УДК 532.5

С.Н. Аристов, Д.В. Князев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ КОНВЕКТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ

Рассмотрена задача о конвективном течении в слое вязкой жидкости, вызываемом ее локальным нагревом. Поиск решения задачи осуществлялся в рамках класса точных решений уравнений термогравитационной конвекции, обобщающего известный класс решений уравнений Навье-Стокса, к которому относятся вихри Бюргерса и Салливана. Для единичного числа Прандтля найдены два семейства автомодельных решений задачи, позволившие описать эволюцию двух различных типов радиально-локализованных вихрей. В обоих случаях радиальная компонента скорости на большом расстоянии от оси симметрии вихрей убывает обратно пропорционально радиусу, в то время как вертикальная составляющая скорости и температура в первом случае затухают как квадрат расстояния от оси, а во втором – экспоненциально. Для азимутальной скорости получено отдельное линейное уравнение с коэффициентами, зависящими от функции тока меридионального течения. В силу автомодельности это уравнение допускает частные решения с разделяющимися переменными, суперпозиция которых дает возможность описать перенос момента импульса (циркуляции, если она отлична от нуля) от бесконечности к центру вихря, а также проследить эволюцию произвольного локализованного начального возмущения азимутальной скорости. Под действием вихревой и тепловой диффузии рассмотренные вихревые образования затухают со временем. Полученные точные решения являются простыми, обозримыми моделями локализованных конвективных вихрей и ранее известны не были.

Ключевые слова: конвекция, уравнения Обербека–Буссинеска, точные решения, локализованные вихри.

S.N. Aristov, D.V. Knyazev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

SELF-SIMILAR LOCALIZED CONVECTIVE STRUCTURES

The problem of convective flow in a layer of viscous fluid, caused by local heating, is considered. The problem solution was sought within the class of exact solutions of the thermo-gravitational convection generalizing well-known class of solutions of the Navier-Stokes equations involved the Burger's and Sullivan's vortexes. The two families of self-similar solutions of the problem for a unit Prandtl`s number are found, it allow to describe the evolution of two different types of radial – localized vortices. In both cases, the radial component of the velocity at a distance from the axis of symmetry of the vortices is inversely proportional to the radius, while the vertical component of the velocity and the temperature in the first case decayed as the square of the distance from the axis, and the second – exponentially. The separate linear equation for the azimuthal velocity with coefficients depending on the current function of meridian flow is obtained. By virtue of the similarity equation admits particular solutions with separated variables, the composition of which allows us to describe the transfer of angular momentum (circulation, if it is different from zero) from infinity to the center of the vortex, as well as to trace the evolution of an arbitrary localized initial perturbation of azimuthal velocity. These vortex formations are decay in the time due to the vortex and thermal diffusion. The Found exact solutions are the simple, usefully models of localized convective vortices and previously were not known.

Keywords: convection, Oberbeck – Boussinesq equations, exact solutions, localized vortexes.

Введение

Движение тяжелой жидкости, возникающее в результате неоднородности распределения плотности, обусловленного неравномерным нагревом среды, называется термогравитационной конвекцией. Простейшим объектом при изучении конвекции является слой жидкости с твердыми или свободными горизонтальными границами. Необходимым условием равновесия такого слоя является вертикальность однородного градиента давления. Конвекция в слое не может возникнуть до тех пор, пока число Рэлея, характеризующее баланс между силами вязкого трения и плавучести (Архимеда), не достигнет критического значения. Например, для слоя с твердыми границами критическое значение числа Рэлея $\mathrm{Ra} = 1707{,}762$ [1]. Положительность безразмерного комплекса Рэлея означает, что температура жидкости уменьшается с высотой (неустойчивая стратификация), в то время как при подогреве сверху (устойчивая стратификация) плоского горизонтального слоя с твердыми границами конвекция никогда не возникает.

Возникнув, конвективное течение стремится перемешать жидкость так, чтобы выровнять температуру или перейти в новое равновесное состояние, при этом в качестве источника движения используется в том числе запас энергии, содержащийся в первоначальной равновесной стратификации. В связи с этим представляет интерес проблема использования энергетического потенциала термически стратифицированной среды для генерации и поддержания пространственно-локализованных вихревых структур, наблюдаемых в лабораторных [2] и естественных условиях (смерчи, «пыльные дьяволы» и пр.). Далее рассматриваются точные решения уравнений гидродинамики в приближении Обербека–Буссинеска, моделирующие такого рода структуры.

