УДК 517.958

И.Б. Бадриев[1], Л.А. Нечаева[2]

[1]Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия
[2]Институт информатики Академии наук Республики Татарстан, Казань, Россия

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ С МНОГОЗНАЧНЫМ ЗАКОНОМ

Рассматривается установившийся процесс фильтрации несжимаемой высоковязкой жидкости, следующей многозначному закону фильтрации. Обобщенная постановка данной задачи формулируется в виде смешанного вариационного неравенства с монотонным оператором и сепарабельным, вообще говоря, недифференцируемым функционалом в гильбертовом пространстве. К данной задаче сводится задача об определении границ предельно равновесных целиков остаточной вязкопластической нефти. Установлены свойства оператора, входящего в это неравенство (обратная сильная монотонность, коэрцитивность), а также свойства функционала (липшиц-непрерывность и выпуклость). Это дало возможность применить для доказательства теоремы существования известные результаты теории монотонных операторов. Для решения вариационного неравенства предложен итерационный метод, не требующий обращения исходного оператора. Каждый шаг итерационного процесса сводится фактически к решению краевых задач для оператора Лапласа. Исследование сходимости итерационного процесса удалось провести благодаря сведению его к методу последовательных приближений для отыскания неподвижной точки некоторого оператора (оператора перехода). Получена связь решения исходного вариационного неравенства с компонентами неподвижной точки этого оператора перехода. Доказано, что оператор перехода является нерастягивающим, сверх того, получено неравенство, более сильное, чем неравенство нерастягиваемости. Установлено также, что оператор перехода является асимптотически регулярным. Это и позволило доказать слабую сходимость последовательных приближений. Проведено исследование сходимости итерационного процесса. Метод был реализован численно. Проведенные для модельных задач численные эксперименты подтвердили эффективность итерационного метода. Следует отметить, что предложенные методы позволяют находить приближенные значения не только самого решения, но и его характеристик, для задач фильтрации – это приближенные значения градиента решения, а также приближенные значения скоростей фильтрации на множествах, соответствующих точкам многозначности в законе фильтрации, что весьма полезно с практической точки зрения.

Ключевые слова: математическое моделирование, установившаяся фильтрация, вариационное неравенство, недифференцируемый функционал, обратно сильно монотонный оператор, итерационный метод.

I.B. Badriev[1], L.A. Nechaeva[2]

[1]Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation
[2]Institute of Informatics of the Tatarstan Republic Academy of Sciences, Kazan, Russian Federation

MATHEMATICAL SIMULATION OF STEADY FILTRATION WITH MULTIVALUED LAW

We consider a steady process of filtration of the incompressible high-viscosity fluid, following multivalued filtration law. Generalized statement of this problem is formulated in the form of mixed variational inequality with monotone operator and separable generally nondifferentiable functional in Hilbert space. To this problem the problem of finding the boundaries of limit-equilibrium unrecovered visco-plastic oil in multilayer beds can be reduced. We establish the properties of operator (inverse strong monotonicity, coerciveness) and functional (Lipschitz continuity, convexity) contained in this variational inequality. This makes it possible to apply the known results in the theory of monotone operators to prove the existence theorem. To solve the variational inequality, we suggest iterative method that does not require the inversion of the original operator. Each step of the iterative process can essentially be reduced to the solution of the boundary-value problem for the Laplace operator. The investigation of the convergence of the iterative process is performed by its reduction to the successive approximation method for finding a fixed point of some operator (the transition operator). We obtain a relationship between the solution of the original variational inequality and the components of the fixed point of this transition operator. We show that the transition operator is nonexpanding; moreover, we obtain an inequality stronger than the nonexpansion inequality. We also show that the transition operator is asymptotically regular. This permits one to prove the weak convergence of the successive approximations. This method was realized numerically. The numerical experiments made for the model problems confirmed the efficiency of the iterative method. It is must to be mentioned that the suggested methods permit one to find approximate values not only of the solution itself but also of its characteristics (for filtration problems, these are approximate values of the solution gradient and also the approximate values of filtration rate on the sets according to the points of multivalence in filtration law), which is very useful from the practical viewpoint.

Keywords: mathematical simulation, steady filtration, variational inequality, nondifferentiable functional, inverse strongly monotone operator, iterative method.

Введение

В работе рассматривается задача об определении границ предельно равновесных целиков остаточной вязкопластичной нефти в многослойных пластах (см., например, [1–4]). Предельно равновесный целик остаточной нефти представляет собой наибольшую область, которая может быть занята остаточной вязкопластичной жидкостью неограниченно долго, то есть характеризует вклад пластических свойств жидкости в остаточные потери нефти. Таким образом, расчет предельно равновесных целиков представляет собой один из подходов к оценке влияния пластических свойств нефти на предельную нефтеотдачу.

Такой расчет полезен для оценки целесообразности бурения новых скважин. Рассматриваемая задача об определении границ предельно равновесных целиков остаточной вязкопластичной нефти сводится к стационарной задаче фильтрации несжимаемой жидкости с эффективным многозначным законом, состоящей в нахождении полей давления и скорости фильтрации, удовлетворяющих уравнению неразрывности и граничным условиям. В [1–4] для областей фильтрации простого вида и конкретных законов фильтрации было проведено решение рассматриваемой задачи. Однако в случае произвольных областей фильтрации и законов фильтрации, определяемых нелинейной функцией общего вида, необходимо применять приближенные методы. Исследованию корректности таких задач, построению приближенного метода ее решения и исследованию его сходимости и посвящена данная работа.

Обобщенная постановка сформулирована относительно давления в виде вариационного неравенства второго рода [5, 6] с обратно сильно монотонным оператором [7] в гильбертовом пространстве. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких полунепрерывных снизу, выпуклых, собственных, вообще говоря, недифференцируемых функционалов. Доказана теорема существования этого вариационного неравенства, а также установлено существование поля скоростей фильтрации, построенного согласно многозначному закону по решению вариационного неравенства, удовлетворяющего уравнению неразрывности.

Для решения вариационного неравенства предложен итерационный метод расщепления, не требующий обращения исходного оператора. Отметим, что ранее [8, 9] для решения вариационных неравенств второго рода предлагался метод расщепления. Основная трудность при его реализации состояла в решении возникающей на каждом шаге метода задачи минимизации. В случае однослойного пласта (когда в вариационном неравенстве присутствует лишь один недифференцируемый функционал) эта задача минимизации была решена в [9] в явном виде благодаря тому, что удалось вычислить субдифференциал функционала, сопряженного с минимизируемым. Этот прием был применен и для рассматриваемой в настоящей работе задачи. Таким образом, каждый шаг метода сводится фактически к обращению оператора Лапласа.

Следует отметить, что метод позволяет находить приближенные значения не только самого решения, но и его характеристик, для задач фильтрации – это приближенные значения градиента решения, что весьма полезно с практической точки зрения. Для численной реализации указанного итерационного метода были построены конечноэлементные аппроксимации вариационного неравенства и итерационного метода. Был составлен комплекс программ в среде Matlab. Для модельных задач были проведены численные эксперименты для различных исходных данных, при этом эмпирически определялись оптимальные (по количеству итераций) итерационные параметры. Результаты экспериментов свидетельствуют об эффективности итерационного метода.

1. Постановка задачи

В работах [1–4] рассматривались задачи об определении границ предельно равновесных целиков остаточной вязкопластичной нефти. Расчет целиков остаточной нефти в многослойных (m слоев) пластах, в осредненной постановке, сведен ([3, с. 135]) к решению стационарной задачи фильтрации вытесняющей жидкости относительно полей давления p и скорости фильтрации w с эффективным многозначным законом (рис. 1)

$$-\nabla p \in \Phi(|w|)\frac{w}{|w|}, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} 0 \le \Phi(0) \le \beta_1; \Phi(z) = \beta_i, z_i \le z \le z_i + \theta_i; \\ \Phi(z) = a_i z, z_i + \theta_i \le z \le z_{i+1}, i = 1,2,\ldots,m, \end{gathered} \tag{2}$$

$$z_1 = 0, \theta_1 = \frac{\beta_1}{a_1}, z_i = \frac{\beta_i}{a_{i-1}}, \theta_1 = \frac{\beta_i}{a_i} - z_i,\ i = 2,3,\ldots,m, z_{m+1} = +\infty. \tag{3}$$

Здесь коэффициенты $a_i, \beta_i,\ i = 1,2,\ldots,m,$ являются исходно заданными величинами.

