

УДК 532.6

**Е.В. Аитова, Д.А. Брацун**

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,  
Пермь, Россия

## **ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ХЕМОКОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ ЖИДКОСТЬ–ГАЗ В ПРИСУТСТВИИ АДСОРБИРУЕМОГО РЕАГЕНТА**

В работе исследуется влияние химической реакции первого порядка на конвективную устойчивость жидкости, занимающей полубесконечное пространство и имеющей поверхность раздела жидкость–газ. Рассматривается задача о проникновении реагента через поверхность раздела в жидкость, с которой он вступает в реакцию, в результате чего выделяется продукт. Предполагается, что продукт реакции является поверхностно-активным веществом и адсорбируется на поверхности раздела по закону Ленгмюра. Задача об устойчивости основного состояния, характеризующегося процессами реакции-диффузии на монотонные возмущения концентрационно-капиллярной природы, решена аналитически. Получены нейтральные кривые неустойчивости Марангони.

**Ключевые слова:** конвективная устойчивость, реакция-диффузия, адсорбция-десорбция, концентрационная неустойчивость Марангони.

**E.V. Aitova, D.A. Bratsun**

Perm State Humanitarian Pedagogical University, Perm, Russian Federation

## **EXACT SOLUTION OF CHEMOCONVECTIVE STABILITY PROBLEM OF TWO-PHASE LIQUID-GAS SYSTEM IN PRESENCE OF ADSORBED REAGENT**

The paper examines the effect of a chemical reaction of first order on the convective stability of fluid that occupies semi-infinite space limited by liquid-gas surface. The reagent is considered to go through the surface into the liquid, where it reacts resulting the product. It is assumed that the product of the reaction is a surface-active substance and has been adsorbed at the interface according to the law of Langmuir. The problem on linear stability of the base state characterized by the processes of reaction-diffusion with respect to monotonous perturbations of solutal capillary nature has been solved analytically. The neutral curves for Marangoni instability have been obtained.

**Keywords:** convective stability, reaction-diffusion, adsorption-desorption, solutal Marangoni instability.

## Введение

Связь между химическими реакциями и гидродинамическими неустойчивостями является сравнительно новой областью исследований. Во многих случаях эти процессы могут взаимодействовать: например, химическая реакция за счет ряда механизмов может привести к генерированию гидродинамических течений, которые, в свою очередь, могут интенсифицировать протекание реакций. В последние годы внимание немалого числа исследователей приковано к изучению реакции нейтрализации кислоты основанием с выделением соли и форм ее взаимодействия с гидродинамическими явлениями [1–7]. Этот интерес стимулируется сравнительной простотой кинетики реакции и многочисленными приложениями. Как оказалось, реакция нейтрализации может приводить к появлению сложных хемоконвективных структур [1–2, 4–5, 8], возникновению экстремальной деформации межфазной поверхности [3], может быть использована для внешнего управления структурообразованием в плоском реакторе [6, 8], генерировать необычные шахматные структуры из соляных пальцев [7, 8] и даже породить фрактальные пространственные паттерны в тонких слоях [9].

Данная работа посвящена изучению протекания химической реакции первого порядка  $A \rightarrow S$ , которая является упрощенной моделью реакции нейтрализации. С одной стороны, упрощение позволяет получить аналитическое решение задачи устойчивости, а с другой стороны, сделанные допущения во многих реальных ситуациях не являются критическими, и модель может быть использована для характеристики процессов, протекающих во время объемной и поверхностной реакции нейтрализации. Кроме того, в работе предполагается, что один из реагентов может адсорбироваться на межфазной поверхности, и исследуется вопрос о возможном влиянии процессов адсорбции-десорбции на необычную регулярность и динамическую устойчивость хемоконвективных соляных пальцев, обнаруженных экспериментально в работе [1].

