов. Для материалов с нелинейными (например, часто используемыми на практике степенными) определяющими уравнениями следует разрабатывать но-

вые методы и подходы анализа напряженно-деформированного состояния. В настоящей работе приводятся численный и приближенный анализ полей напряжений и деформаций вблизи кончика трещины в условиях смешанного нагружения (при приложении растягивающей и сдвиговой нагрузок) в предположении реализации плоского напряженного состояния. Следует отметить, что угловые распределения и характер особенности механических полей у вершины трещины в условиях смешанного деформирования при плоском деформированном состоянии достаточно хорошо изучены [6, 7, 8]. В [6] разработана методика и приведены результаты расчетов упругопластических коэффициентов интенсивности напряжений в полном диапазоне смешанных форм деформирования от нормального отрыва до чистого поперечного сдвига. В [6] рассмотрено состояние произвольно ориентированной прямолинейной трещины в виде математического разреза при двухосном нагружении различной интенсивности. Численное решение построено на использовании уравнения совместности деформаций, представленного через функцию напряжений Эри и ее производные. Поведение упругопластического материала соответствует модели Рамберга–Осгуда (когда для описания пластической деформации используется степенной закон деформационной теории пластичности). На основе выполненных расчетов в [6] установлен характер влияния вида смешанных форм нагружения и пластических свойств материала, описываемых показателем деформационного упрочнения. В [7] проведен анализ напряженно-деформированного состояния области, примыкающей к вершине наклонной трещины, в образцах трех геометрий: крестовидный образец при двухосном нагружении, пластина с центральной наклонной трещиной и компактный образец с односторонним боковым надрезом. При различных сочетаниях условий нагружения и ориентации исходной прямолинейной трещины для плоской задачи воспроизведен полный диапазон смешанных форм деформирования от нормального отрыва до чистого сдвига. На основе представленных численных расчетов установлено комплексное влияние двухосности номинальных напряжений, начального угла ориентации дефекта, относительной длины трещины и геометрии исследуемого образца на поля напряжений и параметры напряженно-деформированного состояния. Приведено сравнение полученного решения с однопараметрическим классическим решением типа Хатчинсона – Райса – Розенгрена (ХРР),

которое подтверждает необходимость учета членов высоких порядков в модельных представлениях для случая смешанных форм деформирования. В [8] рассмотрено статическое и малоцикловое деформирование для различных вариантов двухосного нагружения и представлены методы определения направления роста трещины при смешанных формах двухосного нагружения. В [9] приведены результаты экспериментальных исследований особенностей развития пластических зон и поврежденности стали в условиях сдвига, отрыва, смешанного типа нагружения и внецентренного циклического нагружения. Установлено влияние сдвиговой компоненты на эволюцию зон пластической деформации, механические и акустические свойства (параметры акустической эмиссии, скорость и затухание ультразвуковых волн). Вопросам определения высших приближений в асимптотических разложениях полей напряжений у вершины наклонной трещины посвящена статья [10], в которой предложены аналитические выражения для поля напряжений вблизи кончика трещины в условиях смешанного нагружения, основанные на полном решении М. Уильямса, и дано практическое приложение предложенных выражений для определения напряженно-деформированного состояния в сварном соединении. В [11] на основе классического решения линейной механики разрушения о нагружении пластины с трещиной конечной длины получены аналитические выражения для всех коэффициентов асимптотического разложения поля напряжений как функций приложенной растягивающей и сдвиговой нагрузки и длины трещины. С помощью найденных аналитических выражений построены распределения напряжений при произвольной комбинации отрыва и поперечного сдвига. Работы [12, 13] посвящены методикам усталостных испытаний стальных крестообразных образцов с поверхностной трещиной при двухосном нагружении. Авторами предложены образцы и приспособления для осуществления в рабочей части образца смешанного деформирования. В этих работах показано, что предложенная методика экспериментального исследования дает возможность оценить восприимчивость различных материалов к двухосному нагружению при развитии усталостных трещин. Исследование характеристик циклической трещиностойкости конструкционной стали в условиях смешанного нагружения выполнено в [14], где на основе численных расчетов напряженно-деформированного состояния в крестообразном образце с центральной трещиной определены значения

Т-напряжений и К-тарировочных функций. Экспериментально установлено влияние вида напряженного состояния на скорость роста трещины при двухосном деформировании. В [15] получено асимптотическое представление напряженно-деформированного состояния и поля сплошности в окрестности вершины трещины в образце, находящемся в условиях смешанного деформирования, для случая плоского деформированного состояния. На основании автомодельного представления решения и гипотезы о формировании области полностью дефрагментированного (диспергированного) материала вблизи вершины трещины получено распределение напряжений, скоростей деформаций и сплошности у стационарной трещины в среде с поврежденностью в полном диапазоне смешанных форм деформирования (от чистого сдвига до нормального отрыва). Построены высшие приближения в асимптотических разложениях полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности. Однако при определении напряженно-деформированного состояния вблизи кончика трещины в условиях плоского напряженного состояния возникают сложности, связанные с решением нелинейной задачи на собственные значения, к которой приводит метод разложения по собственным функциям. Преодолению указанных трудностей посвящена настоящая работа. Следует отметить, что задачи определения плоского напряженного состояния для тел с вырезами недостаточно изучены и активно исследуются в последнее время [16–19].

## 2. Математическая постановка задачи. Основные уравнения. Параметр смешанности нагружения

Для задачи о смешанном нагружении пластины в условиях плоского напряженного состояния управляющие уравнения в полярной системе координат с полюсом в вершине трещины принимают вид уравнения равновесия

$$r\sigma_{rr,r} + \sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad r\sigma_{r\theta,r} + \sigma_{\theta\theta,\theta} + 2\sigma_{r\theta} = 0, \quad (1)$$

условие совместности деформаций

$$2(r\epsilon_{r\theta,\theta})_{,r} = \epsilon_{rr,\theta\theta} - r\epsilon_{rr,r} + r(r\epsilon_{\theta\theta})_{,rr}, \quad (2)$$

определяющие уравнения степенного закона в предположении реализации плоского напряженного состояния

$$\varepsilon_{rr} = B\sigma_e^{n-1}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/2, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = B\sigma_e^{n-1}(2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})/2, \quad \varepsilon_{r\theta} = 3B\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\theta}/2, \quad (3)$$

где интенсивность напряжений определяется формулой  $\sigma_e^2 = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2$ ;  $B, n$  – постоянные материала. Решение задачи (1)–(3) должно удовлетворять классическим условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины  $\sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0$ . Вид смешанного нагружения задается параметром смешанности нагружения

$$M^p = (2/\pi) \operatorname{arctg} \left| \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) / \sigma_{r\theta}(r, \theta = 0) \right|. \quad (4)$$

Параметр смешанности нагружения принимает значение, равное единице, для трещины нормального отрыва; значение, равное нулю, для трещины поперечного сдвига; для всех промежуточных форм нагружения  $0 < M^p < 1$ . В полярных координатах компоненты тензора напряжений выражаются через функцию напряжений Эри  $\chi(r, \theta)$ :  $\sigma_{\theta\theta} = \chi_{,rr}$ ,  $\sigma_{rr} = \chi_{,r}/r - \chi_{,\theta\theta}/r^2$ ,  $\sigma_{r\theta} = -(\chi_{,\theta}/r)_{,r}$ . Асимптотическое разложение функции напряжений Эри  $\chi(r, \theta)$  в непосредственной окрестности вершины трещины  $r \rightarrow 0$  разыскивается в форме

$$\chi(r, \theta) = Kr^{\lambda+1} f(\theta), \quad (5)$$

где  $K$  – амплитудный (масштабный) множитель, зависящий от геометрии образца с трещиной и системы приложенных нагрузок.

В силу асимптотического представления (5) компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины принимают вид  $\sigma_{ij}(r, \theta) = Kr^{\lambda-1} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$  или

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= Kr^{\lambda-1} [(\lambda+1)f(\theta) + f''(\theta)], \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = Kr^{\lambda-1} (\lambda+1)\lambda f(\theta), \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -Kr^{\lambda-1} \lambda f'(\theta). \end{aligned} \quad (6)$$

Компоненты тензора деформаций в окрестности вершины трещины при  $r \rightarrow 0$  согласно (3) принимают вид  $\varepsilon_{ij}(r, \theta) = BK^n r^{(\lambda-1)n} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta)$  или в развернутой форме

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}(r, \theta) &= \frac{1}{2}BK^n r^{(\lambda-1)n} f_e^{n-1} [(\lambda+1)(2-\lambda)f(\theta) + 2f''(\theta)], \\ \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{2}BK^n r^{(\lambda-1)n} f_e^{n-1} [(\lambda+1)(2\lambda-1)f(\theta) - f''(\theta)], \\ \varepsilon_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{3}{2}BK^n r^{(\lambda-1)n} f_e^{n-1} \lambda f'(\theta),\end{aligned}$$