Множества точек области фильтрации Ω

$$\begin{gathered} \Omega_i^+ = \{x \in \Omega : |\nabla p(x)| > \beta_i\}, \Omega_i^0 = \{x \in \Omega : |\nabla p(x)| = \beta_i\}, \\ \Omega_i^- = \{x \in \Omega : |\nabla p(x)| < \beta_i\} \end{gathered} \tag{4}$$

соответствуют зонам пласта с номером i, в которых пласт промыт полностью, промыт частично или не промыт.

Далее рассмотрим задачу фильтрации с несколько более общим, чем (1)–(3), законом. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с непрерывной по Липшицу границей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$, $\operatorname{mes}\Gamma_1 > 0$, на

Γ_1 давление равно нулю, Γ_2 непроницаема. Требуется определить стационарные поля давления p и скорости w фильтрующейся в области Ω жидкости, удовлетворяющие уравнению неразрывности и граничным условиям

$$\operatorname{div} w(x) = \tilde{f}(x), x \in \Omega, \;\; p(x) = 0, x \in \Gamma_1, \;\; (w(x), \mathbf{n}) = 0, x \in \Gamma_2, \qquad (5)$$

где $\tilde{f}$ – заданная функция, характеризующая плотность внешних источников; $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к Γ_2 при многозначном законе фильтрации (рис. 2),

$$-w \in \frac{g(|\nabla p|)}{|\nabla p|} \nabla p, \;\; x \in \Omega. \qquad (6)$$

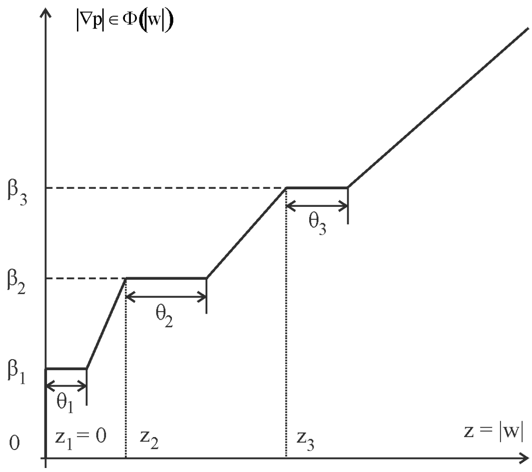

Рис. 1. Закон фильтрации

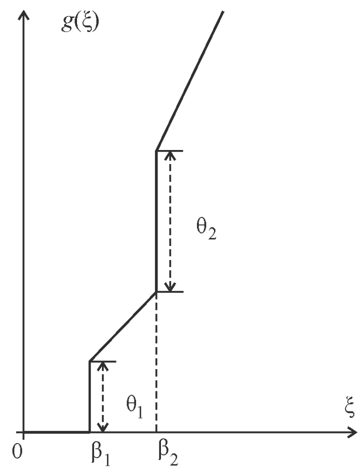

Рис. 2. Многозначная функция g

Считается, что многозначная функция g может быть представлена в виде

$$g(\xi) = g_0(\xi) + \sum_{i=1}^{m} \theta_i H(\xi - \beta_i),$$

где $\theta_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, – заданные постоянные, многозначная функция H (функция Хевисайда) и однозначная функция g_0 задаются соотношениями (рис. 3)

$$H(\xi)=\begin{cases}0, \ \xi<0,\\ [0,1], \ \xi=0,\\ 1, \ \xi>0,\end{cases} \quad g_0(\xi)=\begin{cases}0, \ \xi<\gamma,\\ \hat{g}(\xi-\gamma), \ \xi\ge\gamma,\end{cases} \tag{7}$$

где $\gamma \ge 0$ – заданная постоянная, функция $\hat{g}:[0,+\infty)\to R^1$ непрерывна и удовлетворяет условиям

$$\hat{g}(0)=0, \ \hat{g}(\xi)>\hat{g}(\zeta) \ \ \forall \xi>\zeta\ge 0, \tag{8}$$

существуют такие постоянные $c_0>0, \ c_1>0, \ \xi^*\ge 0,$ что

$$c_0\xi \le \hat{g}(\xi)\le c_1\xi \ \ \forall \xi\ge\xi^*. \tag{9}$$

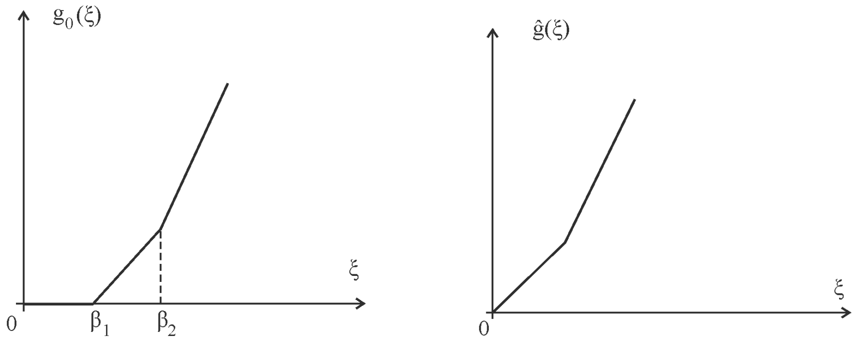

Рис. 3. Функции g_0 и $\hat{g}$

Заметим, что обратное Φ^{-1} к многозначному отображению, определенному формулами (2), (3), удовлетворяет всем условиям, наложенным на многозначное отображение g.

Очевидно, что

$$\mu(\xi)-\mu(\zeta)\ge z(\xi-\zeta) \ \ \forall z\in H(\xi), \forall \xi,\zeta\in R^1, \text{ где } \mu(\xi)=\begin{cases}0, \ \xi<0,\\ \xi, \ \xi\ge 0.\end{cases} \tag{10}$$

Перейдем к построению вариационной формулировки задачи (5), (6). Зададим оператор $G:R^n\to R^n$ следующим образом:

$$G(y)=\begin{cases}0, \ y=0,\\ \dfrac{g_0(|y|)}{|y|}y, \ y\ne 0.\end{cases} \tag{11}$$

Обозначим через $C^{\infty}_{\Gamma_1}(\Omega)$ множество бесконечно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций, равных нулю в окрестности Γ_1. Пусть p и w – решение задачи (5), (6). Тогда функция p удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{\Omega}\tilde{f}(x)\eta(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\Omega}(w(x),\nabla\eta(x))\mathrm{d}x\le\int\limits_{\Omega}(G(\nabla p(x)),\nabla\eta(x))\mathrm{d}x+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\theta_i\int\limits_{\Omega}\mu(|\nabla(p(x)+\eta(x))|-\beta)\mathrm{d}x- \qquad (12)$$
$$-\sum_{i=1}^{m}\theta_i\int\limits_{\Omega}\mu(|\nabla p(x)|-\beta)\mathrm{d}x\quad\forall\eta\in C^{\infty}_{\Gamma_1}(\Omega).$$

Пусть $V=\{\eta\in W_2^{(1)}(\Omega):\eta(x)=0,x\in\Gamma_1\}$ – пространство Соболева с нормой $\|\eta\|_V=(\int\limits_{\Omega}|\nabla\eta(x)|^2\mathrm{d}x)^{1/2}$. Обозначим $a(p,\eta)$ $=\int\limits_{\Omega}(G(\nabla p(x)),$ $\nabla\eta(x))\mathrm{d}x$. Форма $a(\cdot,\cdot)$ линейна по второму аргументу. С учетом в (7), (11) имеем

$$|a(p,\eta)|\le\int\limits_{\Omega}|G(\nabla p)||\nabla\eta|\mathrm{d}x=\int\limits_{\Omega}|g_0(|\nabla p|)|\nabla\eta|\mathrm{d}x=\int\limits_{\Omega(p,\gamma)}\hat{g}(|\nabla p|-\gamma)|\nabla\eta|\mathrm{d}x,$$

где $\Omega(p,\gamma)=\{x\in\Omega:|\nabla p(x)|>\gamma\}$. Из (9) с учетом неубывания в силу (8) функции $\hat{g}$ получаем

$$|a(p,\eta)|\le\int\limits_{\Omega(p,\gamma)}\hat{g}(|\nabla p|)|\nabla\eta|\mathrm{d}x\le\int\limits_{\Omega}\hat{g}(|\nabla p|)|\nabla\eta|\mathrm{d}x\le$$
$$\le c_1\int\limits_{\Omega}|\nabla p||\nabla\eta|\mathrm{d}x\le c_1\|p\|_V\|\eta\|_V,$$

то есть форма $a(\cdot,\cdot)$ ограничена по второму аргументу, а значит, в силу теоремы Рисса–Фишера порождает оператор $A:V\to V$ по формуле

$$(Ap,\eta)_V=a(p,\eta)=\int\limits_{\Omega}(G(\nabla p(x)),\nabla\eta(x))\mathrm{d}x. \qquad (13)$$

Далее, имеем

$$|\int\limits_{\Omega}\mu(|\nabla p(x)|-\beta_i)\mathrm{d}x|=\int\limits_{\Omega(p,\beta_i)}(|\nabla p(x)|-\beta_i)\mathrm{d}x\le[\mathrm{mes}\,\Omega]^{1/2}\|p\|_V, \qquad (14)$$

то есть на V определены функционалы F_i, $i=1,2,\ldots,m$, по формулам

$$F_i(p) = \theta_i \int_\Omega \mu(|\nabla p(x)| - \beta_i)\mathrm{d}x. \qquad (15)$$

Таким образом, в соответствии с (12) под решением рассматриваемой стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей многозначному закону фильтрации, будем понимать функцию $p \in V$, являющуюся решением вариационного неравенства

$$(Ap - f, \eta - p)_V + \sum_{i=1}^m F_i(\eta) - \sum_{i=1}^m F_i(p) \ge 0 \quad \forall \eta \in V, \qquad (16)$$

где элемент $f \in V$ определяется по формуле $(f, \eta)_V = \int_\Omega \tilde{f}(x)\eta(x)\mathrm{d}x$.