### 1. Математическая формулировка задачи

Пусть жидкость заполняет полубесконечную область пространства  $-\infty < z < 0$ , которая ограничена сверху плоской недеформированной межфазной границей (рис. 1). Будем считать, что реагент с концентрацией  $A$  поступает в жидкость сверху через поверхность раздела и реа-

гирует там без остатка со средой, выделяя продукт  $S$ . Скорость реакции характеризуется коэффициентом  $K$ . Таким образом, в слое происходит реакция первого порядка:



Необходимо отметить, что реакция (1) представляет собой упрощение реальной реакции нейтрализации  $A + B \rightarrow S$ , так как здесь мы пренебрегаем кинетикой основания, предполагая, что оно равномерно растворено в жидкости и не убывает в ходе реакции. Кроме того, как известно, реакция нейтрализации протекает со значительным выделением тепла, которым мы в рамках данной задачи также пренебрегаем [1–2, 6, 8]. Последнее допущение можно обосновать малостью характерного времени распространения тепла по сравнению с характерным временем диффузии реагентов. Расчеты показывают, что термокапиллярные возмущения являются менее опасными [2, 8]. Таким образом, кинетическое уравнение (1) хорошо аппроксимирует кинетику реакции нейтрализации в случае неограниченного притока основания и большого значения его коэффициента диффузии, что позволяет достаточно точно смоделировать динамику соли. Кроме того, реакция первого порядка (1) позволяет получить решение задачи устойчивости для неустойчивости в аналитическом виде. Рассматриваемая система является автономной, так как градиент кислоты на поверхности раздела поддерживается постоянным.

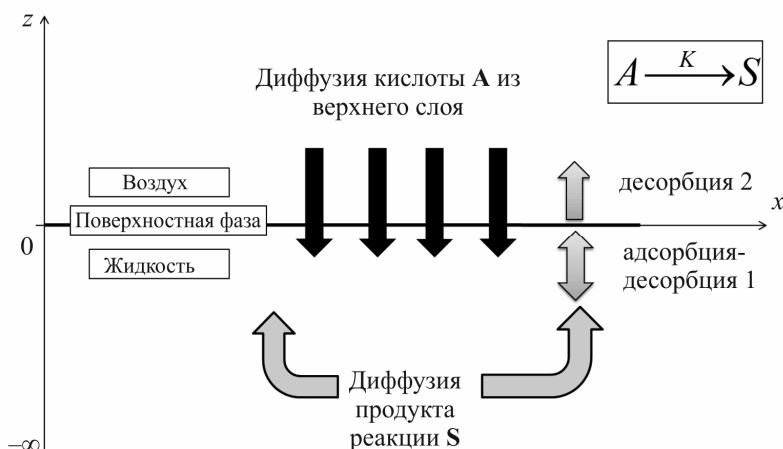


Рис. 1. Схематичное изображение процессов переноса в системе

Поскольку в задаче нет явного масштаба длины, его можно скомбинировать из физических констант, характеризующих процесс. Положим, например,  $h = D/\pi$ , где  $D$  – коэффициент диффузии кислоты в жидкости;  $\pi$  – коэффициент проникновения кислоты через поверхность раздела. Это означает, что концентрационное число Био для проникающего реагента имеет фиксированное значение или, по-другому, на межфазной поверхности задан постоянный поток кислоты. Учитывая это замечание, введем следующие единицы измерения: длина –  $h$ , время –  $h/v$ , скорость –  $D/h$ , давление –  $\rho_0 Dv/h$ , объемная концентрация кислоты и соли –  $A_0$ , поверхностная концентрация соли –  $\Gamma_\infty$  (максимальная концентрация монослоя). В безразмерном виде система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{Sc} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$Sc \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A = \Delta A - \alpha^2 A, \quad (3)$$

$$Sc \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = \Delta S + \alpha^2 A, \quad (4)$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость жидкости;  $p$  – давление,  $A$  и  $S$  – объемные концентрации кислоты и соли соответственно. В уравнении (2) слагаемое, отвечающее за объемную силу, было опущено, так как предполагается, что система находится в невесомости. Коэффициент диффузии в уравнении (4) равен единице, так как предполагается, что продукт реакции диффундирует в жидкости точно так же, как и кислота.

