

УДК 593.3

А.В. Зайцев, Ю.В. Соколкин, А.А. ФукаловПермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия**МЕХАНИЗМЫ НАЧАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ
ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КРЕПИ СФЕРИЧЕСКОЙ ГОРНОЙ
ВЫРАБОТКИ В МАССИВЕ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД**

Методом, основанным на разложении компонент вектора перемещений по окружной и радиальной координате в тригонометрические и обобщенные степенные ряды, получено новое точное аналитическое решение задачи для составной трансверсально-изотропной сферы, находящейся в равновесии в поле гравитационных сил. На внутренней поверхности было задано однородно распределенное давление, внешняя поверхность предполагалась жестко закрепленной. Приведены выражения для напряжений и деформации. Полученное аналитическое решение позволило проанализировать влияние геометрии и свойств железобетона на распределения независимых инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях железобетонных крепей сферических подземных выработок и окружающем массиве осадочных пород, а также описать механизмы разрушения на основе многокритериального подхода.

Ключевые слова: толстостенная составная трансверсально-изотропная сфера, упругое равновесие, поле гравитационных сил, точное аналитическое решение, железобетонная крепь, сферическая горная выработка, горный массив осадочных пород, механизмы начального разрушения.

A.V. Zaitsev, Yu.V. Sokolkin, A.A. Fukalov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

**INITIAL DAMAGE MECHANISMS OF REINFORCED CONCRETE
MONOLITHIC SUPPORTS FOR SPHERICAL MINE WORKINGS
LOCATED IN SEDIMENTARY ROCK MASS**

Within decomposition of hoop and radial components of displacement vector to the trigonometrical and generalized power series new exact analytical solutions have been obtained to problems on equilibrium state of combined thick-walled heavy transversally-isotropic spheres which are fixed on the exterior or interior surfaces and are subject to the action of uniform internal or external lateral pressure. In particular obtained analytical solutions can be used for the analysis of the influence of geometry of concrete monolithic supports for spherical mine workings, the properties of reinforced concrete and the sedimentary rock mass surrounding minings on the distribution of stresses and displacements. In the construction of mine workings reinforcement is one of the main production processes otherwise there is no way for their exploitation. Monolithic concrete supports aimed at maintaining labor safety and safety

of mineral raw materials and equipment kept inside are usually made of reinforced concrete, i.e. anisotropic material, the weight of which has to be greatly considered.

Keywords: thick-walled combined transversally-isotropic sphere, elastic equilibrium state, gravity forces, exact analytical solution, reinforced concrete monolithic supports for spherical mine workings, sedimentary rock mass surrounding mine, mechanisms of initial stage of damage evolution

При сооружении горных выработок, представляющих собой сферические полости, подкрепление является одним из основных производственных процессов, без которого невозможна их эксплуатация. Крепи, предназначенные для обеспечения безопасности труда, сохранности находящегося внутри сырья и оборудования, как правило, изготавливаются из железобетона и являются массивными сооружениями. Поскольку железобетон и горные породы имеют ярко выраженную анизотропию свойств, вызванную наличием стержневых армирующих элементов и минеральных включений, важным и актуальным является получение новых точных аналитических решений краевых задач о равновесии толстостенных составных анизотропных упругих тел с центральной симметрией, находящихся под действием равномерного внутреннего и внешнего давления в поле гравитационных сил, и разработка на основе этих решений инженерных методик уточненного прочностного анализа элементов конструкций и сооружений, имеющих аналогичную геометрию и граничные условия. Кроме того, эти решения могут использоваться для идентификации материальных постоянных и функций анизотропных материалов (железобетон крепи создается вместе с самим горным сооружением) и при тестировании алгоритмов, реализующих численные методы, а также при отработке методик экспериментов с «тяжелыми» телами простейшей геометрии.

Рассмотрим равновесие составного линейно-упругого анизотропного сферического тела, представляющего собой конструкцию, состоящую из двух полых толстостенных сфер с общим центром, жестко закрепленных по внешней поверхности радиусом ρ_2 и находящихся под действием равномерно распределенного по внутренней поверхности радиуса ρ_1 давления в поле гравитационных сил. Будем считать, что поверхность контакта, на которой выполняется условие идеального сопряжения, находится на расстоянии ρ_c от центра, а материал, из которого изготовлено составное тело, однородный, сферически трансверсально-изотропный относительно любого радиуса-вектора, проведенного из геометрического центра. Будем использовать сферическую

r, θ и φ систему координат. Все константы и функции, относящиеся к внутренней части составной сферы, будем обозначать верхним индексом 1, стоящим в скобках, а к внешней – индексом 2 соответственно. Радиальные и окружные перемещения ($u_r^{(i)}$ и $u_\theta^{(i)}$), радиальные ($\sigma_{rr}^{(i)}$ и $\varepsilon_{rr}^{(i)}$), окружные ($\sigma_{\theta\theta}^{(i)}$ и $\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}$), меридиональные ($\sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}$ и $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)}$) напряжения и деформации, касательные напряжения $\tau_{r\theta}^{(i)}$ и сдвиговые деформации $\varepsilon_{r\theta}^{(i)}$ не зависят (в силу симметрии тела и внешней нагрузки) от меридиональной координаты φ , удовлетворяют геометрическим соотношениям Коши

$$\varepsilon_{rr}^{(i)} = \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} = \frac{1}{r} \left(u_r^{(i)} + \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \theta} \right), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{1}{r} \left(u_\theta^{(i)} \operatorname{ctg} \theta + u_r^{(i)} \right), \quad \gamma_{r\theta}^{(i)} = \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(i)} \right), \quad i = 1 \text{ или } 2$$

и уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + 2\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} - \sigma_{\theta\theta}^{(i)} + \tau_{r\theta}^{(i)} \operatorname{ctg} \theta \right) + F_r^{(i)} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + (\sigma_{\theta\theta}^{(i)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}^{(i)} \right] + F_\theta^{(i)} = 0.$$

Здесь $F_r^{(i)} = -\gamma^{(i)} \cos \theta$ и $F_\theta^{(i)} = \gamma^{(i)} \sin \theta$ – компоненты вектора массовых сил, $\gamma^{(i)}$ – удельный вес материала.