и условие совместности деформаций (2) приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции  $f(\theta)$ :

$$\begin{aligned}& f^{IV} f_e^2 \left\{ (n-1)[(\lambda+1)(2-\lambda)f + 2f'']^2 / 2 + 2f_e^2 \right\} + \\ & + 6[(\lambda-1)n+1]\lambda \left\{ (n-1)f_e^2 h f' + f_e^4 f'' \right\} + (n-1)(n-3) \times \\ & \times h^2 [(\lambda+1)(2-\lambda)f + 2f''] + (n-1)f_e^2 [(\lambda+1)(\lambda+2)f + 2f''] \times \\ & \times \left\{ [(\lambda+1)f' + f''']^2 + [(\lambda+1)f + f''](\lambda+1)f'' + (\lambda+1)^2 \lambda^2 (f'^2 + f''') - \right. \\ & - (\lambda+1)^2 \lambda f f'' / 2 - [(\lambda+1)f' + f'''](\lambda+1)\lambda f' - \frac{1}{2}[(\lambda+1)f + f''](\lambda+1)\lambda f'' + \\ & \left. + 3\lambda^2 (f''^2 + f f''') \right\} + 2(n-1)f_e^2 h [(\lambda+1)(2-\lambda)f' + 2f'''] + \\ & + f_e^4 (\lambda+1)(2-\lambda)f'' - (\lambda-1)n f_e^4 [(\lambda+1)(2-\lambda)f + 2f''] + \\ & + [(\lambda-1)n+1](\lambda-1)n f_e^4 [(\lambda+1)(2\lambda-1)f - f''] = 0,\end{aligned} \quad (7)$$

где приняты сокращающие обозначения

$$\begin{aligned}f_e &= \sqrt{[(\lambda+1)f + f'']^2 + (\lambda+1)^2 \lambda^2 f^2 - [(\lambda+1)f + f''](\lambda+1)\lambda f + 3\lambda^2 f'^2}, \\ h &= [(\lambda+1)f + f''][(\lambda+1)f' + f'''] + (\lambda+1)^2 \lambda^2 f f' - \\ & - [(\lambda+1)f' + f'''](\lambda+1)\lambda f / 2 - [(\lambda+1)f + f''](\lambda+1)\lambda f' / 2 + 3\lambda^2 f f''.\end{aligned}$$

Граничные условия, накладываемые на функцию  $f(\theta)$ , следуют из условий отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины:

$$f(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f'(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, метод разложения по собственным функциям (5) приводит к нелинейной задаче на собственные значения: необходимо

найти значения  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (7), подчиняющиеся краевым условиям (8). При построении решений для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига используется симметрия (для трещины типа I) или антисимметрия (для трещины типа II) решения относительно луча  $\theta=0$ , и решение строится лишь для одной из полуплоскостей, например для верхней, когда  $0 \leq \theta \leq \pi$ . При анализе напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного деформирования принцип суперпозиции решений, очевидно, несправедлив, необходимо искать решение во всей плоскости  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , и соображения симметрии или антисимметрии использованы быть не могут. Для построения численного решения необходимо учесть значение параметра смешанности нагружения, задающего вид смешанного нагружения. С этой целью в рамках настоящего подхода предполагается построение численного решения уравнения (7) на отрезке  $[0, \pi]$  с краевыми условиями

$$\begin{aligned} f(\theta=0) &= 1, \quad f'(\theta=0) = (\lambda+1) / \operatorname{tg}(M^p \pi / 2), \\ f(\theta=\pi) &= 0, \quad f'(\theta=\pi) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Первое граничное условие представляет собой условие нормировки, которое можно наложить в силу однородности уравнения (7), второе условие следует из соотношения (4), задающего значение параметра смешанности нагружения. На следующем этапе строится численное решение нелинейного дифференциального уравнения (7) на отрезке  $[-\pi, 0]$  с краевыми условиями

$$\begin{aligned} f(\theta=-\pi) &= 0, \quad f'(\theta=-\pi) = 0, \quad f(\theta=0) = 1, \\ f'(\theta=0) &= (\lambda+1) / \operatorname{tg}(M^p \pi / 2). \end{aligned} \quad (10)$$

Подобный подход был реализован в [15] для определения поля напряжений в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения при плоском деформированном состоянии. При осуществлении процедуры построения численного решения, как правило, предполагается, что собственное значение рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения равно собственному значению задачи



ХРР  $\lambda = n / (n + 1)$ . Однако при построении численного решения для уравнения (7) оказалось, что радиальное напряжение  $\sigma_{rr}(r, \theta)$  при  $\theta = 0$  претерпевает разрыв, тогда как для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига, т.е. для  $M^p = 1$  и  $M^p = 0$ , поле напряжений непрерывно. Вычисления, выполненные ранее для трещин в условиях смешанного деформирования для случая плоского деформированного состояния [6–8], приводят к непрерывным распределениям радиального напряжения  $\sigma_{rr}(r, \theta)$  при  $\theta = 0$ .

Для получения асимптотического решения нелинейной задачи на собственные значения и для анализа поведения радиального напряжения обратимся к методу малого параметра, часто используемому при решении задач на собственные значения [20–23].

### 3. Метод возмущений. Решение нелинейной задачи на собственные значения

Один из эффективных методов решения задач на собственные значения предоставляет асимптотическая теория и методы возмущений [20–23]. Введем малый параметр  $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$ , представляющий собой разность между собственным значением, отвечающим нелинейной задаче на собственные значения, и собственным значением, соответствующим линейной «невозмущенной» задаче. В рамках метода малого параметра при решении задач на собственные значения наряду с разложением собственной функции  $f(\theta)$  в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$  раскладывается показатель нелинейности материала  $n$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon, \quad f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \dots, \\ n &= 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $f_0(\theta)$  – решение линейной «невозмущенной» задачи. Подставляя асимптотические разложения (11) в нелинейное дифференциальное уравнение (7) и краевые условия (9) и (10), можно получить последовательность краевых задач для линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $f_k(\theta)$ :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0: f_0^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_0'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_0 &= 0, \\
f_0(\theta=0) &= 1, \quad f_0'(\theta=0) = (\lambda_0 + 1)/\operatorname{tg}(M^p \pi/2), \quad f_0(\theta=\pi) = 0, \\
f_0'(\theta=\pi) &= 0, \quad f_0(\theta=-\pi) = 0, \quad f_0'(\theta=-\pi) = 0, \quad f_0(\theta=0) = 1, \\
f_0'(\theta=0) &= (\lambda_0 + 1)/\operatorname{tg}(M^p \pi/2).
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1: f_1^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_1'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_1 &= \\
= -n_1 \left[ x_0 (f_0^{IV} x_0 / 2 + w_0) / (2g_0) + h_0 (x_0' g_0 - x_0 h_0 + 3\lambda_0^2 g_0 f_0') / g_0^2 \right] - \\
- \frac{1}{2} f_0'' [(\lambda_0 - 1)(4\lambda_0 - 1)n_1 + 8\lambda_0] - \frac{1}{2} f_0 (\lambda_0^2 - 1) [(\lambda_0 - 1)(4\lambda_0 + 1)n_1 + 8\lambda_0], \tag{13} \\
f_1(\theta=0) &= 0, \quad f_1'(\theta=0) = 1/\operatorname{tg}(M^p \pi/2), \quad f_1(\theta=\pi) = 0, \quad f_1'(\theta=\pi) = 0, \\
f_1(\theta=-\pi) &= 0, \quad f_1'(\theta=-\pi) = 0, \quad f_1(\theta=0) = 0, \quad f_1'(\theta=0) = 1/\operatorname{tg}(M^p \pi/2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2: f_2^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_2'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_2 &= \\
= -2g_1 \left[ f_1^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_1'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_1 \right] / g_0 + 6\lambda_0 [2 + n_1(\lambda_0 - 1)] f_1'' - \\
- (1 - 2\lambda_0) f_1'' + (\lambda_0 - 1)(1 - 2\lambda_0) f_1 + [1 + n_1(\lambda_0 - 1)] x_1 - \\
- \lambda_0 (\lambda_0 - 1)(4\lambda_0 + 1) f_1 - (2\lambda_0 - 1) [1 + n_1(\lambda_0 - 1)] y_1 - \\
- 6\lambda_0 [n_1 + n_2(\lambda_0 - 1)] f_1'' - 6[1 + n_1(\lambda_0 - 1)] f_0'' + f_0'' - (\lambda_0 - 1) f_0 + \\
+ [1 + n_1(\lambda_0 - 1)] (1 - 2\lambda_0) f_0 - 2\lambda_0 (\lambda_0 - 1) f_0 + (2\lambda_0 - 1) \times \\
\times [1 + n_1(\lambda_0 - 1)] (4\lambda_0 + 1) f_0 - (2\lambda_0 - 1) [n_1 + n_2(\lambda_0 - 1)] y_0 - \\
- [1 + n_1(\lambda_0 - 1)]^2 y_0 + [n_1 + n_2(\lambda_0 - 1)] x_0 - \\
- 2 \frac{g_1}{g_0} \{ 6_0 [2 + n_1(\lambda_0 - 1)] f_0'' + (1 - 2\lambda_0) f_0'' - (\lambda_0 - 1)(1 - 2\lambda_0) f_0 - \\
- [1 + n_1(\lambda_0 - 1)] x_0 \} - [1 + n_1(\lambda_0 - 1)] (1 - 2\lambda_0) f_0 - 2\lambda_0 (\lambda_0 - 1) f_0 + \tag{14} \\
+ (2\lambda_0 - 1) [1 + n_1(\lambda_0 - 1)] (4\lambda_0 + 1) f_0 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2g_1\{\lambda_0(\lambda_0-1)(4\lambda_0+1)f_0+(2\lambda_0-1)[1+n_1(\lambda_0-1)]y_0\}/g_0- \\
 & -n_2\{x_0g_0(f_0^{IV}x_0/2+w_0)+2h_0[g_0x_0'-h_0x_0+3\lambda_0^2g_0f_0']\}/g_0^2- \\
 & -n_1[x_0g_0(f_1^{IV}x_0/2+w_1)+x_0g_1(f_0^{IV}x_0/2+w_0)+g_0x_1(f_0^{IV}x_0+w_0)+]/g_0^2+ \\
 & +n_1\{2h_0[g_0x_1'-h_0x_1+3\lambda_0^2g_0f_1']\}+2h_0[g_1x_0'-h_1x_0+3\lambda_0^2g_1f_0']\}/g_0^2- \\
 & -n_1\frac{1}{g_0^2}\{6\lambda_0[2+n_1(\lambda_0-1)]g_0h_0f_0'-2h_0^2(1-2\lambda_0)f_0+n_1h_0^2x_0+ \\
 & +2g_0(1-2\lambda_0)h_0f_0'\}-n_1(1-2\lambda_0)f_0(f_0^{IV}x_0+w_0)/g_0-n_12h_1\times \\
 & \times[g_0x_0'-h_0x_0+3\lambda_0^2g_0f_0']\}/g_0^2, f_2(\theta=0)=0, f_2'(\theta=0)=1/\operatorname{tg}(M^p\pi/2), \\
 & f_2(\theta=\pi)=0, f_2'(\theta=\pi)=0, f_2(\theta=-\pi)=0, f_2'(\theta=-\pi)=0, f_2(\theta=0)=0, \\
 & f_2'(\theta=0)=1/\operatorname{tg}(M^p\pi/2),
 \end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 x_k & =(\lambda_0+1)(2-\lambda_0)f_k+2f_k'', \quad y_k=(\lambda_0+1)(2\lambda_0-1)f_k-f_k'', \\
 u_k & =(\lambda_0+1)f_k+f_k'',
 \end{aligned}$$