Граничные условия на поверхности раздела сред  $z = 0$  имеют вид

$$v_z = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = M_s \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} + A = 1, \quad (7)$$

$$Sc \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial v_x \Gamma}{\partial x} = D_\Gamma \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + K_a S|_{z=0} (1 - \Gamma) - K_d \Gamma - K_{av} \Gamma, \quad (8)$$

$$-D_s \gamma \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{z=0} = K_a S|_{z=0} (1 - \Gamma) - K_d \Gamma, \quad (9)$$

где введена концентрация поверхностной фазы  $\Gamma(x, t)$  адсорбирующегося продукта реакции. Граничные условия вдали от межфазной поверхности  $z = -\infty$  имеют вид

$$\mathbf{v} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

Уравнение (8) для концентрации поверхностной фазы записано с учетом возможных процессов переноса: в правой части каждое слагаемое отвечает соответственно за диффузию вещества вдоль поверхности, адсорбцию на межфазной поверхности из объема, десорбцию в жидкую фазу и десорбцию в газовую фазу. Слагаемое, отвечающее за адсорбцию, записано в нелинейном виде, допускающем образование монослоя адсорбируемого вещества (изотерма Ленгмюра). В уравнениях (2)–(12) введены следующие обозначения для безразмерных параметров:  $Sc = v / D$  – число Шмидта;  $M_s = \sigma_r \Gamma_\infty h / \eta D$  – концентрационное число Марангони;  $\alpha = h \sqrt{K / D}$  – число Дамкехлера;  $\gamma = A_0 h / \Gamma_\infty$  – отношение концентраций кислоты и соли на поверхности,  $K_a = A_0 k_a h^2 / D \Gamma_\infty$  – коэффициент адсорбции;  $K_d = k_d h^2 / D \Gamma_\infty$  – коэффициент десорбции в слой жидкости;  $K_{dv} = k_{dv} h^2 / \Gamma_\infty D$  – коэффициент десорбции в воздух (испарение). Числа Шмидта  $Sc$  есть отношение характерного диффузионного времени к характерному гидродинамическому времени. Обычно этот параметр в гидродинамических задачах с диффузией вещества принимает большие значения, что означает быстрое затухание гидродинамических возмущений по сравнению с процессами диффузии реагентов. Эффект Марангони производит только та часть продукта реакции, которая адсорбируется на поверхности, т.е. находится внутри поверхностной фазы. Поверхностными свойствами кислоты пренебрегаем. Таким образом, в системе имеется только одно поверхностно активное вещество – продукт реакции соль. Число Дамкехлера определяет безразмерную скорость протекания реакции.

## 2. Основное состояние

Так как мы предположили наличие постоянного притока кислоты через межфазную поверхность (7), уравнения (2)–(4) с граничными условиями (5)–(12) допускают стационарное решение, которое соответствует процессам реакции-диффузии при одновременном механическом равновесии жидкости. Полагая  $\partial/\partial t = 0$ ,  $\partial/\partial x = 0$ ,  $\mathbf{v} = 0$ ,  $S^0 = S^0(z)$ ,  $A^0 = A^0(z)$ , получим

$$\frac{\partial^2 A^0}{\partial z^2} - \alpha^2 A^0 = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 S^0}{\partial z^2} + \alpha^2 A^0 = 0. \quad (14)$$

Решая уравнения (13)–(14) с граничными условиями (7), (11) и (8), (12), получаем выражения для профилей кислоты и соли, а также для равновесного значения адсорбции

$$A^0(z) = \frac{1}{(\alpha+1)} e^{\alpha z}, \quad (15)$$

$$S^0(z) = \frac{(K_d + K_{dV})\alpha\gamma}{K_a(K_{dV}(\alpha+1) - \alpha\gamma)} + \frac{1}{(\alpha+1)}(1 - e^{\alpha z}), \quad (16)$$

$$\Gamma^0 = \frac{\alpha\gamma}{K_{dV}(\alpha+1)}. \quad (17)$$

Заметим, что концентрация адсорбируемого вещества  $\Gamma^0$  на межфазной поверхности (17) не может превышать единицу, так как эта величина была обезразмерена в единицах концентрации монослоя. Отметим влияние скорости реакции: чем быстрее проходит реакция, тем ближе к поверхности находится основная масса кислоты (15) и тем больше градиент продукта реакции у межфазной поверхности (16). Это приводит к большей заполненности поверхностной фазы адсорбируемыми молекулами соли (17). Таким образом, характерная длина волны возмущения должны уменьшаться с ростом скорости реакции. Из общих соображений понятно, что в предельном случае сверхбыстрой реакции неустойчивость возникать не должна.