Определяющие соотношения для сферически трансверсально-изотропного тела

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)} &= A_{11}^{(i)} \varepsilon_{rr}^{(i)} + A_{12}^{(i)} (\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}), \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} = A_{12}^{(i)} \varepsilon_{rr}^{(i)} + A_{22}^{(i)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} + A_{23}^{(i)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(i)} &= A_{12}^{(i)} \varepsilon_{rr}^{(i)} + A_{23}^{(i)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} + A_{22}^{(i)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}, \quad \tau_{r\theta}^{(i)} = A_{44}^{(i)} \varepsilon_{r\theta}^{(i)} \end{aligned} \quad (3)$$

можно записать с помощью технических постоянных

$$\begin{aligned}
 A_{11}^{(i)} &= \frac{E_r^{(i)}}{\nu^{(i)}} \left(1 - \mu_{\theta\phi}^{(i)} \right), \quad A_{22}^{(i)} = \frac{E_\theta^{(i)}}{\nu^{(i)} + \mu_{\theta\phi}^{(i)} \nu^{(i)}} \left(1 - \mu_{r\theta}^{(i)2} \frac{E_\theta^{(i)}}{E_r^{(i)}} \right), \\
 A_{23}^{(i)} &= \frac{E_\theta^{(i)}}{\nu^{(i)} + \mu_{\theta\phi}^{(i)} \nu^{(i)}} \left(\mu_{\theta\phi}^{(i)} + \mu_{r\theta}^{(i)2} \frac{E_\theta^{(i)}}{E_r^{(i)}} \right), \quad A_{12}^{(i)} = \frac{E_\theta^{(i)}}{\nu^{(i)}} \mu_{r\theta}^{(i)}, \\
 A_{44}^{(i)} &= G_{r\theta}^{(i)}, \quad \nu^{(i)} = 1 - \mu_{\theta\phi}^{(i)} - 2\mu_{r\theta}^{(i)2} \frac{E_\theta^{(i)}}{E_r^{(i)}},
 \end{aligned}$$

определяемых модулями Юнга $E_r^{(i)}$ и $E_\theta^{(i)}$ в направлениях r и θ , коэффициентами Пуассона $\mu_{r\theta}^{(i)}$ и $\mu_{\theta\phi}^{(i)}$, а также модулем сдвига $G_{r\theta}^{(i)}$ в диаметральной плоскости.

Так как находящееся в поле гравитационных сил толстостенное составное сферическое тело с жестко закрепленной внешней поверхностью находится в равновесии, то

$$\begin{aligned}
 u_r^{(2)} \Big|_{r=\rho_2} &= 0, \quad u_\theta^{(2)} \Big|_{r=\rho_2} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=\rho_1} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=\rho_1} = -p, \\
 u_r^{(1)} \Big|_{r=\rho_c} &= u_r^{(2)} \Big|_{r=\rho_c}, \quad u_\theta^{(1)} \Big|_{r=\rho_c} = u_\theta^{(2)} \Big|_{r=\rho_c}, \\
 \tau_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=\rho_c} &= \tau_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=\rho_c}, \quad \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=\rho_c} = \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=\rho_c}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Последовательная подстановка геометрических соотношений (1) в определяющие (3), а затем полученного результата – в уравнения равновесия (2) позволяет записать неоднородные системы дифференциальных уравнений Ламе в частных производных [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 A_{11}^{(i)} \frac{\partial^2 u_r^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left[2A_{11}^{(i)} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} + (A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)}) \left(\frac{\partial^2 u_\theta^{(i)}}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial r} \operatorname{ctg} \theta \right) \right] + \\
 + \frac{1}{r^2} \left[A_{44}^{(i)} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(i)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + 2(A_{12}^{(i)} - A_{22}^{(i)} - A_{23}^{(i)}) u_r^{(i)} + \right. \\
 \left. + (A_{12}^{(i)} - A_{22}^{(i)} - A_{23}^{(i)} - A_{44}^{(i)}) \left(\frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \theta} + u_\theta^{(i)} \operatorname{ctg} \theta \right) \right] = \gamma^{(i)} \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left[2A_{44}^{(i)} \partial_r u_{\theta}^{(i)} \frac{\partial u_{\theta}^{(i)}}{\partial r} + (A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)}) \frac{\partial^2 u_r^{(i)}}{\partial r \partial \theta} \right] + \\
 & + \frac{1}{r^2} \left[A_{22}^{(i)} \left(\frac{\partial^2 u_{\theta}^{(i)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_{\theta}^{(i)}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + (A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} + 2A_{44}^{(i)}) \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial \theta} - \right. \\
 & \left. - (A_{23}^{(i)} + 2A_{44}^{(i)} + A_{22}^{(i)} \operatorname{ctg}^2 \theta) u_{\theta}^{(i)} \right] = -\gamma^{(i)} \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Решение в силу симметрии задачи может быть представлено в виде тригонометрических рядов [1–5]:

$$u_r^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{rn}^{(i)}(r) \cos n\theta, \quad u_{\theta}^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\theta n}^{(i)}(r) \sin n\theta. \quad (6)$$