Запишем функционалы F_i в виде $F_i = \Psi_i \circ \Lambda$, где $\Lambda = \nabla$, Ψ_i – функционалы, определенные на $Y = [L_2(\Omega)]^n$ по формулам

$$\Psi_i(y) = \theta_i \int_\Omega \mu(|y(x)| - \beta_i)\mathrm{d}x, \ i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (17)$$

Тогда вариационное неравенство (16) может быть записано в виде

$$(Ap - f, \eta - p)_V + \sum_{i=1}^m \Psi_i(\Lambda\eta) - \sum_{i=1}^m \Psi_i(\Lambda p) \ge 0 \quad \forall \eta \in V. \qquad (18)$$

Формулировка задачи в виде вариационного неравенства (18) будет использована при построении итерационного метода для его решения.

2. Существование решения

Докажем предварительно ряд результатов.

Лемма 1. *Оператор G, определенный в (11), является монотонным, то есть*

$$(Gy - Gz, y - z) \ge 0 \quad \forall y, z \in R^n. \qquad (19)$$

Доказательство. Применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$(Gy-Gz,y-z)=\left(\frac{g_0(|y|)}{|y|}y-\frac{g_0(|z|)}{|z|}z,y-z\right)=g_0(|y|)|y|+g_0(|z|)|z|-$$

$$-[g_0(|y|)|z|+g_0(|z|)|y|]\frac{(y,z)}{|y||z|}\geq g_0(|y|)|y|+g_0(|z|)|z|-$$

$$-[g_0(|y|)|z|+g_0(|z|)|y|]=[g_0(|y|)-g_0(|z|)](|y|-|z|).$$

Если $|y|\geq\gamma$, $|z|\geq\gamma$, то

$$(Gy-Gz,y-z)\geq[g_0(|y|)-g_0(|z|)](|y|-|z|)=$$
$$=[\hat{g}(|y|-\gamma)-\hat{g}(|z|-\gamma)][(|y|-\gamma)-(|z|-\gamma)]\geq 0$$

в силу монотонного возрастания $\hat{g}$.

Пусть $|y|\geq\gamma\geq|z|$.

Тогда в силу (8)

$$(Gy-Gz,y-z)\geq g_0(|y|)(|y|-|z|)=\hat{g}(|y|-\gamma)(|y|-|z|)\geq 0.$$

Аналогичное неравенство получается при $|z|\geq\gamma\geq|y|$. Неравенство (19) доказано.

Следствие 1. *Оператор A, определенный согласно (13), является монотонным.*

Лемма 2. *Оператор A, определенный в (13), является коэрцитивным [10], причем*

$$(Ap,p)_V\geq c_0\|p\|_{V_V}^2-c_2\|p\|_V-c_3\quad\forall p\in V, \tag{20}$$

где $c_2=[\mathrm{mes}\,\Omega]^{1/2}c_0\gamma$, $c_3=[\mathrm{mes}\,\Omega]c_0\gamma^2$.

Доказательство. Используя (9), имеем

$$(Ap,p)_V=\int_\Omega g_0(|\nabla p|)|\nabla p|\mathrm{d}x=\int_{\Omega(p,\gamma)}\hat{g}(|\nabla p|-\gamma)|\nabla p|\mathrm{d}x\geq$$

$$\geq c_0\int_{\Omega(p,\gamma)}(|\nabla p|-\gamma)|\nabla p|\mathrm{d}x=c_0\int_\Omega|\nabla p|^2dx-c_0\gamma\int_\Omega|\nabla p|\mathrm{d}x-$$

$$-c_0\int_{\Omega\setminus\Omega(p,\gamma)}|\nabla p|^2\mathrm{d}x\geq c_0\|p\|_{V_V}^2-c_2\|p\|_V-c_3,$$

ибо $|\nabla p(x)|\leq\gamma$ на $\Omega\setminus\Omega(p,\gamma)$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Оператор A, определенный в (13), является непрерывным.*

Доказательство. Из условий (7)–(9) вытекает, что о*ператор G, определенный в* (11), является оператором Немыцкого (см. [11, с. 213]). В силу (9)

$$\int\limits_{\Omega} |G(|y|^2 \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} |g_0(|y|)|^2 \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega(p,\gamma)} |\hat{g}(|y|-\gamma)|^2 \mathrm{d}x \le c_1^2 \int\limits_{\Omega(p,\gamma)} ||y|-\gamma)|^2 \mathrm{d}x \le$$

$$\le c_1^2 \int\limits_{\Omega} |y|^2 \mathrm{d}x = c_1^2 \, \|y\|_Y^2 < +\infty \quad \forall y \in Y = [L_2(\Omega)]^n,$$

то есть G действует из Y в Y.

Для любых $p,u \in V$ имеем

$$|(Ap,u)_V| \le \int\limits_{\Omega} |(G(\nabla p),\nabla u)| dx \le \int\limits_{\Omega} |G(\nabla p)| \, |\nabla u| dx \le$$

$$\le \|G(\nabla p)\|_Y \|\nabla u\|_Y = \|G(\nabla p)\|_Y \|u\|_V,$$

поэтому для любых p,η из V

$$\|Ap - A\eta\|_V = \sup_{u\in V, u\ne 0} \frac{|(Ap - A\eta,u)_V|}{\|u\|_V} \le \|G(\nabla p) - G(\nabla\eta)\|_Y .$$

Но тогда непрерывность оператора A следует из непрерывности оператора Немыцкого (см. теорему 19.2 [11, стр. 213]).

Лемма 4. *Функционалы F_i, определенные согласно (15), являются выпуклыми, полунепрерывными снизу [12], собственными.*

Доказательство. В силу (14) функционалы F_i являются ограниченными, а значит, собственными. Функция μ, определенная в (10), очевидно, является выпуклой, а значит, выпуклыми будут и функционалы F_i. Далее, функция μ может быть записана в виде $\mu(\xi) = \xi^+ = (\xi + |\xi|)/2$. Поскольку $a - b \le |a-b|$, $|a| - |b| \le |a-b|$ для любых чисел a,b, то $a^+ - b^+ = (a - b + |a| - |b|)/2 \le |a-b|$, поэтому для любых $p,\eta \in V$

$$(|\nabla\eta| - \beta_i)^+ - (|\nabla p| - \beta_i)^+ \le ||\nabla\eta| - |\nabla p|| \le |\nabla(\eta - p)| ,$$

следовательно,

$$|F_i(\eta)-F_i(p)|\leq \theta_i\int_{\Omega}|(|\nabla\eta|-\beta_i)^+-(|\nabla p|-\beta_i)^+|\,\mathrm{d}x\leq$$
$$\leq\theta_i\int_{\Omega}|\nabla(\eta-p)|\,\mathrm{d}x\leq d_i\|\eta-p\|_V^2,$$

где $\mathrm{d}_i=\theta_i[\mathrm{mes}\,\Omega]^{1/2}$, то есть функционалы F_i являются линшиц-непрерывными, а значит, полунепрерывными снизу.

Теорема 1*. Пусть выполнены условия (8), (9). Тогда вариационное неравенство (16) имеет непустое, выпуклое, замкнутое множество решений.*

Доказательство. Из лемм 1–4 следует, что оператор A является непрерывным, монотонным, а значит, псевдомонотонным [10] и коэрцитивным, функционалы F_i, $i=1,2,\ldots,m$, – выпуклыми, полунепрерывными снизу, собственными. Функционал $F=\sum_{i=1}^{m}F_i$ также является выпуклым, полунепрерывным снизу, собственным. Поэтому вариационное неравенство (16) имеет непустое, выпуклое, замкнутое множество решений (см., например, [12]).