$$v_k=(\lambda_0+1)\lambda_0f_k, \quad g_0=u_0'^2+v_0'^2-u_0v_0+3\lambda_0^2f_0'^2,$$

$$h_0=u_0u_0'+v_0v_0'-\frac{1}{2}u_0'v_0-\frac{1}{2}u_0v_0'+3\lambda_0^2f_0'f_0'',$$

$$\begin{aligned}
 w_0 & =u_0'^2+u_0(\lambda_0+1)f_0''+v_0'^2+v_0v_0''-\frac{1}{2}(\lambda_0+1)v_0f_0''- \\
 & -u_0'v_0'-\frac{1}{2}u_0v_0''+3\lambda_0^2(f_0''^2+f_0'f_0'''),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_1 & =2u_0(u_1+f_0)+2v_0[v_1+(2\lambda_0+1)f_0]-u_0[v_1+(2\lambda_0+1)f_0]- \\
 & -v_0(u_1+f_0)+6\lambda_0f_0'(\lambda_0f_1'+f_0'),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1 = & u_0(u_1' + f_0') + u_0'(u_1 + f_0) + v_0[v_1' + (2\lambda_0 + 1)f_0'] + \\
& + v_0'[v_1 + (2\lambda_0 + 1)f_0] + 3\lambda_0 f_0'(\lambda_0 f_1'' + f_0'') - \frac{1}{2}u_0'[v_1 + (2\lambda_0 + 1)f_0] - \\
& - \frac{1}{2}u_0[v_1' + (2\lambda_0 + 1)f_0'] - \frac{1}{2}v_0(u_1' + f_0') - \frac{1}{2}v_0'(u_1 + f_0) + \\
& + 3\lambda_0 f_0''(\lambda_0 f_1' + f_0'), \\
w_1 = & 2u_0'(u_1' + f_0') + u_0[(\lambda_0 + 1)f_1'' + f_0''] + (\lambda_0 + 1)f_0''(u_1 + f_0) + \\
& + 2v_0'[v_1' + (2\lambda_0 + 1)f_0'] + v_0'[v_1'' + (2\lambda_0 + 1)f_0''] + \\
& + v_0''[v_1 + (2\lambda_0 + 1)f_0] - \frac{1}{2}(\lambda_0 + 1)f_0''[v_1 + (2\lambda_0 + 1)f_0] - \\
& - v_0[(\lambda_0 + 1)f_1'' + f_0'']/2 - v_0'(u_1' + f_0') - \\
& - u_0'[v_1' + (2\lambda_0 + 1)f_0'] - \frac{1}{2}v_0''(u_1 + f_0) - \\
& - u_0[v_1'' + (2\lambda_0 + 1)f_0'']/2 + 6\lambda_0 f_0''(\lambda_0 f_1'' + f_0'') + \\
& + 3\lambda_0 f_0'''(\lambda_0 f_1' + f_0') + 3\lambda_0 f_0'(\lambda_0 f_1''' + f_0''').
\end{aligned}$$

Решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции  $f_0(\theta)$  (12), удовлетворяющее краевым условиям отсутствия поверхностных усилий, имеет следующий вид: для нормального нагружения пластины (для трещины отрыва)  $f_0' = \beta \cos \alpha \theta - \alpha \cos \beta \theta$ ,  $\alpha = \lambda_0 - 1$ ,  $\beta = \lambda_0 + 1$ , для чистого сдвига (трещины поперечного сдвига)  $f_0'' = \sin \alpha \theta - \sin \beta \theta$ , где спектр собственных значений определяется из решения характеристического уравнения  $\sin 2\pi \lambda_0 = 0$ , откуда  $\lambda_0 = m/2$ , где  $m$  – целое число. При смешанном нагружении образца с трещиной в силу линейности «невозмущенной» задачи решение представляет собой суперпозицию симметричной и антисимметричной относительно линии продолжения дефекта частей решения:

$$f_0 = C_1(\beta \cos \alpha \theta - \alpha \cos \beta \theta) + C_2(\sin \alpha \theta - \sin \beta \theta), \quad (15)$$

где постоянные  $C_1$  и  $C_2$  связаны соотношением  $M^p = 2 \operatorname{arctg}[(\lambda_0 + 1)C_1 / C_2] / \pi$ . Задача нулевого порядка имеет нетривиальное решение (15), поэтому неоднородные задачи для функций  $f_1(\theta)$  и  $f_2(\theta)$  (13), (14) не будут иметь решения, если только не окажутся удовлетворенными условия разрешимости [22, 23]. Таким образом, если значение параметра  $\lambda_0$  не совпадает ни с одним из собственных чисел однородной задачи (т.е. однородная задача имеет только тривиальное решение), то неоднородная задача имеет единственное решение при любой непрерывной правой части  $G_k(\theta)$  дифференциального уравнения относительно функции  $f_k(\theta)$ ,  $k > 0$ . С другой стороны, если параметр  $\lambda_0$  равен какому-нибудь собственному числу однородной задачи (т.е. однородная задача имеет нетривиальное решение), неоднородная задача разрешима лишь при условии [22, 23]

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_k(\theta) u(\theta) d\theta = 0, \quad (16)$$

т.е. при условии ортогональности функции  $G_k(\theta)$  собственной функции  $u(\theta)$ , отвечающей собственному значению  $\lambda_0$ . Этот результат составляет содержание теоремы, обычно называемой альтернативной Фредгольма [22, 23]. Для нахождения условия разрешимости для краевой задачи для уравнения четвертого порядка (13) можно воспользоваться подходом, реализованным в [24–27], и показать, что краевая задача (13) является самосопряженной, поскольку дифференциальное уравнение и краевые условия сопряженной задачи совпадают с дифференциальным уравнением и краевыми условиями однородной задачи (12). Следовательно,  $u(\theta) = f_0(\theta)$ , где функция  $f_0(\theta)$  определяется выражением (15). Условие разрешимости краевой задачи (13) имеет вид

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_1(\theta) f_0(\theta) d\theta = 0$$

или в развернутой форме

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ -n_1 \left[ x_0 (f_0^{IV} x_0 / 2 + w_0) / (2g_0) + h_0 (x_0' g_0 - x_0 h_0 + 3\lambda_0^2 g_0 f_0') / g_0^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} f_0'' [(\lambda_0 - 1)(4\lambda_0 - 1)n_1 + 8\lambda_0] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} f_0 (\lambda_0^2 - 1) [(\lambda_0 - 1)(4\lambda_0 + 1)n_1 + 8\lambda_0] \right\} f_0(\theta) d\theta = 0. \quad (17)$$

Условие разрешимости краевой задачи для функции  $f_1(\theta)$  (17) позволяет найти коэффициент  $n_1$ . Полученные значения коэффициента  $n_1$  для различных значений параметра смешанности нагружения сведены в табл. 1. После решения краевой задачи относительно функции  $f_1(\theta)$  можно обратиться к интегрированию уравнения для функции  $f_2(\theta)$ . Проводя аналогичные рассуждения, можно сформулировать условие разрешимости краевой задачи для функции  $f_2(\theta)$  и получить числовые значения для следующего коэффициента асимптотического разложения показателя нелинейности материала. Вычисленные значения коэффициента  $n_2$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты асимптотического разложения показателя нелинейности материала

$M^p$	$n_1$	$n_2$
$M^p = 0$	4,000000	8,000000
$M^p = 0,05$	4,001766	7,999995
$M^p = 0,1$	4,007088	7,999954
$M^p = 0,2$	4,028722	7,978646
$M^p = 0,3$	4,065772	7,941876
$M^p = 0,4$	4,118594	7,804045
$M^p = 0,5$	4,184135	7,749316
$M^p = 0,6$	4,249098	7,600224
$M^p = 0,7$	4,279336	7,577773
$M^p = 0,8$	4,224060	7,926086
$M^p = 0,9$	4,084774	7,958755
$M^p = 0,95$	4,023759	7,999543
$M^p = 1$	4,000000	8,000000

Из приведенных результатов вычислений видно, что смешанное нагружение приводит к изменению особенности поля напряжений у вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния. Ранее было установлено [24–26], что для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига  $n_k = (-1)^{k+1} / (\lambda_0 - 1)^{k+1}$  и асимптотический ряд для  $n$  в выражениях (11) может быть просуммирован, поскольку данное выражение представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Легко найти, что  $n = -\lambda / (\lambda + 1)$  или  $\lambda = n / (n + 1)$ , что соответствует классическому решению ХРР. Приведенные в таблице результаты расчетов для различных значений параметра смешанности нагружения ясно показывают, что смешанное нагружение приводит к изменению особенности поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного деформирования в рамках предположения о реализации плоского напряженного состояния. В противном случае значения для коэффициентов  $n_1$  и  $n_2$  были бы равны  $n_1 = 4$  и  $n_2 = 8$  соответственно для всех значений параметра смешанности нагружения, как это оказывается в случае плоского деформированного состояния. При построении численного решения задачи определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях плоского деформированного состояния принимают, что характер особенности поля напряжений совпадает с сингулярностью поля напряжений решения ХРР (т.е. предполагается известным собственное значение задачи и априори предполагается, что  $\lambda = n / (n + 1)$  и принятое предположение, приводящее к непрерывному распределению радиального напряжения, подтверждается полученным решением [6]). В случае плоского напряженного состояния такое предположение, как показывает проведенный асимптотический анализ, принято быть не может, и следует разыскивать спектр собственных значений как часть решения. В следующем параграфе будет представлено численное решение рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения.