При подстановке выражений (6) в (5) и (4) получим бесконечное число систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
 & a_{1n}^{(i)} u_{rn}^{\prime(i)} + a_{2n}^{(i)} \frac{1}{r} u_{rn}^{\prime(i)} + a_{3n}^{(i)} \frac{1}{r^2} u_{rn}^{(i)} + a_{4n}^{(i)} \frac{1}{r} u_{\theta n}^{\prime(i)} + a_{5n}^{(i)} \frac{1}{r^2} u_{\theta n}^{(i)} = A_n^{(i)}, \\
 & b_{1n}^{(i)} u_{\theta n}^{\prime(i)} + b_{2n}^{(i)} \frac{1}{r} u_{\theta n}^{\prime(i)} + b_{3n}^{(i)} \frac{1}{r^2} u_{\theta n}^{(i)} + b_{4n}^{(i)} \frac{1}{r} u_{rn}^{\prime(i)} + b_{5n}^{(i)} \frac{1}{r^2} u_{rn}^{(i)} = B_n^{(i)},
 \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
 & a_{1n}^{(i)} = A_{11}^{(i)}, \quad a_{2n}^{(i)} = 2A_{11}^{(i)}, \quad a_{3n}^{(i)} = 2(A_{12}^{(i)} - A_{22}^{(i)} - A_{23}^{(i)}) - A_{44}^{(i)}(n^2 + n \operatorname{ctg} \theta \operatorname{tg} n\theta), \\
 & a_{4n}^{(i)} = (A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)})(n + \operatorname{ctg} \theta \operatorname{tg} n\theta), \\
 & a_{5n}^{(i)} = (A_{12}^{(i)} - A_{22}^{(i)} - A_{23}^{(i)} - A_{44}^{(i)})(n + \operatorname{ctg} \theta \operatorname{tg} n\theta), \\
 & b_{1n}^{(i)} = A_{44}^{(i)}, \quad b_{2n}^{(i)} = 2A_{44}^{(i)}, \quad b_{3n}^{(i)} = -A_{23}^{(i)} - 2A_{44}^{(i)} - A_{22}^{(i)}(n^2 - 1 - n \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} n\theta + \operatorname{csc}^2 \theta), \\
 & b_{4n}^{(i)} = -(A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)})n, \quad b_{5n}^{(i)} = -(A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} + 2A_{44}^{(i)})n, \\
 & A_n^{(i)} = \begin{cases} \gamma^{(i)}, & n=1, \\ 0, & n=0, n>1, \end{cases} \quad B_n^{(i)} = \begin{cases} -\gamma^{(i)}, & n=1, \\ 0, & n=0, n>1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

с соответствующими граничными условиями

$$\begin{aligned}
 u_{rm}^{(2)} \Big|_{r=\rho_2} = 0, u_{\theta n}^{(2)} \Big|_{r=\rho_2} = 0, A_{44}^{(1)} u_{\theta n}'^{(1)} - A_{44}^{(1)} \frac{1}{r} u_{\theta n}^{(1)} - A_{44}^{(1)} \frac{n}{r} u_{rm}^{(1)} \Big|_{r=\rho_1} = 0, \\
 A_{11}^{(1)} u_{rm}'^{(1)} + A_{12}^{(1)} \frac{2}{r} u_{rm}^{(1)} + A_{12}^{(1)} (n + \text{ctg } \theta \text{ tg } n\theta) \frac{1}{r} u_{\theta n}^{(1)} \Big|_{r=\rho_1} = \begin{cases} -p, & n=0, \\ 0, & n>0. \end{cases} \\
 u_{rm}^{(1)} \Big|_{r=\rho_c} = u_{rm}^{(2)} \Big|_{r=\rho_c}, u_{\theta n}^{(1)} \Big|_{r=\rho_c} = u_{\theta n}^{(2)} \Big|_{r=\rho_c}, \\
 A_{44}^{(1)} u_{\theta n}'^{(1)} - A_{44}^{(1)} \frac{1}{r} u_{\theta n}^{(1)} - A_{44}^{(1)} \frac{n}{r} u_{rm}^{(1)} \Big|_{r=\rho_c} = A_{44}^{(2)} u_{\theta n}'^{(2)} - A_{44}^{(2)} \frac{1}{r} u_{\theta n}^{(2)} - A_{44}^{(2)} \frac{n}{r} u_{rm}^{(2)} \Big|_{r=\rho_c}, \\
 A_{11}^{(1)} u_{rm}'^{(1)} + A_{12}^{(1)} \frac{2}{r} u_{rm}^{(1)} + A_{12}^{(1)} (n + \text{ctg } \theta \text{ tg } n\theta) \frac{1}{r} u_{\theta n}^{(1)} \Big|_{r=\rho_1} = \\
 = A_{11}^{(2)} u_{rm}'^{(2)} + A_{12}^{(2)} \frac{2}{r} u_{rm}^{(2)} + A_{12}^{(2)} (n + \text{ctg } \theta \text{ tg } n\theta) \frac{1}{r} u_{\theta n}^{(2)} \Big|_{r=\rho_2}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Поэтому вычисление перемещений, деформаций и напряжений связано с решением n самостоятельных задач. Заметим, что для $n > 1$ однородные системы дифференциальных уравнений (7) дополнены однородными граничными условиями (8). Следовательно, все эти системы имеют единственное тривиальное решение: $u_{rm}^{(i)} = 0$ и $u_{\theta n}^{(i)} = 0$. Таким образом, задача может быть сведена к решению системы (7) с граничными условиями (8) при $n=0$ и $n=1$ [1–4].

