

УДК 593.3

**К.Б. Устинов**Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Москва, Россия**ЕЩЕ РАЗ К ЗАДАЧЕ О ПОЛУПЛОСКОСТИ,  
ОСЛАБЛЕННОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ,  
ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ГРАНИЦЕ**

Получено и исследовано однородное решение задачи о полубесконечной трещине, параллельной границе полуплоскости в условиях плоской деформации. Путем применения двухстороннего преобразования Лапласа задача была сведена к матричной задаче Римана [1–4]. Получены асимптотические выражения для напряжений вблизи кончика трещины (коэффициенты интенсивности напряжений, КИН) и асимптотические выражения для смещений берегов трещины вдали от ее кончика. Выражения для КИН совпадают с результатами работ [1–4]. Показано, что ведущие члены асимптотики смещений берегов трещины вдали от кончика соответствуют смещениям балки (пластины), подверженной действию главных вектора и момента при граничных условиях типа обобщенной упругой заделки, т.е. условиях пропорциональности угла поворота и двух компонент вектора смещений в точке заделки главному моменту и двум компонентам главного вектора внешней нагрузки. Данная связь выражается посредством матрицы  $3 \times 3$  коэффициентов эффективной упругой заделки. Получены выражения для компонент данной матрицы в форме интегралов. Некоторые из компонент матрицы, для которых это возможно, вычислены также из сравнения скорости высвобождения упругой энергии, посчитанной через КИН и через работу сил при деформировании эквивалентной балки. Для трещины конечной длины, параллельной границе, полученные выражения компонент матрицы упругой заделки являются асимптотиками для длинных трещин. Проведено сравнение с имеющимися численными данными. Полученное решение представляется полезным для решения задач о деформировании балочных и консольных конструкций, а также задач об отслоении покрытий и потери ими устойчивости.

**Ключевые слова:** отслоение, интерфейсная трещина, матричная факторизация, упругая заделка.

**K.B. Ustinov**

Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation

**ONCE MORE TO THE PROBLEM ON A HALF-PLANE,  
WEAKENED BY A SEMI-INFINITE CRACK, PARALLEL  
TO ITS BOUNDARY**

The solution of a uniform problem on semi-infinite crack parallel to free in plane strain conditions is obtained and studied. Following [1–4] by using Laplace transform the problem is reduced to matrix Riemann problem. The asymptotic expressions for stress field near the crack tip (stress intensity factor, SIF) as well as the asymptotic expressions the crack surface displacements far apart from the crack tip were obtained. The obtained expressions for SIFs coincides with the expressions [1–4]. It is shown that the leading terms of the displacements correspond to displacement of a beam (plate) loaded by the total force and moment far from the point of its conjugation with the elastic half-plane, at which the boundary conditions are of the type of elastic clamping, i.e. the angle of rotation and two components of displacement at the clamped point are proportional to the acting total force (two components) and bending moment. The relation is expressed by means of 3x3 matrix of coefficients of the effective elastic clamping. The expressions for the coefficients of proportionality related to the bending moment and longitudinal force are obtained in the form of integrals. Some components of the matrix were obtained also by comparison of two expressions for the elastic energy release: calculated from SIFs and calculated by the work of forces while the equivalent beam deflecting. The obtained results were compared with the available numerical data. The obtained solution may be useful for solving problems related to deformation of beam and console structures as well as problems of delamination and buckling of coatings.

**Keywords:** delamination, interface crack, matrix factorization, elastic clamping.

**Введение**

Эффективное и элегантное решение задачи о полуплоскости, ослабленной полубесконечной трещиной, параллельной границе, путем применения преобразования Лапласа и сведения ее к матричной задаче Римана было дано в работах [1–4]. Ключевым моментом решения являлась факторизация матричного коэффициента. В результате были получены асимптотические представления для трансформант поля напряжений на линии продолжения трещины и в конечном счете вычислены коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в зависимости от главных вектора и момента напряжений, действующих на продолжении трещины. Однако интерес к задаче не ограничивается вычислением КИН. В частности, из указанного решения можно извлечь асимптотику смещений берегов трещины вдали от ее кончика. При этом при наличии ненулевых главных вектора и момента действующих нагрузок ведущие члены асимптотики смещений берегов трещины будут,

очевидно, соответствовать смещениям балки (пластины), подверженной действию указанных главных вектора и момента при некоторых граничных условиях. Следует подчеркнуть, что эти граничные условия отнюдь не будут условиями жесткой заделки в месте кончика трещины. Они будут представлять собой, как это будет продемонстрировано ниже, условия обобщенной упругой заделки, т.е. условия пропорциональности смещений и угла поворота в точке заделки действующим компонентам главных вектора и момента нагрузки. Вычисление коэффициентов матрицы упругой заделки для рассматриваемой конфигурации и является основной целью настоящей работы. Попутно представлен более подробный вывод некоторых результатов работ [1–4] с устранением неточностей в промежуточных формулах, возникших, по-видимому, при наборе. Повсюду, по возможности, сохранены обозначения работ [1–4].

### 1. Постановка задачи

Рассматривается однородная изотропная упругая полуплоскость  $y < 1$  с проходящей вдоль ее границы полубесконечной трещиной  $y=0, x < 0$  (рис. 1). В постановке плоской деформации рассматривается однородная задача: предполагается, что все поверхности свободны от напряжений,

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \text{ при } y=1, \text{ и } y=0, x < 0, \quad (1.1)$$

а нагрузка с эквивалентными главными силой  $(T, N)$  и моментом  $M$  приложена на бесконечности, так что

$$M = -\int_0^{\infty} x \sigma_{yy} dx, \quad N = \int_0^{\infty} \sigma_{yy} dx, \quad T = \int_0^{\infty} \sigma_{xy} dx. \quad (1.2)$$

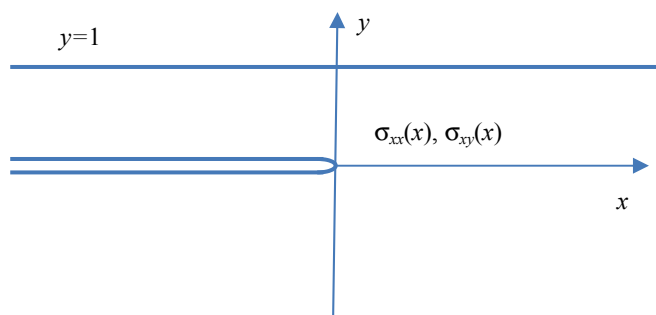


Рис. 1. Геометрия области

Все величины, относящиеся к полуплоскости  $y < 0$ , будут обозначаться индексом 1, все величины, относящиеся к полосе  $0 < y < 1$ , – индексом 2. Условия сопряжения на границе имеют вид

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)} \quad \text{при } y=0, x>0. \quad (1.3)$$

Здесь  $u, v$  – компоненты вектора смещения;  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  – компоненты тензора напряжений.

В окрестности нуля поле напряжений имеет корневую особенность

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} + O(\sqrt{x}). \quad (1.4)$$

Применяя двустороннее преобразование Лапласа ко всем величинам, имеем для образов

$$F_-(p) = \frac{E}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} v^{(2)}(x,0) - v^{(1)}(x,0) \\ u^{(2)}(x,0) - u^{(1)}(x,0) \end{Bmatrix} e^{-px} dx, \quad (1.5)$$

$$F_+(p) = \int_0^{\infty} \begin{Bmatrix} \sigma_{yy}(x,0) \\ \sigma_{xy}(x,0) \end{Bmatrix} e^{-px} dx, \quad (1.6)$$

которые должны подчиняться матричному уравнению задачи Римана [1–4]

$$F_-(p) = K(p) F_+(p), \quad (1.7)$$

где

$$K(p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = \frac{\sin p \cos p + p}{d} - p \operatorname{sgn} \left( \frac{p}{i} \right), \quad a_{12} = -a_{21} = -\frac{p^2}{d},$$

$$a_{22} = \frac{\sin p \cos p - p}{d} - p \operatorname{sgn} \left( \frac{p}{i} \right), \quad d = \sin^2 p - p^2. \quad (1.8)$$

$p$  принадлежит мнимой оси. Подробности вывода уравнений (1.7), (1.8) даны в [4].