#### **4. Численное решение нелинейной задачи на собственные значения. Собственные значения и собственные функции**

Обычно при исследовании смешанного нагружения предполагается известным собственное значение рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения  $\lambda = n / (n + 1)$ . Однако данное предпо-

ложение приводит к разрывному полю радиального напряжения и, как показывает приближенный анализ на собственные значения рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения, не может быть использовано в случае плоского напряженного состояния. В силу указанных причин определим собственное значение задачи, ведущее к непрерывному полю радиального напряжения. Аналогичный подход был применялся для нахождения всего спектра собственных значений в [15]. Как оказалось, такой метод нахождения собственных значений приводит к контурам области полностью поврежденного материала, сходящимся к некоторому предельному контуру. Процедура численного определения собственных значений основывается на следующих представлениях. В случае смешанного деформирования соображения симметрии и антисимметрии использованы быть не могут, и необходимо искать решение уравнения (7) на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . В условиях смешанного нагружения при численном решении уравнения (7) отрезок интегрирования  $[-\pi, \pi]$  можно разбить на два отрезка:  $[0, \pi]$  и  $[-\pi, 0]$ . Сначала уравнение (7) интегрируется на отрезке  $[0, \pi]$ , и двухточечная краевая задача для уравнения (7) с краевыми условиями (9) сводится к задаче Коши с начальными условиями:

$$\begin{aligned} f(\theta=0) &= 1, \quad f'(\theta=0) = (\lambda + 1) / \operatorname{tg}(M^p \pi / 2), \\ f''(\theta=0) &= A_2, \quad f'''(\theta=0) = A_3. \end{aligned}$$

Неизвестные постоянные  $A_2$  и  $A_3$  определяются таким образом, чтобы выполнялись краевые условия на верхнем берегу трещины:

$$f(\theta = \pi) = 0, \quad f'(\theta = \pi) = 0. \quad (18)$$

После того как подобраны постоянные  $A_2$  и  $A_3$  из требования выполнения условий отсутствия поверхностных усилий, уравнение (7) интегрируется на отрезке  $[-\pi, 0]$ , для чего двухточечная краевая задача для уравнения (7) с граничными условиями (10) заменяется задачей Коши с начальными условиями:

$$f(\theta = -\pi) = 0, \quad f'(\theta = -\pi) = 0, \quad f''(\theta = -\pi) = B_2, \quad f'''(\theta = -\pi) = B_3.$$



Неизвестные постоянные  $B_2$  и  $B_3$  подбираются таким образом, чтобы выполнялись условия равновесия элемента, расположенного на луче  $\theta=0$ . Уравнения равновесия данного элемента требуют непрерывности компонент тензора напряжений  $\sigma_{r\theta}(r, \theta)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta)$  на луче  $\theta=0$ , что влечет за собой непрерывность функций  $f(\theta)$  и  $f'(\theta)$  при  $\theta=0$  (и, следовательно, краевые условия (10)). Поэтому две неизвестные постоянные  $B_2$  и  $B_3$  определяются таким образом, чтобы решение, разыскиваемое на отрезке  $[-\pi, 0]$ , удовлетворяло краевым условиям при  $\theta=0$ . При проведении описанной численной процедуры обычно предполагается, что собственное значение известно и равно собственному значению решения ХРР. Если необходимо найти другие собственные значения задачи, отличные от  $\lambda = n/(n+1)$ , и в целом весь спектр собственных значений, то возникает вопрос: какие дополнительные физические или математические соображения должны быть привлечены для отыскания всего спектра собственных значений. Если считать, что  $\lambda$  – искомая величина, то при интегрировании уравнения (7) на отрезке  $[0, \pi]$  имеется три неизвестных параметра  $\lambda$ ,  $A_2$  и  $A_3$  и только два условия (18), из которых они могут быть определены. Очевидно, что для отыскания собственного значения  $\lambda$  необходимо дополнительное условие. С целью определения всего спектра собственных значений  $\lambda$  можно проанализировать поведение радиальной компоненты тензора напряжений в случае плоского деформированного состояния [6, 15] и увидеть, что радиальная компонента тензора напряжений является непрерывной функцией полярного угла для всех значений параметра смешанности нагружения и показателя упрочнения материала, тогда как при построении решения непрерывность этой компоненты не требовалась (т.е. до реализации процедуры построения численного решения было выбрано  $\lambda = n/(n+1)$ , и компонента  $\sigma_{rr}(r, \theta)$  оказалась непрерывной для всех значений параметра смешанности нагружения и показателя нелинейности материала). В связи с этим при отыскании собственных значений следует потребовать непрерывности радиальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}(r, \theta)$  при  $\theta=0$ . Поэтому далее при построении новых собственных значений накладывалось дополнительное условие – требование непрерывности компонен-

ты тензора напряжений  $\sigma_{rr}(r, \theta)$  при  $\theta=0$ . Результаты вычислений приведены в табл. 2–7, где собраны новые значения  $\lambda$  и пристрелочные значения  $f''(\theta=0)$ ,  $f'''(\theta=0)$ ,  $f''(\theta=-\pi)$  и  $f'''(\theta=-\pi)$  для всех значений параметра смешанности нагружения и практически важных значений показателя нелинейности материала  $n$ .

Таблица 2

Собственные значения  $\lambda$  для  $n=3$  для различных значений параметра смешанности нагружения

$M^p$	$\lambda$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0,1	0,749848	-1,013963	-17,857405	-11,119908	0,112696
0,2	0,749363	-1,009899	-8,639267	-5,450935	0,210905
0,3	0,748445	-1,002588	-5,438885	-3,518917	0,244099
0,4	0,746893	-0,991172	-3,732943	-2,521575	0,262339
0,5	0,744332	-0,974435	-2,613062	-1,898950	0,276300
0,6	0,740101	-0,951096	-1,774144	-1,465507	0,290927
0,7	0,733089	-0,921053	-1,087827	-1,143866	0,311439
0,8	0,721666	-0,889149	-0,501650	-0,898579	0,348145
0,9	0,710960	-0,878015	-0,059127	-0,724120	0,428064

Таблица 3

Собственные значения  $\lambda$  для  $n=5$  для различных значений параметра смешанности нагружения

$M^p$	$\lambda$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0,1	0,833249	-1,059014	-17,175345	-12,817403	0,217377
0,2	0,832975	-1,054353	-8,270256	-6,295063	0,214040
0,3	0,832434	-1,045751	-5,310084	-4,075287	0,211815
0,4	0,831456	-1,031834	-3,692485	-2,9311404	0,210848
0,5	0,829711	-1,010626	-2,474608	-2,217574	0,211543
0,6	0,826595	-0,980308	-1,877300	-1,720923	0,214889
0,7	0,821183	-0,942182	-0,945119	-1,353750	0,223389
0,8	0,813522	-0,910480	-0,379570	-1,085758	0,244019
0,9	0,813057	-0,918935	-0,078809	-0,934756	0,294866

Таблица 4

Собственные значения  $\lambda$  для  $n=7$  для различных значений параметра смешанности нагружения

$M^p$	$\lambda$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0,1	0,874951	-1,068014	-16,399514	-14,051259	0,275592
0,2	0,874787	-1,063523	-8,019713	-6,907737	0,218081
0,3	0,874448	-1,054980	-5,004927	-4,477821	0,197231
0,4	0,873794	-1,040530	-3,427356	-3,225923	0,186395
0,5	0,872529	-1,017364	-2,369760	-2,444916	0,180489
0,6	0,870107	-0,983152	-1,789715	-1,900363	0,178418
0,7	0,865837	-0,941813	-0,850487	-1,498387	0,181311
0,8	0,863118	-0,931654	-0,409135	-1,230020	0,194901
0,9	0,863005	-0,939455	-0,117494	-1,070440	0,230710

Таблица 5

Собственные значения  $\lambda$  для  $n=9$  для различных значений параметра смешанности нагружения

$M^p$	$\lambda$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0,1	0,899969	-1,067810	-15,870539	-14,973046	0,300772
0,2	0,899986	-1,063699	-7,757085	-7,364961	0,214921
0,3	0,899637	-1,055617	-4,929978	-4,777032	0,184458
0,4	0,899167	-1,041283	-3,428549	-3,445052	0,168585
0,5	0,898187	-1,017020	-2,446724	-2,613278	0,159358
0,6	0,896185	-0,979984	-1,473179	-2,032212	0,154562
0,7	0,892756	-0,938703	-0,786691	-1,605170	0,154589
0,8	0,892187	-0,945074	-0,441700	-1,335332	0,164138
0,9	0,892132	-0,951743	-0,148784	-1,166821	0,191437

