УДК 517.958

И.Б. Бадриев, В.В. Бандеров, О.А. Задворнов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ МЯГКОЙ СЕТЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАЛИЧИИ НАГРУЗКИ, СОСРЕДОТОЧЕННОЙ В ТОЧКЕ

Рассматривается пространственная задача о равновесном состоянии мягкой сетчатой оболочки при наличии внешней точечной нагрузки, сосредоточенной в некоторой точке. Под сетчатой понимается оболочка, силовой основой которой является сетка, образованная двумя семействами взаимно перекрещивающихся, абсолютно гибких, упругих нитей. Предполагается, что функции, описывающие физические соотношения в нитях, являются непрерывными, неубывающими и имеют линейный рост на бесконечности. Обобщенная задача сформулирована в виде операторного уравнения в пространстве Соболева. Доказано, что множество решений обобщенной задачи не пусто, выпукло и замкнуто. Построены конечномерные аппроксимации задачи, исследована их сходимость. Для решения задачи использован двухслойный итерационный метод. Данный метод был реализован численно. Проведенные для модельных задач численные эксперименты подтвердили эффективность итерационного метода.

Ключевые слова: математическое моделирование, мягкая сетчатая оболочка, точечная нагрузка, конечномерные аппроксимации, двухслойный итерационный метод.

I.B. Badriev, V.V. Banderov, O.A. Zadvornov

Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation

ON THE SOLVING OF EQUILIBRIUM PROBLEM FOR THE SOFT NETWORK SHELL WITH A LOAD CONCENTRATED AT THE POINT

A spatial equilibrium problem of a soft network shell in the presence of external point load concentrated at some point is considered. A network shell is understood to mean the shell which has as its strength basement the net formed by two families of mutually intersecting, absolutely flexible, elastic threads. It is supposed that functions describing physical relations in the threads are continuous, non-decreasing, and have the linear growth at infinity. The generalized problem in the form of operator equation in the Sobolev space is formulated. It is proved that the set of solutions of the generalized problem is non-empty, convex, and closed. The finite dimensional approximations of the problem are constructed and their convergence is investigated. To solve the problem, we used a two-layer iterative method. This method was realized numerically. The numerical experiments made for the model problems confirmed the efficiency of the iterative method.

Keywords: mathematical simulation, soft network shell, finite dimensional approximations, point load, two-layer iterative method.

Введение

В работе рассматривается пространственная задача о равновесном состоянии мягкой сетчатой оболочки при наличии внешней точечной нагрузки, сосредоточенной в некоторой точке. Под сетчатой понимается оболочка, силовой основой которой является сетка, образованная двумя семействами взаимно перекрещивающихся, абсолютно гибких, упругих нитей. Предполагается, что функции, описывающие физические соотношения в нитях, являются непрерывными, неубывающими и имеют линейный рост на бесконечности. Решаемые здесь задачи весьма часто возникают в механике, медицине, при проектировании различного рода конструкций, изготовленных из тканевых или пленочных материалов (см., например, [1–13]).

Задачи об определении положения равновесия мягкой сетчатой оболочки рассматривались и ранее (см., например, [14–18]). При этом обобщенные задачи формулировались в виде уравнений или вариационных неравенств с оператором, действующим в случае линейного роста функций, описывающих физические соотношения в нитях, из соболевского пространства $V = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1 \right]^3$ в сопряженное с ним, и соответственно рассматривается ситуация, когда функция, описывающая плотность внешних источников, определяет линейный непрерывный функционал на V.

В настоящей работе проводится исследование задач теории мягких сетчатых оболочек с менее гладкой правой частью: каждый точечный источник, в неодномерном случае моделируется дельта-функцией Дирака, которая не принадлежит пространству, сопряженному с V. Обойти указанную выше трудность удалось благодаря аддитивному выделению особенности, связанной с дельта-функцией.

Обобщенная постановка задачи сформулирована в виде интегрального тождества относительно функции $\left[\overset{\circ}{W}{}_1^1 \right]^3$. Затем введена вспомогательная задача с правой частью, задаваемой дельта-функцией. Для вспомогательной задачи известно решение в явном виде. Благодаря этому обобщенная постановка свелась к нахождению решения операторного уравнения в V. Установлены свойства оператора, входящего в это уравнение – ограниченность, непрерывность, монотонность, коэрцитивность, что дало возможность применить для доказательства теоремы существования известные результаты теории монотонных операторов (см., например, [19, 20]). Доказано, что множество решений обобщенной задачи не пусто, выпукло и замкнуто. Вообще говоря, решение обобщенной задачи не единственно. Однако установлено, что усилия в нитях определяются однозначно.

Отметим, что аналогичный подход был использован при рассмотрении стационарных задач фильтрации несжимаемой жидкости, следующей закону фильтрации с предельным градиентом, при наличии точечного источника [21, 22].