Основная сложность задачи состоит в факторизации матричного коэффициента  $K(p)$ , т.е. в представлении его в виде

$$K(p) = X_-^{-1}(p)X_+(p), \quad (1.9)$$

где функции  $X_{\pm}(p)$  голоморфны в правой и левой полуплоскости комплексного переменного  $p$ . После нахождения  $X_{\pm}(p)$  окончательное решение задачи дается с помощью теоремы Лиувилля

$$F_+(p) = X_+^{-1}(p)\Pi(p), \operatorname{Re}(p) > 0 \text{ и } F_-(p) = X_-^{-1}(p)\Pi(p), \operatorname{Re}(p) < 0. \quad (1.10)$$

Здесь  $\Pi(p)$  – векторный полином, подлежащий определению.

Условия (1.2), (1.4) после трансформации принимают соответственно вид

$$F_+(p) = \begin{Bmatrix} N + Mp + O(p) \\ T + O(1) \end{Bmatrix}, \operatorname{Re} p \rightarrow 0+, \quad (1.11)$$

$$F_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} + O(p^{-3/2}), \operatorname{Re} p \rightarrow +\infty. \quad (1.12)$$

Данные условия будут использованы для определения  $\Pi(p)$ .

## 2. Решение задачи Римана

Матрицы  $X_{\pm}^{\pm 1}(p)$  могут быть [1–4] представлены в виде (в оригинале имеется опечатка – пропущены степени у  $\Lambda_{\pm}(p)$ )

$$\begin{aligned} X_+(p) &= \Lambda_+(p) [I \operatorname{ch}(\phi\beta_+) + B(p) \operatorname{sh}(\phi\beta_+)], \\ X_+^{-1}(p) &= \Lambda_+^{-1}(p) [I \operatorname{ch}(\phi\beta_+) - B(p) \operatorname{sh}(\phi\beta_+)], \\ X_-(p) &= \Lambda_-(p) [I \operatorname{ch}(\phi\beta_-) + B(p) \operatorname{sh}(\phi\beta_-)], \\ X_-^{-1}(p) &= \Lambda_-^{-1}(p) [I \operatorname{ch}(\phi\beta_-) - B(p) \operatorname{sh}(\phi\beta_-)]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $I$  – единичная матрица,

$$B(p) = \phi^{-1}(p) \begin{pmatrix} 1 & -p \\ p & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\varphi(p) = \sqrt{1-p^2}. \quad (2.3)$$

Функции  $\Lambda_{\pm}(p), \beta_{\pm}(p)$  являются решениями скалярных задач Римана

$$\Lambda_{-}^{-1}(p)\Lambda_{+}(p) = \Delta^{1/2}(p), \quad p \in L, \quad (2.4)$$

$$\beta_{+}(p) - \beta_{-}(p) = \varphi^{-1}(p)\varepsilon(p), \quad p \in L. \quad (2.5)$$

Здесь  $L$  – контур интегрирования, проходящий сверху вниз по мнимой оси. Определитель  $\Delta(p)$  и показатель  $\varepsilon(p)$  матрицы  $K(p)$  определяются как

$$\Delta(p) = \lambda_1(p)\lambda_2(p), \quad (2.6)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{2} \frac{\ln \lambda_1(p)}{\lambda_2(p)}. \quad (2.7)$$

Собственные числа  $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$  матрицы  $K(p)$  могут быть представлены в виде

$$\lambda_1(p) = -2\operatorname{ctg}^3 p A\left(\frac{p}{i}\right), \quad \lambda_2(p) = 2\operatorname{ctg} p B\left(\frac{p}{i}\right). \quad (2.8)$$

Здесь введены обозначения

$$2A(s) = |\operatorname{th}^3 s| + \operatorname{th} s \frac{\operatorname{th} s + s\sqrt{1+s^2} \operatorname{ch}^{-2} s}{1-s^2 \operatorname{sh}^{-2} s}, \quad 2B(s) = |\operatorname{th} s| + \frac{1-s\sqrt{1+s^2} \operatorname{sh}^{-1} \operatorname{ch}^{-1} s}{1-s^2 \operatorname{sh}^{-2} s}. \quad (2.9)$$

С учетом (2.6)–(2.8) скалярные задачи Римана могут быть записаны в виде

$$\Lambda_{-}^{-1}(p)\Lambda_{+}(p) = 2i \operatorname{ctg}^2 p \sqrt{A\left(\frac{p}{i}\right)B\left(\frac{p}{i}\right)}, \quad p \in L, \quad (2.10)$$

$$\beta_{+}(p) - \beta_{-}(p) = \varphi^{-1}(p) \frac{1}{2} \ln \left[ -\operatorname{ctg}^2 p \frac{A\left(\frac{p}{i}\right)}{B\left(\frac{p}{i}\right)} \right], \quad p \in L. \quad (2.11)$$

Решение задачи (2.4) или (2.10) представлено в [1–4] с использованием интегралов типа Коши:

$$\Lambda_+(p) = \frac{\pi \Gamma^2\left(\frac{1+p}{2} + \frac{p}{\pi}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{p}{\pi}\right)} J_+(p), \quad \Lambda_-(p) = \frac{p^2 \Gamma^2\left(\frac{1-p}{2} - \frac{p}{\pi}\right)}{2\pi i \Gamma^2\left(1 - \frac{p}{\pi}\right)} J_-(p), \quad (2.12)$$

$$J_{\pm}(p) = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[A(s)B(s)] \frac{ds}{is-p}\right\}. \quad (2.13)$$

Здесь внеинтегральные члены получены факторизацией тангенса посредством гамма-функции.

Решение задачи (2.5) представлено в [1–4] в виде

$$\beta_+(p) = \beta_{0+}(p) + \beta_{s+}(p), \quad (2.14)$$

$$\beta_-(p) = \beta_{0-}(p) + \beta_{s-}(p) + \beta_{r-}(p). \quad (2.15)$$

Вспомогательные функции  $\beta_{s\pm}(p), \beta_{r-}(p)$ ,

$$\beta_{s+}(p) = \frac{1}{4} \int_L \frac{dt}{\varphi(t)(t-p)} = -\frac{\ln(p+i\sqrt{1-p^2})}{2\sqrt{1-p^2}}, \quad \beta_{s-}(p) = -\beta_{s+}(-p), \quad (2.16)$$

$$\beta_{r-}(p) = -\frac{1}{2} \int_L \frac{\operatorname{sgn}\left(\frac{t}{i}\right) dt}{\varphi(t)(t-p)} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \ln \frac{\sqrt{1-p^2}-1}{p}, \quad (2.17)$$

введены таким образом, чтобы задача Римана

$$\beta_{0+}(p) - \beta_{0-}(p) = \varphi^{-1}(p) \varepsilon(p) - \beta_{s+}(p) - \beta_{s-}(p) - \beta_{r-}(p), \quad p \in L \quad (2.18)$$

решалась посредством интегралов типа Коши (подынтегральная функция удовлетворяла бы условиям Гельдера):

$$\beta_{0\pm}(p) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[ \sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}} \frac{\operatorname{sch} s}{\sqrt{1+s^2+1}} \right] \frac{ds}{is-p}. \quad (2.19)$$

Здесь исправлена опечатка в работе [2] (отсутствующая в [1]), состоящая в отсутствии минуса в показателе степени. Информация о порядке ведения функций  $\beta_{s\pm}(p), \beta_{r-}(p)$  содержится в работах [1–4]. Однако наиболее существенным является то, что введенные, не так уж важно

в силу каких соображений, функции (2.14)–(2.19) являются решением задачи (2.5), что можно проверить непосредственно.

Посредством формул настоящего параграфа матричная задача факторизации (1.9) является решенной. Для решения задачи (1.7) остается определить векторный полином  $\Pi(p)$ , входящий в (1.10). Для этого, а также для получения асимптотических выражений для напряжений и смещений понадобятся асимптотические разложения интегралов (2.13), (2.19) и их комбинаций.