Следует отметить, что исходная задача (5), (6) формулируется относительно полей давления p и скорости фильтрации w, в то время как обобщенная постановка (16) – относительно давления p. Тем не менее имеет место

Теорема 2*. Пусть выполнены условия (8), (9). Если p – решение вариационного неравенства (16), то существует функция $w\in Y$, такая, что почти всюду на Ω справедливы включение (6) и интегральное тождество (то есть w удовлетворяет вариационному уравнению неразрывности).*

$$\int_{\Omega}(w(x),\nabla\eta(x))\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\tilde{f}(x)\eta(x)\mathrm{d}x\quad\forall\eta\in C_{\Gamma_1}^{\infty}(\Omega). \tag{21}$$

Доказательство. Пусть p – решение вариационного неравенства (16), которое согласно определению субдифференциала эквивалентно включению

$$f-Ap\in\partial\left(\sum_{i=1}^{m}F_i(p)\right). \tag{22}$$

Так как функционалы F_i выпуклы и непрерывны, то (см. [12]) $\partial\left(\sum_{i=1}^{m} F_i(p)\right)=\sum_{i=1}^{m}\partial F_i(p)$. Проводя рассуждения, подобные содержащимся в [13], имеем, что в точке p субдифференциал функционала F_i есть множество линейных непрерывных на V функционала l_i вида

$$(l_i p,\eta)_V=\int_\Omega \frac{\chi_{ip}(x)}{|\nabla p(x)|}(\nabla p(x),\nabla\eta(x))\mathrm{d}x\,,\ \eta\in V\,,$$

где
$$\chi_{ip}\in L_\infty(\Omega),\ \chi_{ip}(x)\in\theta_i\mu(|\nabla p(x)|-\beta_i). \tag{23}$$

Поэтому соотношение (22) означает, что выполнено равенство

$$\int_\Omega \tilde f(x)\eta(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega (G(\nabla p(x)),\nabla\eta(x))\mathrm{d}x+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\int_\Omega \frac{\chi_{ip}(x)}{|\nabla p(x)|}(\nabla p(x),\nabla\eta(x))\,\mathrm{d}x=\int_\Omega (w(x),\nabla\eta(x))\mathrm{d}x\ \ \forall\eta\in C^\infty_{\Gamma_1}(\Omega).$$

где $w(x)=-G(\nabla p(x))-\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\chi_{ip}(x)}{|\nabla p(x)|}\nabla p(x)$, причем $w\in Y$ при выполнении (8), (9).

Таким образом, вектор-функция w удовлетворяет уравнению неразрывности (21), а в силу (23) – соотношению (6). Теорема доказана.

3. Итерационный метод решения смешанного вариационного неравенства

Для решения вариационного неравенства (18) по аналогии с [8] рассмотрим следующий итерационный процесс. Пусть $p^{(0)}\in V$, $y^{(0)}\in Y$, $\lambda^{(0)}\in Y$ – произвольные элементы. Положим $\Psi=\sum\limits_{i=1}^{m}\Psi_i$. Для $j=0,1,\ldots$, зная $p^{(j)}$, $y^{(j)}$, $\lambda^{(j)}$, определим $p^{(j+1)}$,

$$p^{(j+1)}=p^{(j)}-\tau[A p^{(j)}-f+r p^{(j)}+\Lambda^*(\lambda^{(j)}-r y^{(j)})]\,. \tag{24}$$

Затем находим $y^{(j+1)}$, решая задачу минимизации

$$\begin{gathered} r(y^{(j+1)}, z - y^{(j+1)})_Y + \Psi(z) - \Psi(y^{(j+1)}) \geq \\ \geq (r\Lambda p^{(j+1)} + \lambda^{(j)}, z_i - y^{(j+1)})_Y \quad \forall z \in Y. \end{gathered} \tag{25}$$

Наконец, вычисляем $\lambda^{(j+1)}$,

$$\lambda^{(j+1)} = \lambda^{(j)} + r[\Lambda p^{(j+1)} - y^{(j+1)}]. \tag{26}$$

Здесь $\tau > 0$ и $r > 0$ – итерационные параметры; $\Lambda^* : Y \to V$ – сопряженный к Λ оператор: $(\Lambda^* y, \eta)_V = (y, \Lambda\eta)_Y$, $\eta \in V$, $y \in Y$, $(\cdot,\cdot)_Y$ – скалярное произведение в Y: $(y,z)_Y = \int\limits_\Omega (y(x), z(x))\mathrm{d}x, \;\; y,z \in Y$.

Нетрудно убедиться в том, что задача (25) однозначно разрешима.

При исследовании сходимости итерационного процесса будем предполагать, что наряду с (8), (9) функция $\hat{g}$ липщиц-непрерывна с постоянной $L > 0$, то есть

$$|\hat{g}(\xi) - \hat{g}(\zeta)| \leq L(\xi - \zeta) \;\; \forall \xi, \zeta \geq 0. \tag{27}$$

Лемма 5*. Оператор G, определенный в (12), удовлетворяет условию*

$$|Gy - Gz|^2 \leq L(Gy - Gz, y - z) \;\; \forall y, z \in R^n, \tag{28}$$

то есть G – обратно сильно монотонный (см. [7, 14, 15]) оператор с константой $1/L$, и, следовательно, он является липшиц-непрерывным с константой L.

Доказательство. При $y = z$ неравенство (28) выполняется тривиальным образом. Предположим поэтому, что $y \neq z$. По аналогии с [16] рассмотрим выражение

$$D = \frac{|Gy - Gz|^2}{(Gy - Gz, y - z)} = \frac{g_0^2(|y|) + g_0^2(|z|) - 2g_0(|y|)g_0(|z|)(y,z)/|y||z|}{g_0(|y|)|y| + g_0(|z|)|z| - (g_0(|y|)/|y| + g_0(|z|)/|z|)(y,z)} =$$

$$= \frac{g_0^2(|y|) + g_0^2(|z|) - 2g_0(|y|)g_0(|z|)\cos\alpha}{g_0(|y|)|y| + g_0(|z|)|z| - (g_0(|y|)/|y| + g_0(|z|)/|z|)|y||z|(y,z)\cos\alpha} = \frac{D_1}{D_2},$$

где $\cos\alpha = (y,z)/|y||z|$. Если знаменатель D_2 обращается в нуль, то в силу условия (8) (из которого следует, что g_0 – неубывающая функция) и неравенства $1 - \cos\alpha \geq 0$ имеем

$$0 = D_2 = g_0(|y|)|y| + g_0(|z|)|z| - g_0(|y|)|z| - g_0(|z|)|y| +$$
$$+[g_0(|y|)|z| + g_0(|z|)|y|](1 - \cos\alpha) \geq [g_0(|y|) - g_0(|z|)](|y| - |z|) \geq 0,$$

следовательно, $[g_0(|y|) - g_0(|z|)](|y| - |z|) = 0$, то есть либо $|y| = |z|$, и тогда $D_1 = 0$, а значит, требуемое неравенство выполнено, либо $g_0(|y|) = g_0(|z|)$, и тогда $0 = D_2 = [g_0(|y|)|z| + g_0(|z|)|y|](1 - \cos\alpha)$, откуда в силу неотрицательности обоих сомножителей, по крайней мере, один из них равен нулю. Если $g_0(|y|) = g_0(|z|) = 0$ или $|y| = |z| = 0$, то $D_1 = 0$, и требуемое неравенство выполнено. Если же $\cos\alpha = 1$, то снова имеем $D_1 = g_{00}^2(|y|) + g_{00}^2(|z|) - 2g_0(|y|)g_0(|z|) = [g_0(|y|) - g_0(|z|)]^2 = 0.$

Рассмотрим случай, когда знаменатель $D_2 \neq 0$. Функция $\cos\alpha \to D(\cos\alpha)$ является дробно-линейной, поэтому ее максимум достигается при $\cos\alpha = \pm 1$.

При $\cos\alpha = 1$ в силу (27)

$$D = \frac{(g(|y|) - g(|z|))^2}{(g_0(|y|) - g_0(|z|))(|y|) - |z|)} = \frac{g^*(|y| - \beta) - g^*(|z| - \beta)}{|y| - |z|} \leq L.$$

При $\cos\alpha = -1$ в силу неравенства (27) с $\zeta = 0$

$$D = \frac{(g(|y|) + g(|z|))^2}{(g_0(|y|) + g_0(|z|))(|y|) + |z|)} =$$
$$= \frac{g^*(|y| - \beta) + g^*(|z| - \beta)}{|y| + |z|} \leq L\frac{|y| + |z| - 2\beta}{|y| + |z|} \leq L.$$

Лемма доказана.