Построены конечномерные аппроксимации задачи, исследована их сходимость. Для решения задач использован разработанный в работе [23] двухслойный итерационный метод. Данный метод был реализован численно. Проведенные для модельных задач численные эксперименты подтвердили эффективность итерационного метода.

1. Постановка задачи

Рассмотрим пространственную задачу о равновесном состоянии мягкой сетчатой оболочки при наличии точечной нагрузки. Под сетчатой понимается оболочка, силовой основой которой является сетка, образованная двумя семействами взаимно перекрещивающихся, абсолютно гибких, упругих нитей. Предполагается, что узлы сети фиксированы, материал, заполняющий промежутки между нитями, не сопротивляется деформации, и ни в начальном состоянии, ни в процессе деформации соседние нити не соприкасаются. Ячейки сети считаются малыми и не сопротивляющимися сдвиговым деформациям. Деформации и перемещения допускаются конечными.

Введем в пространстве декартову систему координат (x_1, x_2, x_3). Считаем, что в недеформированном состоянии оболочка может быть описана поверхностью $\xi(\alpha) = (\xi_1(\alpha), \xi_2(\alpha), \xi_3(\alpha))$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$ – лагранжевы координаты; Ω – ограниченная область из R^2 с непрерывной по Липшицу границей Γ. Предполагаем, что функция ξ удовлетворяет условиям: $\xi \in \left[C^1(\overline{\Omega})\right]^3$, для любого $\alpha \in \overline{\Omega}$ справедливо неравенство $\left|\left[\partial_1 \xi(\alpha), \partial_2 \xi(\alpha)\right]\right| \geq c > 0$.

Лагранжевы координаты (α_1, α_2) выберем так, что координатные линии сонаправлены с нитями, образующими оболочку.

Через $w(\alpha) = (w_1(\alpha), w_2(\alpha), w_3(\alpha))$ обозначим функцию, описывающую поверхность оболочки в деформированном состоянии, через $G(\alpha) = \left|\left[\partial_1 w(\alpha), \partial_2 w(\alpha)\right]\right|^2$ – дискриминант метрического тензора поверхности деформированной оболочки.

Здесь использованы обозначения: $\partial_j = \partial / \partial \alpha_j$, $j = 1,2$; $[\cdot,\cdot]$, $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ – векторное, скалярное произведения и норма в R^3 соответственно.

Введем также следующие обозначения (для $j = 1,2$): $j^* = 3 - j$; $r_j = \partial_j w$ – вектора, образующие ковариантный локальный базис на деформированной поверхности; $g_j = |\partial_j \xi|$, $G_j = |\partial_j w|$ – параметры Ляме соответственно недеформированной и деформированной поверхности оболочки; r^1, r^2 – векторы, образующие контрвариантный локальный базис на деформированной поверхности: $(r_j, r^m) = \delta_{jm}$.

Обозначим через F^j внутреннюю силу, действующую на единицу длины α^{j^*}-й координатной линии ($\alpha^j = \mathrm{const}$) деформированной оболочки с той стороны оболочки, куда направлен вектор r^j, $j = 1,2$, через F^{jm} – коэффициенты разложения этой плотности сил по единичным векторам локального базиса: $F^j = \sum_{m=1}^{2} \frac{F^{jm}}{G_m} r_m$. Тогда ковариантные компоненты тензора напряжений $T = \sum_{j,m=1}^{2} T^{jm} r_j r_m$ связаны с погонными усилиями F^{jm} соотношениями $\sqrt{G} T^{jm} = F^{jm} G_{j^*} / G_m$ (см. [24, с. 50]).

Для сетчатой оболочки в силу того, что в выбранной лагранжевой системе координат направления осей совпадают с направлениями нитей, имеем [25]: $F^{12} = F^{21} = 0$ (то есть ячейка сети не оказывает сопротивления повороту нитей в узлах скрепления), $F^{jj} = b_j(\lambda_j) \rho_j g_{j^*} / G_{j^*}$, где $\lambda_j = g_j / G_j$ – относительные степени удлинения.

Здесь $b_1, b_2 : R_+ \to R_+$ – функции, характеризующие физические свойства нитей; $\rho_j : \Omega \to R_+$ – количество нитей, сонаправленных с α^{j^*}-й координатной осью, на единицу длины α^{j^*}-й координатной оси в недеформированном состоянии. Эти функции определены конструкцией сетчатой оболочки, и относительно них считаем выполненными условия

$$b_j \in C(R_+),\ b_j(\lambda) > b_j(\zeta) \text{ при } \lambda > \zeta \ge 1, \tag{1}$$

$$b_j(\zeta) = 0 \text{ при } \zeta \le 1^*, \tag{2}$$

существуют постоянные $c_0, c_1, k > 0$, такие, что $\rho_j \in C(\bar{\Omega})$, $\rho_j(\alpha) \ge c_0$ для всех $\alpha \in \bar{\Omega}$,

$$k\zeta - c_1 \le b_j(\zeta) \le k\zeta\,. \tag{3}$$

Заметим, что, вообще говоря, направления r_j не являются главными для тензора T, хотя смешанные компоненты T^{jm} и равны нулю.