### 3. Некоторые дополнительные вспомогательные функции

Подынтегральные функции (2.13), (2.19) имеют в нуле разрыв первой производной. Данный разрыв соответствует появлению в разложениях вблизи нуля факторизующих функций членов вида  $p \log p$ . Представляется удобным выделить соответствующие функции, терпящие подобный разрыв, для которых факторизация выполнима.

Так, для задачи (2.13) в качестве подобной функции можно выбрать

$$\varphi_1 = \frac{\Phi_{1+}(p)}{\Phi_{1-}(p)} = \frac{1+b \left| \frac{p}{i} \right|}{\sqrt{1-b^2 p^2}}, \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(\pm\infty) = 1, \quad (3.1)$$

$$\Phi_{1\pm}(p) = \Phi_{N\pm}(p) \Phi_{D\pm}(p), \quad (3.2)$$

$$\frac{\Phi_{N+}(p)}{\Phi_{N-}(p)} = 1 + b \left| \frac{p}{i} \right|, \quad (3.3)$$

$$\frac{\Phi_{D+}(p)}{\Phi_{D-}(p)} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2 p^2}}. \quad (3.4)$$

Знаменатель (3.1) при этом факторизуется элементарно:

$$\Phi_{D\pm}(p) = (1 \pm bp)^{\mp 1/2}. \quad (3.5)$$

Факторизация числителя (3.1) может быть осуществлена [5] путем последовательного логарифмирования и дифференцирования выражения (3.1):



$$\frac{\Phi'_{N+}(p)}{\Phi_{N+}(p)} - \frac{\Phi'_{N-}(p)}{\Phi_{N-}(p)} = \frac{b \operatorname{sgn}\left(\frac{p}{i}\right)}{1 + b \left| \frac{p}{i} \right|}. \quad (3.6)$$

Данная процедура для Фурье-образов подобной функции проделывалась в работах [6, 7]. Несмотря на наличие разрыва правой части в нуле, частные  $\Phi'_{N+}(p)/\Phi_{N+}(p)$ ,  $\Phi'_{N-}(p)/\Phi_{N-}(p)$  могут быть вычислены с помощью интегралов Коши:

$$\frac{\Phi'_{N\pm}(p)}{\Phi_{N\pm}(p)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b \operatorname{sgn}\left(\frac{z}{i}\right)}{1 + b \left| \frac{z}{i} \right|} \frac{dz}{z - p}. \quad (3.7)$$

Вычисляя интегралы в (3.7), получаем

$$\frac{\Phi'_{N+}(p)}{\Phi_{N+}(p)} = ib \frac{\pi b p - 2 \ln(bp)}{2\pi(b^2 p^2 + 1)}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\Phi'_{N-}(p)}{\Phi_{N-}(p)} = -ib \frac{\pi b p + 2 \ln(-bp)}{2\pi(b^2 p^2 + 1)}. \quad (3.9)$$

И решая получившиеся дифференциальные уравнения, имеем

$$\Phi_{N+}(p) = \exp \left( \frac{i}{\pi} \int_0^{bp} \frac{\pi \frac{\zeta}{2} - \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta \right), \quad (3.10)$$

$$\Phi_{N-}(p) = \exp \left( -\frac{i}{\pi} \int_0^{bp} \frac{\pi \frac{\zeta}{2} + \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta \right). \quad (3.11)$$

Здесь логарифм определяется так, чтобы разрез для  $\Phi_{N\pm}(p)$  проходил в правой (левой) полуплоскости соответственно. Интегралы в (3.10), (3.11) можно выразить через комбинации специальных функций (дилогарифмов), однако целесообразность этого сомнительна.

Подставляя (3.10) и (3.5) в (3.2), окончательно получаем

$$\Phi_{\pm}(p) = (1 \pm bp)^{\mp 1/2} \exp \left( \pm \frac{i}{\pi} \int_0^{bp} \frac{\pi \zeta \mp \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta \right). \quad (3.12)$$

Следует заметить, что в конце концов не важно, каким образом были получены соотношения (3.12). Существенно то, что выражения, ими определяемые, являются аналитическими функциями справа и слева от мнимой оси (за исключением начала координат, где они имеют логарифмические особенности) соответственно и что они обращают (3.1) в тождество. Оба эти утверждения проверяются непосредственно.

В дальнейшем нам понадобятся как сами выражения (3.12), так и их производные. Выпишем необходимые комбинации:

$$\frac{\Phi'_{+}(p)}{\Phi_{+}(p)} = ib \frac{\pi bp - 2 \ln(bp)}{2\pi(b^2 p^2 + 1)} - \frac{b}{2(1+bp)}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\Phi'_{-}(p)}{\Phi_{-}(p)} = -ib \frac{\pi bp + 2 \ln(-bp)}{2\pi(b^2 p^2 + 1)} - \frac{b}{2(1-bp)}. \quad (3.14)$$

Вблизи нуля справедливы следующие разложения:

$$\frac{\Phi'_{+}(p)}{\Phi_{+}(p)} = - \left[ \frac{1}{2} + \frac{\ln bp}{\pi} \right] b + O(z), \quad (3.15)$$

$$\frac{\Phi'_{-}(p)}{\Phi_{-}(p)} = \left[ -\frac{1}{2} - \frac{\ln(-bp)}{\pi} \right] b + O(z). \quad (3.16)$$

#### 4. Разложение факторизующих функций вблизи нуля

С учетом результатов параграфа 3 выражение (2.10) можно представить в виде

$$\Lambda_{-}^{-1}(p) \Lambda_{+}(p) = 2i \cot^2 p \frac{1 + \left| \frac{p}{i} \right|}{\sqrt{1-p^2}} \frac{\sqrt{1-p^2}}{1 + \left| \frac{p}{i} \right|} \sqrt{A\left(\frac{p}{i}\right) B\left(\frac{p}{i}\right)}, \quad p \in L. \quad (4.1)$$

Тогда вместо (2.12), (2.13) имеем

$$\Lambda_+(p) = \frac{\pi \Gamma^2\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{\pi}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{p}{\pi}\right)} (1+p)^{-1/2} \exp\left(\frac{i}{\pi_0} \int_0^p \frac{\pi \zeta - \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta\right) J_+^a(p), \quad (4.2)$$

$$\Lambda_-(p) = \frac{p^2 \Gamma^2\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{\pi}\right)}{2\pi i \Gamma^2\left(1 - \frac{p}{\pi}\right)} (1-p)^{1/2} \exp\left(-\frac{i}{\pi_0} \int_0^p \frac{\pi \zeta + \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta\right) J_-^a(p), \quad (4.3)$$

$$J_{\pm}^a(p) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} \ln\left[\sqrt{A(s)B(s)} \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+s}\right] \frac{ds}{is-p}\right\}. \quad (4.4)$$

Данные выражения удобны для получения асимптотических разложений вблизи  $p=0$ .

$$\begin{aligned} \Lambda_+(p) &= \left(1 + \frac{4\ln 2}{\pi} p\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln p}{\pi}\right) p\right] \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} (1 + \delta_1 p) + O(p^2) = \\ &= \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{4\ln 2}{\pi} + \delta_1 - \frac{1}{2} - \frac{\ln p}{\pi}\right) p\right] + O(p^2), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_-(p) &= \frac{p^2}{2i} \left(1 + \frac{4\ln 2}{\pi} p\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln(-p)}{\pi}\right) p\right] \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} (1 + \delta_1 p) + O(p^2) = \\ &= -\frac{ip^2}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}} \left[1 + \left(\frac{4\ln 2}{\pi} + \delta_1 - \frac{1}{2} - \frac{\ln(-p)}{\pi}\right) p\right] + O(p^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь

$$\delta_1 = \left. \frac{d \ln J_+^a(p)}{dp} \right|_{p=0} = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \ln\left[\sqrt{A(s)B(s)} \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+s}\right] \frac{ds}{s}. \quad (4.7)$$