При $n=0$ перемещение в меридиональном направлении $u_{\theta 0}^{(i)} \equiv 0$, а система уравнений (7) значительно упрощается:

$$A_{11}^{(i)} u_{r0}''^{(i)} + 2A_{11}^{(i)} \frac{1}{r} u_{r0}'^{(i)} + 2 \left(A_{12}^{(i)} - A_{22}^{(i)} - A_{23}^{(i)} \right) \frac{1}{r^2} u_{r0}^{(i)} = 0. \tag{9}$$

Общее решение (9) выглядит следующим образом:

$$u_{r0}^{(i)} = r^{-1/2-k^{(i)}} D_1^{(i)} + r^{-1/2+k^{(i)}} D_2^{(i)},$$

где $s^{(i)} = \sqrt{1/4 + 2 \left(A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)} - A_{12}^{(i)} \right) / A_{11}^{(i)}}$, а из граничных условий (8) могут быть определены постоянные интегрирования

$$\begin{aligned}
 \rho_2^{-1/2-s^{(2)}} D_1^{(2)} + \rho_2^{-1/2+s^{(2)}} D_2^{(2)} = 0, \\
 D_1^{(1)} \left[A_{11}^{(1)} \left(-1/2 - s^{(1)} \right) + 2A_{12}^{(1)} \right] \rho_1^{-3/2-s^{(1)}} + \\
 + D_2^{(1)} \left[A_{11}^{(1)} \left(-1/2 + s^{(1)} \right) + 2A_{12}^{(1)} \right] \rho_1^{-3/2+s^{(1)}} = -p,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_c^{-1/2-s^{(1)}} D_1^{(1)} + \rho_c^{-1/2+s^{(1)}} D_2^{(1)} &= \rho_c^{-1/2-s^{(2)}} D_1^{(2)} + \rho_c^{-1/2+s^{(2)}} D_2^{(2)}, \\ D_1^{(1)} \left[A_{11}^{(1)} (-1/2-s^{(1)}) + 2A_{12}^{(1)} \right] \rho_c^{-3/2-s^{(1)}} &+ \\ + D_2^{(1)} \left[A_{11}^{(1)} (-1/2+s^{(1)}) + 2A_{12}^{(1)} \right] \rho_c^{-3/2+s^{(1)}} &= \\ = D_1^{(2)} \left[A_{11}^{(2)} (-1/2-s^{(2)}) + 2A_{12}^{(2)} \right] \rho_c^{-3/2-s^{(2)}} &+ \\ + D_2^{(2)} \left[A_{11}^{(2)} (-1/2+s^{(2)}) + 2A_{12}^{(2)} \right] \rho_c^{-3/2+s^{(2)}} &. \end{aligned}$$