Уравнение равновесия оболочки, находящейся под воздействием внешних сил, в декартовой системе координат имеет следующий вид (см. [24, с. 88]):

$$\sum_{j=1}^{2} \partial_j \Big(\frac{b_j(|\partial_j w| / g_j)}{|\partial_j w|} \rho_j g_{j^*} \partial_j w \Big) + \sqrt{G} P + \sqrt{G} \gamma Q = 0, \tag{4}$$

где P, Q – векторы плотности соответственно поверхностной и массовой нагрузок; γ – плотность материала оболочки в деформированном состоянии.

В силу закона сохранения массы $\sqrt{G}\gamma = \left| [\partial_1 \xi(\alpha), \partial_2 \xi(\alpha)] \right| \overset{o}{\gamma}$, где $\overset{o}{\gamma} : \Omega \to R^1$ – заданная плотность материала недеформированной оболочки. Будем считать, что плотность материала равна единице ($\overset{o}{\gamma} = 1$) и $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Поверхностная нагрузка предполагается равной нулю:

---

* Другими словами, нити не воспринимают сжимающих усилий.

$P=0$. Поэтому в силу того, что $\left\|[\partial_1\xi(\alpha),\partial_2\xi(\alpha)]\right\|=1$, $g_1=g_2=1$, уравнение (4) примет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{2}\partial_j\left(\frac{b_j(|\partial_j w|)}{|\partial_j w|}\right)+Q=0. \tag{5}$$

Далее будем считать края оболочки закрепленными:

$$w(\alpha_1,\alpha_2)=\xi(\alpha_1,\alpha_2),\ (\alpha_1,\alpha_2)\in\Gamma. \tag{6}$$

Вариационная постановка задачи (5), (6) в перемещениях состоит в нахождении вектор-функции $v=w-\xi$, такой, что

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\frac{b_j(|\partial_j(v+\xi)|)}{|\partial_j(v+\xi)|}\partial_j(v+\xi),\partial_j\eta\right)d\alpha-\\ -\int_{\Omega}(Q(\alpha),\eta(\alpha))d\alpha=0\ \forall\eta\in[C_0^\infty(\Omega)]^3.\end{gathered} \tag{7}$$

Предполагаем, что массовая нагрузка, действующая на оболочку, сосредоточена во внутренней точке α^* множества Ω и имеет интенсивность $q=(q_1,q_2,q_3)$, $q_j=\text{const}$, $j=1,2,3$.

Приведем обобщенную формулировку рассматриваемой задачи. Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\eta\|\equiv\|\partial_1\eta\|_{L_1}+\|\partial_2\eta\|_{L_1}$.

Под обобщенным решением задачи (7) будем понимать функцию $v\in\left[\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)\right]^3$, такую, что

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\frac{b_j(|\partial_j(v+\xi)|)}{|\partial_j(v+\xi)|}\partial_j(v+\xi),\partial_j\eta\right)d\alpha=(q,\eta(\alpha^*))\ \ \forall\eta\in[C_0^\infty(\Omega)]^3. \tag{8}$$

2. Исследование разрешимости задачи

Исследование разрешимости задачи (8) основано на сведении ее к операторному уравнению в гильбертовом пространстве путем введения вспомогательной задачи, снимающей особенность в правой части, связанной с наличием точечной нагрузки, для которой построено точное решение.

Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\eta\| \equiv \|\partial_1\eta\|_{L_2} + \|\partial_2\eta\|_{L_2}$, где $\|\partial_j\eta\|_{L_2} = (\int\limits_\Omega |\partial_j\eta(\alpha)|^2 d\alpha)^{1/2}$, $j=1,2$, и обозначим $V = \left[\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right]^3$. Рассмотрим вспомогательную задачу поиска функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ такой, что

$$\begin{cases} -k\Delta\varphi_i = q_i\delta(\alpha-\alpha^*), \ \alpha\in\Omega, \\ \varphi_i(\alpha) = 0, \ \alpha\in\Gamma, \end{cases} \quad i=1,2,3, \tag{9}$$

где k – постоянная из условия (1), δ – дельта-функция Дирака.

Решение задачи (9) существует, и $\varphi_i \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ для каждого $i=1,2,3,$ (см., например [26, стр. 163]. Поэтому $\varphi \in \left[\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)\right]^3$.

Вариационная постановка задачи (9) выглядит следующим образом: Найти

$$\varphi \in \left[\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)\right]^3 : k\sum_{j=1}^2 \int\limits_\Omega (\partial_j\varphi(\alpha), \partial_j\eta(\alpha))d\alpha = (q, \eta(\alpha^*)) \ \forall\eta\in[C_0^\infty(\Omega)]^3. \tag{10}$$

Решение задачи (9) будем искать в виде $v = u + \varphi$, где $u\in V$ – неизвестная функция, а φ – решение задачи (10).