Следствие 2. *Оператор A, определенный согласно (13), является обратно сильно монотонным с постоянной $1/L > 0$.*

Нетрудно убедиться в том, что задача (25) однозначно разрешима.

Предполагаем, что решение вариационного неравенства (18) существует, для функционалов Ψ_i, определяемых по формулам (17), выполнено следующее условие невырожденности задачи [12, с. 35]:

$$\exists z = \Lambda w^* \in \bigcap_{j=1}^{m} \operatorname{dom} \Psi_j : \lim_{y \to z} \Psi_j(y) = \Psi_j(z), \qquad (29)$$

а оператор $\Lambda^*\Lambda : V \to V$ является каноническим изоморфизмом, то есть

$$\Lambda^*\Lambda\eta = \eta \quad \forall\eta \in V. \tag{30}$$

Для исследования сходимости итерационного метода выпишем явный вид оператора перехода метода. Будем считать, что τ и r связаны соотношением $r\tau < 1$. Введем гильбертово пространство $Q = V \times Y \times Y$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_Q = a_1(\cdot,\cdot)_V + a_2(\cdot,\cdot)_Y + a_3(\cdot,\cdot)_Y$, $a_1 = (1-\tau r)/\tau$, $a_2 = r$, $a_3 = 1/r$. Элементы из Q будем обозначать $q = (q_1, q_2, q_3)$. Определим оператор $T : Q \to Q$, $Tq = (T_1 q, T_2 q, T_3 q)$, следующим образом:

$$T_1 q = q_1 - \tau[Aq_1 - f + \Lambda^* q_3 + r(q_1 - \Lambda^* q_2)], \tag{31}$$

$$T_2 q = \mathrm{Prox}_{\Psi/r}(\Lambda T_1 q + r^{-1} q_3), \tag{32}$$

$$T_3 q = q_3 + r(\Lambda T_1 q - T_2 q). \tag{33}$$

Здесь $\mathrm{Prox}_P : Y \to Y$ – проксимальное отображение [12], ставящее в соответствие произвольному элементу $y \in Y$ единственный элемент $z = \mathrm{Prox}_P(y)$, являющийся решением задачи минимизации (см., например, [12])

$$P(z) + \frac{1}{2}\|z - y\|_Y^2 = \min_{q \in Y}\{P(q) + \frac{1}{2}\|q - y\|_Y^2\}.$$

При этом данная задача минимизации эквивалентна вариационному неравенству

$$(z - y, q - z)_Y + P(q) - P(z) \ge 0 \quad \forall q \in Y. \tag{34}$$

Отметим также (см., например, предложение 2.1 [17, с. 285]), что проксимальное отображение является жестко нерастягивающим, то есть

$$(\mathrm{Prox}_P(y) - \mathrm{Prox}_P(z), y - z)_Y \ge \|\mathrm{Prox}_P(y) - \mathrm{Prox}_P(z)\|_Y^2 \ge 0 \quad \forall y, z \in Y.$$

Переписывая (25) в виде

$$r(y^{(j+1)} - [\Lambda p^{(j+1)} + r^{-1}\lambda^{(j)}], z - y^{(j+1)})_Y + r^{-1}\Psi(z) - r^{-1}\Psi(y^{(j+1)}) \ge 0 \;\; \forall z \in Y$$

и используя определение проксимального отображения на основе вариационного неравенства (34) с $P = \Psi / r$ и $y = \Lambda p^{(j+1)} + r^{-1}\lambda^{(j)}$, перепишем итерационный процесс (31)–(33) в виде

$$q^{(j+1)} = T q^{(j)},\ q^{(j)} = (p^{(j)}, y^{(j)}, \lambda^{(j)}),\ j = 0,1,2,\ldots, \tag{35}$$

где $q^{(0)} \in Q$ – произвольный элемент, то есть T – оператор перехода этого итерационного процесса.

Теорема 3. *Точка $q = (p, y, \lambda)$ является неподвижной точкой оператора T в том и только том случае, когда выполнены условия*

$$y = \Lambda p, \tag{36}$$

$$\lambda \in \partial\Psi(\Lambda p), \tag{37}$$

$$-\Lambda^* \lambda = A p - f. \tag{38}$$

При этом первая компонента p любой неподвижной точки оператора T является решением задачи (18).

Доказательство. Пусть $q = (p, y, \lambda)$ – неподвижная точка оператора *T*, то есть

$$p = p - \tau[A p - f + \Lambda^* \lambda + r\Lambda^* (\Lambda p - y)], \tag{39}$$

$$y = \mathrm{Prox}_{1/r}(\Lambda p + r^{-1}\lambda), \tag{40}$$

$$\lambda = \lambda + r(\Lambda p - y). \tag{41}$$

Равенство (41) эквивалентно (36), ибо $r > 0$. Равенство (40) эквивалентно неравенству

$$(y - \Lambda p - r^{-1}\lambda, z - y)_Y + r^{-1}[\Psi(z) - \Psi(y)] \ge 0 \ \ \forall z \in Y$$

или с учетом (36) – неравенству

$$-(\lambda, z - \Lambda p)_Y + \Psi(z) - \Psi(\Lambda p) \ge 0 \ \ \forall z \in Y, \tag{42}$$

которое, в свою очередь, эквивалентно включению (37).

Наконец, равенство (39), очевидно, эквивалентно (38).

Проверим, что *p* – решение задачи (18). Из (39) с учетом равенства (36) следует, что $A p - f = -\Lambda^* \lambda$. В неравенстве (42) заменим, используя (36), y на Λp и положим $z = \Lambda \eta$, где η – произвольный элемент из V. Тогда получим

$$-(\lambda,\Lambda\eta-\Lambda p)_Y+\Psi(\Lambda\eta)-\Psi(\Lambda p)=-(\Lambda^*\lambda,\eta-p)_V+\Psi(\Lambda\eta)-\Psi(\Lambda p)=$$
$$=(Ap-f,\Lambda\eta-\Lambda p)_V+\Psi(\Lambda\eta)-\Psi(\Lambda p)\geq 0\ \ \forall\eta\in V,$$

то есть p – решение задачи (18). Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть существует по крайней мере одно решение задачи (18), и выполнено условие (29). Тогда множество неподвижных точек оператора T не пусто.*

Доказательство. Пусть p – решение задачи (18), $y=\Lambda p$. Вариационное неравенство (18) эквивалентно включению

$$f-Ap\in\partial(\Psi\circ\Lambda)p. \tag{43}$$

Из условия (29) и теоремы 13.3 [18] получаем следующее равенство:

$$\partial(\Psi\circ\Lambda)p=\Lambda^*\partial\Psi(\Lambda p). \tag{44}$$

Из (43) вытекает, что найдется элемент $p^*\in\partial(\Psi\circ\Lambda)p$, для которого выполнено равенство $f-Ap=p^*$, а соотношение (44) означает существование такого элемента $\lambda\in\partial\Psi(\Lambda p)$, что $p^*=\Lambda^*\lambda$, то есть $-\Lambda^*\lambda=-p^*=Ap-f$. Итак, для $q=(p,y,\lambda)$ имеют место соотношения (36), (37), а значит, в силу теоремы 3 q – неподвижная точка оператора T. Теорема доказана.

Из теоремы 4 следует, что исследование сходимости итерационного процесса (24)–(26) сводится к исследованию сходимости метода последовательных приближений (35) отыскания неподвижной точки оператора T. Установим свойства этого оператора.

Теорема 5. *Пусть $A:V\to V$ – обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma>0$, и выполнено следующее условие:*

$$0<\tau<2\sigma/(2\sigma r+1). \tag{45}$$

Тогда оператор T, определяемый соотношениями (30)–(32), является нерастягивающим. Более того, для любых $q=(q_1,q_2,q_3)$, $s=(s_1,s_2,s_3)$ из Q справедливо неравенство

$$\|Tq-Ts\|_Q^2+d(Aq_1-As_1,q_1-s_1)_V+r\|(q_2-\Lambda T_1q)-(s_2-\Lambda T_1s)\|_Y^2+$$
$$+\frac{1}{\tau(1-\tau r)}\|(1-\tau r)[(q_1-T_1q)-(s_1-T_1s)]-\tau(Aq_1-As_1)\|_V^2\leq\|q-s\|_Q^2, \tag{46}$$

где $d=2-\tau/[\sigma(1-\tau r)]$.