1. Постановка и общий анализ задачи

Пусть в тяжелой жидкости, находящейся над непроницаемой плоскостью $z = 0$, имеется равновесный градиент температуры $\nabla T = -A_* \mathrm{e}_z$. В начальный момент времени $t = 0$ в слой вносится радиально локализованное осесимметричное возмущение, в центре которого вертикальный градиент температуры $\nabla_z T = -A_0 \mathrm{e}_z$. Требуется описать возникающее конвективное течение в зависимости от соотношения величин равновесного и возмущающего градиентов температуры и типа локализованных возмущений гидродинамических и тепловых полей.

В цилиндрической системе координат $\left(\mathrm{e}_r, \mathrm{e}_\varphi, \mathrm{e}_z\right)$ осесимметричные уравнения Обербека–Буссинеска записываются как

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial r v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + g\beta T,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Граничные условия, выражающие требования аналитичности скорости на оси возмущения [3] и механического равновесия на бесконечном удалении от нее, имеют вид

$$\begin{aligned} &r = 0 : v_r = v_\varphi = 0, \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0, \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{t=0} = -A_0; \\ &r \to \infty : v_r = v_\varphi = v_z = 0, \frac{\partial P}{\partial z} = -g\beta A_* z. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь v_r, v_φ, v_z – скорость жидкости; T, P – отклонения температуры и давления, отнесенного к средней плотности ρ_0, от их средних значений, соответствующих ρ_0; β – коэффициент теплового расширения; g – модуль ускорения свободного падения; ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Уравнения Обербека–Буссинеска допускают класс точных решений, обобщающий известное изотермическое решение [4, 5]

$$
\begin{gathered}
v_r = \frac{\sqrt[3]{g\nu}}{\sqrt{x}} u(\tau,x),\ v_\varphi = \frac{\sqrt[3]{g\nu}}{\sqrt{x}}\left[V(\tau,x) + Zv(\tau,x)\right],\\
v_z = -2\sqrt[3]{g\nu}\left[W(\tau,x) + Z\frac{\partial u}{\partial x}\right],\ \beta T = -\left[\Theta(\tau,x) + Z\theta(\tau,x)\right],\\
P = (g\nu)^{2/3}\left[p_0(\tau,x) - 4Zp_1(\tau,x) - 2Z^2 p_2(\tau,x)\right],
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где $\tau = 2\sqrt[3]{g^2/\nu}\,t$, $x = \sqrt[3]{g^2/\nu^4}\,r^2$, $Z = \sqrt[3]{g/\nu^2}\,z$ – безразмерные время и пространственные переменные.

Представление (2) можно рассматривать как первые члены разложения гидродинамических величин и температуры в ряд Тейлора по поперечной координате Z, справедливое для тонкого слоя. Обрыв ряда оправдан точным удовлетворением (2) уравнениям Обербека–Бусинеска. В то же время это разложение не позволяет в полной мере учесть краевые условия на горизонтальных границах слоя.

Далее принимается, что $v = W = \Theta = p_1 = 0$, тогда уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска редуцируются к системе

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\theta - \theta_*}{4},\\
\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} - \theta\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{\Pr}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \theta}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial V}{\partial \tau} + u\frac{\partial V}{\partial x} = 2x\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}
\end{gathered}
\tag{3}
$$

с граничными условиями, следующими из (1),

$$
\begin{gathered}
x = 0: u = V = 0,\ \theta(0,0) = \theta_0 \equiv \beta A_0 \sqrt[3]{\frac{\nu^2}{g}},\\
x \to \infty: \frac{\partial u}{\partial x} \to 0,\ \frac{u}{\sqrt{x}} \to 0,\ \frac{V}{\sqrt{x}} \to 0,\ \theta \to \theta_* \equiv \beta A_* \sqrt[3]{\frac{\nu^2}{g}}.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Здесь $\Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля; θ_*, θ_0 – безразмерные равновесный и возмущенный градиенты температуры. Величины p_0 и p_2 определяются следующим образом:

$$p_0 = 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u^2}{2x} - \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{V}{x}\right)^2 + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right]\mathrm{d}x\,,\ p_2 = \frac{\theta_*}{4}\,.$$

Первые два уравнения (3) образуют замкнутую подсистему, которая в случае совпадения характерных вязкого и теплового диссипативных времен ($\mathrm{Pr} = 1$) преобразованием

$$\theta = \alpha(\tau)\frac{\partial u}{\partial x} + \theta_*\,,\ \frac{d\alpha}{d\tau} = \theta_* - \frac{\alpha^2}{4}\,,\ \alpha(0) = \alpha_0 \tag{5}$$