Аналогично для показателя  $\beta_{0\pm}(p)$  выражение (2.19) может быть преобразовано как

$$\beta_{0\pm}(p) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[ \frac{\sqrt{A(s)}}{\sqrt{B(s)}} \frac{\operatorname{sc}th s}{\sqrt{1+s^2+1}} \right] - \ln \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+|s|} \right\} \frac{ds}{is-p} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+|s|} \frac{ds}{is-p}. \quad (4.8)$$

Вблизи нуля

$$\begin{aligned} \exp[\beta_{0+}(p)] &= \sqrt[4]{3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{\ln p}{\pi} \right) p \right] (1 + \delta_2 p) + O(p^2) = \\ &= \sqrt[4]{3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{\ln p}{\pi} + \delta_2 \right) p \right] + O(p^2), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \exp[-\beta_{0+}(p)] &= \sqrt[4]{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{\ln p}{\pi} \right) p \right] (1 - \delta_2 p) + O(p^2) = \\ &= \sqrt[4]{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{\ln p}{\pi} + \delta_2 \right) p \right] + O(p^2), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \exp[\beta_{0-}(p)] &= \sqrt[4]{3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{\ln(-p)}{\pi} \right) p \right] (1 + \delta_2 p) + O(p^2) = \\ &= \sqrt[4]{3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{\ln(-p)}{\pi} + \delta_2 \right) p \right] + O(p^2), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \exp[-\beta_{0-}(p)] &= \sqrt[4]{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{\ln(-p)}{\pi} \right) p \right] (1 - \delta_2 p) + O(p^2) = \\ &= \sqrt[4]{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{\ln(-p)}{\pi} + \delta_2 \right) p \right] + O(p^2), \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь

$$\delta_2 = \left. \frac{d \ln \beta_+(p)}{dp} \right|_{p=0} = \frac{1}{\pi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds} \left\{ (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[ \frac{\sqrt{A(s)}}{\sqrt{B(s)}} \frac{\operatorname{sc}th s}{\sqrt{1+s^2+1}} \right] - \ln \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+|s|} \right\} \frac{ds}{s}. \quad (4.13)$$

Из (4.5)–(4.13) следует

$$\Lambda_+(p)\exp[\beta_{0+}(p)]=\sqrt{\frac{3}{2}}[1+\delta p]+O(p^2), \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{4\ln 2}{\pi} + \delta_1 + \delta_2 = \\ &= \frac{4\ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \frac{d}{ds} \left\{ \ln \sqrt{A(s)B(s)} + (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[ \frac{\sqrt{A(s)} \operatorname{sc}hs}{\sqrt{B(s)} \sqrt{1+s^2+1}} \right] \right\} \frac{ds}{s}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду, близкому к представленному в [1–4]:

$$\delta = \frac{4\ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \frac{d}{ds} \left\{ \left[ \ln \frac{A(s)}{\theta(s)} + (\sqrt{1+s^2}-1) \ln \sqrt{A(s)B(s)} \right] \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \right\} \frac{ds}{s}, \quad (4.16)$$

$$\theta(s) = \frac{\sqrt{1+s^2+1}}{s} \operatorname{th}s. \quad (4.17)$$

Данное выражение отличается от соответствующего выражения [1–4] отсутствием знаменателя  $\sqrt{1+s^2}$  в коэффициенте перед вторым логарифмом. По-видимому, указанное расхождение можно отнести к неточности при наборе или корректировке текста, поскольку численное значение вычисленного интеграла в [1–4] соответствует формуле (4.16). Кроме того, в [2] отсутствует символ первого логарифма, что является явной опечаткой.

Интегрируя по частям, интегралы (4.7), (4.13), (4.16) можно представить в виде

$$\delta_1 = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \left\{ \ln \left[ \frac{\sqrt{A(s)B(s)} \sqrt{1+s^2}}{1+s} \right] - \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \frac{ds}{s^2}, \quad (4.18)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \left\{ (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[ \frac{\sqrt{A(s)} \operatorname{sc}hs}{\sqrt{B(s)} \sqrt{1+s^2+1}} \right] - \ln \frac{\sqrt{1+s^2}}{1+|s|} - \ln \sqrt{3} \right\} \frac{ds}{s^2}, \quad (4.19)$$

$$\delta = \frac{4\ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \left\{ \left[ \ln \frac{A(s)}{\theta(s)} + (\sqrt{1+s^2}-1) \ln \sqrt{A(s)B(s)} \right] \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} - \ln \frac{3}{2} \right\} \frac{ds}{s^2}. \quad (4.20)$$

Обе формы представления не являются сложными для численного счета, дающего

$$\delta_1=0,0460935, \delta_2=-0,308655, \delta=0,619982. \quad (4.21)$$

Следует заметить, что для вычислений интересующих асимптотик компонент смещений количество выписанных членов разложения в формулах (4.6), (4.11), (4.12) недостаточно. Однако выражения для них слишком громоздки, чтобы быть выписаны. В соответствующем месте будут выписаны комбинации, необходимые для дальнейших вычислений.

### 5. Разложение решения матричной задачи Римана вблизи плюс бесконечности

По свойствам интегралов типа Коши (например, [4]) поведение  $\beta_{0+}(p)$  из (2.19) при больших  $p$  определяется как

$$\beta_{0+}(p)=\frac{q}{p}+\frac{1}{2p^2}+O(p^{-2}), \quad (5.1)$$

$$q=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+s^2)^{-1/2}\ln\left[\frac{\sqrt{A(s)}\operatorname{scths}}{\sqrt{B(s)}\sqrt{1+s^2+1}}\right]ds\approx-0,1235. \quad (5.2)$$

С учетом (2.3) для больших  $p$  справедливы оценки

$$\operatorname{ch}\varphi\beta_{0+}(p)=\cos q-\frac{\sin q}{2p}, \operatorname{sh}\varphi\beta_{0+}(p)=i\sin q+\frac{\cos q}{2p}. \quad (5.3)$$

Разложение второй формулы (2.1) по большим  $p$  с учетом (5.3) дает

$$X_+^{-1}(p)=p^{-1/2}G+p^{-3/2}H+O(p^{-5/2}). \quad (5.4)$$

Здесь

$$G=QR, \quad (5.5)$$

$$Q=\begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

В дальнейшем для конкретизации выражения векторного полинома  $\Pi(p)$  (1.10) существенным является вырожденность матрицы  $R$  (а следовательно, и  $G$ ). Факт вырожденности проверяется непосредственно. Для вектора

$$C_0 = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$RC_0 = GC_0 = 0. \quad (5.9)$$

Выражение для матрицы  $H$  из формулы (5.4) получается удержанием еще одного члена в разложении для  $X_+^{-1}(p)$ :

$$H = \left( q' - \frac{\pi}{4} \right) QR + Q'R + \left\{ \frac{\cos q - i \sin q}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \right\}, \quad (5.10)$$

$$q' = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} \ln \sqrt{A(s)B(s)} ds \approx 0,138263. \quad (5.11)$$

Для дальнейших выкладок матрицу  $H$  удобно представить в виде суммы вырожденной и невырожденной матриц, причем вырожденное слагаемое должно давать ноль при умножении на вектор  $C_0$ , определяемый формулой (5.8). Данное представление получается соответствующей группировкой членов

$$H = H_0 R + Q S_0. \quad (5.12)$$

Здесь

$$S_0 = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

$$H_0 = \left( q' - \frac{\pi}{4} \right) Q + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos q - \sin q & -\frac{1}{2} \sin q \\ \frac{1}{2} \sin q & -\frac{1}{2} \cos q + \sin q \end{pmatrix} + Q', \quad (5.14)$$

$$Q' = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin q & -\cos q \\ \cos q & \sin q \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

В дальнейших выкладках два последних выражения не участвуют, однако приведены здесь для понимания вывода выражения для  $S_0$ .