Доказательство. По условию настоящей теоремы A – обратно сильно монотонный оператор с константой $\sigma > 0$:

$$(Au - A\eta, u - \eta)_V \geq \sigma \| Au - A\eta \|_V^2 \quad \forall u, \eta \in V. \tag{47}$$

Заметим, что в силу условия (45) выполнены неравенства $\tau r < 1$ и $d > 0$, а значит, из (46) и (47) будет следовать нерастягиваемость оператора T. Докажем неравенство (46). Перепишем равенство (31) в виде $T_1 q = Rq_1 - \tau(\Lambda^* q_3 - r\Lambda^* q_2)$, где оператор $R: V \to V$ определяется соотношением $R\eta = (1 - \tau r)\eta - \tau A\eta + \tau f$. Используя (47), получаем

$$\begin{aligned} \| Rq_1 - Rs_1 \|_V^2 &= (1 - \tau r)^2 \| q_1 - s_1 \|_V^2 - 2\tau(1 - \tau r)(Aq_1 - As_1, q_1 - s_1)_V + \\ &+ \tau^2 \| Aq_1 - As_1 \|_V^2 \leq (1 - \tau r)^2 \| q_1 - s_1 \|_V^2 - \\ &- \tau(2(1 - \tau r) - \tau\sigma^{-1})(Aq_1 - As_1, q_1 - s_1)_V. \end{aligned} \tag{48}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \| T_1 q - T_1 s \|_V^2 &= (T_1 q - T_1 s, Rq_1 - Rs_1)_V - \\ &- \tau(T_1 q - T_1 s, \Lambda^*(q_3 - s_3) - r\Lambda^*(q_2 - s_2))_V, \end{aligned}$$

откуда, используя очевидное равенство

$$(p, \eta)_V = \frac{1}{2\varepsilon} \| p \|_V^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \| p - \varepsilon\eta \|_V^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| \eta \|_V^2 \quad \forall p, \eta \in V, \ \forall \varepsilon > 0, \tag{49}$$

с $p = Rq_1 - Rs_1, \ \eta = T_1 q - T_1 s$,

имеем

$$\begin{aligned} \| T_1 q - T_1 s \|_V^2 &= \frac{1}{2\varepsilon} \| Rq_1 - Rs_1 \|_V^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \| Rq_1 - Rs_1 - \varepsilon(T_1 q - T_1 s) \|_V^2 + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \| T_1 q - T_1 s \|_V^2 - \tau(T_1 q - T_1 s, \Lambda^*(q_3 - s_3) - r\Lambda^*(q_2 - s_2))_V. \end{aligned}$$

Отсюда (после деления на $\tau / 2$) с учетом (48) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon\tau} \| Rq_1 - Rs_1 - \varepsilon(T_1 q - T_1 s) \|_V^2 + \frac{2 - \varepsilon}{\tau} \| T_1 q - T_1 s \|_V^2 = \frac{1}{\varepsilon\tau} \| Rq_1 - Rs_1 \|_V^2 - \\ &- 2(T_1 q - T_1 s, \Lambda^*(q_3 - s_3) - r\Lambda^*(q_2 - s_2))_V \leq \frac{(1 - \tau r)^2}{\varepsilon\tau} \| q_1 - s_1 \|_V^2 - \\ &- \varepsilon^{-1}(2(1 - \tau r) - \tau\sigma^{-1})(Aq_1 - As_1, q_1 - s_1)_V - 2(T_1 q - T_1 s, \Lambda^*(q_3 - s_3) - \\ &- r\Lambda^*(q_2 - s_2))_V. \end{aligned}$$

Выбирая $\varepsilon = 1 - \tau r$, на основании определения оператора R, получим

$$\frac{1}{\tau(1-\tau r)} \| (1-\tau r)[(q_1 - T_1 q) - (s_1 - T_1 s)] - \tau(Aq_1 - As_1) \|_V^2 +$$
$$+ \frac{1+\tau r}{\tau} \| T_1 q - T_1 s \|_V^2 \le \frac{1-\tau r}{\tau} \| q_1 - s_1 \|_V^2 - d(Aq_1 - As_1, q_1 - s_1)_V -$$
$$-2(T_1 q - T_1 s, \Lambda^*(q_3 - s_3))_V - 2r(T_1 q - T_1 s, \Lambda^*(q_2 - s_2))_V = \qquad (50)$$
$$= \frac{1-\tau r}{\tau} \| q_1 - s_1 \|_V^2 - d(Aq_1 - As_1, q_1 - s_1)_V - 2(\Lambda(T_1 q - T_1 s), q_3 - s_3)_Y +$$
$$+2r(\Lambda(T_1 q - T_1 s), q_2 - s_2)_Y.$$

Положим $\varepsilon = 1$, $p = q_2 - s_2$, $\eta = \Lambda(T_1 q - T_1 s)$ в равенстве (49) и преобразуем (50) к следующему виду:

$$\frac{1}{\tau(1-\tau r)} \| (1-\tau r)[(q_1 - T_1 q) - (s_1 - T_1 s)] - \tau(Aq_1 - As_1) \|_V^2 +$$
$$+ r \| (q_2 - \Lambda T_1 q) - (s_2 - \Lambda T_1 s)] - \tau(Aq_1 - As_1) \|_Y^2 + d(Aq_1 - As_1, q_1 - s_1)_V + \qquad (51)$$
$$+ \frac{1+\tau r}{\tau} \| T_1 q - T_1 s \|_V^2 \le \frac{1-\tau r}{\tau} \| q_1 - s_1 \|_V^2 - 2(\Lambda(T_1 q - T_1 s), q_3 - s_3)_Y +$$
$$+ r \| q_2 - s_2 \|_Y^2 + r \| \Lambda(T_1 q - T_1 s) \|_Y^2.$$

Далее, из (32) с учетом жесткой нерастягиваемости проксимального отображения имеем, что

$$\| T_2 q - T_2 s \|_Y^2 \le (\Lambda T_1 q + r^{-1} q_3 - \Lambda T_1 s - r^{-1} s_3, T_2 q - T_2 s)_Y,$$

откуда

$$r \| T_2 q - T_2 s \|_Y^2 \le r(\Lambda T_1 q - \Lambda T_1 s, T_2 q - T_2 s)_Y + (q_3 - s_3, T_2 q - T_2 s)_Y. \qquad (52)$$

Из (33) следует соотношение

$$r^{-1} \| T_3 q - T_3 s \|_Y^2 \le r^{-1} \| q_3 - s_3 \|_Y^2 + 2(q_3 - s_3, \Lambda(T_1 q - T_1 s))_Y -$$
$$-2(q_3 - s_3, T_2 q - T_2 s)_Y + r \| \Lambda(T_1 q - T_1 s) - (T_2 q - T_2 s) \|_Y^2 = r^{-1} \| q_3 - s_3 \|_Y^2 +$$
$$+2(q_3 - s_3, \Lambda(T_1 q - T_1 s))_Y - 2(q_3 - s_3, T_2 q - T_2 s)_Y + r \| \Lambda(T_1 q - T_1 s) \|_Y^2 +$$
$$+ r \| T_2 q - T_2 s \|_Y^2 - 2r(\Lambda(T_1 q - T_1 s), T_2 q - T_2 s)_Y.$$

Складывая получившееся соотношение с (51) и (52) и учитывая, что в силу (30) имеет место равенство $\| \Lambda(T_1 q - T_1 s) \|_Y = \| T_1 q - T_1 s \|_V$, получаем, что справедливо неравенство (46). Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть* $A: V \to V$ *– обратно сильно монотонный оператор с константой* $\sigma > 0$*, выполнены условия (29), (45), задача (18) имеет по крайней мере одно решение, итерационная последовательность* $\{q^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$ *построена согласно (35). Тогда эта последовательность сходится слабо в* Q *при* $k \to +\infty$*, ее предел* q^* *является неподвижной точкой оператора* T*, и справедливы равенства*

$$\lim_{j\to\infty} \| y^{(j)} - \Lambda p^{(j)} \|_Y = 0, \tag{53}$$

$$\lim_{j\to\infty} \| q^{(j+1)} - q^{(j)} \|_Q = 0. \tag{54}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (46), положив в нем $q = q^{(j)}$ и считая s неподвижной точкой оператора T (в силу теоремы 4 существует хотя бы одна такая точка). Учитывая, что по определению итерационной последовательности $Tq^{(j)} = q^{(j+1)}$, а для неподвижной точки s согласно теореме 3 выполнены равенства $s_2 - \Lambda T_1 s = s_2 - \Lambda s_1 = 0$, $s_1 - T_1 s = 0$, получаем

$$\| q^{(j+1)} - s \|_Q^2 + d(Ap^{(j)} - As_1, p^{(j)} - s_1)_V + r \| y^{(j)} - \Lambda p^{(j+1)} \|_Y^2 +$$
$$+ \frac{1}{\tau(1-\tau r)} \| (1-\tau r)(p^{(j)} - p^{(j+1)}) - \tau(Ap^{(j)} - As_1) \|_V^2 \le \| q^{(j)} - s \|_Q^2.$$