сводится к одному уравнению с граничными условиями, следующими из (4) (последнее уравнение (3) и краевые условия к нему остаются неизменными):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\alpha}{4}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{6}$$

$$x = 0:\ u = 0\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\tau=0} = \frac{\theta_0 - \theta_*}{\alpha_0}\,;\ x \to \infty:\ \frac{\partial u}{\partial x} \to 0\,,\ \frac{u}{\sqrt{x}} \to 0. \tag{7}$$

Безразмерный параметр $\alpha_0/(\theta_0 - \theta_*)$ характеризует соотношение между начальным импульсом возмущения и создаваемой им (возмущением) дополнительной силой Архимеда на оси вихря.

В отсутствие фоновой стратификации $\theta_* = 0$ второе уравнение (5) имеет решение $\alpha(\tau) = 4\alpha_0(\alpha_0\tau + 4)^{-1}$, что позволяет ввести в (6), (7) автомодельную переменную $\xi = x(\tau + 4/\alpha_0)^{-1}$ и переписать последнюю систему в виде краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$2(\xi u'')' = (u - \xi)u'' - u'u' - 2u', \tag{8}$$

$$\xi = 0:\ u = 0\,,\ u' = 4\frac{\theta_0}{\alpha_0^2}\,;\ \xi \to \infty:\ u' \to 0\,,\ \frac{u}{\sqrt{\xi}} \to 0. \tag{9}$$

Впредь штрихом обозначается производная по переменной ξ. Естественно полагать, что неизвестная V, подчиняющаяся последнему уравнению (3) с соответствующими граничными условиями (4), является функцией безразмерного времени τ и переменной ξ. Тогда для нахождения азимутальной составляющей поля скорости имеем линейную начально-краевую задачу

$$\left(\tau+\frac{4}{\alpha_0}\right)\frac{\partial V}{\partial\tau}=2\xi\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\left[\xi-u(\xi)\right]\frac{\partial V}{\partial\xi},$$

$$V(0,\xi)=V_0(\xi);\ \xi=0:\ V=0;\ \xi\to\infty:\ \frac{V}{\sqrt{\xi}}\to 0,$$

решение которой можно искать в виде суперпозиции частных решений с разделяющимися переменными, что приводит к выражению

$$V(\tau,\xi)=\Gamma_0\int_0^{\xi}\exp\left[-\frac{\eta}{2}+\int_0^{\eta}\frac{u(s)}{2s}ds\right]d\eta+\sum_{k\neq 0}\Gamma_k w_k(\xi)\left(\tau+\frac{4}{\alpha_0}\right)^{-k}. \qquad (10)$$

Постоянные Γ_k являются коэффициентами разложения начального возмущения $V_0(\xi)$ по собственным функциям спектральной задачи (первое слагаемое в (10) соответствует собственному значению $k=0$)

$$2\xi w_k''+\left[\xi-u(\xi)\right]w_k'+kw_k=0,\ w_k(0)=0,\ \lim_{\xi\to\infty}\frac{w_k(\xi)}{\sqrt{\xi}}=0. \qquad (11)$$

2. Точные автомодельные решения

Уравнение (8) обладает следующим решением (его стационарный изотермический аналог рассматривался в [6]):

$$u=a+b\xi+\frac{c}{\xi+d},$$

$$(b+2)b=0,\ (c-12d)c=0,\ \left[a+4-d(b-1)\right]c=0,\ bc=0.$$

С учетом краевых условий (9) имеем

$$u(\xi)=-\frac{12\xi}{\xi+8},\ a=-4,\ b=0,\ c=96,\ d=8,\ \theta_0=-\frac{3}{8}\alpha_0^2<0.$$