Таблица 6

Собственные значения  $\lambda$  для  $n=11$  для различных значений параметра смешанности нагружения

$M^p$	$\lambda$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0,1	0,916646	-1,064886	-15,509504	-15,687120	0,308561
0,2	0,916575	-1,061186	-7,505140	-7,718823	0,207926
0,3	0,916414	-1,053681	-4,740118	-5,009507	0,172524
0,4	0,916060	-1,039712	-3,250966	-3,614202	0,154108
0,5	0,915260	-1,014674	-2,235656	-2,742892	0,143208
0,6	0,913531	-0,975351	-1,415360	-2,133091	0,137003
0,7	0,911361	-0,945900	-0,796175	-1,696655	0,135580
0,8	0,911145	-0,954022	-0,468121	-1,415250	0,142450
0,9	0,911123	-0,959920	-0,172574	-1,239380	0,164364

Таблица 7

Собственные значения  $\lambda$  для  $n=13$  для различных значений параметра смешанности нагружения

$M^p$	$\lambda$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f''(-\pi)$	$f'''(-\pi)$
0,1	0,928557	-1,061240	-15,147594	-16,257399	0,307317
0,2	0,928507	-1,057923	-7,398140	-8,001191	0,199333
0,3	0,928389	-1,051006	-4,705468	-5,194292	0,161542
0,4	0,928110	-1,037485	-3,273920	-3,748906	0,141919
0,5	0,927433	-1,011819	-2,331595	-2,845877	0,130222
0,6	0,925895	-0,970589	-1,366626	-2,212890	0,123306
0,7	0,924700	-0,958252	-0,828902	-1,777736	0,121104
0,75	0,924300	-0,965607	-0,634815	-1,606930	0,122390
0,8	0,924467	-0,960475	-0,489375	-1,478170	0,126133
0,9	0,924460	-0,965742	-0,190855	-1,295977	0,144355
0,95	0,924459	-0,967010	-0,044076	-1,245296	0,162210

Угловые распределения компонент тензоров напряжений и деформаций, полученные в результате численного анализа для новых собственных значений, показаны на рис. 1–8. Линии равных значений интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины изображены на рис. 9–13.

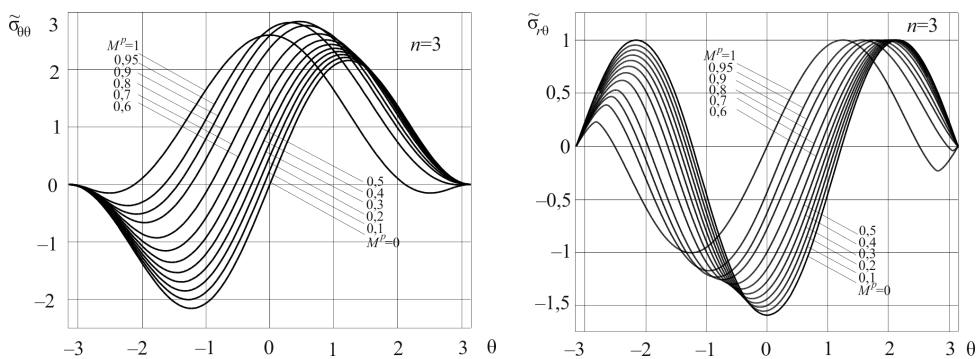


Рис. 1. Угловые распределения компонент тензора напряжений  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$  и  $\tilde{\sigma}_{r\theta}$  для различных значений параметра смешанности нагружения для  $n=3$

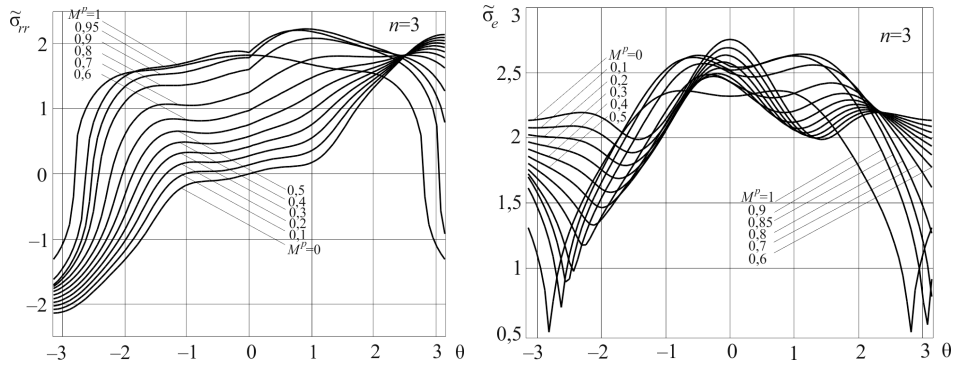


Рис. 2. Угловые распределения компоненты тензора напряжений  $\tilde{\sigma}_{rr}$  и интенсивности напряжений  $\tilde{\sigma}_e$  для различных значений параметра смешанности нагружения для  $n=3$

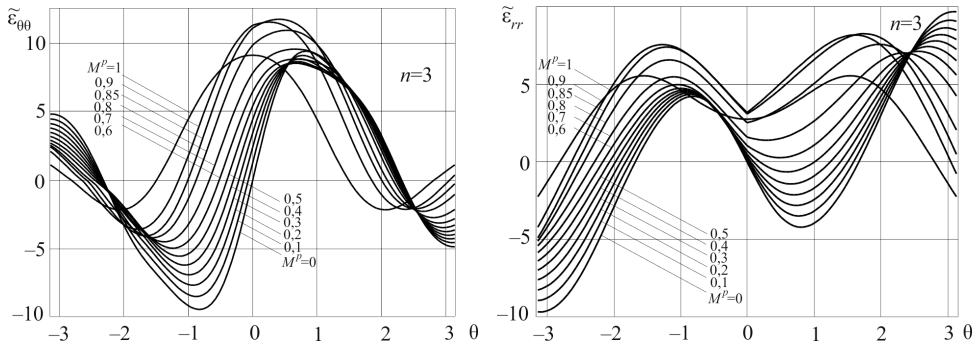


Рис. 3. Угловые распределения компонент тензора деформаций  $\tilde{\epsilon}_{\theta\theta}$  и  $\tilde{\epsilon}_{rr}$  для различных значений параметра смешанности нагружения для  $n=3$

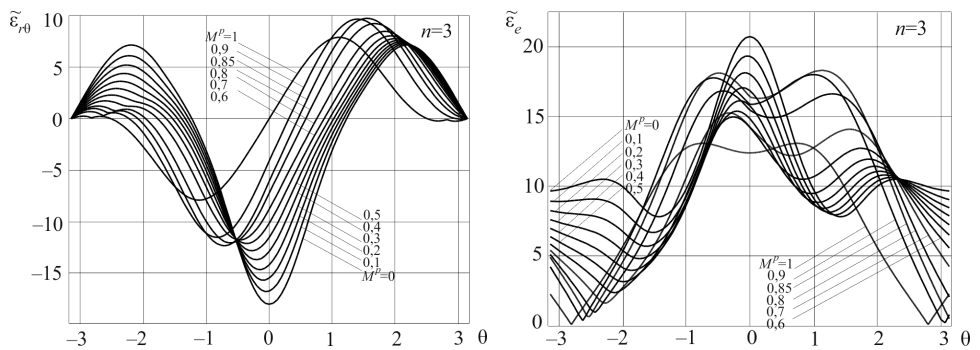


Рис. 4. Угловые распределения компоненты тензора деформаций  $\tilde{\epsilon}_{r\theta}$  и интенсивности деформации  $\tilde{\epsilon}_e$  для различных значений параметра смешанности нагружения для  $n=3$

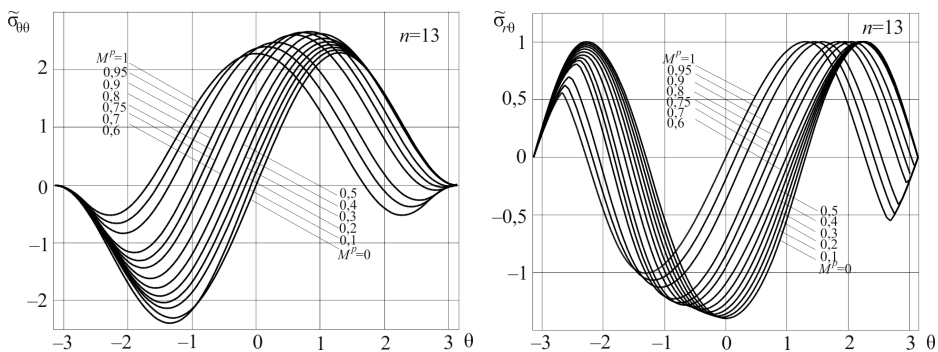


Рис. 5. Угловые распределения компонент тензора напряжений  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$  и  $\tilde{\sigma}_{r\theta}$  для различных значений параметра смешанности нагружения для  $n=13$

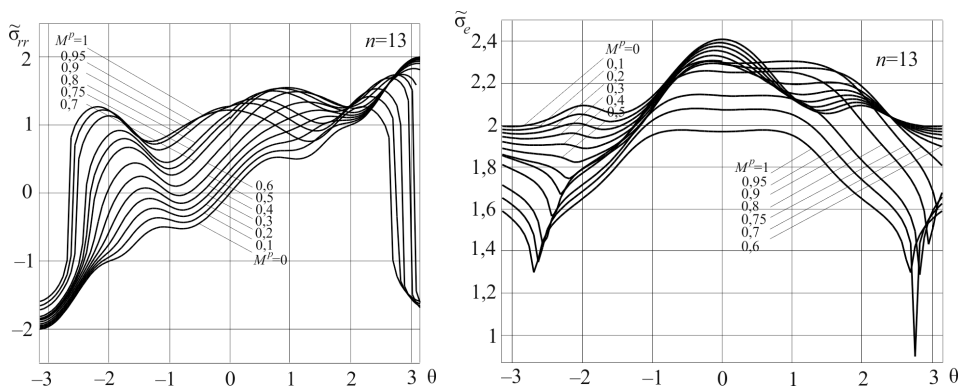


Рис. 6. Угловые распределения компоненты тензора напряжений  $\tilde{\sigma}_{rr}$  и интенсивности напряжений  $\tilde{\sigma}_e$  для различных значений параметра смешанности нагружения для  $n=13$