Из этого неравенства следует, что ограниченная снизу (нулем) числовая последовательность $\{\| q^{(j)} - s \|_Q\}_{j=1}^{\infty}$ не возрастает и, следовательно, имеет конечный предел $\lim\limits_{j\to\infty} \| q^{(j)} - s \|_Q = \alpha_s$, и, значит, выполнены соотношения

$$\lim_{j\to\infty} (Ap^{(j)} - As_1, p^{(j)} - s_1)_V = 0, \tag{55}$$

$$\lim_{j\to\infty} \| y^{(j)} - \Lambda p^{(j+1)} \|_Y = 0, \tag{56}$$

$$\lim_{j\to\infty}\|(1-\tau r)(p^{(j)}-p^{(j+1)})-\tau(Ap^{(j)}-As_1)\|_V=0. \tag{57}$$

Используя (47) и (55), получаем

$$\lim_{j\to\infty}\|Ap^{(j)}-As_1\|_V=0. \tag{58}$$

Из (57) и (58) следует, что

$$\lim_{j\to\infty}\|p^{(j+1)}-p^{(j)}\|_V=0. \tag{59}$$

Далее, используя (56), (59) и неравенство

$$\|y^{(j)}-\Lambda p^{(j)}\|_Y\le\|y^{(j)}-\Lambda p^{(j+1)}\|_Y+\|\Lambda(p^{(j)}-p^{(j+1)})\|_Y,$$

получаем соотношение (53), из которого с учетом (59) и равенства

$$y^{(j)}-y^{(j+1)}=(y^{(j)}-\Lambda p^{(j)})+(\Lambda p^{(j)}-\Lambda p^{(j+1)})+(\Lambda p^{(j+1)}-y^{(j+1)})$$

следует, что

$$\lim_{j\to\infty}\|y^{(j+1)}-y^{(j)}\|_Y=0. \tag{60}$$

Наконец, используя (26) и (53), имеем

$$\lim_{j\to\infty}\|\lambda^{(j+1)}-\lambda^{(j)}\|_Y=r\lim_{j\to\infty}\|\Lambda p^{(j)}-y^{(j)}\|_Y=0. \tag{61}$$

Равенства (59)–(61) означают, что выполнено соотношение (54), и поскольку $q^{(0)}\in Q$ – произвольно заданный элемент, то оператор T является асимптотически регулярным (см. [19]). Кроме того, оператор T является нерастягивающим в силу теоремы 5, поэтому (см. [20]) итерационная последовательность $\{q^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$ сходится слабо в Q при $k\to+\infty$, и ее предел q^* является неподвижной точкой оператора T. Теорема доказана.

4. Итерационный метод решения задач установившейся фильтрации с многозначным законом

Как было сказано выше, оператор A, определенный на $V=\{\eta\in W_2^{(1)}(\Omega):\eta(x)=0,x\in\Gamma_1\}$ согласно (13), при выполнении условий (8), (9), (27) является обратно сильно монотонным с постоянной

$\sigma = 1/L$, а функционалы $\Psi_i, i = 1,2,\ldots,m,$ задаваемые с помощью соотношений (17), – полунепрерывными снизу, выпуклыми, собственными на $Y = [L_2(\Omega)]^n$. Поэтому выполнены условия сходимости итерационного процесса (24)–(26) и справедлив следующий результат:

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (8), (9), (27),* $0 < \tau < 2/(2r + L)$, *итерационные последовательности* $\{p^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$, $\{y^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\lambda^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$ *построены согласно (24)–(26). Тогда:*

1) последовательность $\{p^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$ *сходится слабо в* V *к некоторому решению* $\hat{p}$ *вариационного неравенства (18);*

2) последовательность $\{y^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$ *сходится слабо в* Y *к* $\nabla\hat{p}$*;*

3) последовательность $\{\lambda^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$ *сходится слабо в* Y *к* λ, *такому, что* $\lambda \in \partial\Psi(\nabla\hat{p})$, $-\Lambda^*\lambda = A\hat{p} - f$*;*

4) справедливо соотношение $\lim\limits_{j\to\infty} \| y^{(j)} - \nabla\hat{p} \|_Y = 0$.

Остановимся теперь на особенностях применения итерационного метода (24)–(26) для решения задач установившейся фильтрации с многозначным законом.

Первый шаг (24) сводится в силу теоремы Рисса–Фишера к обращению оператора Лапласа:

$$-\Delta p^{(j+1)} = -(1 - \tau r)\Delta p^{(j)} + \tau\,\mathrm{div}(G(\nabla p^{(j)}) + \lambda^{(j)} - r y^{(j)}) + \tau f,$$

третий шаг (соотношение (26)) – к вычислениям по явным формулам.

Основную трудность в реализации итерационного метода представляет второй шаг – решение задачи минимизации (25), то есть согласно определению проксимального отображения в виде вариационного неравенства (см. (34)) задачи безусловной минимизации сильно выпуклого, полунепрерывного снизу, собственного функционала $\Psi_r : Y \to R^1$, $\Psi_r(z) = \dfrac{r}{2}\|z\|_Y^2 + \Psi(z) + (\nabla p^{(j+1)} + \lambda^{(j)}, z)_Y$. Следуя [21], можно проверить, что решение этой задачи имеет вид

$$y^{(j+1)} = g_r^*(|t|)t/|t|, \;\; t = \nabla p^{(j+1)} + \lambda^{(j)},$$

где (рис. 4)

$$g_r^*(\xi) = \begin{cases} (\xi - \vartheta_{j-1})/r, \ \vartheta_{j-1} + r\beta_{j-1} \le \xi \le \vartheta_{j-1} + r\beta_j, \ j = 1,2,\ldots,m, \\ \beta_j, \ \vartheta_{j-1} + r\beta_j \le \xi \le \vartheta_j + r\beta_j, \ j = 1,2,\ldots,m, \\ (\xi - \vartheta_m)/r, \ \vartheta_m + r\beta_m \le \xi, \end{cases}$$

$$\vartheta_j = \sum_{i=1}^{j} \theta_i, \ \theta_0 = \beta_0 = 0.$$

Таким образом, каждый шаг итерационного метода сводится фактически к обращению оператора Лапласа.

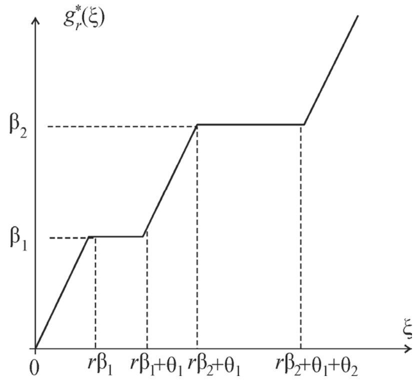

Рис. 4. Функция g_r^*

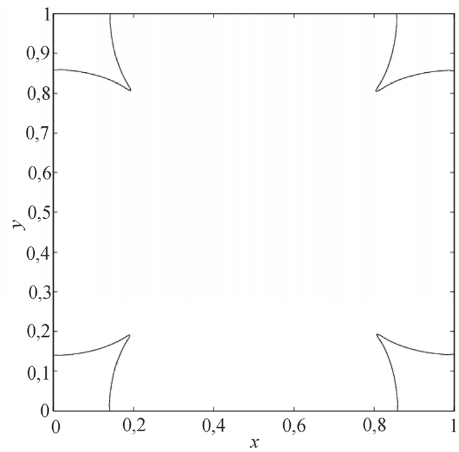

Рис. 5. Вид застойных зон

Следует отметить, что метод позволяет находить приближенные значения не только самого решения $p^{(j)}$, но и его характеристик, для задач фильтрации – это приближенные значения $y^{(j)}$ градиента решения, что весьма полезно с практической точки зрения, при построении предельно равновесных целиков остаточной вязкопластичной нефти в соответствии с формулами (4). Кроме того, как это следует из п.п. 2), 3) теоремы 7, приближенное значение скорости фильтрации, удовлетворяющей уравнению неразрывности, может быть вычислено по формуле $v = -g_0(|y^{(j)}|)y^{(j)}/|y^{(j)}| - \lambda^{(j)}$. Для численной реализации указанного итерационного метода были построены конечноразностные аппроксимации вариационного неравенства и итерационного метода, составлен комплекс программ в среде Matlab, проведены расчеты для модельной задачи фильтрации в единичном квадратном пласте

$\Omega = (0,1) \times (0,1)$ с центром в начале координат, в котором находится скважина с дебитом $q = 1$. Полагалось, что $\Gamma = \Gamma_1$. В качестве функции $\hat{g}$ выбиралась функция $\hat{g}(\xi) = \xi$. Во всех расчетах принимались следующие значения: $m = 1$, $\beta_1 = 1$, $\vartheta_1 = 1$, при этом эмпирически определялись оптимальные (по количеству итераций) итерационные параметры. На Ω строилась сетка размером $n_1 \times n_2$. Результаты экспериментов свидетельствуют об эффективности итерационного метода. На рис. 5 для $n_1 = 300$, $n_2 = 300$ приведены границы застойных зон, на которых $|\nabla p| = 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №12-01-00955, 12-01-97022, 11-01-00667).