При $n=1$ имеем неоднородную систему дифференциальных уравнений (7), решение которой находим методом вариации произвольных постоянных. Тогда окончательно выражения для перемещений в толстостенной трансверсально-изотропной сфере запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r^{(i)} &= D_1^{(i)} r^{-1/2-s^{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-1/2+s^{(i)}} + \\ + \left(-C_1^{(i)} + d_2^{(i)} C_2^{(i)} r^{-1} + d_3^{(i)} C_3^{(i)} r^{-1/2+t^{(i)}} + d_4^{(i)} C_4^{(i)} r^{-1/2-t^{(i)}} + H_r^{(i)} r^2 \right) \cos\theta, \quad (10) \\ u_\theta^{(i)} &= \left(C_1^{(i)} + C_2^{(i)} r^{-1} + C_3^{(i)} r^{-1/2+t^{(i)}} + C_4^{(i)} r^{-1/2-t^{(i)}} + H_\theta^{(i)} r^2 \right) \sin\theta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H_r^{(i)} &= \frac{\gamma^{(i)}}{H_1^{(i)}} \left(H^{(i)} - 2A_{12}^{(i)} - 2A_{44}^{(i)} \right), \quad H^{(i)} = A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)}, \\ H_\theta^{(i)} &= \frac{\gamma^{(i)}}{H_1^{(i)}} \left(2A_{11}^{(i)} - H^{(i)} - 2A_{44}^{(i)} \right), \quad L^{(i)} = 2 \left(A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)} \right)^2 - A_{11}^{(i)} \left(H^{(i)} + 2A_{44}^{(i)} \right), \\ t^{(i)} &= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{A_{11}^{(i)} A_{44}^{(i)}} \left[H^{(i)} \left(A_{11}^{(i)} + 2A_{44}^{(i)} \right) - 2A_{12}^{(i)} \left(A_{12}^{(i)} + 3A_{44}^{(i)} \right) \right]}, \\ d_2^{(i)} &= \frac{H^{(i)} + 2A_{44}^{(i)}}{A_{12}^{(i)} - H^{(i)} - A_{44}^{(i)}}, \quad d_3^{(i)} = \frac{1}{L^{(i)}} \left[Y^{(i)} + 2A_{44}^{(i)} \left(A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)} \right) t^{(i)} \right], \\ d_4^{(i)} &= \frac{1}{L^{(i)}} \left[Y^{(i)} - 2A_{44}^{(i)} \left(A_{12}^{(i)} + A_{44}^{(i)} \right) t^{(i)} \right], \quad Y^{(i)} = A_{44}^{(i)} \left(A_{12}^{(i)} - 2H^{(i)} - 3A_{44}^{(i)} \right), \\ H_1^{(i)} &= 2 \left[A_{11}^{(i)} \left(H^{(i)} - 4A_{44}^{(i)} \right) + 2A_{44}^{(i)} \left(H^{(i)} - 3A_{12}^{(i)} \right) - 2A_{12}^{(i)2} \right]. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$, $C_3^{(i)}$, $C_4^{(i)}$, входящие в выражения (10), определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 & C_3^{(1)} \left[4A_{12}^{(1)} (d_3^{(1)} + 1) + A_{11}^{(1)} d_3^{(1)} (2t^{(1)} - 1) \right] \rho_c^{1/2+t^{(1)}} + 2C_2^{(1)} \left[2A_{12}^{(1)} (d_2^{(1)} + 1) - A_{11}^{(1)} d_2^{(1)} \right] + \\
 & + C_4^{(1)} \left[4A_{12}^{(1)} (d_4^{(1)} + 1) - A_{11}^{(1)} d_4^{(1)} (2t^{(1)} + 1) \right] \rho_c^{1/2-t^{(1)}} + 4 \left[H_r^{(1)} (A_{11}^{(1)} + A_{12}^{(1)}) + H_\theta^{(1)} A_{12}^{(1)} \right] \rho_c^3 = \\
 & = 2C_2^{(2)} \left[2A_{12}^{(2)} (d_2^{(2)} + 1) - A_{11}^{(2)} d_2^{(2)} \right] + C_3^{(2)} \left[4A_{12}^{(2)} (d_3^{(2)} + 1) + A_{11}^{(2)} d_3^{(2)} (2t^{(2)} - 1) \right] \rho_c^{1/2+t^{(2)}} + \\
 & + C_4^{(2)} \left[4A_{12}^{(2)} (d_4^{(2)} + 1) - A_{11}^{(2)} d_4^{(2)} (2t^{(2)} + 1) \right] \rho_c^{1/2-t^{(2)}} + 4 \left[H_r^{(2)} (A_{11}^{(2)} + A_{12}^{(2)}) + H_\theta^{(2)} A_{12}^{(2)} \right] \rho_c^3, \\
 & -C_1^{(2)} + d_2^{(2)} C_2^{(2)} \rho_2^{-1} + d_3^{(2)} C_3^{(2)} \rho_2^{-1/2+t^{(2)}} + d_4 C_4^{(2)} \rho_2^{-1/2-t^{(2)}} = -H_r^{(2)} \rho_2^2, \\
 & C_1^{(2)} + C_2^{(2)} \rho_2^{-1} + C_3^{(2)} \rho_2^{-1/2+t^{(2)}} + C_4^{(2)} \rho_2^{-1/2-t^{(2)}} = -H_\theta^{(2)} \rho_2^2, \\
 & -C_1^{(1)} + d_2^{(1)} C_2^{(1)} \rho_c^{-1} + d_3^{(1)} C_3^{(1)} \rho_c^{-1/2+t^{(1)}} + d_4 C_4^{(1)} \rho_c^{-1/2-t^{(1)}} + H_r^{(1)} \rho_c^2 = \\
 & = -C_1^{(2)} + d_2^{(2)} C_2^{(2)} \rho_c^{-1} + d_3^{(2)} C_3^{(2)} \rho_c^{-1/2+t^{(2)}} + d_4 C_4^{(2)} \rho_c^{-1/2-t^{(2)}} + H_r^{(2)} \rho_c^2, \\
 & 2C_2^{(1)} \left[2A_{12}^{(1)} (d_2^{(1)} + 1) - A_{11}^{(1)} d_2^{(1)} \right] \rho_1^{1/2+t^{(1)}} + \\
 & + C_3^{(1)} \left[4A_{12}^{(1)} (d_3^{(1)} + 1) + A_{11}^{(1)} d_3^{(1)} (2t^{(1)} - 1) \right] \rho_1^{1+2t^{(1)}} + \\
 & + C_4^{(1)} \left[4A_{12}^{(1)} (d_4^{(1)} + 1) - A_{11}^{(1)} d_4^{(1)} (2t^{(1)} + 1) \right] \rho_1 = \\
 & = -4 \left[H_r^{(1)} (A_{11}^{(1)} + A_{12}^{(1)}) + H_\theta^{(1)} A_{12}^{(1)} \right] \rho_1^{7/2+t^{(1)}}, \\
 & C_1^{(1)} + C_2^{(1)} \rho_c^{-1} + C_3^{(1)} \rho_c^{-1/2+t^{(1)}} + C_4^{(1)} \rho_c^{-1/2-t^{(1)}} + H_\theta^{(1)} \rho_c^2 = \\
 & = C_1^{(2)} + C_2^{(2)} \rho_c^{-1} + C_3^{(2)} \rho_c^{-1/2+t^{(2)}} + C_4^{(2)} \rho_c^{-1/2-t^{(2)}} + H_\theta^{(2)} \rho_c^2, \\
 & 2C_2^{(1)} (d_2^{(1)} + 2) \rho_1^{1/2+t^{(1)}} + C_3^{(1)} (2d_3^{(1)} - 2t^{(1)} + 3) \rho_1^{1+2t^{(1)}} + \\
 & + C_4^{(1)} (2d_4^{(1)} + 2t^{(1)} + 3) \rho_1 = 2(H_\theta^{(1)} - H_r^{(1)}) \rho_1^{7/2+t^{(1)}}, \\
 & 2 \left[C_2^{(1)} A_{44}^{(1)} (d_2^{(1)} + 2) - C_2^{(2)} A_{44}^{(2)} (d_2^{(2)} + 2) \right] + C_3^{(1)} A_{44}^{(1)} (2d_3^{(1)} - 2t^{(1)} + 3) \rho_c^{1/2+t^{(1)}} + \\
 & + 2A_{44}^{(1)} (H_r^{(1)} - H_\theta^{(1)}) \rho_c^3 + A_{44}^{(1)} C_4^{(1)} (2d_4^{(1)} + 2t^{(1)} + 3) \rho_c^{1/2-t^{(1)}} = \\
 & = C_3^{(2)} A_{44}^{(2)} (2d_3^{(2)} - 2t^{(2)} + 3) \rho_c^{1/2+t^{(2)}} + \\
 & + 2A_{44}^{(2)} (H_r^{(2)} - H_\theta^{(2)}) \rho_c^3 + A_{44}^{(2)} C_4^{(2)} (2d_4^{(2)} + 2t^{(2)} + 3) \rho_c^{1/2-t^{(2)}},
 \end{aligned}$$

получаемых при удовлетворении граничных условий (8), и не приводятся ввиду громоздкости.