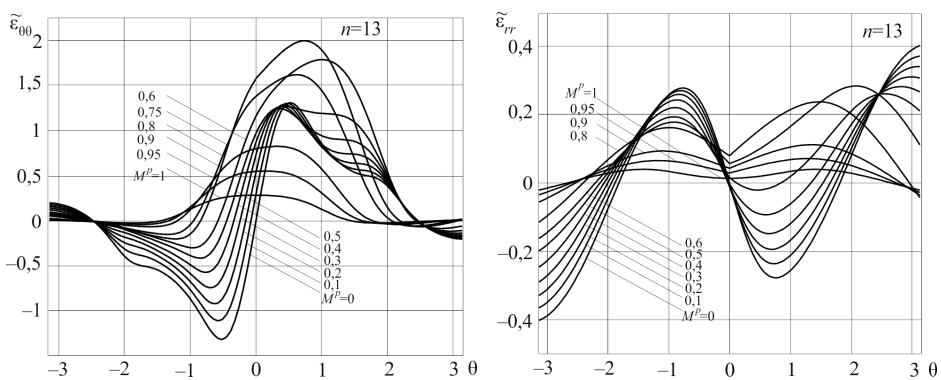


Рис. 7. Угловые распределения компонент тензора деформаций  $\tilde{\epsilon}_{\theta\theta}$  и  $\tilde{\epsilon}_{rr}$  для различных значений параметра смешанности нагружения для  $n=13$

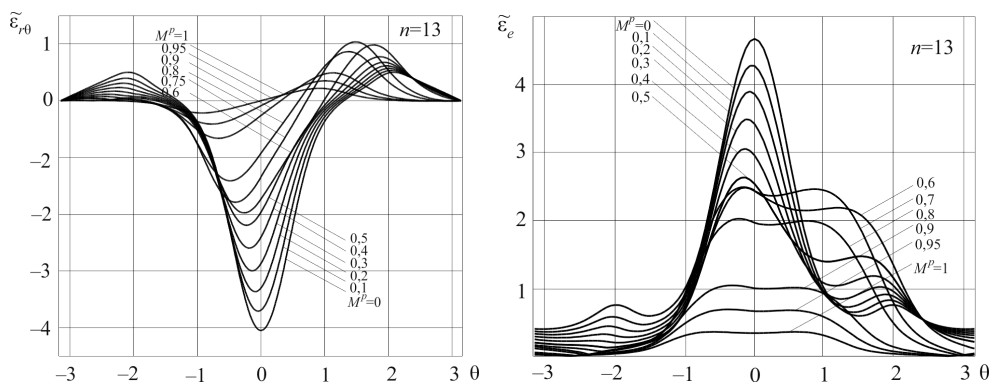


Рис. 8. Угловые распределения компоненты тензора деформаций  $\tilde{\epsilon}_{r,\theta}$  и интенсивности деформации  $\tilde{\epsilon}_e$  для различных значений параметра смешанности нагружения ( $n = 13$ )