Библиографический список

1. О расчете предельно равновесных целиков при вытеснении вязкопластической нефти из слоисто-неоднородного пласта / В.М. Ентов, Т.А. Малахова, В.Н. Панков, С.В. Панько // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, № 1. – С. 113–123.

2. Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В. К расчету целиков остаточной вязкопластической нефти // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, № 5. – С. 847–856.

3. Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В. Математическая теория целиков остаточной вязкопластичной нефти. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. – 196 с.

4. Ентов В.М., Панько С.В. К вариационной формулировке задачи о целиках остаточной нефти // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 966–972.

5. Лапин А.В. Об исследовании некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19, № 3. – С. 689–700.

6. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. Разностные методы решения нелинейных задач теории фильтрации // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 7. – С. 28–45.

7. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

8. Badriev I.B., Zadvornov O.A. A Decomposition Method for Variational Inequalities of the Second Kind with Strongly Inverse-Monotone Operators // Differential Equations. – 2003. – Vol. 39. – No. 7. – P. 936–944.

9. Badriev I. B., Zadvornov O. A. Analysis of the Stationary Filtration Problem with a Multi-valued Law in the Presence of a Point Source // Differential Equations. – 2005. – Vol. 41. – No. 7. – P. 915–922

10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

11. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.

12. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.

13. Карчевский М.М., Бадриев И.Б. Нелинейные задачи теории фильтрации с разрывными монотонными операторами // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: Изд-во ин-та теорет. и прикл. мех. СО АН СССР. – 1979. – Т. 10, № 5. – С. 63–78.

14. Tzeng P. Futher Applications of a Splitting Algorithm to Decomposition in Variational Inequalities and Convex Programming// Mathematical Programming. – 1990. – Vol. 48. – P. 249–264.

15. Zhu D., Marcotte P. New classes of generalized monotonicity // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1995. – Vol. 87. – No. 2. – P. 457–471.

16. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 73–81.

17. Résolution numériques de problèmes aux limites par des méthodes de Lagrangien augmenté / Ed. M. Fortin, R. Glowinski. – Paris: Dunod, 1983. – 320 p.

18. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств в гильбертовых пространствах. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2007. – 152 с.

19. Browder F.E., Petryshin W.V. The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1966. – Vol. 72. – P. 571–575

20. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1967. – Vol. 73. – No. 4. – P. 591–597.

21. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н. Применение метода декомпозиции для численного решения некоторых нелинейных стационарных задач теории фильтрации // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та. – 2003. – Вып. 24. – С. 12–24.

References

1. Entov V.M., Malakhova T.A., Pankov V.N., Pan'ko S.V. Calculation of the Limit-equilibrium of Retained Viscoplastic Oil Extracted from a Nonuniform Stratified Layer by Water. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1980, vol. 44, iss. 1, pp. 76-82.

2. Entov V.M., Pankov V.N., Pan'ko S.V. On the Analysis of Retained Residual Viscoplastic Petroleum. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1980, vol. 44, iss. 5, pp. 597-603.

3. Entov V.M., Pankov V.N., Pan’ko S.V. Matematicheskaya teoriya tselikov ostatochnoi vyazkoplastichnoi nefti [Mathematical Theory of Unrecovered Visco-Plastic Oil]. *Tomskij universitet*, 1989.

4. Entov V.M., Pan'ko S.V. Variational Formulation of the Problem of Retained Viscoplastic Oil. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1984, vol. 48, iss. 6, pp. 707-712.

5. Lapin A.V. Investigation of Some Non-linear Problems of Filtering Theory. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1979, vol. 19, no 3, pp. 135-148.

6. Lyashko A.D., Karchevskii M.M. Difference Methods of Solving Nonlinear Problems in the Theory of Filtration. *Soviet Mathematics*, 1983, vol. 27, no.7, p. 34-56.

7. Gol'shtein E.G., Tret'yakov N.V. Modifitsirovannye funktsii Lagranzha [Modified Lagrangians]. Moscow: Nauka, 1989.

8. Badriev I.B., Zadvornov O.A. A Decomposition Method for Variational Inequalities of the Second Kind with Strongly Inverse-Monotone Operators. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 7, pp. 936-944.

9. Badriev I.B., Zadvornov O.A. Analysis of the Stationary Filtration Problem with a Multivalued Law in the Presence of a Point Source. *Differential Equations,* 2005, vol. 41, no. 7, pp. 915-922.

10. Lions J.-L. Quelque problèmes méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires. Paris: Dunod, 1969.

11. Vainberg M.M. Variatzionnye metody issledovania nelineinykh operatorov [Variationa Methods of Research of Nonlinear Operators]. Moscow: Gostekhizdat, 1956.

12. Ekeland I, Temam R. Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam: North Holland Publishing Company, New York: Oxford American Elsevier Publishing Company, 1976.

13. Karchevskiy M.M., Badriev I.B. Nelineynye zadachi teorii filtrazii s razryvnymi monotonnymi operatorami [Nonlinear Problems of Filtration Theory with Discontinuous Monotone Operators]. *Chislennye metody mekhaniki sploshnoj sredy*, Novosibirsk: Institut teoreticheskoj i prikladnoj mekhaniki, 1979, vol. 10, no. 5, pp. 63-78.

14. Tzeng P. Futher Applications of a Splitting Algorithm to Decomposition in Variational Inequalities and Convex Programming. *Mathematical Programming*, 1990, vol. 48, pp. 249-264.

15. Zhu D., Marcotte P. New Classes of Generalized Monotonicity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1995, vol. 87, no 2, pp. 457-471.

16. Lyashko A.D., Karchevskiy M.M. On the Solution of Some Nonlinear Problems of the Seepage Theory. *Soviet Mathematics*, 1975, vol. 19, no. 6, pp. 60-66.

17. Résolution numériques de problèmes aux limites par des méthodes de Lagrangien augmenté. Ed. M. Fortin, R. Glowinski. Paris: Dunod, 1983, 320 p.

18. Badriev I.B., Zadvornov O.A. Iteratzionnye metody reshenia variatzionnykh neravenstv v gil'bertovykh prostransyvakh [Iterative Methods for Variational Inequalities in Hilbert Spaces]. *Kazanskiy gosudarstvenniy universitet*, 2007.

19. Browder F.E., Petryshin W.V. The Solution by Iteration of Nonlinear Functional Equations in Banach Spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1966, vol. 72, pp. 571-575

20. Opial Z. Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Nonexpansive Mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967, vol. 73, no 4, pp. 591-597.

21. Badriev I.B., Zadvornov O.A., Ismagilov L.N. Primenenie metoda decompozicii dlya chislennogo resheniya nelineynyh stacionarnyh zadach teorii filtracii [The Use of the Decomposition Method for the Numerical Solution of Some Nonlinear Steady-State Problems of Filtration Theory]. *Issledovanija po prikladnoj matematike i informatike. Kazanskiy gosudarstvenny universitet*, 2003, iss. 24, pp. 12-24.

Об авторах

Бадриев Ильдар Бурханович (Казань, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной математики Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, e-mail: ildar.badriev@ksu.ru).

Нечаева Людмила Анатольевна (Казань, Россия) – научный сотрудник Института информатики Академии наук Республики Татарстан (420111, г. Казань, ул. Лево-Булачная, д. 36А, e-mail: nechaeva.ludmila64@mail.ru).

About the authors

Badriev Ildar Burkhanovich (Kazan, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Calculation Mathematics, Kazan Federal University (18, Kremlevskaja st., 420008, Kazan, Russian Federation, e-mail: ildar.badriev@ksu.ru).

Nechaeva Ludmila Anatol'evna (Kazan, Russian Federation) – research associate, Institute of Informatics of the Tatarstan Republic Academy of Sciences (36A, Levo-Bulachnaja st., 420111, Kazan, Russian Federation, e-mail: nechaeva.ludmila 64@mail.ru).

Получено 15.03.2013