### 3. Задача устойчивости

Рассмотрим задачу о малых возмущениях основного состояния (15)–(17). Вводя нормальные возмущения  $\mathbf{u}$ ,  $a$ ,  $s$ ,  $g$  для скорости, объемных концентраций реагентов и концентрации поверхностной фазы, получаем следующую систему уравнений для малых монотонных возмущений:

$$\frac{d^4 U}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2 U}{dz^2} + k^4 U = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d^2 a}{dz^2} - (k^2 + \alpha^2) a = U \frac{dA^0}{dz}, \quad (19)$$

$$\frac{d^2 s}{dz^2} - k^2 s = U \frac{dS^0}{dz} - \alpha^2 a, \quad (20)$$

где  $k$  – волновое число возмущения вдоль поверхности;  $U$  – вертикальная компонента вектора возмущения скорости. К уравнениям (18)–(20) необходимо добавить граничные условия на межфазной поверхности:

$$U = 0, \quad (21)$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + k^2 M_s g = 0, \quad (22)$$

$$\frac{da}{dz} + a = 0, \quad (23)$$

$$-\gamma \frac{ds}{dz} \Big|_{z=0} = -K_a S^0 g + K_a s \Big|_{z=0} (1 - \Gamma^0) - K_d g, \quad (24)$$

и вдали от поверхности:

$$U = 0, \quad \frac{dU}{dz} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{da}{dz} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{ds}{dz} = 0. \quad (27)$$

Уравнение для возмущений концентрации соли (24) было получено из уравнения (9). Используя (8), запишем уравнение для возмущений концентрации поверхностной фазы

$$\Gamma^0 \left. \frac{dU}{dz} \right|_{z=0} = k^2 D_\Gamma g + \gamma \left. \frac{ds}{dz} \right|_{z=0} + K_{dV} g. \quad (28)$$

Комбинируя теперь уравнения (24) и (28), можно получить связь между возмущениями поверхностной и приповерхностной концентрации:

$$g = \frac{\Gamma^0 \left. \frac{dU}{dz} \right|_{z=0} + K_a (1 - \Gamma^0) s|_{z=0}}{k^2 D_\Gamma + K_a S^0|_{z=0} + K_d + K_{dV}}. \quad (29)$$

Таким образом, зная возмущения скорости  $U(z)$  и соли  $s(z)$ , возмущение концентрации поверхностной фазы можно сразу найти по формуле (29). Эту константу можно исключить из уравнений, подставив в выражения (24) и (28). В качестве граничного условия для соли можно взять любое из этих уравнений, так как они заведомо тождественны и сшиваются благодаря формуле (29).

Задача (18)–(28) может быть решена аналитически по аналогии с тем, как это было сделано в работе Пирсона [10], исследовавшего устойчивость плоского слоя жидкости, подогреваемой снизу, или в работе Рукенштейна и Бербента [11], изучавших устойчивость двухслойной системы с реакцией первого порядка. Так как уравнение для возмущения скорости (18) отщепляется от общей задачи, то его решение с учетом (21), (25) найти проще всего:

$$U(z) = \xi z e^{kz}, \quad (30)$$

где  $\xi$  – неизвестная амплитуда, которая определяется из условия разрешимости всей системы. После нахождения скорости удобно решить уравнение для возмущения концентрации кислоты (19) совместно с граничными условиями (23), (26):

$$a(z) = \xi \frac{(\alpha + k)(\alpha + 1) + k^2}{2\alpha k^2 (\alpha + 1)(\varphi + 1)} e^{\varphi z} + \xi \frac{z\alpha k - \alpha - k}{2\alpha k^2 (\alpha + 1)} e^{(\alpha + k)z}, \quad (31)$$

где введено обозначение  $\varphi \equiv \sqrt{k^2 + \alpha^2}$ . Затем решается уравнение для возмущения концентрации соли (20), в котором используются формулы (29), (30):



$$s(z) = \eta e^{kz} - \xi \frac{(\alpha + k)(\alpha + 1) + k^2}{2\alpha k^2(\alpha + 1)(\phi + 1)} e^{\phi z} - \xi \frac{z\alpha k - \alpha - k}{2\alpha k^2(\alpha + 1)} e^{(\alpha + k)z}. \quad (32)$$