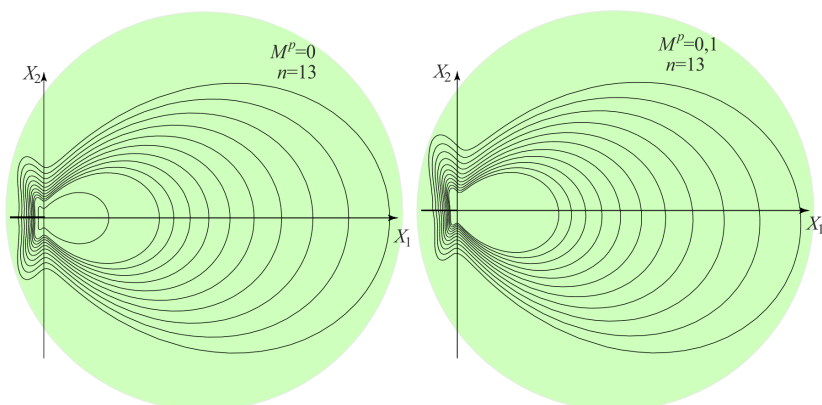


Рис. 9. Линии равных значений интенсивности напряжений  $\sigma_e(r, \theta)$

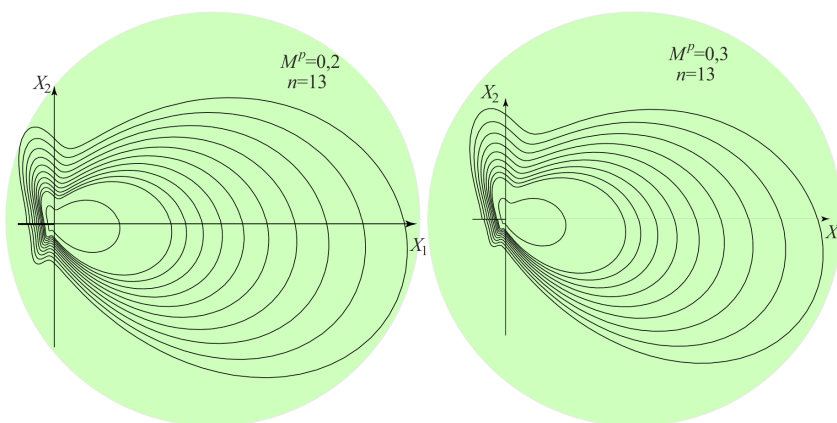


Рис. 10. Линии равных значений интенсивности напряжений  $\sigma_e(r, \theta)$

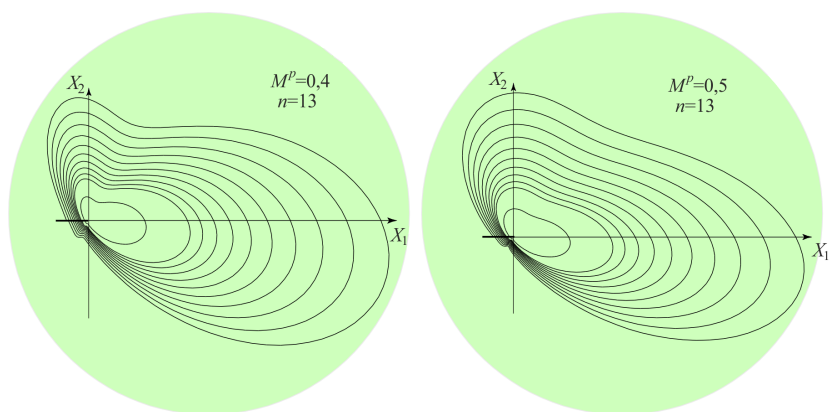


Рис. 11. Линии равных значений интенсивности напряжений  $\sigma_e(r, \theta)$

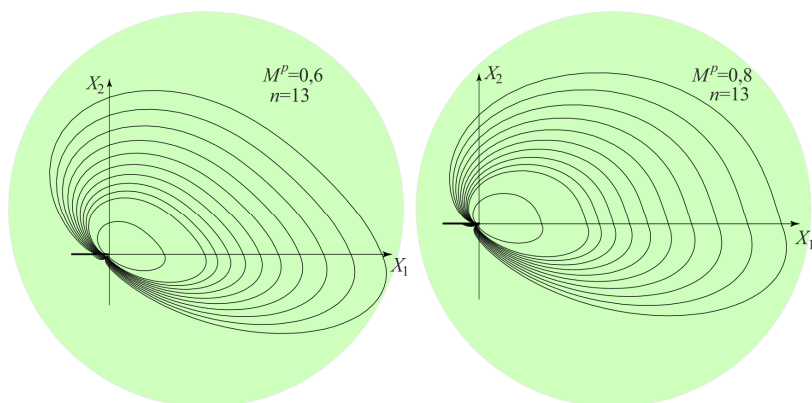


Рис. 12. Линии равных значений интенсивности напряжений  $\sigma_e(r, \theta)$

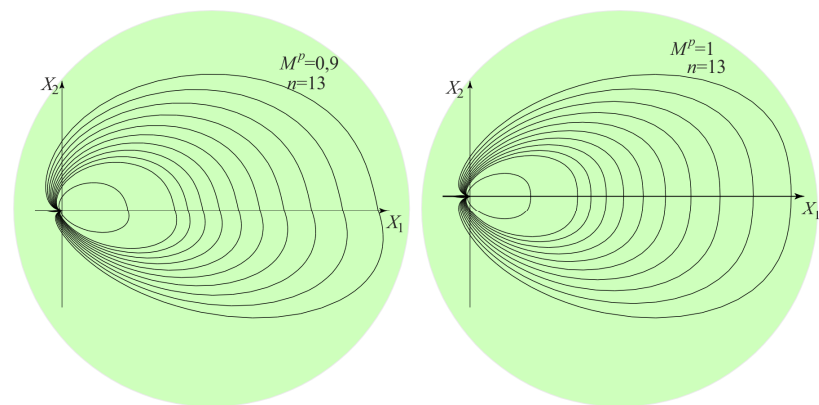


Рис. 13. Линии равных значений интенсивности напряжений  $\sigma_e(r, \theta)$



## 5. Выводы и обсуждение результатов

В работе приводится асимптотическое и численное решения нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния в непосредственной окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого сдвига до нормального отрыва в рамках предположения о реализации плоского напряженного состояния. Решение основано на разложении механических величин в ряд по малым степеням расстояния от кончика трещины в непосредственной окрестности вершины трещины. Разложение функции напряжений Эри в ряд по собственным функциям сводит анализ напряженно-деформированного состояния у вершины трещины к нелинейной задаче на собственные значения, одно из собственных значений которой хорошо известно и соответствует классической задаче нелинейной механики разрушения – задаче ХРР:  $\lambda = n / (n + 1)$ . При исследовании смешанных форм деформирования, по сложившейся традиции [6, 7, 8], предполагается, что и при смешанном нагружении данное собственное значение является собственным значением задачи. Для случая плоского деформированного состояния данное предположение оказывается справедливым и подтверждается полученными решениями [6, 7, 8]. Однако для плоского напряженного состояния гипотеза приводит к разрывному полю радиального напряжения на линии продолжения трещины, что не подтверждается известными конечно-элементными решениями, асимптотическими исследованиями и экспериментами в механике разрушения. На основании подходов асимптотической теории и численного анализа задачи показано, что в условиях плоского напряженного состояния гипотеза о том, что при смешанном нагружении собственное значение задачи совпадает с собственным значением задачи ХРР, нарушается, и необходимо найти новые собственные значения, приводящие к непрерывным распределениям напряжений. Проведенный асимптотический анализ собственных значений, основанный на методах асимптотического анализа (метода малого параметра), позволил установить, что смешанное нагружение пластины с трещиной приводит к новому распределению напряжений, отличному от решения ХРР. В работе предложена процедура численного определения спектра собственных значений нелинейной

задачи на собственные значения. С помощью численного решения нелинейной задачи на собственные значения найдены новые собственные значения, отвечающие непрерывным (на линии продолжения трещины) угловым распределениям радиального напряжения. Показано, что для частных случаев нормального отрыва и поперечного сдвига предложенная процедура приводит к хорошо известному решению Хатчинсона–Райса–Розенгрена. Необходимо отметить важность и актуальность развития методов асимптотического анализа и их приложений к решению нелинейных задач на собственные значения в механике деформируемого твердого тела [20] и, в частности, в нелинейной механике разрушения и континуальной механике поврежденности [28, 32, 33]. В нелинейной механике разрушения одним из наиболее часто применяемых методов является метод разложения по собственным функциям [25–32], который приводит к нелинейным задачам на собственные значения, решение которых, в свою очередь, требует привлечения развитых асимптотических методов и численных подходов и их сочетания. Например, в [26–32] показано, что накопление повреждений вблизи кончика трещины приводит к изменению напряженно-деформированного состояния вблизи дефекта и к более слабой особенности поля напряжений или к ее полному устранению. Определение новой радиальной асимптотики полей напряжений и деформаций (или скоростей деформаций) сводится к нелинейным задачам на собственные значения, тщательное качественное исследование которых и составляет суть проблемы и обеспечивает решение задачи в целом. Полученное решение также представляется полезным при построении автомодельных решений второго рода [33, 34] и связанных с ними нелинейных задач на собственные значения [15, 27, 29, 33]. Предлагаемый метод может быть использован для нахождения промежуточно-асимптотического автомодельного представления поля напряжений в связанной (ползучесть–поврежденность) задаче о трещине в условиях смешанного нагружения в материале со степенными определяющими уравнениями теории установившейся ползучести. Следует дополнительно отметить, что класс нелинейных задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения, представляется важным в связи с необходимостью построения многомасштабных, многоуровневых моделей [31, 33, 34], в соответствии с которыми в окрестности вершины трещины необходимо вводить в рассмотрение совокупность облас-

тей с доминирующим действием различных асимптотик поля напряжений и проводить процедуру асимптотического сращивания получаемых решений. Аккуратное построение всех промежуточных зон с той или иной асимптотикой и проведение процедуры сращивания требуют знания всего спектра собственных значений и, по всей видимости, эти задачи до сих пор не решены.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №13-01-97009-а \_ Поволжье).

### **Библиографический список**

1. Wei R.P. Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry. – Cambridge: Cambridge University Press, 2014. – 232 p.

2. Duality. Symmetry and symmetry lost in solid mechanics. Selected works of H.D. Bui / Eds. A. Ehrlacher, H. Markenscoff. – Paris: Presses des Ponts, 2011. – 396 p.

3. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения: курс лекций. – СПб.: Профессия, 2012. – 552 с.

4. Kuna M. Finite Element in Fracture Mechanics. Theory-Numerics-Applications. – Dordrecht: Springer, 2013. – 336 p.

5. Экспериментальные исследования свойств материалов при сложных термомеханических воздействиях / под ред В.Э. Вильдемана. – М.: Физматлит, 2012. – 204 с.

6. Шлянников В.Н., Кислова С.Ю. Параметры смешанных форм деформирования для трещины в виде математического разреза // Известия Саратовского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 77–84.

7. Шлянников В.Н., Кислова С.Ю., Туманов А.В. Поля напряжений в вершине наклонных трещин образцов различных геометрий // Труды Академэнерго. – 2013. – № 2. – С. 79–90.

8. Шлянников В.Н. Решение задач нелинейного деформирования и разрушения материалов при сложном напряженном состоянии // Физическая мезомеханика. – 2012. – № 1. – С. 57–67.

9. Развитие пластических зон и поврежденности при различных видах нагружения / Л.Р. Ботвина, Н.А. Жаркова, М.Р. Тютин, А.П. Солдатенков, Ю.А. Демина, В.П. Левин // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2013. – Т. 79, № 5. – С. 46–55.

10. Berto F., Lazzarin P. Multiparametric full-field representations of the in-plane stress fields ahead of cracked components under mixed mode loading // *International Journal of Fatigue*. – 2013. – Vol. 46. – P. 16–26.

11. Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. – 2012. – Vol. 49. – P. 556–566.

12. Вансович К.А., Ядров В.И. Усталостные испытания стальных крестообразных образцов с поверхностной трещиной при двухосном нагружении // *Омский научный вестник*. – 2012. – № 3(113). – С. 117–121.

13. Вансович К.А., Ядров В.И. Экспериментальное изучение скорости роста поверхностных трещин в алюминиевом сплаве АК6 и в стали 20 при двухосном нагружении // *Известия Самарского научного центра РАН*. – 2012. – Т. 15, № 4–2. – С. 436–438.

14. Шлянников В.Н., Захаров А.П., Герасименко А.А. Характеристики циклической трещиностойкости стали СТ-3 при двухосном нагружении // *Труды Академэнерго*. – 2013. – № 4. – С. 91–101.

15. Степанова Л.В., Адылина Е.М. Автомодельное решение задачи о смешанном деформировании пластины с трещиной в среде с поврежденностью // *Вестник Самарского государственного университета*. – 2013. – № 9.1 (110). – С. 76–93.

16. Ломакин Е.В., Мельников А.М. Пластическое плоское напряженное состояние тел, свойства которых зависят от вида напряженного состояния // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 48–64.

17. Ломакин Е.В., Мельников А.М. Задачи плоского напряженного состояния тел с вырезами, пластические свойства которых зависят от вида напряженного состояния // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2011. – № 1. – С. 77–94.

18. Мельников А. М. Плоское напряженное состояние полосы из материала, свойства которого зависят от вида напряженного состояния // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. – 2011. – № 4. – С. 2352–2353.

19. Вильдеман В.Э., Ломакин Е.В., Третьяков М.П. Закритическое деформирование сталей при плоском напряженном состоянии // *Изв. РАН. МТТ*. – 2014. – № 1. – С. 26–36.

20. Андрианов И., Аврейцевич Я. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого

твердого тела / Институт компьютерных исследований. – М.; Ижевск, 2013. – 276 с.

21. Asymptotic Methods in the Theory of Plates with Mixed Boundary Conditions / I. Andrianov, J. Awrejcewicz, V. Danishevs'kyu, A. Ivankov. – New York: Wiley, 2014. – 286 p.

22. Nayfeh A.H. Perturbation Methods. – New York: Wiley, 2000. – 437 с.

23. Nayfeh A.H. The Method of Normal Forms. – New York: Wiley – VCH, 2011. – 342 с.

24. Stepanova L.V. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power-law medium // Comptes Rendus – Mécanique. – 2008. – Vol. 336. – No. 1–2. – P. 232–237.

25. Степанова Л.В. Анализ собственных значений в задаче о трещине в материале со степенным определяющим законом // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49, № 8. – С. 1399–1415.

26. Stepanova L.V., Igonin S.A. Perturbation method for solving the nonlinear eigenvalue problem arising from fatigue crack growth problem in a damaged medium // Applied Mathematical Modelling. – 2014. – Vol. 38. – P. 3436–3455. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.057

27. Степанова Л.В. О собственных значениях в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 1(287). – С. 173–180.

28. Voyiadis G.Z. Handbook of Damage Mechanics. Nano to Macro scale for Materials and Structures. – Berlin: Springer, 2014. – 1000 p.

29. Степанова Л.В., Федина М.Е. Автомодельное решение задачи о трещине отрыва в связанной постановке // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 3. – P. 516–527.