### 6. Разложение решения матричной задачи Римана вблизи плюс нуля

Подстановка (2.14), (2.16) с учетом результатов двух последних параграфов в первую формулу (2.1) с последующим разложением по малым  $p$  дает

$$X_+(p) = X_+(0) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + O(p). \quad (6.1)$$

В аналоге для данного выражения в работе [2] имеется опечатка, заключающаяся в отсутствии символа радикала в знаменателе.

Аналогичная подстановка и разложение для второй формулы (2.1) дает

$$X_+^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} + \left( \begin{array}{cc} -\sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{i}{2} + \delta \right) e^{i\pi/4} & -\frac{1}{2}(1+i) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + i \right) \\ \frac{1}{2}(1+i) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + i \right) & (i-1) \left( \frac{4\ln 2}{\pi} - \frac{2\ln p}{\pi} - 1 + \delta_1 - \delta_2 - \frac{i}{2} \right) \end{array} \right) p + O(p^2). \quad (6.2)$$

Здесь удержано два члена разложения. В дальнейших выкладках из второго члена (6.2) используется только первая строчка, в которую не входят логарифмические члены (в подынтегральном выражении в  $\delta$  разрывы производных слагаемых компенсируются). В связи с этим для определения только КИН (как это и делалось в [1–4]) нет необходимости выделения логарифмических членов. Выражение (6.2), таким образом, может быть переписано как



$$X_+^{-1}(p) = \begin{pmatrix} D_0 + pD^* + O(p) \\ O(1) \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Здесь

$$D_0 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

$$D^* = \left( -\sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{i}{2} + \delta \right) e^{i\pi/4} - \frac{1}{2}(1+i) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + i \right) \right). \quad (6.5)$$

### 7. Определение векторного полинома

Матрица  $X_+^{-1}(p)$  согласно (6.2) вблизи нуля ограничена и не вырождена. Следовательно, согласно (1.10), (1.11) функция  $\Pi(p)$  вблизи нуля ограничена и не может содержать отрицательных степеней  $p$  (этим фактом и определяется, что  $\Pi(p)$  – полином, а не функция, содержащая также отрицательные степени  $p$ ). С другой стороны, ограничение максимальной степени полинома  $\Pi(p)$  диктуется оценкой (1.12). Очевидно, согласно (1.10), (5.4) полином  $\Pi(p)$  может содержать произвольную векторную константу. Кроме того, вырожденность матрицы  $G$  (5.9) допускает присутствие в полиноме  $\Pi(p)$  линейного по  $p$  члена пропорционального  $C_0$  (5.8). Линейный по  $p$  член разложения матрицы  $X_+^{-1}(p)$  уже не вырожден (5.4), (5.12), поэтому присутствие в  $\Pi(p)$  членов со степенями выше первой привело бы к нарушению условия (1.12). Итак, наиболее общей формой функции  $\Pi(p)$  является

$$\Pi(p) = A_0 + b p C_0. \quad (7.1)$$

Здесь  $A_0, b$  – векторный и скалярный коэффициенты. Подстановка (7.1), (5.4) в первое выражение (1.10) с учетом (5.9) дает

$$F_+(p) = p^{-1/2} (GA_0 + bHC_0) + O(p^{-3/2}). \quad (7.2)$$

С учетом (5.5), (5.12), (5.9) данное выражение преобразуется к виду

$$F_+(p) = p^{-1/2} Q(RA_0 + bS_0C_0) + O(p^{-3/2}). \quad (7.3)$$

С другой стороны, подстановка (7.1), (6.1) в первое выражение (1.10) дает

$$A_0 = X_+(0) \begin{pmatrix} N \\ T \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N\sqrt{3} \\ Ti \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Подстановка (7.1), (6.2) в первое выражение (1.10) дает

$$\begin{Bmatrix} N + Mp + O(p) \\ T + O(1) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 + pD^* + O(p) \\ O(1) \end{pmatrix} (A_0 + b p C_0). \quad (7.5)$$

Приравнявая в (7.5) слагаемые, содержащие  $p$ , получаем

$$M = bD_0C_0 + D^*A_0, \quad (7.6)$$

откуда с учетом (5.8), (6.4), (7.4)

$$b = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ M - D^* X_+(0) \begin{pmatrix} N \\ T \end{pmatrix} \right\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ M - D^* X_+(0) \begin{pmatrix} N \\ T \end{pmatrix} \right\}. \quad (7.7)$$

Согласно (6.5), (6.1)

$$D^* X_+(0) = \begin{pmatrix} -\delta - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Подстановка (7.4) и результата подстановки (7.8) в (7.7) в (7.1) окончательно дает

$$\Pi(p) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N\sqrt{3} \\ Ti \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-i\pi/4} \left\{ M + \left( \delta + \frac{i}{2} \right) N + \left( -\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}} \right) T \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} p. \quad (7.9)$$

### 8. Определение КИН

Сравнение (1.12) и (7.3) с учетом (5.6), (5.7), (5.8), (5.13), (7.4), (7.7), (7.8) дает связь КИН с силовыми факторами:

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = k_M M + \left( k_T - \frac{1}{2} k_M \right) T + k_N N. \quad (8.1)$$

Здесь введены обозначения

$$k_M = \sqrt{3} \begin{pmatrix} \cos q - \sin q \\ -\cos q - \sin q \end{pmatrix}, \quad k_T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos q + \sin q \\ \cos q - \sin q \end{pmatrix}, \quad k_N = \delta k_M + \sqrt{3} k_T. \quad (8.2)$$

С учетом вычисленных значений (4.21), (5.2)  $q = -0,1235$  и  $\delta = 0,619982$

$$k_M \approx \begin{pmatrix} 1,932 \\ -1,506 \end{pmatrix}, \quad k_T = \begin{pmatrix} 0,4346 \\ 0,5578 \end{pmatrix}, \quad k_N = \begin{pmatrix} 1,951 \\ 0,032 \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Из формулы Ирвина следует, что поток стекающей в кончик трещины энергии

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} = \frac{1}{E} \left\{ 6 \left( M - \frac{T}{2} + \delta N \right)^2 + \frac{1}{2} (T + \sqrt{3} N)^2 \right\}. \quad (8.4)$$

При вычислении эффективных параметров заделки и для ряда других приложений удобнее вычислять момент относительно центра полосы. Такой «балочный» момент отличается от рассматриваемого ранее поправкой на момент, создаваемый продольной силой,

$$M_b = M - \frac{T}{2}. \quad (8.5)$$

Соответственно, формулы (8.1), (8.4) перепишутся в виде

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = k_M M_b + k_T T + k_N N, \quad (8.6)$$

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} = \frac{1}{E} \left\{ 6 (M_b + \delta N)^2 + \frac{1}{2} (T + \sqrt{3} N)^2 \right\}. \quad (8.7)$$

### 9. Разложение решения матричной задачи Римана вблизи минус нуля

Подстановка (2.1), (7.9) во второе выражение (1.10) с учетом результатов параграфа 4 дает

$$F_-(p) = \sum_{n=3}^0 G_-^{(n)} p^{-n} + O(p). \quad (9.1)$$

Здесь

$$G_-^{(-3)} = \begin{pmatrix} -6N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

$$G_-^{(-2)} = \begin{pmatrix} -6M_b \\ -3N \end{pmatrix}, \quad (9.3)$$

$$G_-^{(-1)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 24\delta M_b + 2\sqrt{3}T + [11 + 3\ln 3 + 12(\delta^2 + \beta_{0-}'' + J_{0-}'')]N \\ -12M_b + 2T \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

$$G_-^{(0)} = \begin{pmatrix} g_{1M}M_b + g_{1N}N + g_{1T}T \\ g_{2M}M_b + g_{2N}N + g_{2T}T \end{pmatrix}, \quad (9.5)$$

$$g_{1M} = \frac{1}{4} [5 + 3\ln 3 + 12(J_{0-}'' + \beta_{0-}'' - \delta^2)], \quad (9.6)$$

$$g_{2M} = 3\delta - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (9.7)$$

$$g_{1T} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta, \quad (9.8)$$

$$g_{2T} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{\pi} (2\ln 2 + \ln(-p) - 1) + \delta_1 - \delta_2 + 1 \right], \quad (9.9)$$

$$g_{1N} = -\delta \left( \frac{9}{2} - 2\delta^2 \right) + \frac{12}{\pi} \left( \ln 2 + \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \right) + 3 \left( \delta_1 - \frac{1}{2} - \frac{\ln(-p)}{\pi} \right) + (J_{0-}''' + \beta_{0-}'''), \quad (9.10)$$

$$g_{2N} = \frac{1}{8} [5 - 4\sqrt{3}\delta + 3\ln 3 + 12(\delta^2 + J_{0-}'' + \beta_{0-}'')]. \quad (9.11)$$

Здесь  $\zeta(p)$  – дзета функция Римана  $\zeta(3) \approx 1,2021$ ;  $J_{0-}'', \beta_{0-}'', J_{0-}''', \beta_{0-}'''$  – вторые и третьи производные соответствующих функций.