Последовательная подстановка уравнений (10) в геометрические (1) и определяющие (3) соотношения позволяет записать выражения для радиальных

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{(i)} = & \frac{1}{2} r^{-3/2-s^{(i)}} \left\{ D_1^{(i)} \left[4A_{12}^{(i)} - A_{11}^{(i)} (1+2s^{(i)}) \right] + \right. \\
 & \left. + D_2^{(i)} \left[4A_{12}^{(i)} - A_{11}^{(i)} (1-2s^{(i)}) \right] r^{2s^{(i)}} \right\} + \\
 & + \left\{ 2A_{12}^{(i)} \left[(1+d_2^{(i)}) C_2^{(i)} r^{-2} + (1+d_3^{(i)}) C_3^{(i)} r^{-3/2+t^{(i)}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1+d_4^{(i)}) C_4^{(i)} r^{-3/2-t^{(i)}} + (H_r^{(i)} + H_\theta^{(i)}) r \right] - \right. \\
 & - \frac{1}{2} A_{11}^{(i)} \left[2d_2^{(i)} C_2^{(i)} r^{-2} + (1-2t^{(i)}) d_3^{(i)} C_3^{(i)} r^{-3/2+t^{(i)}} + \right. \\
 & \left. \left. + (1+2t^{(i)}) d_4^{(i)} C_4^{(i)} r^{-3/2-t^{(i)}} - 4H_r^{(i)} r \right] \right\} \cos\theta,
 \end{aligned} \tag{11}$$

окружных

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} = \sigma_{\theta\theta}^{(i)} = & \frac{1}{2} r^{-3/2-s^{(i)}} \left\{ D_1^{(i)} \left[2(A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)}) - A_{12}^{(i)} (1+2s^{(i)}) \right] + \right. \\
 & \left. + D_2^{(i)} \left[2(A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)}) - A_{12}^{(i)} (1-2s^{(i)}) \right] r^{2s^{(i)}} \right\} + \\
 & + \left\{ (A_{22}^{(i)} + A_{23}^{(i)}) \left[(1+d_2^{(i)}) C_2^{(i)} r^{-2} + (1+d_3^{(i)}) C_3^{(i)} r^{-3/2+t^{(i)}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1+d_4^{(i)}) C_4^{(i)} r^{-3/2-t^{(i)}} + (H_r^{(i)} + H_\theta^{(i)}) r \right] - \right. \\
 & - \frac{1}{2} A_{12}^{(i)} \left[2d_2^{(i)} C_2^{(i)} r^{-2} + (1-2t^{(i)}) d_3^{(i)} C_3^{(i)} r^{-3/2+t^{(i)}} + \right. \\
 & \left. \left. + (1+2t^{(i)}) d_4^{(i)} C_4^{(i)} r^{-3/2-t^{(i)}} - 4H_r^{(i)} r \right] \right\} \cos\theta
 \end{aligned} \tag{12}$$

и касательных

$$\begin{aligned}
 \tau_{r\theta}^{(i)} = & -A_{44}^{(i)} \left[(2+d_2^{(i)}) C_2^{(i)} r^{-2} + \left(\frac{3}{2} + d_3^{(i)} - t^{(i)} \right) C_3^{(i)} r^{-3/2+t^{(i)}} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{3}{2} + d_4^{(i)} + t^{(i)} \right) C_4^{(i)} r^{-3/2-t^{(i)}} + (H_r^{(i)} - H_\theta^{(i)}) r \right] \sin\theta.
 \end{aligned} \tag{13}$$

напряжений.

Из полученных решений в частном случае, при замене $E^{(i)} = E_r^{(i)} = E_\theta^{(i)}$, $\mu^{(i)} = \mu_{r\theta}^{(i)} = \mu_{\theta r}^{(i)}$ и $G^{(i)} = G_{r\theta}^{(i)} = E^{(i)} / (2 + 2\mu^{(i)})$, следуют выражения для напряжений, деформаций и перемещений в точках, находящихся в поле гравитационных сил полых и составных изотропных сфер с аналогичными граничными условиями [6, 7].

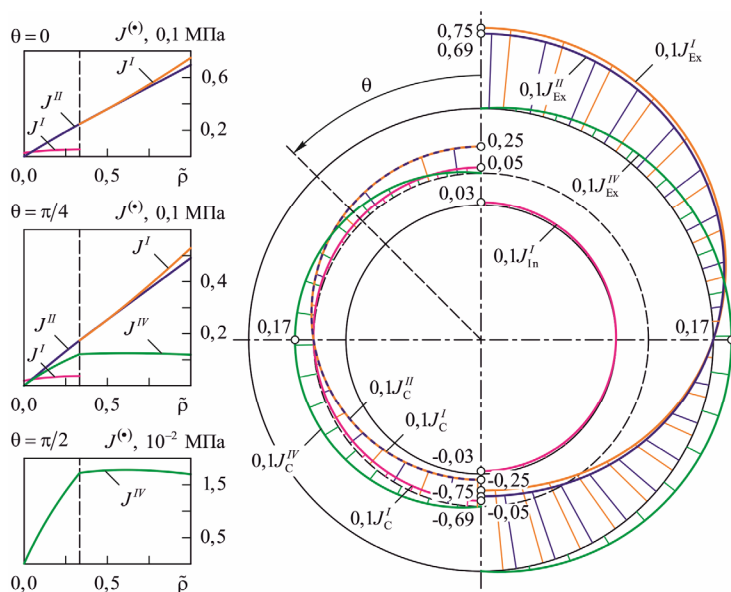


Рис. 1. Распределение инвариантов тензора напряжений на закрепленной внешней ($J_{Ex}^{(8)}$), свободной от нагрузок внутренней ($J_{In}^{(8)}$) и контактной ($J_C^{(8)}$) поверхностях