30. Stepanova L.V., Igonin S.A. Higher-order asymptotic solution for the fatigue crack growth problem based on continuum damage mechanics// Procedia Materials Science. – 2014. – Vol. 3C. – P. 421–427. DOI 10.1016/j.mspro.2014.06.071

31. Stepanova L.V., Adulina E.M. Self-similar solutions to the creep crack problem in a damaged medium under mixed loading conditions // Procedia Materials Science. – 2014. – Vol. 3C. – P. 948–954. DOI 10.1016/j.mspro.2014.06.154

32. Murakami S. Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. – Dordrecht: Springer, 2012. – 423 p.

33. Barenblatt G.I. Flow, deformation and fracture lectures on fluid mechanics and mechanics of deformable solids for mathematicians and physicists. – Cambridge: Cambridge University Press, 2014. – 273 p.

34. Barenblatt G.I. Similarity, Self-similarity and Intermediate Asymptotics. – Berlin: Springer, 2013. – 240 p.

### References

1. Wei R.P. Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 232 p.

2. Duality, Symmetry and symmetry lost in solid mechanics. Selected works of H.D. Bui. Eds. A. Ehrlacher, H. Markenscoff. Paris: Presses des Ponts, 2011. 396 p.

3. Pestrikov V.M., Morozov E.M. Mekhanika razrusheniya [Fracture Mechanics]. St. Petersburg: Professia, 2012. 552 p.

4. Kuna M. Finite Element in Fracture Mechanics. Theory-Numerics-Applications. Dordrecht: Springer, 2013. 336 p.

5. Eksperimental'nye issledovaniia svoistv materialov pri slozhnykh termomekhanicheskikh vozdeistviakh [Experimental investigations of material properties under complex thermomechanical loads]. Ed. by V.E. Vildeman. Moscow: Fizmatlit, 2012. 204 p.

6. Shliannikov V.N., Kislova S.Y. Parametry smeshannykh form deformirovaniia dlia treshchiny v vide matematicheskogo razreza [Parameters of mixed mode of deformation for crack as mathematical cut]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 77-84.

7. Shliannikov V.N., Kislova S.Y., Tumanov A.V. Polia napriazhenii v vershine naklonnykh treshchin obraztsov razlichnykh geometrii [Stress fields in the vicinity of the crack tip for specimens of different geometries]. *Trudy Akademenergo*, 2013, no. 2, pp. 79–90.

8. Shliannikov V.N. Reshenie zadach nelineinogo deformirovaniia i razrusheniia materialov pri slozhnom napriazhennom sostoianii [Solutions of problems of nonlinear material deformation and fracture under complex stress state]. *Fizicheskaiia mezomekhanika*, 2012, no. 1, pp. 57-67.

9. Botvina L.R., Chzarkova N.A., Tutin M.R., Soldatenkov A.P., Demina Y.A., Levin V.P. Razvitie plasticheskikh zon i povrezhdennosti pri razlichnykh vidakh nagruzheniia [Development of plastic flow zones and damage under various types of loading]. *Zavodskaiia laboratoriiia. Diagnostika materialov*, 2013, vol. 79, no. 5, pp. 46-55.

10. Berto F., Lazzarin P. Multiparametric full-field representations of the in-plane stress fields ahead of cracked components under mixed mode loading. *International Journal of Fatigue*, 2013, vol. 46, pp. 16-26.

11. Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, pp. 556-566.

12. Vansovich K.A., Yadrov V.I. Ustalostnye ispytaniia stal'nykh krestoobraznykh obraztsov s poverkhnostnoi treshchinoi pri dvukhosnom nagruzhenii [Fatigue experiments of steel cruciform specimen with the surface crack under two mode loading]. *Omskii nauchnyi vestnik*, 2012, no. 3(113), pp. 117-121.

13. Vansovich K.A., Yadrov V.I. Eksperimental'noe izuchenie skorosti rosta poverkhnostnykh treshchin v aliuminievom splave AK6 i v stali 20 pri dvukhosnom nagruzhenii [Experimental study of rate of surface crack growth in AK6 alloy under biaxial loading]. *Izvestiia Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk*, 2012, vol. 15, no. 4-2, pp. 436-438.

14. Shliannikov V.N., Zacharov A.P., Gerasimenko A.A. Kharakteristiki tsiklicheskoii treshchinostoikosti stali ST-3 pri dvukhosnom nagruzhenii [Characteristics of cyclic crack resistance for steel CT-3 under biaxial loading]. *Trudy Akademenergo*, 2013, no. 4, pp. 91-101.

15. Stepanova L.V., Adulina E.M. Avtomodel'noe reshenie zadachi o smeshannom deformirovanii plastiny s treshchinoi v srede s povrezhdennost'iu [Self-similar solution of a crack problem for cracked plate in a damaged medium under mixed mode loading]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2013, no. 9.1 (110), pp. 76-93.

16. Lomakin E.V., Melnikov A.M. Plasticheskoe ploskoe napriazhennoe sostoianie tel, svoistva kotorykh zavisiat ot vida napriazhennogo sostoianiia [Plastic plane stress state of bodies whose properties depend on the form of the stress state]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred*, 2009, vol. 2, no. 2, pp. 48-64.

17. Lomakin E.V., Melnikov A.M. Zadachi ploskogo napriazhennogo sostoianiia tel s vrezami, plasticheskie svoistva kotorykh zavisiat ot vida napriazhennogo sostoianiia [Plane stress state problems for notched bodies whose plastic properties depend on the form of the stress state]. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2011, vol. 46, no. 1, pp. 62-69.

18. Melnikov A.M. Ploskoe napriazhennoe sostoianie polosy iz materiala, svoistva kotorogo zavisiat ot vida napriazhennogo sostoianiia [Plane stress state of the band from the material whose properties depend on the form of the stress state]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2011, no. 4, pp. 2352-2353.

19. Vildeman V.E., Lomakin E.V., Tretyakov M.P. Zakriticheskoe deformirovanie stali pri ploskom napriazhennom sostoianii [Postcritical deformation of steels in plane stress state]. *Izv. RAN. MTT*, 2014, vol. 49, no. 1, pp. 18-26.

20. Andrianov I., Awrejcewicz J. Metody asimptoticheskogo analiza i sinteza v nelineinoi dinamike i mekhanike deformiruемого tverdogo tela. [Methods of asymptotic analysis and synthesis in nonlinear dynamics and solid mechanics]. Moscow; Izhevsk: Institut komp'uternykh issledovaniy, 2013. 276 p.

21. Andrianov I., Awrejcewicz J., Danishevs'kyy V., Ivankov A. Asymptotic Methods in the Theory of Plates with Mixed Boundary Conditions. New York: Wiley, 2014. 286 p.

22. Nayfeh A.H. Perturbation Methods. New York: Wiley, 2000. 437 p.

23. Nayfeh A.H. The Method of Normal Forms. New York: Wiley – VCH, 2011. 342 c.

24. Stepanova L.V. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power-law medium. *Comptes Rendus – Mecanique*, 2008, vol. 336, no. 1–2, pp. 232-237.

25. Stepanova L.V. Analiz sobstvennykh znachenii v zadache o treshchine v materiale so stepennym opredel'aiushchim zakonom [Eigenvalue analysis for a crack in a power-law material]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2009, vol. 49, no. 8, pp. 1332-1347.

26. Stepanova L.V., Igonin S.A. Perturbation method for solving the nonlinear eigenvalue problem arising from fatigue crack growth problem in a damaged medium. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, vol. 38, pp. 3436-3455. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.057



27. Stepanova L.V. O sobstvennykh znacheniiakh v zadache o treshchine antiploskogo sdviga v materiale so stepennymi opredeliaiushchimi uravneniiami [Eigenvalues of the antiplane-shear crack tip problem for a power-law material]. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaiia fizika*, 2008, vol. 49, no. 1, pp. 142-147.

28. Voyiadis G.Z. Handbook of Damage Mechanics. Nano to Macro scale for Materials and Structures. Berlin: Springer, 2014. 1000 p.

29. Stepanova L.V., Fedina M.E. Avtomodel'noe reshenie zadachi o treshchine otryva v sviazannoi postanovke [Self-similar solution of a tensile crack problem in a coupled formulation]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 2008, vol. 72, pp. 360-368.

30. Stepanova L.V., Igonin S.A. Higher-order asymptotic solution for the fatigue crack growth problem based on continuum damage mechanics. *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 3, pp. 421-427. DOI 10.1016/j.mspro.2014.06.071

31. Stepanova L.V., Adulina E.M. Self-similar solutions to the creep crack problem in a damaged medium under mixed loading conditions. *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 3C, pp. 948-954. DOI 10.1016/j.mspro.2014.06.154

32. Murakami S. Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Dordrecht: Springer, 2012. 423 p.

33. Barenblatt G.I. Flow, deformation and fracture lectures on fluid mechanics and mechanics of deformable solids for mathematicians and physicists. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 273 p.

34. Barenblatt G.I. Similarity, Self-similarity and Intermediate Asymptotics. Berlin: Springer, 2013. 240 p.

### Об авторах

**Степанова Лариса Валентиновна** (Самара, Россия) – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования в механике Самарского государственного университета (443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1, e-mail: stepanovlv@samsu.ru).

**Яковлева Екатерина Михайловна** (Самара, Россия) – аспирантка кафедры математического моделирования в механике Самарского государственного университета (443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1, e-mail: adulinaem@samsu.ru).

#### **About the authors**

**Larisa V. Stepanova** (Samara, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University (1, Akad. Pavlov, 443011, Samara, Russian Federation, e-mail: stepanovaLv@samsu.ru).

**Ekaterina M. Yakovleva** (Samara, Russian Federation) – Doctoral student, Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University (1, Akad. Pavlov, 443011, Samara, Russian Federation, e-mail: adulinaem@samsu.ru).

Получено 20.06.2014

Просьба сослаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Степанова Л.В., Яковлева Е.М. Смешанное деформирование пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 3. – С. 129–162. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.08

Please cite this article in English as:

Stepanova L.V., Yakovleva E.M Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No. 3. Pp. 129-162. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.08