Введем далее операторы $\Lambda_j : V \to [L_2(\Omega)]^3$, $B_j : R^3 \to R^3$, $j=1,2$, по формулам $\Lambda_j(u) = \partial_j(\xi + u + \varphi)$, $B_j(y) = b_j(|y|)y/|y|$, $y\neq 0$, $B_j(0) = 0$. При этом $B_j(\Lambda_j u(\alpha)), \alpha\in\Omega$, $j=1,2$, – усилия в нитях.

С учетом введенных обозначений задача (8) сводится к поиску функции $u\in V$, такой, что

$$\sum_{j=1}^2 \int\limits_\Omega (B_j(\Lambda_j u), \partial_j\eta)d\alpha = k\sum_{j=1}^2 \int\limits_\Omega (\partial_j\varphi, \partial_j\eta)d\alpha \ \ \forall\eta\in[C_0^\infty(\Omega)]^3. \tag{11}$$

Справедлива

Теорема 1. *Задача (11) имеет непустое, выпуклое, замкнутое множество решений. Если* v *– решение (8), то* $v = u + \varphi$*, где* u *– решение задачи (11);* φ *– решение задачи (10).*

Определим на $V \times V$ форму $a(u,\eta) = a_1(u,\eta) + a_2(u,\eta) + k(\xi + u,\eta)_V$, где $a_j(u,\eta) = \int\limits_\Omega \left[\frac{b_j(|\Lambda_j u|)}{|\Lambda_j u|} - k|\Lambda_j u| \right] (\Lambda_j u, \partial_j \eta) d\alpha$, $j = 1,2$. Нетрудно проверить, что форма a непрерывна и линейна по второму аргументу. Поэтому по теореме Рисса-Фишера эта форма порождает оператор $A : V \to V$, $a(u,\eta) = (Au,\eta)_V$. Таким образом, обобщенная задача (12) эквивалентна операторному уравнению

$$Au = 0. \qquad (12)$$

При выполнении условий, наложенных на функции b_j, можно доказать, что оператор A является ограниченным, непрерывным, монотонным и коэрцитивным, поэтому существование решения уравнения (12), выпуклость и замкнутость множества его решений следует из общих результатов теории монотонных операторов (см., например [19, 20]). По аналогии с [21, 22] устанавливается справедливость второго утверждения теоремы 1.

Отметим, что, вообще говоря, решение задачи (12) не единственно. Однако имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1)–(3), кроме того, функции* b_j *липшиц-непрерывны:*

$$|b_j(\xi) - b_j(\zeta)| \le c_2 |\xi - \zeta|, \ c_2 > 0, \ j = 1,2. \qquad (13)$$

Тогда, если u *– решение задачи (12), то усилия в нитях* $B_j(\Lambda_j u(\alpha)), \alpha \in \Omega$, $j = 1,2$*, определяются единственным образом.*

Справедливость теоремы устанавливается по аналогии с [27].

3. Конечномерные аппроксимации задачи

При построении конечномерных аппроксимаций для простоты будем предполагать, что область $\Omega \subset R^2$ является многоугольником. Пусть $\Im_h$ – некоторое семейство (триангуляция) треугольников K, обладающее свойствами:

1) $\bigcup\limits_{K\in\Im_h} K=\Omega$;

2) $\operatorname{int}K \bigcap \operatorname{int}K'=\varnothing \ \forall K,K'\in\Im_h$;

3) для любых $K,K'\in\Im_h$ множество $K\bigcap K'$ если не пусто, то является либо стороной, либо вершиной одновременно треугольников K,K';

4) триангуляция $\Im_h$ является регулярной [28, 29]:

$$\max_{K\in\Im_h} R_K / r_K \le c < +\infty \,,\; h = \max_{K\in\Im_h} R_K / r_K \,.$$

Здесь R_K – диаметр наименьшего шара, содержащего K; r_K – наибольшего шара, содержащегося в наибольшем шаре, содержащего в K.

Определим теперь конечномерные пространства W_h и V_h, ассоциированные с триангуляцией $\Im_h$:

$$W_h = X_h \times X_h \times X_h \,,\; V_h = \overset{\circ}{X}_h \times \overset{\circ}{X}_h \times \overset{\circ}{X}_h,$$

где X_h – пространство непрерывных функций, являющихся на каждом K из $\Im_h$ полиномами не выше первого порядка; $\overset{\circ}{X}_h$ – пространство непрерывных функций из X_h, равных нулю на границе множества Ω.