Полученные аналитические решения (11)–(13) дают возможность анализировать вклад массовых сил в напряженное состояние железобетонных монолитных крепей сферических горных выработок, окруженных массивом осадочных пород, а также провести уточненную оценку начальной прочности и определить области, где может быть инициировано разрушение. Поскольку горные породы и железобетон имеют ярко выраженную анизотропию свойств, прочностной анализ элементов конструкций и сооружений, изготовленных из таких материалов, необходимо осуществлять на основе многокритериального подхода [6], рассматривая различные механизмы частичного или полного исчерпания несущей способности, характерные для анизотропных материалов. В работе [7] были введены независимые величины

$$J^I = \sigma_{\theta\theta}, \quad J^{II} = \sigma_{rr}, \quad J^{III} = \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\tau_{\varphi\theta}^2}, \quad J^{IV} = \sqrt{\tau_{\varphi r}^2 + \tau_{\theta r}^2},$$

инвариантные относительно ортогональных преобразований, допустимых над сферически трансверсально-изотропным телом, которые позволяют описать различные механизмы разрушения от растяжения или сжатия в окружном или меридиональном и радиальном направлении от сдвигов по поверхностям изотропии и в диаметральной плоскости соответственно.

На рис. 1 и 2 представлены распределения ненулевых инвариантов тензора напряжений $J^{(k)}$ в железобетонной сферической крепи ($E_\theta=40,0$ ГПа, $E_r=25,0$ ГПа, $G_{r\theta}=11,0$ ГПа, $\mu_{\theta\varphi}=0,075$, $\mu_{r\theta}=0,15$ и $\gamma=40$ кН/м³), окруженной массивом осадочных пород ($E_\theta=55,0$ ГПа, $E_r=23,0$ ГПа, $G_{r\theta}=29,0$ ГПа, $\mu_{\theta\varphi}=0,29$, $\mu_{r\theta}=0,32$ и $\gamma=27$ кН/м³) при $p=0$ МПа вдоль меридиональной и обезразмеренной радиальной координаты $\tilde{\rho}=(r-\rho_1)/(\rho_2-\rho_1)$. Параметры геометрии были выбраны следующими: $\rho_1=2,5$ м, $\rho_c=3,1$ м, $\rho_2=4,3$ м (см. рис. 1) и $\rho_2=9,0$ м (см. рис. 2).

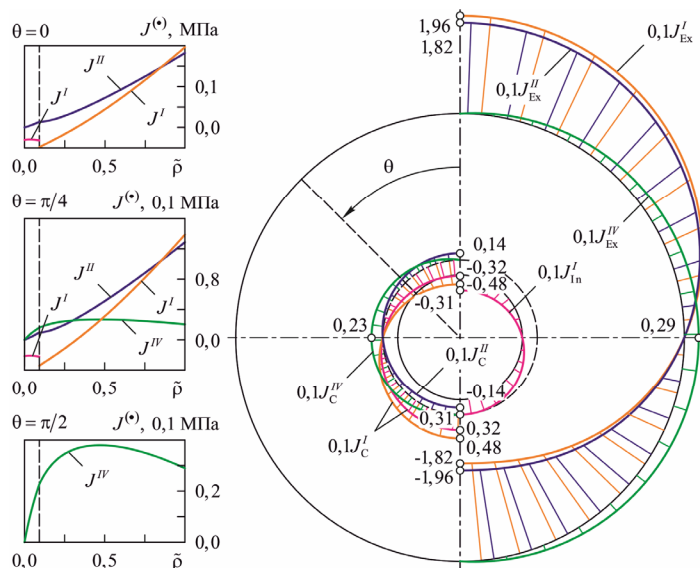


Рис. 2. Распределение инвариантов тензора напряжений на закрепленной внешней ($J_{Ex}^{(k)}$), свободной от нагрузок внутренней ($J_{In}^{(k)}$) и контактной ($J_C^{(k)}$) поверхностях

Как видим, на свободной от нагрузок внутренней поверхности монолитной железобетонной сферической крепи ненулевым является только первый инвариант J^I , который нелинейно распределен вдоль $\tilde{\rho}$, принимает положительные значения в точках, принадлежащих своду, и имеет скачок на поверхности контакта. При заданных материальных константах существенное влияние на характер распределения J^I оказывает соотношение радиусов рассматриваемой крепи и окружающего массива осадочных пород. Так, например, увеличение толщины породного массива приводит к смене знака первого инварианта в железобетонной крепи.

Второй инвариант J^{II} при изменении радиальной координаты от свободной поверхности к закрепленной всюду возрастает по абсолютной величине, не принимая при этом в точках свода отрицательных, а в нижней полусфере – положительных значений. Поскольку в точках, принадлежащих вертикальной диаметральной оси, J^I и J^{II} достигают своих наибольших по абсолютной величине значений, эти точки являются наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения крепи от растяжения или сжатия в окружном и радиальном направлениях.

Третий инвариант J^{III} во всех точках железобетонной крепи и окружающего массива осадочных пород принимает нулевые значения. Следовательно, при заданных условиях нагружения и типе упругой симметрии материала механизмы разрушения от сдвига по поверхности изотропии не реализуются.

В точках, расположенных на вертикальной диаметральной оси четвертый инвариант J^{IV} равен нулю, возрастает по мере увеличения угла θ , достигая своих максимальных значений при $\theta = \pi/2$. Кроме того, в радиальном направлении от внешней поверхности монолитной крепи к внутренней J^{IV} всюду убывает, достигая нулевых значений на свободной поверхности. Таким образом, наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения крепи по механизму сдвига являются точки горизонтальной диаметральной плоскости.