### 10. Вычисление параметров эффективной упругой заделки

Согласно определению (1.5) выражение (9.1) представляет собой трансформанту Лапласа от асимптотики производной половины скачка смещений. В соответствии со свойствами преобразования Лапласа (например, [8]) трансформанта асимптотики смещений на бесконечности

(вернее, разности между смещениями на бесконечности и смещениями в нуле – именно интересующей нас величины) определяется делением на  $p$ :

$$\int_{-\infty}^0 \left\{ \begin{array}{l} v^{(2)}(x,0) - v^{(1)}(x,0) \\ u^{(2)}(x,0) - u^{(1)}(x,0) \end{array} \right\} e^{-px} dx = \frac{2}{E} \sum_{n=3}^0 G_-^{(n)} p^{-n-1} + O(p). \quad (10.1)$$

Сами асимптотики смещений вычисляются отсюда с помощью обратного преобразования Лапласа

$$E \left\{ \begin{array}{l} v^{(2)}(x,0) - v^{(1)}(x,0) \\ u^{(2)}(x,0) - u^{(1)}(x,0) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{n=3}^0 2G_-^{(n)} p^{-n-1} e^{px} + O(1). \quad (10.2)$$

Здесь  $L$  – контур, проходящий параллельно мнимой оси плоскости комплексной переменной  $p$  и расположенный между мнимой осью и ближайшей к ней особой точкой. Этот контур может быть деформирован в соответствии со стандартными правилами интегрирования в комплексной плоскости. Используя правила для нахождения оригинала по изображению, можно видеть, что скачок смещений согласно (9.2)–(10.2) представляет собой сумму полинома третьей степени и функции, содержащей логарифмы. Полином третьей степени соответствует балочному приближению, причем наличие членов нулевой и первой степени по  $x$  (или минус первой и минус второй степени по  $p$  для трансформанты) свидетельствует о том, что граничные условия для этой (эффективной) балки отнюдь не являются условиями жесткой заделки в месте кончика трещины. Данное поведение решения соответствует условиям обобщенной упругой заделки, т.е. пропорциональности смещений и угла поворота в точке заделки действующим компонентам главных вектора и момента нагрузки. Пропорциональность силовым факторам, а не произвольная зависимость диктуются линейностью задачи. Наличие членов, содержащих логарифмы, соответствует смещениям полуплоскости; при вычислении параметров эффективной балки эти члены также могут быть учтены в качестве граничных условий.

Члены разложения вертикального смещения  $v$ , содержащие  $G_-^{(-3)}$ ,  $G_-^{(-2)}$  (9.2), (9.3), соответствуют классическим членам для прогиба балки под действием силы и момента. Наличие члена разложения горизонтального смещения  $u$ , присутствующего в  $G_-^{(-2)}$ , объясняется

тем, что формулы (9.1)–(10.2) соответствуют нижней границе полосы (балки), горизонтальное же смещение центральной оси балки отличается на величину произведения поворота в данной точке на половину толщины полосы. Вычисленное с учетом сказанного горизонтальное смещение оси балки (полосы) оказывается лишенным квадратичного члена и определяется как

$$-Eu = Tx + K_{uT}T + K_{uM}M + K_{uN}N, \quad (10.3)$$

$$K_{uT} = \frac{4\ln 2}{\pi} + \delta_1 - \delta_2 + 1 + \frac{2}{\pi}(\ln x + \gamma - 1) \approx \frac{2}{\pi} \ln x + 1,91593, \quad (10.4)$$

$\gamma \approx 0,577216$  – постоянная Эйлера, и

$$K_{uM} = \sqrt{3}, \quad (10.5)$$

$$K_{uN} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}\delta. \quad (10.6)$$

В выражении (10.3) первый член соответствует деформации стержня, а последующие определяют эффективные условия его упругой заделки.

Аналогично с учетом того, что

$$-(J''_{0-} + \beta_{0-}) = \frac{\ln 3}{4} + \frac{7}{15}, \quad (10.7)$$

для вертикального смещения и его производной

$$Ev = Ev_b - K_{vM}M + K_{vT}T + K_{vN}N, \quad (10.8)$$

$$Ev' = Ev'_b + K_{v'M}M + K_{v'T}T + K_{v'N}N. \quad (10.9)$$

Здесь

$$K_{vM} = \frac{3}{10} + 6\delta^2, \quad (10.10)$$

$$K_{vT} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\delta, \quad (10.11)$$

$$K_{v'M} = 12\delta, \quad (10.12)$$

$$K_{vT} = \sqrt{3}, \quad (10.13)$$

$$K_{vN} = \frac{27}{10} + 6\delta^2. \quad (10.14)$$

Выражение для  $K_{vN}$  может быть получено из (9.10), однако оно слишком громоздко. Коэффициенты  $K_{uT}$ ,  $K_{uM} = K_{vT}K_{vM}$  образуют симметричную матрицу коэффициентов упругой заделки, рассмотренной в работе [9], где они были вычислены (для более общего случая различных модулей полосы и полуплоскости) путем численного решения системы интегральных уравнений.

Остальные рассчитанные коэффициенты составляют расширенную матрицу жесткости. В задаче об отслоении покрытия от прямолинейной подложки поперечные силы не возникают, и данные коэффициенты роли не играют. Однако в других задачах, например в случае искривленной поверхности, перерезывающие силы возникают.

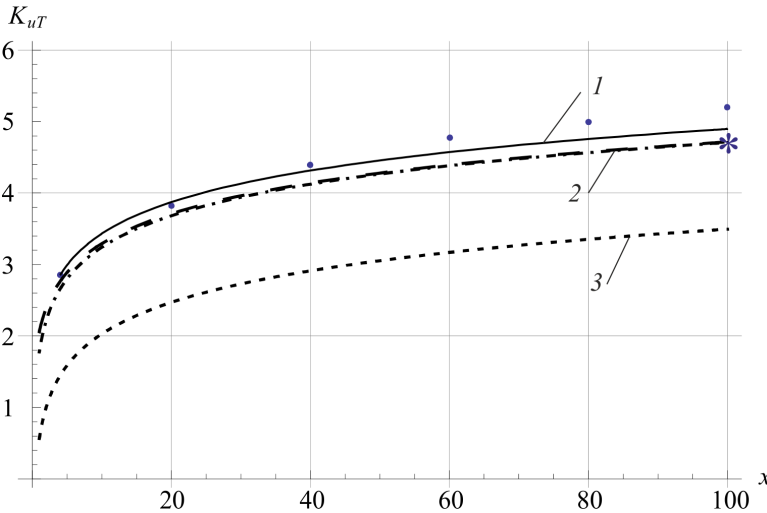


Рис. 2. Значение коэффициента  $K_{uT}$  в зависимости от длины балки; 1 – полученное решение; 2 – асимптотика, полученная при пренебрежении перекрестным влиянием изгиба и сдвига [14]; 3 – главный член асимптотики приближения стрингера [14]; точка – численное решение [9]; звездочка – численное решение [13]

Все три посчитанных коэффициента  $K_{uT}$  и  $K_{uM} = K_{vT}K_{vM}$  хорошо согласуются с численными результатами [9, 13]. Для  $K_{uT}$  сравнение представлено на рис. 2. Там же представлены решения, полученные

при пренебрежении перекрестным влиянием изгиба и сдвига [14], а также в стержневом приближении [14]. Для двух других коэффициентов, являющихся константами, сравнение с данными [9], представленными графически, показывает полное совпадение в пределах точности определения толщины линии на графике: для  $a_{12}$  начиная примерно с  $l/h > 10$ , и для  $a_{22}$  начиная примерно с  $l/h > 3$ .