Здесь  $\eta$  – еще одна неизвестная амплитуда, которая должна быть определена из условия разрешимости. Сравнивая формулы (31) и (32), можно заметить любопытный факт: возмущение концентрации кислоты (31) вычитается из возмущения концентрации соли (32). Таким образом, возмущения возникают в противофазе: чем больше возмущение входящего реагента, тем меньше возмущение продукта реакции, и наоборот.

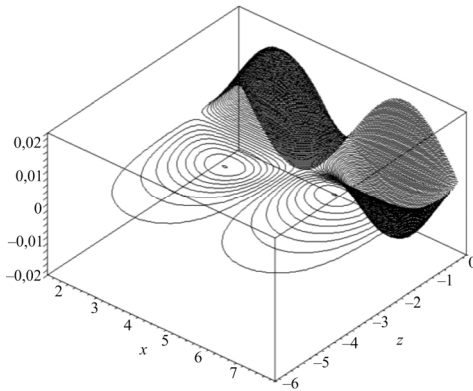


Рис. 2. Характерный вид возмущения концентрации кислоты (31) при  $k=1$ ,  $\xi=1$ ,  $\alpha=1$

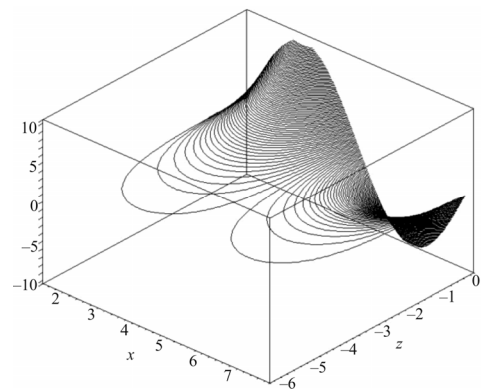


Рис. 3. Характерный вид возмущения концентрации соли (32) при  $k=1$ ,  $\xi=1$ ,  $\eta=-1$ ,  $\alpha=1$

На рис. 2 и 3 представлены характерные виды возмущений кислоты и соли, построенные по формулам (31) и (32) соответственно. Отметим, что на рис. 3 было взято значение параметра  $\eta = -1$ , так как удовлетворение условию разрешимости приводит к выводу о том, что  $\xi$  и  $\eta$  принимают значения в противофазе. Условие разрешимости системы получается, если подставить полученные решения (29)–(32) в оставшиеся неиспользованными граничные условия (22) и (24):

$$M_S = \frac{(k^2 + 1)(K_a + k) + \alpha k(\alpha + 2)(K_d + 1) + k(\alpha k^2 + K_d)}{K_a \Phi + 2k^2 \alpha^3 (1 + \phi)(K_a + k(\alpha + 1))}, \quad (33)$$

где  $\Phi \equiv \phi(k + \alpha)(k + 1) - (k + \alpha)^2 - k^2(\alpha + 1)$ . Формула (33) получена для случая фиксированной десорбции в газообразную фазу  $K_{dV} = 1$ .

На рис. 4 для разных значений скорости реакции представлены нейтральные кривые концентрационной конвекции Марангони, построенные по формуле (33).

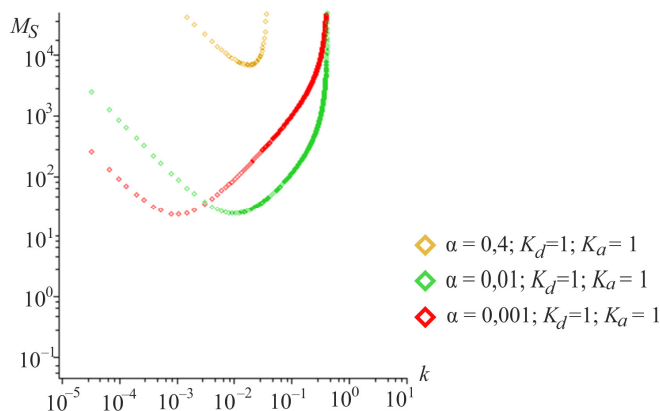


Рис. 4. Нейтральные кривые концентрационно-капиллярной конвекции для разных значений числа Дамкехлера при  $K_d = 1, K_a = 1$

