ВЕСТНИК ПНИПУ
2013 Механика № 3

УДК 539.3

С.О. Саркисян, А.Ж. Фарманян

Гюмрийский государственный педагогический институт
им. М. Налбандяна, Гюмри, Республика Армения

ТЕРМОУПРУГОСТЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Рассматриваются трехмерные уравнения и граничные условия невзаимосвязанной термоупругости микрополярных ортотропных тел с независимыми полями перемещений и вращений. Принимая во внимание качественные стороны поведения асимптотического решения граничной задачи трехмерной микрополярной термоупругости в тонкой области оболочки, сформулированы адекватные кинематические и статические гипотезы для построения прикладной двумерной теории термоупругости микрополярных ортотропных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Принятые кинематические гипотезы представляют собой обобщение на микрополярный случай кинематических гипотез Тимошенко. Что касается статических гипотез, то наряду с принятой в теории тонких оболочек гипотезой о нормальном напряжении, действующем на площадках, параллельных площадкам исходной поверхности, сформулированы некоторые другие предположения, которые созвучны асимптотической теории. Для температурной функции принята гипотеза о ее линейном распределении по толщине оболочки.

На основе принятых достаточно общих предположений построена прикладная теория термоупругости микрополярных ортотропных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Теории термоупругости микрополярных ортотропных тонких стержней и пластин с независимыми полями перемещений и вращений будут исследованы как частные случаи теории оболочек.

Ключевые слова: микрополярная упругость, ортотропный материал, тонкая оболочка, температурные напряжения, общая теория.

S.H. Sargsyan, A.J. Farmanyan

Gyumri State Pedagogical Institute, Gyumri, Republic of Armenia

THERMOELASTICITY OF MICROPOLAR ORTHOTROPIC THIN SHELLS

Three dimensional equations and boundary conditions of non-interacted thermoelasticity of micropolar orthotropic bodies with free fields of displacements and rotations are studied. Taking into consideration qualatative aspects of asymptotic solution of boundary-value problem of three-dimensional micropolar thermoelasticity in thin domain of the shell, adequate kynematic and static hypotheses are formulated for the construction of applied two-dimensional theory of thermoelasticity of micropolar orthotropic thin shells with free fields of diaplacements and rotations. Accepted kynemathic hypotheses are Timoshnenko's kynemathic hypotheses generalized for micropolar case. Beside of the hypothesis of normal stresses, accepted in theory of thin shells, some static assumptions are formulated which are conformable to asymptotic theory. For temperature function assumption of its linear distribution by shell thickness is accepted.

On the basis of the accepted generalized hypotheses applied theory of thermoelasticity of micropolar orthotropic thin shells with free fields of displacements and rotations is constructed. Theories of thermoelasticity of micropolar orthotropic thin bars and plates with free fields of displacements and rotations are obtained as private cases.

Keywords: micropolar elasticity, orthotropic material, thin shell, temperature tension general theory.

В работе [1] изложены термодинамические основы классической термоупругости изотропных тонких оболочек, общие теоремы и методы решения статических и динамических задач термоупругости оболочек при различных способах нагрева. В работе [2] представлена классическая теория термоупругости ортотропных тонких оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига. В работах [3–5] изложены основы трехмерной термоупругости микрополярного изотропного тела. В работах [6–8] на основе метода гипотез, имеющих асимптотическое подтверждение, построена общая теория микрополярных упругих тонких пластин и оболочек. В работе [9] изучены асимптотические свойства решения краевой задачи микрополярной термоупругости в области тонкой оболочки, в работе [10] сформулированы адекватные гипотезы и построена общая прикладная теория термоупругости микрополярных изотропных оболочек.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать микрополярные упругие ортотропные тела типа оболочек. Деформация их рассматривается под действием поверхностных силовых и моментных нагрузок и неравномерного температурного поля. Трехмерные исходные соотношения термоупругости для микрополярных ортотропных тел включают [3–5, 11]:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(H_j\sigma_{ii}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(H_i\sigma_{ji}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_iH_j\sigma_{3i}\right)+\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\sigma_{ij}+H_j\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\sigma_{i3}-\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}\sigma_{jj}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{23}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\sigma_{33}\right)-H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\sigma_{11}-H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}\sigma_{22}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(H_j\mu_{ii}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(H_i\mu_{ji}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_iH_j\mu_{3i}\right)+\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\mu_{ij}+ \qquad (1.1)$$