Очевидно, что $X_h \subset W_1^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{X}_h \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и, значит, $V_h \subset V$. При этом (см., например, [30])

$$\forall \eta \in V \exists \; \{\eta_h\}_{h>0} \subset V : \eta_h \to \eta \text{ при } h \to 0 \,.$$

Задаче (12) сопоставим следующую задачу:
Найти

$$u_h \in V_h : \; (Au_h, \eta_h)_V = 0 \;\; \forall u_h \in V_h \,. \tag{14}$$

Справедливы следующие результаты:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (1)–(3). Тогда задача (14) имеет непустое, выпуклое и замкнутое множество решений, множество* $\{u_h\}_{h>0}$ *решений задачи (14) равномерно ограничено по* h *:*

$$\| u_h \|_V \le c_3 \ \ \forall h > 0, \tag{15}$$

где константа $c_3 > 0$ *не зависит от* h. *Если подпоследовательность* $\{u_{h_i}\}_{i=1}^{\infty}$ *слабо сходится к* u^* *в* V *при* $h_i \to 0$, *то* u^* *– решение задачи (14).*

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, используя монотонность, непрерывность и коэрцитивность оператора A, получаем существование непустого, выпуклого и замкнутого множества решений задачи (14). В силу коэрцитивности оператора A множество $\{u_h\}_{h>0}$ решений задачи (14) равномерно ограничено по h, т.е. справедлива априорная оценка (15). Из этой оценки следует существование подпоследовательности $\{u_{h_i}\}_{i=1}^{\infty}$, слабо сходящейся к некоторому элементу u^* в V при $h_i \to 0$. Используя монотонность и непрерывность, а значит, псевдомонотонность [19] оператора A, получаем стандартным образом (см., например [19, 30]), что u^* – решение задачи (14).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (1)–(3), (13), решение и задачи (12) принадлежит пространству* $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \right]^3$. *Тогда справедлива оценка*

$$\| u - u_h \|_V \le c_* \sqrt{h}$$

с константой c_*, не зависящей от h.

4. Итерационный метод

В заключение отметим, что при выполнении условий (1)–(3), (13), наложенных на функции b_j, оператор A является потенциальным, липшиц-непрерывным и обратно сильно монотонным [31, 32]. Поэтому для решения задачи (12) можно использовать следующий итерационный процесс [23]. Пусть $u^{(0)}$ – произвольный элемент из V. Для $k = 1,2,\ldots$ определим вектор $u^{(0)}$ как решение уравнения

$$-\Delta(u^{(k+1)} - u^{(k)}) = \tau A u^{(k)}, \tag{16}$$

где $\tau > 0$ – итерационный параметр.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (1)–(3), (13),* $\tau \in (0{,}2 / c_3)$. *Тогда итерационная последовательность* $\{u^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, *построенная согласно (16), сходится слабо в* V *к некоторому решению задачи (12).*

Указанный алгоритм решения задачи реализован в виде комплекса программ в среде MATLAB. Программа выполнена в соответствии с модульным принципом, что позволило осуществить раздельное программирование, отладку и тестирование составных частей пакета программ, а также простую модернизацию и настройку пакета на решение задач различного уровня сложности.

Проведенные для модельных задач численные эксперименты подтвердили эффективность итерационного метода. В качестве области Ω выбирался квадрат $(0{,}1)\times(0{,}1)$, функции b_j полагались равными $b_j(\xi) = \begin{cases} 0, \xi \le 1, \\ \xi - 1, \xi > 1, \end{cases}$ внешняя нагрузка была сосредоточена в точке $(0.5{,}0.5)$, интенсивность нагрузки полагалась $q = -0{,}05$. В качестве начального приближения в итерационном методе (16) выбирались функции, соответствующие недеформированной оболочке.

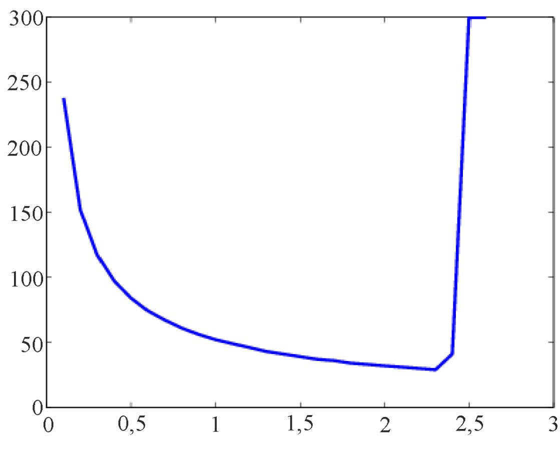

Рис. 1. Зависимость числа итераций от итерационного параметра τ

В результате численных экспериментов было найдено оптимальное (по количеству итераций) значение итерационного параметра (рис. 1). Это значение практически не зависит от числа разбиений (рис. 2). Значение максимального прогиба (в центре квадрата) также не зависит от количества точек сетки (рис. 3). На рис. 4 представлена форма деформированной оболочки.