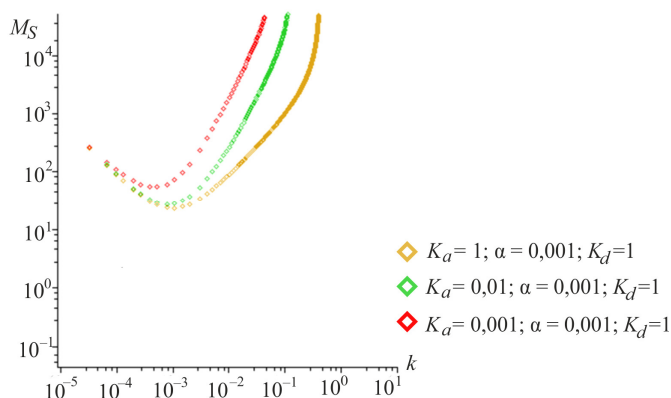


Рис. 5. Нейтральные кривые концентрационно-капиллярной конвекции для разных значений коэффициента адсорбции при  $\alpha = 1, K_a = 1$

Как видно из рис. 4, при уменьшении скорости реакции длина волны возмущения растет. С другой стороны, формирование монослоя на межфазной поверхности стабилизирует основное состояние при увеличении скорости реакции. На рис. 5 представлены нейтральные кривые, построенные для разных значений коэффициента адсорбции.

Любопытным результатом является стабилизация основного состояния при уменьшении скорости адсорбции продукта реакции на межфазной поверхности.

### **Заключение**

В работе предложена модель полубесконечного пространства, заполненного несжимаемой жидкостью и ограниченной плоской поверхностью жидкость–газ. Рассмотрена задача о конвективной устойчивости этой системы в случае, когда в жидкость просачивается вещество, вступающее в реакцию первого порядка с жидкостью. Модель позволяет выяснить некоторые закономерности хемоконвективных процессов при реакции нейтрализации. Найдено точное решение задачи устойчивости по отношению к малым монотонным возмущениям основного состояния. Показано, что формирование монослоя на межфазной поверхности стабилизирует основное состояние при увеличении скорости реакции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования РФ (ГК № 1.3103.2011), Министерства образования Пермского края (грант С-26/244) и в рамках Проекта №031-Ф Программы стратегического развития ПГПУ.

### **Библиографический список**

1. Eckert K., Acker M., Shi Y. Chemical pattern formation driven by a neutralization reaction. Part I: Mechanism and basic features // *Phys. of Fluids*. – 2004. – Vol. 16 – P. 385–399.
2. Bratsun D.A., De Wit A. On Marangoni convective patterns driven by an exothermic chemical reaction in two-layer systems // *Phys. of Fluids*. – 2004. – Vol. 16. – No. 4. – P. 1082–1096.
3. Shi Y., Eckert K. Orientation-dependent Hydrodynamic Instabilities from Chemo-Marangoni Cells to Large Scale Interfacial Deformations // *Chinese J. of Chem. Eng.* – 2007. – Vol. 15. – No. 5. – P. 748–753.
4. Shi Y., Eckert K. Acceleration of reaction fronts by hydrodynamic instabilities in immiscible systems // *Chem. Eng. Sci.* – 2006. – Vol. 61. – No. 17. – P. 5523–5533.
5. Rongy L., Trevelyan P.M.J., De Wit A. Dynamics of  $A+B\rightarrow C$  reaction fronts in the presence of buoyancy-driven convection // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 101. – No. 8. – P. 084503–084507.