Библиографический список

1. Зайцев А.В., Фукалов А.А. Упругое равновесие тяжелой трансверсально-изотропной толстостенной сферы с жестко закрепленной внутренней поверхностью // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – № 5(21). – С. 85–95.

2. Фукалов А.А., Кутергин А.В. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения // Вестник Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (4). – С. 1831–1833.

3. Распределение напряжений в поперечных сечениях контейнеров из стеклопластика и полимербетона, используемых для длительного хранения высокоагрессивных сред / А.В. Зайцев, А.В. Кислицын, А.В. Кутергин, А.А. Фукалов // Изв. Самар. НЦ РАН. – 2012. – Т. 14, № 4(5). – С. 1230–1234.

4. Зайцев А.В., Кутергин А.В. Упругое равновесие тяжелого горизонтального толстостенного ортотропного цилиндра, находящегося под действием неравномерно распределенного бокового давления // Вестник Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. 2010. – № 4. – С. 36–45.

5. Зайцев А.В., Кислицын А.В. Об одном решении задачи Ламе для составного протяженного элемента конструкции, состоящего из посаженных с натягом толстостенного трансверсально-изотропного внешнего цилиндра на соосный изотропный внутренний // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2007. – № 1(14). – С. 164–167.

6. Аналитическое исследование упругого равновесия полой сферы, жестко закрепленной по внешнему контуру / Л.Л. Кожевникова, Г.Б. Кузнецов, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // Проблемы прочности. – 1974. – № 9. – С. 20–23.

7. Кузнецов Г.Б. Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических и сферических тел. – М.: Наука, 1979. – 112 с.

8. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1997. – 288 с.

9. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.

References

1. Zaitsev A.V., Fukalov A.A. Uprugoe ravnovesie tyazhelyy transversalno-izotropnoy tolstostennoy sfery s zhestko zakreplennoy vnutrenney poverkhnosti [Elastic equilibrium state of thick-walled heavy transversally-isotropic spheres fixed on the interior surface]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*, 2010, no. 5(21), pp. 85-95.

2. Fukalov A.A., Kutergin A.V. Tochnye analiticheskie resheniya zadach o ravnovesii uprugikh anizotropnykh tyazhelykh tel s centralnoy i osevoy simmetriey i ikh prilozheniya [Exact analytical solutions to problems of the equilibrium state of elastic anisotropic heavy central and axial-symmetric bodies and their applications]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta imeni N.I. Lobachevskogo*, 2011, no. 4 (4), pp. 1831-1833.

3. Zaitsev A.V., Kislitsyn A.V., Kutergin A.V. Fukalov A.A. Raspredelenie napryazheniy v poperechnykh secheniyakh konteynerov iz stekloplastika i polimerbetona, ispolzuemykh dlya dlitel'nogo khraneniya vysokogressivnykh sred [Stress distribution in the cross-sections of containers made of fiberglass and polymer concrete, used for long-term storage of highly aggressive media]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk*, 2012, vol. 14, no. 4(5), pp. 1230-1234.

4. Zaitsev A.V., Kutergin A.V. Uprugoe ravnovesie tyazhelogo gorizontal'nogo tolstostennogo ortotropnogo tsilindra, nakhodyaschegosya pod deistviem neravnomerno raspredelennogo bokovogo davleniya [Elastic equilibrium state of heavy horizontal thick-walled orthotropic cylinder under the action of non-uniformly distributed lateral pressure]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2010, no. 4. pp. 36-45.

5. Zaitsev A.V., Kislitsyn A.V. Ob odnom reshenii zadachi Lamé dlya sostavnogo protyazhennogo elementa konstrukcii, sostoyaschego iz posazhennykh s natyagom tolstostennogo transversalno-izotropnogo vneshnego tsilindra na soosnyy izotropniy vnutrenniy [On A solution of Lamé problem for a combined long structural element, consisting of thick-walled transversely isotropic external cylinder spanned by the on-axis isotropic internal one]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*, 2007, no. 1(14), pp. 164-167

6. Kozhevnikova L.L., Kuznetsov G.B., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Analiticheskoe issledovanie uprugogo ravnovesiya poloy sfery, zhestko zak-

replennoy po vneshnemu konturu [Analytical study of the elastic equilibrium of a hollow sphere, rigidly fixed on the outer edges]. *Problemy prochnosti*, 1974, no. 9, pp. 20-23.

7. Kuznetsov G.B. Uprugost, vyazkouprugost i dlitelnaya prochnost tsilindricheskikh i sfericheskikh tel [Elastic, viscoelastic and long-term strength of cylindrical and spherical bodies]. Moscow: Nauka, 1979. 112 p.

8. Vil'deman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Mechanics of inelastic deformation and failure of composite materials]. Moscow: Nauka, 1997. 288 p.

9. Pobedrya B.E. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. Moscovskiy gosudarstvenniy universitet, 1984. 336 p.

Сведения об авторах

Зайцев Алексей Вячеславович (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики композиционных материалов и конструкций Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: zav@pstu.ru).

Соколкин Юрий Викторович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики композиционных материалов и конструкций Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: sokolkin@pstu.ru).

Фукалов Антон Александрович (Пермь, Россия) – аспирант кафедры механики композиционных материалов и конструкций Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: mr_aa@mail.ru).

About the authors

Zaitsev Alexey Vyacheslavovich (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department for Mechanics of Composite Materials and Constructions, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: zav@pstu.ru).

Sokolkin Yuriy Viktorovich (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department for Mechanics of Composite Materials and Constructions, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: sokolkin@pstu.ru).

Fukalov Anton Alexandrovich (Perm, Russian Federation) – Doctoral Student of the Department for Mechanics of Composite Materials and Constructions, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: mr_aa@mail.ru).

Получено 15.11.2013