В результате, принимая во внимание (10), получаем следующие выражения для гидродинамических величин:

$$V_r = -12\frac{\sqrt[3]{g\nu}}{\sqrt{x}}\frac{\xi}{\xi+8},\ V_z = Z\frac{192\sqrt[3]{g\nu}}{\left(\tau+\sqrt{-6/\theta_0}\right)(\xi+8)^2},$$

$$V_\varphi = \frac{\sqrt[3]{g\nu}}{\sqrt{x}}\left[\Gamma_0\int_0^\xi \frac{\exp(-s/2)}{(s+8)^6}ds + \sum_{k\neq 0}\Gamma_k w_k(\xi)\left(\tau+\sqrt{-\frac{6}{\theta_0}}\right)^{-k}\right], \qquad (12)$$

$$T = Z\frac{384}{\beta\left(\tau+\sqrt{-6/\theta_0}\right)^2(\xi+8)^2},$$

где w_k удовлетворяют системе

$$2\xi(\xi+8)w_k'' + \xi(\xi+20)w_k' + k(\xi+8)w_k = 0,\ w_k(0)=0,\ \lim_{\xi\to\infty}\frac{w_k(\xi)}{\sqrt{\xi}} = 0.$$

Например, при $k=2$, имеем: $w_2 = \xi(\xi+8)^{-5}\exp(-\xi/2)$.

Автомодельность вида $x/(\tau+\tau_0)$ свойственна диффундирующим течениям, что проявляется в дрейфе максимума радиальной скорости от оси вихря. В то же время имеет место радиальная адвекция по направлению к оси симметрии потока и подъем жидкости вверх от подстилающей непроницаемой плоскости $z=0$ на фоне устойчивой стратификации возмущения при нулевой равновесной стратификации $\theta_* = 0$. Вдали от оси симметрии горизонтальное адвективное течение, аналогичное потенциальному вихрестоку, преобладает над вертикальным, так как $\left(v_r, v_\varphi, v_z\right) \sim \left(-r^{-1}, \Gamma_0 r^{-1}, z r^{-2}\right)$. В конечном счете тепловая и вихревая диффузия берет верх над конвергентной адвекцией, и вихрь (12) со временем затухает. Следует отметить, что тепловое возмущение (12) локализовано «сильнее» гидродинамического и быстрее исчезает со временем.

Еще одним решением краевой задачи (8), (9), существующим при $\alpha_0 = 2\sqrt{-\theta_0}$, является (к этому типу относятся стационарные изотермические вихри Бюргерса [7] и Салливана [8] и их нестационарные аналоги [9, 10]) следующее:

$$u(\xi) = -2\left(1-e^{-\xi/2}\right).$$

С его помощью вновь удается построить пример точного решения уравнений конвекции, описывающего радиально-локализованные вихри:

$$v_r = -2\frac{\sqrt[3]{g\nu}}{\sqrt{x}}\left(1 - e^{-\xi/2}\right),\ v_z = 2\sqrt{-\theta_0}\sqrt[3]{g\nu}\,Z\frac{e^{-\xi/2}}{\sqrt{-\theta_0}\tau + 2},$$

$$v_\varphi = \frac{\sqrt[3]{g\nu}}{\sqrt{x}}\left[\Gamma_0\int_0^\xi \exp\left(-\frac{\eta}{2} - \int_0^\eta \frac{1 - e^{-s/2}}{s}ds\right)d\eta + \sum_{k\neq 0}\Gamma_k w_k(\xi)\left(\tau + \frac{2}{\sqrt{-\theta_0}}\right)^{-k}\right], \quad (13)$$

$$\beta T = 4\theta_0 Z\frac{e^{-\xi}}{\left(\sqrt{-\theta_0}\tau + 2\right)^2}.$$

Здесь базисные функции для разложения начального возмущения азимутальной скорости удовлетворяют задаче о собственных функциях и собственных значениях

$$2\xi w_k'' + \left(2 + \xi - 2e^{-\xi/2}\right)w_k' + k w_k = 0,\ w_k(0) = 0,\ \lim_{\xi\to\infty}\frac{w_k(\xi)}{\sqrt{\xi}} = 0.$$

Вихрь (13), подобно предыдущему случаю, затухает со временем вследствие тепловой и вихревой диффузии, преодолевающей конвергентную адвекцию. Вдали от оси горизонтальное течение по-прежнему представляет собой потенциальный вихресток, а температура и вертикальная составляющая скорости обращаются в ноль экспоненциально.

В силу сложности организации экспериментов количество работ, направленных на лабораторное изучение нестационарных вихрей, невелико. В [11] выполнено сравнение вихрей Бюргерса [7], Салливана [8] и Беллами-Найтса [10], относящихся к рассматриваемому здесь классу точных решений (2), с результатами лабораторного моделирования эволюции вихрей, образующихся вследствие локального отбора (аналог конвективной подъемной силы) со свободной поверхности жидкости, заполняющей вращающуюся кювету (аналог циркуляции на бесконечности). В результате обнаружено хорошее качественное, а в ряде случаев и количественное совпадение экспериментальных и теоретических профилей азимутальной скорости в последовательные моменты времени.