6. Брацун Д.А., Де Вит А. Об управлении хемоконвективными структурами в плоском реакторе // ЖТФ. – 2008. – Вып. 2, т. 78. – С. 6–13.
7. Bratsun D.A., De Wit A. Buoyancy-driven pattern formation in reactive immiscible two-layer systems // Chem. Eng. Sci. – 2011. – Vol. 66. – No. 22. – P. 5723–5734.
8. Брацун Д.А. Хемоконвективное структурообразование в реагирующих жидкостях // LAM Lambert Academic Publishing. – 2012. – P. 145.
9. Experimental reaction-driven liquid film fingering instability / L.A. Riolfo, J. Carballido-Landeira, C.O. Bounds, J.A. Pojman, S. Kalliadasis, A. De Wit // Chem. Phys. Lett. – 2012. – Vol. 534 – P. 13–18.
10. Pearson J.R.A. On convection cells induced by surface tension // J. Fluid Mech. – 1958. – Vol. 4 – P. 489–500.
11. Ruckenstein E., Berbente C. The occurrence of interfacial turbulence in the case of diffusion accompanied by chemical reaction // Chem. Eng. Sci. – 1964. – Vol. 19 – P. 329–347.

### References

1. Eckert K., Acker M., Shi Y. Chemical pattern formation driven by a neutralization reaction. Part I: Mechanism and basic features. *Phys. of Fluids*. 2004, vol. 16, pp. 385-399.
2. Bratsun D.A., De Wit A. On Marangoni convective patterns driven by an exothermic chemical reaction in two-layer systems. *Phys. of Fluids*. 2004, vol. 16, no. 4, pp. 1082-1096.
3. Shi Y., Eckert K. Orientation-dependent Hydrodynamic Instabilities from Chemo-Marangoni Cells to Large Scale Interfacial Deformations. *Chinese J. of Chem. Eng.* 2007, vol. 15, no. 5, pp. 748-753.
4. Shi Y., Eckert K. Acceleration of reaction fronts by hydrodynamic instabilities in immiscible systems. *Chem. Eng. Sci.* 2006, vol. 61, no. 17, pp. 5523-5533.
5. Rongy L., Trevelyan P.M.J., De Wit A. Dynamics of  $A+B \rightarrow C$  reaction fronts in the presence of buoyancy-driven convection. *Phys. Rev. Lett.* 2008, vol. 101, no. 8, pp. 084503-084507.
6. Bratsun D.A., De Wit A. Ob upravlenii khemokonvektivnymi strukturami v ploskom reaktore [Control of chemoconvective structures in a slab reactor]. *Techn. Phys.* 2008, vol. 53, pp. 146-153.

7. Bratsun D.A., De Wit A. Buoyancy-driven pattern formation in reactive immiscible two-layer systems. *Chem. Eng. Sci.* 2011, vol. 66, no. 22, pp. 5723-5734.

8. Bratsun D.A. Khemokonvективное структурообразование в реагирующikh жидкостях [Chemoconvective pattern formation in reactive fluids]. *LAM Lambert Academic Publ.*, 2012. 145 p.

9. Riolfo L.A., Carballido-Landeira J., Bounds C.O., Pojman J.A., Kalliadasis S., De Wit A. Experimental reaction-driven liquid film fingering instability. *Chem. Phys. Lett.* 2012, vol. 534, pp. 13-18.

10. Pearson J.R.A. On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.* 1958, vol. 4, pp. 489-500.

11. Ruckenstein E., Berbente C. The occurrence of interfacial turbulence in the case of diffusion accompanied by chemical reaction. *Chem. Eng. Sci.* 1964, vol. 19, pp. 329-347.

### **Об авторах**

**Аитова Елизавета Валерьевна** (Пермь, Россия) – студентка физического факультета Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета, (614990, Пермь, ул. Сибирская, 24, e-mail: andreychatenko@gmail.com).

**Брацун Дмитрий Анатольевич** (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической физики Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета, (614600, Пермь, ул. Сибирская, 24, e-mail: dmitribratsun@rambler.ru).

### **About the authors**

**Aitova Elizaveta V.** (Perm, Russian Federation) – student of the Faculty of Physics, Perm State Humanitarian Pedagogical University (24, Sibirskaya st., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: andreychatenko@gmail.com).

**Bratsun Dmitry A.** (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Theoretical Physics, Perm State Humanitarian Pedagogical University (24, Sibirskaya st., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: dmitribratsun@rambler.ru).

Получено 13.03.2013