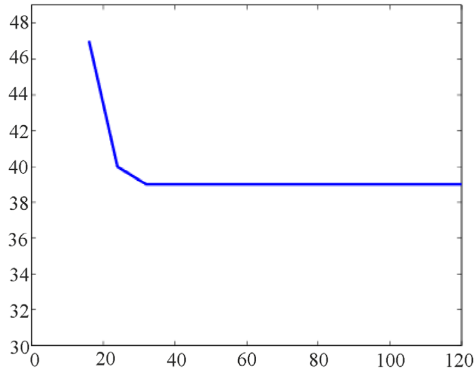

Рис. 2. Зависимость оптимального числа итераций от количества точек сетки

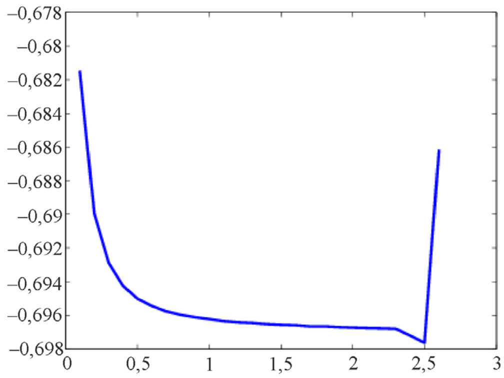

Рис. 3. Зависимость прогиба в центральной точке от итерационного параметра τ

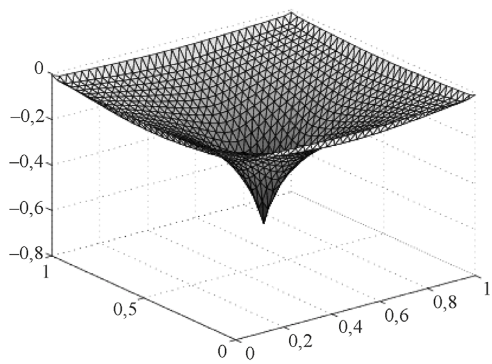

Рис. 4. Форма деформированной оболочки

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00864, 12-01-00955, 12-01-97026, 12-01-31515, 13-01-00908).

Библиографический список

1. Исследование парашютов и дельтапланов на ЭВМ / С.М. Белоцерковский, М.И. Ништ, А.Т. Пономарев, О.В. Рысев; под ред. С.М. Белоцерковского. – М.: Машиностроение, 1987. – 260 с.

2. Гимадиев Р.Ш. Динамика мягких оболочек парашютного типа / Казан. гос. энерг. ун-т. – Казань, 2006. – 208 с.

3. Исследование процессов нагружения и деформирования парашютов / И.В. Днепров, А.Т. Пономарев, О.В. Рысев, С.А. Семушин // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5, № 3. – С. 97–109.

4. Ермолов В.В. Воздухоопорные здания и сооружения. – М.: Стройиздат, 1980. – 304 с.

5. Магула В.Э. Судовые эластичные конструкции. – Л.: Судостроение, 1978. – 263 с.

6. Судовые мягкие емкости / В.Э. Магула, Б.И. Друзь, В.Д. Кулагин, Е.П. Милославская, М.В. Новоселов. – Л.: Судостроение, 1966. – 287 с.

7. Миткевич А.Б., Пономарев В.П., Никитин О.Д. Разработка и экспериментальная проверка критериев моделирования напряженно-деформированного состояния эластичных резервуаров подушечного типа для хранения горючего // Вопросы оборонной техники. – 2006. – № 3/4. – С. 16–22.

8. Мифтахов Р.Н. Исследование ткани желудка человека при одноосном растяжении // Гидроупругость оболочек: тр. семинара. Вып. 16. – Казань: Изд-во Казан. физ.-техн. ин-та, 1983. – С. 163–171.

9. Отто Ф., Тростель Р. Пневматические строительные конструкции. – М.: Стройиздат, 1967. – 320 с.

10. Полякова Е.В., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Осесимметричная деформация мягкой армированной нитями тороидальной оболочки // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. – 2011. – Вып. 3. – С. 131–142.

11. Осесимметричная деформация торообразной оболочки из нитей под действием внутреннего давления / Е.В. Полякова, П.Е. Товстик, С.Б. Филиппов, В.А. Чайкин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. – 2009. – Вып. 4. – С. 98–113.

12. Полякова Е.В., Чайкин В.А. Прикладные задачи механики мягких оболочек и тканей. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та технологии и дизайна, 2006. – 193 с.

13. Edward W. A general theory of parachute opening // J. Aircraft. – 1972. – Vol. 9. – No. 4. – P. 257–258.

14. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости стационарных задач для сетчатых оболочек // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 1. – С. 3–7.

15. Задворнов О.А. Постановка и исследование стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 1. – С. 45–52.

16. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Постановка и численное исследование осесимметричной задачи о равновесии мягкой оболочки вращения // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2004. – Вып. 25. – С. 11–33.

17. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 1. – С. 25–30.

18. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Итерационные методы решения осесимметричных задач о равновесии мягких сетчатых оболочек вращения // Труды Средневолжского математического общества. – 2007. – Т. 9, № 2. – С. 14–18.

19. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

20. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

21. Задворнов О.А. Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 1. – С. 58–63.

22. Задворнов О.А. Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физико-математические науки. – 2010. – Т. 152. – Кн. 1. – С. 155–163.

23. Бадриев И.Б., Карчевский М.М. О сходимости итерационного процесса в банаховом пространстве // Исследования по прикладной математике. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1990. – Вып. 17. – С. 3–15.

24. Ридель В.В., Гулин Б.В. Динамика мягких оболочек – М.: Наука, 1990. – 206 с.

25. Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Уравнения равновесия безмоментной сетчатой оболочки // Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1966. – № 1. – С. 84–89.

26. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 348 с.

27. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 73–81.

28. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

29. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

30. Гловински Р.Г., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 576 с.

31. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

32. Zhu D. New classes of generalized monotonicity // Journal of Optimazation Theory and Applications. – 1995. – Vol. 87. – No. 2. – P. 457–471.

References

1. Belotserkovskii S.M., Nisht M.I., Ponomarev A.T., Rysev O.V. Issledovanie parashytov i del'taplanov na EVM [Study of parachutes and gliders on the computers]. Ed. S.M. Belotserkovskii. Moscow: Mashinostroenie, 1987, 260 p.

2. Gimadiev R.Sh. Dinamika myagkikh obolochek parashytnogo tipa [Dynamics of soft shells parachute type]. *Kazanskiy gosudarstvenniy energeticheskiy universitet,* 2006, 208 p.

3. Dneprov I.V., Ponomarev A.T., Rysev O.V., Semushin S.A. Issledovanie processov nagruzheniya i deformirovaniya parashutov [Simulation of parachute loading and deformation]. *Mathematical Modeling*, 1993, vol. 5, no 3, pp. 97-109.

4. Ermolov V.V. Vozdukhooprnye zdaniya I sooruzheniya [Inflatable buildings and constructions]. Moscow: Stroyizdat, 1980, 304 p.

5. Magoula V.E. Sudovye elastichnye konstruktsii [Ship elastic construction]. Leningrad: Sudostroenie, 1978, 263 p.

6. Magoula V.E., Druz B.I., Kulagin V.D., Miloslavskaya E.P., Novoselov M.V. Sudovye myagkie emkosti [Ship soft containers]. Leningrad: Sudostroenie, 1966, 287 p.

7. Mitkevich A.B., Ponomarev V.P., Nikitin O.D. Razrabotka i eksperimental'naya proverka kriteriev modelirovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya elastichnikh rezervuarov podushechnogo tipa dlya hraneniya goryuchego [Development and experimental verification of the criteria for modeling the stress-strain state of elastic-type pillow tanks for fuel storage]. *Voprosy oboronnoy tekhniki,* 2006, no. 3/4, pp. 16-22.

8. Miftakhov R.N. Issledovanie tkani zheludka cheloveka pri odnoosnom rastyazhenii [The study of human gastric tissue under uniaxial tension]. Trydy seminara «Gydrouprugost obolochek» Iss. 16. Kazanskiy fisiko-technicheskiy institut; 1983, pp. 163-171.

9. Otto F., Trostel' R. Pnevmaticheskie stroitel'nye konstruktsii [Pneumatic building constructions]. Moscow: Stroyizdat, 1967, 320 p.

10. Polyakova E.V., Tovstik PE, Filippov SB Osesimmetrichnaya deformatsiya myagkoy armirovannoy nityami toroidal'noy obolochki [Axisymmetric deformation of soft yarns reinforced toroidal shell]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*. Series 1, 2011, iss. 3, pp. 131-142.

11. Polyakova E.V., Tovstik P.E., Filippov S.B., Chaikin V.A. Osesimmetrichnaya deformatsiya toroobraznoy obolochki is nitey pod deystviem vnutrennego davleniya [Axisymmetric deformation of a toroidal shell of the strands under internal pressure]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta*. Series 1, 2009, iss. 4, pp. 98-113.

12. Polyakova E.V., Chaykin V.A. Prikladnye zadachi mekhaniki myagkikh obolochek i tkaney [Applied problems in the mechanics of soft tissues and shells]. *Sankt-Petersburgskiy gosudarstvenny universitet technologii i disayna*, 2006, 193 p.

13. Edward W. A general theory of parachute opening. *J. Aircraft,* 1972, vol. 9, no 4, pp. 257-258.

14. Badriev I.B., Zadvornov O.A. Issledovanie razreshimosti statsionarnich zadach dlya setchatikh obolochek [Investigation of solvability of sta-

tionary problems for network shells]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 1992, vol. 36, no. 11, pp. 3-7.

15. Zadvornov O.A Postanovka i issledovanie statsionarnoy zadachi o kontakte myagkoy obokochki s prepyatstviem [Formulation and investigation of a stationary problem of the contact of a soft shell with an obstacle]. *Izvestya vuzov. Matematika*, 2003, vol. 47, no 1, pp. 45-52.

16. Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A. Postanovka i chislennoe issledovanie osesimmetrichnoi zadachi o ravnovesii myagkoy obokochki vrascheniya [Statement and numerical investigation of the axisymmetric equilibrium problem of the soft shell of rotation]. *Issledovaniya po prikladnoi matematike i informatike. Kazanskiy gosudarstvenny universitet*, 2004, iss. 25, pp. 11-33.

17. Badriev I.B., Zadvornov O.A. Issledovanie razreshimosti osesimmetrichnoy zadachi ob opredelenii polozheniya ravnovesiya myagkoy obokochki vrascheniya [Investigation of the solvability of an axisymmetric problem of determining the equilibrium position of a soft shell of revolution]. *Izvestya vuzov. Matematika*, 2005, no 1, pp. 25-30.

18. Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A. Iteratsionnie metodi resheniya zadach o ravnovesii myagkih setchatih obokochek vrascheniya [The iterative methods of solving of the axisymmetric equilibrium problem of the soft shell of revolution]. *Trudi Srednevolzhskogo matematicheskogo obschestva*, 2007, vol. 9, no 2, pp. 14-18.

19. Lions J.-L. Quelque problèmes méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires. Paris: Dunod, 1969, 588 p.

20. Gajewskii H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen, Berlin: Akademie-Verlag, 1974, 336 c.

21. Zadvornov O.A Issledovanie nelineynoy statsionarnoy zadachi filtratsii pri nalichii tochechnikh istochnikov [Investigation of a nonlinear stationary problem of filtration in the presence of a point source]. *Izvestya vuzov. Matematika*, 2005, vol. 49, no 1, pp. 58-63.

22. Zadvornov O.A Suschestvovanie resheniya kvasilineynoy ellipticheskoy zadachi pri nalichii tochechnikh istochnikov [Existence of solutions for quasilinear elliptic boundary value problem in the presence of point sources]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2010, vol. 152, b.1, pp. 155-163.

23. Badriev I.B., Karchevskii M.M. Convergence of an iterative process in a Banach space. *Journal of Mathematical Sciences*, 1994, vol. 71, no. 6, pp. 2727-2735.

24. Ridel' V.V., Gulin B.V. Dinamika myagkikh obolochek [Dynamics of Soft Shells]. Moscow: Nauka, 1990, 206 p.

25. Biderman V.L., Bukhin B.L. The equilibrium equations of the network membrane *Mechanics of Solids*, 1966, no. 1, pp. 84-89.

26. Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1971, 426 p.

27. Lyashko A.D., Karchevskij M.M. O reshenii nekotorih nelineynikh zadach teorii filtratsii [Über die Lösung einiger nichtlinearer Probleme der Filtrationstheorie]. *Izvestya vuzov. Matematika*, 1975, no. 6, pp. 73-81.

28. Ciarlet P. The finite element method for elliptic problems. Studies in Mathematics and its Applications. Vol. 4. Amsterdam – New York – Oxford: North-Holland Publishing Company, 1978, 580 p.

29. Temam R. Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1979.

30. Glovinski R., Lions J.L., Trémolières R. Analyse Numérique des inéquations variationneles. Paris: Dunod, 1976.

31. Gol'shtein E.G., Tret'yakov N.V. Modifitsirovannye funktsii Lagranzha [Modfied Lagrangians]. Moscow: Nauka, 1989.

32. Zhu D. New classes of generalized monotonicity. *Journal of Optimazation Theory and Applications*, 1995, vol. 87, no. 2, pp. 457-471.

Об авторах

Бадриев Ильдар Бурханович (Казань, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, e-mail: ildar.badriev@ksu.ru).

Бандеров Виктор Викторович (Казань, Россия) – кандидат физико-математических наук, заместитель директора по научной и инновационной деятельности Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, e-mail: Victor.banderov@ksu.ru).

Задворнов Олег Анатольевич (Казань, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, e-mail: Oleg.Zadvornov@ksu.ru).

About the authors

Badriev Ildar Burkhanovich (Kazan, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Calculation Mathematics, Kazan Federal University (18, Kremlevskaja st., 420008, Kazan, Russian Federation, e-mail: ildar.badriev@ksu.ru)

Banderov Victor Victorovich (Kazan, Russian Federation) – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Deputy Director for Research and Innovations of Institute of Computer Mathematics and Information Technologies, Kazan Federal University (18, Kremlevskaja st., 420008, Kazan, Russian Federation, e-mail: Victor.banderov@ksu.ru)

Zadvornov Oleg Anatol'evich (Kazan, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department of Calculation Mathematics, Kazan Federal University (18, Kremlevskaja st., 420008, Kazan, Russian Federation, e-mail: Oleg.Zadvornov@ksu.ru)

Получено 11.03.2013