$$+H_j\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\mu_{i3}-\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}\mu_{jj}+\left(-1\right)^j H_iH_j\left(\sigma_{j3}-\sigma_{3j}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{13}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{23}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\mu_{33}\right)-H_2\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\mu_{11}-H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}\mu_{22}+$$
$$+H_1\cdot H_2\left(\sigma_{12}-\sigma_{21}\right)=0;$$

– геометрические соотношения между компонентами тензора деформации $\left\{\gamma_{ij}\right\}$, тензора изгиба-кручения $\left\{\chi_{ij}\right\}$ и компонентами вектора перемещения $\left\{V_1,V_2,V_3\right\}$ и вектора независимого поворота $\left\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\right\}$:

$$\gamma_{ii}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial v_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}v_j+\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}v_3,\ \gamma_{33}=\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_3},$$
$$\gamma_{ij}=\frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial v_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}v_i+\left(-1\right)^i\omega_3,\ \gamma_{i3}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}v_i+\left(-1\right)^j\omega_j,$$
$$\gamma_{3i}=\frac{\partial v_i}{\partial\alpha_3}+\left(-1\right)^i\omega_j,\ \chi_{ii}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\omega_j+\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\omega_3, \tag{1.2}$$
$$\chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_3},\ \chi_{ij}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\omega_i.\ \chi_{3i}=\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_3},\ \chi_{i3}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}\omega_i;$$

– соотношения закона Гука для микрополярного ортотропного материала (обобщенные на случай воздействия температурных полей с применением гипотезы Дюамеля–Неймана)

$$\gamma_{11}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}+\alpha_{1\Theta}\Theta,\ \gamma_{22}=a_{21}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{23}\sigma_{33}+\alpha_{2\Theta}\Theta,$$
$$\gamma_{33}=a_{31}\sigma_{11}+a_{32}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33}+\alpha_{3\Theta}\Theta,\ \gamma_{23}=a_{44}\sigma_{23}+a_{45}\sigma_{32},$$
$$\gamma_{32}=a_{45}\sigma_{23}+a_{55}\sigma_{32},\ \gamma_{13}=a_{56}\sigma_{31}+a_{66}\sigma_{13},$$
$$\gamma_{31}=a_{65}\sigma_{31}+a_{56}\sigma_{13},\ \gamma_{12}=a_{77}\sigma_{12}+a_{78}\sigma_{21}, \tag{1.3}$$
$$\gamma_{21}=a_{78}\sigma_{12}+a_{88}\sigma_{21},\ \chi_{11}=b_{11}\mu_{11}+b_{12}\mu_{22}+b_{13}\mu_{33},$$
$$\chi_{22}=b_{12}\mu_{11}+b_{22}\mu_{22}+b_{23}\mu_{33},\ \chi_{33}=b_{31}\mu_{11}+b_{32}\mu_{22}+b_{33}\mu_{33},$$
$$\chi_{23}=b_{44}\mu_{23}+b_{45}\mu_{32},\ \chi_{32}=b_{45}\mu_{23}+b_{55}\mu_{32},\ \chi_{13}=b_{56}\mu_{31}+b_{66}\mu_{13},$$
$$\chi_{31}=b_{65}\mu_{31}+b_{56}\mu_{13},\ \chi_{12}=b_{77}\mu_{12}+b_{78}\mu_{21},\ \chi_{21}=b_{78}\mu_{12}+b_{88}\mu_{21}.$$

Здесь σ_{mn}, μ_{mn} – соответственно компоненты силового и моментного тензоров напряжений; a_{mn}, b_{mn} – упругие постоянные микрополярного ортотропного материала; $\alpha_{1\Theta}, \alpha_{2\Theta}, \alpha_{3\Theta}$ – коэффициенты линейного температурного расширения в направлениях координатных линий; Θ – температурная функция, отсчитываемая от температуры исходного недеформированного состояния. Предполагается, что в области тела-оболочки наперед решена краевая задача теплопроводности и задано распределение температурной функции Θ; $\alpha_n \left(n = 1, 2, 3\right)$ – криволинейные ортогональные координаты, принятые в теории оболочек [12].