### 11. Вычисление параметров эффективной упругой заделки из сравнения скорости высвобождения упругой энергии, посчитанной через КИН и работу сил при деформировании эквивалентной балки

Часть коэффициентов можно посчитать исходя из сравнения скорости высвобождения энергии, посчитанной через КИН (8.7) и работу сил при деформировании эквивалентной балки. Для  $K_{vM}$  это было проделано в [10].

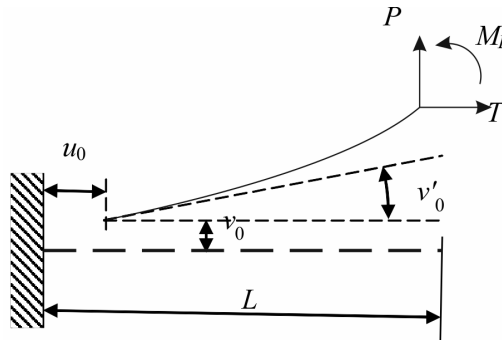


Рис. 3. Модельный пример для определения констант упругой заделки из сравнения скоростей высвобождения энергии на уровне эффективной балки и через КИН

Рассмотрим эффективную балку-стержень, для которой поперечные деформации (прогиб) определяются классическим дифференциальным уравнением оси балки (для случая отсутствия распределенной нагрузки)

$$EIv''''(x)=0, \quad (11.1)$$

а продольные деформации – уравнением стрингера



$$E \frac{du}{dx} = \sigma_{xx}(x), \quad (11.2)$$

упруго закрепленную с одного конца и подверженную действию силы с компонентами  $P, T$  и моментом  $M_L$  на другом (рис. 3).

Под действием сил и момента в месте заделки будут иметь место начальные смещения  $u_0, v_0$  и начальный угол поворота  $v'_0$ , которые согласно рассматриваемой модели будут зависеть только от главного вектора сил и момента, действующих в точке заделки, причем линейным образом (здесь учтено, что в точке заделки продольная и поперечная силы остаются без изменений, а момент возрастает на величину момента, создаваемого поперечной силой,  $LP$ ).

$$E \begin{pmatrix} u_0 \\ v'_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{uT} & K_{uM} & K_{uN} \\ K_{vT} & K_{vM} & K_{vN} \\ K_{vT} & K_{vM} & K_{vN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ M_L + LP \\ P \end{pmatrix}. \quad (11.3)$$

Решение уравнений (11.1), (11.2) с граничными условиями (11.3) и условиями на правом конце

$$EI \begin{pmatrix} v''(L) \\ v'''(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_L \\ -P \end{pmatrix} \quad (11.4)$$

есть

$$\begin{aligned} Eu(x) &= K_{uT}T + K_{uM}(M_L + LP) + K_{uN}P + \frac{T}{S}x, \\ Ev(x) &= K_{vT}T + K_{vM}(M_L + LP) + K_{vN}P + K_{v'T}Tx + \\ &+ K_{v'M}(M_L + LP)x + K_{v'N}Px + \frac{M_L}{I} \frac{x^2}{2} - \frac{P}{I} \frac{x^3}{6} + \frac{PL}{I} \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Здесь  $S$  – площадь сечения.

Из теоремы взаимности работ Бетти для указанной модели немедленно следует симметрия матрицы (11.3). Действительно, согласно (11.5) работа силы  $P$  на перемещении  $v(L)$ , вызванном действием момента  $M_L$ , должна быть равна работе момента  $M_L$  на угле поворота  $v'(L)$ , вызванного действием силы  $P$ :

$$\left( K_{vM} M_L + K_{v'M} M_L L + \frac{M_L L^2}{I} \right) P = \left( K_{v'M} PL + K_{v'N} P - \frac{P L^2}{I} + \frac{PL^2}{I} \right) M_L. \quad (11.6)$$

Аналогично согласно (11.5) работа силы  $T$  на перемещении  $u(L)$ , вызванном действием момента  $M_L$ , должна быть равна работе момента  $M_L$  на угле поворота  $v'(L)$ , вызванного действием силы  $T$ ,

$$K_{uM} M_L T = K_{v'T} T M_L. \quad (11.7)$$

И, наконец, работа силы  $T$  на перемещении  $u(L)$ , вызванном действием силы  $P$ , должна быть равна работе силы  $P$  на перемещении  $v(L)$ , вызванном действием силы  $T$ ,

$$(K_{uM} LP + K_{uN} P) T = (K_{v'T} T + K_{v'T} TL) P. \quad (11.8)$$

Из уравнений (11.6)–(11.8) следует симметрия матрицы (11.3). Отметим, однако, что если бы в качестве уравнений балки-стержня были взяты уравнения более сложного вида, результат мог быть иным. Например, если добавить в правую часть второго уравнения (11.5) член  $\frac{EP}{\mu S} x$ , где  $\mu$  – модуль сдвига, а  $S$  – площадь сечения, то член  $\frac{P}{\mu S}$  появится в скобке правой части уравнения (11.6), что приведет к условию  $K_{vM} = K_{v'N} + \frac{E}{\mu S}$ , приводящему к потере указанной симметрии. Следовательно, симметрия матрицы жесткости не является следствием только теоремы Бетти, и для сохранения симметрии необходимо выполнение дополнительных условий. Показанный пример иллюстрирует возможность потери симметрии матрицы жесткости при непротиворечивости модели, в частности выполнение теоремы взаимности.

Рассмотрим работу внешних сил  $W$ , равную вследствие консервативности упругой системы ее упругой энергии, от действия продольной и поперечной силы и момента. Согласно (11.5) по теореме Клапейрона

$$2EW = \frac{T^2}{S}L + K_{v'T}TPL + 2K_{v'M}M_LPL + K_{v'M}P^2L^2 + \quad (11.9)$$

$$+ K_{v'N}P^2L + \frac{M_L P}{I}L^2 + \frac{P^2}{I}\frac{L^3}{3} + \frac{M_L^2}{I}L + O(L)^0.$$

Здесь  $O(L)^0$  – члены, не зависящие от  $L$ , т.е. постоянные.

Вычисляя скорость высвобождения энергии при увеличении длины балки-стержня, т.е. вычисляя производную по  $L$ , получаем

$$2E \frac{dW}{dL} = \frac{T^2}{S} + K_{v'T}TP + 2K_{v'M}M_LP + \quad (11.10)$$

$$+ 2K_{v'M}P^2L + K_{v'N}P^2 + \frac{M_L P}{I}L + \frac{P^2}{I}L^2 + \frac{M_L^2}{I}.$$

С учетом симметрии коэффициентов матрицы (11.3), а также того, что толщина слоя (балки-стержня) и площадь его сечения принимаются единичными (при этом момент инерции  $I=1/12$ ), получаем

$$E \frac{dW}{dL} = 6M_b^2 + \frac{T^2}{2} + \frac{K_{v'T}TN}{2} + K_{v'M}M_bN + \frac{K_{v'N}N^2}{2} \quad (11.11)$$

Здесь также учтено, что сила реакции опоры в месте заделки  $N$  есть сила  $P$ .

Сравнение (11.11) и (8.7) дает  $K_{uM} = K_{v'T} = \sqrt{3}$ , что совпадает с результатами (10.5), (10.14), и  $K_{v'N} = 3/2 + 6\delta^2$ , что является симметризацией выражений (10.14).