Таким образом, получены два примера точных автомодельных решений уравнений гидродинамики в приближении Обербека–Буссинеска, описывающих радиально-локализованные конвективные вихри, эволюционирующие в слое без температурной стратификации.

Работа выполнена в рамках Программы совместных проектов СО, УрО и ДВО РАН (проект 12-С-1-1006) и Российского фонда фундаментальных исследований (№ 12-01-00023 а)

Библиографический список

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.

2. Богатырев Г.П. Возбуждение циклонического вихря или лабораторная модель тропического циклона // Письма в ЖЭТФ. – 1990. – Т. 51. – Вып. 11. – С. 557–559.

3. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. – Новосибирск: Наука, 1989. – 336 с.

4. Prager S. Spiral flow in a stationary porous pipe // Phys. Fluids – 1964. – Vol. 7. – P. 907–908.

5. Аристов С.Н. Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // Докл. АН. – 2001. – Т. 377, № 4. – С. 477–480.

6. Бурдэ Г.И. О движении жидкости вблизи растягивающегося кругового цилиндра // Прикл. математика и мех. – 1989. – Т. 53. – Вып. 4. – С. 343–345.

7. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech. – 1948. – No. 1. – P. 171–199.

8. Sullivan R.D. A two-cell solution of the Navier-Stokes equations // J. Aero/Space Sci. – 1959. – Vol. 26. – P. 767–768.

9. Rott N. On the viscous core of a line vortex // ZAMP. – 1958. – Vol. 9b. – P. 543–553.

10. Bellamy-Knights P.G. An unsteady two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations // J. Fluid Mech. – 1970. – Vol. 41. – Part 3. – P. 673–687.

11. Huang S.-L., Chen H.-S., Chu C.-C., Chang C.-C. On the transition process of a swirling vortex generated in a rotating thank // Exp. Fluids. – 2008. – Vol. 45. – P. 267–282.

References

1. Gershuny G.Z., Zkuhovicky E.M. Konvektivnaya ustoychivost neszhimaemoy zhidkosti [The convective stability of the incompressible fluid]. Moscow: Nauka, 1972, 392 p.

2. Bogatyrev G.P. Excitation of cyclonic vortex or laboratory model of tropical cyclone. *JEPT Lett*, 1990, vol. 51, no. 11, pp. 630-633.

3. Goldshtik M.A., Shtern V.N., Yavorsky N.I. Vyazkie techeniya s paradoksalnimi svoyctvami [Viscose flows with paradoxical properties]. Novosibirsk: Nauka, 1989, 336 p.

4. Prager S. Spiral flow in a stationary porous pipe. *Phys. Fluids*, 1964, vol. 7, pp. 907-908.

5. Aristov S.N. A stationary cylindrical vortex in a viscous fluid. *Doklady Physics*, 2001, vol. 46, iss. 4, pp. 251-253.

6. Burde H.I. On the motion of fluid near a stretching circular cylinder. *J. of Appl. Math. and Mech*, 1989, vol. 53, iss. 2, pp. 271-273.

7. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech*, 1948, no. 1, pp. 171-199.

8. Sullivan R.D. A two-cell solution of the Navier-Stokes equations. *J. Aero/Space Sci.*, 1959, vol. 26, pp. 767-768.

9. Rott N. On the viscous core of a line vortex. *ZAMP*, 1958, vol. 9b, pp. 543 – 553.

10. Bellamy-Knights P.G. An unsteady two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations. *J. Fluid Mech*., 1970, vol. 41, part 3, pp. 673-687.

11. Huang S.-L., Chen H.-S., Chu C.-C., Chang C.-C. On the transition process of a swirling vortex generated in a rotating thank. *Exp. Fluids*, 2008, vol. 45, pp. 267-282.

Об авторах

Аристов Сергей Николаевич (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН (614013 Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: asn@icmm.ru).

Князев Денис Вячеславович (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник ИМСС УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: dvk@icmm.ru).

About the authors

Aristov Sergey Nikolaevich (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, general scientist, ICMM UB RAS (1, Academic Korolev st., 614013, Perm, Russian Federation, e-mail: asn@icmm.ru).

Knyazev Denis Vyacheslavovich (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, scientist, ICMM UB RAS (1, Academic Korolev st., 614013, Perm, Russian Federation, e-mail: dvk@icmm.ru).

Получено 11.04.2013