По-видимому, именно симметризованные значения и следует использовать, поскольку отсутствие симметрии в промежуточных выражениях, вероятно, связано с поворотом тела как целого и неоднозначностью определения смещений эффективной балки (как средней линии, либо как усредненной по толщине балки). Заметим, что в [13] выражения для (нерасширенной) матрицы жесткости, полученные численным методом, были несимметричными, а в работе [9] уже говорилось о необходимости симметричности матрицы, и полученные значения были симметричными.

### **Заключение**

Получено и исследовано однородное решение задачи о полубесконечной трещине, параллельной границе полуплоскости. Следуя [1–4] путем применения двухстороннего преобразования Лапласа, задачу свели к матричной задаче Римана. Получены асимптотические выражения для смещений берегов трещины вдали от ее кончика. Показано, что ведущие члены асимптотики смещений берегов трещины соответствуют смещениям балки (пластины), подверженной действию главных вектора и момента при граничных условиях типа обобщенной упругой заделки, т.е. условиях пропорциональности смещений и угла поворота в точке заделки действующим компонентам главных вектора и момента нагрузки. Получены выражения для компонент матрицы коэффициентов упругой заделки.

Полученное решение представляется полезным для решения задач о деформировании балочных конструкций и задач об отслоении покрытий. Результаты частично опубликованы в препринтах [15, 16].

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 11–01–00801).

### **Библиографический список**

1. Златин А.Н., Храпков А.А. Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 31. – С. 1009–1010.
2. Златин А.Н., Храпков А.А. Упругая полуплоскость, ослабленная трещиной, параллельной ее границе // Исследования по упругости и пластичности. Т. 16. Проблемы современной механики разрушения. – 1990. – С. 68–75. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
3. Златин А.Н., Храпков А.А. Векторная задача Римана с ненулевым индексом показателя матрицы-коэффициента // Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. – 1985. – Т. 181. – С. 12–16.
4. Khrapkov A.A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. – S.-P., 2001.
5. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.

6. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Изв. АН СССР. МТТ. – 1968. – № 6. – С. 87–99.

7. Салганик Р.Л. Тонкий упругий слой, испытывающий скачок характеристик, в бесконечном упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. – 1977. – № 2. – С. 154–163.

8. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. – 207 с.

9. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // Int. J. Fract. – 2002. – Vol. 113. – P. 39–55.

10. Ustinov K.B., Dyskin A.V., Germanovich L.N. Asymptotic analysis of extensive crack growth parallel to free boundary // 3<sup>rd</sup> Intern. Conf. Localized Damage. Southampton: comput. mech. Publ. – 1994. – P. 623–630.

11. Dyskin A.V., Germanovich L.N., Ustinov K.B. Asymptotic analysis of crack interaction with free boundary // Intern. J. Solids Structures. – 2000. – Vol. 37. – No. 6. – P. 857–886.

12. Устинов К.Б. Об уточнении граничных условий для балочной модели кантилевера атомно-силового микроскопа и их влиянии на интерпретацию результатов измерений // Изв. РАН МТТ. – 2008. – № 3. – С. 182–188.

13. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // Int. J. Fracture. – 2000. – Vol. 104, No. 2. – P. 169–179

14. Устинов К.Б. О сдвиговом отслоении тонкого слоя от полуплоскости: препринт №1047 / ИПМех РАН. – 2013. – 30 с.

15. Устинов К.Б. Еще раз к задаче о полуплоскости, ослабленной полубесконечной трещиной, параллельной границе: препринт № 1046 / ИПМех РАН. – М., 2013. – 31 с.

16. Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости для некоторого класса различных упругих свойств: препринт № 1048 / ИПМех РАН. – М., 2013. – 50 с.

## References

1. Zlatin A.N., Khrapkov A.A. Polubeskonechnaya treshina, parallelnaya granitse uprugoi poluploskosti [Semi-infinite crack, parallel to boundary of elastic half-space]. *Doklady AN SSSR*, 1986, vol. 31, pp. 1009-1010.

2. Zlatin A.N., Khrapkov, A.A. Uprugaya poluploskost, oslablennaya treshinoi, parallelnoi ee granitse [Elastic half-plane, weakened by a crack, parallel to its boundary]. *Issledovania po uprugosti i plastichnosti*, 1990, vol. 16. *Problems of modern fracture mechanics*, pp. 68-75.

3. Zlatin A.N., Khrapkov A.A. Vektornaya zadacha Rimana s nenulevym indeksom pokazatelya matritsy-koeffitsienta [Vector Riemann problem with non-zero index of the exponent of the matrix coefficient]. *Izvestiya Vsesoyuznogo nauchno-issledovatel'skogo instituta imeni B.E. Vedeneeva*, 1985, vol. 181, pp. 12-16.

4. Khrapkov A.A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. S.-P., 2001, 144 p.

5. Noble B., *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*. Pergamon Press, Inc., New York, 1959. 246 p.

6. Entov V.M., Salganik R.L. K modeli khrupkogo razrusheniya Prandtlya [On the model of brittle fracture by Prandtl]. *Mechanics of solids. Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk MTT*. 1968, no. 6, pp. 87-99.

7. Salganik R.L. Tonkii sloi, ispytyvayushii skachek kharakteristik, v beskonечnom uprugom tele [Thin layer suffering a discontinuity in characteristics in an infinite elastic body]. *Mechanics of solids. Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk MTT*. 1977, no. 2, pp. 154-163.

8. Doetsch G. *Anleitung zum Praktischen Gebrauch der Laplace Transformation und der Z-Transformation*. Oldenburg Verlag, München, 1989. 256 p.

9. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *Int. J. Fract.*, 2002, vol. 113, pp. 39-55.

10. Ustinov K.B., Dyskin A.V., Germanovich L.N. Asymptotic analysis of extensive crack growth parallel to free boundary. *3<sup>rd</sup> Intern. Conf. Localized Damage. Southampton: Comput.mech. Publ.*, 1994, pp. 623-630.

11. Dyskin A.V., Germanovich L.N., Ustinov K.B. Asymptotic analysis of crack interaction with free boundary. *Inern. J. Solids Structures*, 2000, vol. 37, no. 6, pp. 857-886.

12. Ustinov K.B. Ob utochnenii granichnykh usloviy dlya balochnoi modeli kantilevera atomno-silovogo mikroskopa i ikh vliyanii na interpretatsiyu izmereniy [On refinement of boundary conditions for the beam model of cantilever of Atomic-Force microscope and its influence on inter-

pretation of the results of measurements]. *Mechanics of solids. Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk MTT*, 2008, no. 3, pp. 182-188.

13. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression. *Int. J. Fracture*, 2000, vol. 104, no. 2, pp. 169-179

14. Ustinov K.B. On shear delamination of a thin layer from a half-plane [O sdvigovom otsloenii tonkogo sloya ot poluploskosti]. Preprint IP-Mech RAS No. 1047, 2013. 30 p.

15. Ustinov K.B. Esche raz k zadache o poluploskosti, oslablennoi polubeskonechnoi treshinoi, parallelnoi granitse [Once more to the problem on a half-plane, weakened by a semi-infinite crack, parallel to its boundary]. Preprint IPMech RAS No. 1046, 2013. 31 p.

16. Ustinov K.B. Ob otsloenii sloya ot poluploskosti dlya nekotorogo klassa razlichnyh uprugih svoystv [On delamination of a layer from a half-plane for some class of different elastic properties]. Preprint IPMech RAS, No. 1048, 2013, 50 p.

### Об авторах

**Устинов Константин Борисович** (Москва, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории геомеханики Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (119526, Россия, Москва, просп. Вернадского, 101-1, e-mail [ustinov@ipmnet.ru](mailto:ustinov@ipmnet.ru)).

### About the authors

**Ustinov Konstantin Borisovich** (Moscow, Russian Federation) – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher of laboratory of Geomechanics of A.Yu Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (101-1, Vernadskiy av., 119526, Moscow, Russian Federation, e-mail: [ustinov@ipmnet.ru](mailto:ustinov@ipmnet.ru)).

Получено 20.06.2013