К определяющим уравнениям (1.1)–(1.3) трехмерной термоупругости микрополярного тела-оболочки присоединим соответствующие граничные условия.

На лицевых поверхностях оболочки примем граничные условия первой граничной задачи микрополярной упругости

$$\sigma_{3i} = \pm q_i^{\pm}, \quad \sigma_{33} = \pm q_3^{\pm}, \quad \mu_{3i} = \pm m_i^{\pm}, \quad \mu_{33} = \pm m_3^{\pm}. \tag{1.4}$$

На поверхности края оболочки Σ будем рассматривать три основных типа граничных условий: 1) когда заданы силовые и моментные напряжения; 2) когда точки поверхности Σ закреплены; 3) когда заданы трехмерные смешанные условия типа шарнирного опирания.

Будем предполагать, что толщина оболочки $2h$ весьма мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности оболочки.

2. Исходные допущения (гипотезы)

Учитывая качественные результаты асимптотического решения системы уравнений (1.1)–(1.3) с указанными выше граничными условиями [9], в основу предлагаемой теории термоупругости микрополярных ортотропных тонких оболочек ставим следующие гипотезы:

1. В процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жесткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически можем записать так: тангенциальные перемещения и нормальный поворот распределены по толщине оболочки по линейному закону

$$\begin{aligned} &V_{\mathrm{i}} = u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + \alpha_3\psi_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \qquad i = 1,2, \\ &\omega_3 = \Omega_3\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + \alpha_3\iota\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

а нормальное перемещение и тангенциальные повороты не зависят от поперечной координаты α_i, т.е.

$$V_3 = w\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \quad \omega_i = \Omega_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \quad i = 1,2. \tag{2.2}$$

Отметим, что с точки зрения перемещений принятая гипотеза ((2.1), (2.2)) по сути дела совпадает с кинематической гипотезой Тимошенко в классической теории упругих оболочек [13, 14]. Гипотезу (2.1), (2.2) в целом назовем обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек.

2. Силовым напряжением σ_{33} в обобщенном законе Гука (1.2) для γ_{ii} можно пренебречь относительно силовых напряжений σ_{ii}, аналогично моментным напряжением μ_{3i} в обобщенном законе Гука (1.2) для χ_{i3} можно пренебречь относительно моментного напряжения μ_{i3}.

3. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений сначала для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) \quad \left(i = 1,2\right). \tag{2.3}$$

После вычисления указанных величин значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим прибавлением к значениям (2.3) соответственно слагаемых, получаемых интегрированием первых двух или шестого уравнений равновесия из (1.1), для которых потребуем условия, чтобы усредненные по толщине оболочки величины были равны нулю.

4. Величинами $\dfrac{\alpha_3}{R_i}$ по сравнению с единицей можно пренебречь.

5. Принимаем, что температура по толщине оболочки меняется по линейному закону, а именно

$$\Theta = \Theta_0\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + \frac{\alpha_3}{h}\Delta\Theta\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \tag{2.4}$$

где

$$\Theta_0 = \frac{1}{2}\left(\Theta^+ + \Theta^-\right), \qquad \Delta\Theta = \Theta^+ - \Theta^-, \tag{2.5}$$

$\Theta^+\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ и $\Theta^-\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ – температура соответственно на внешней $\left(\alpha_3 = h\right)$ и внутренней $\left(\alpha_3 = -h\right)$ поверхностях оболочки.

3. Определение деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений

В соответствии с принятым законом распределения перемещений и свободных поворотов (2.1), (2.2), подставляя их в геометрические формулы (1.2) и сохраняя в выражениях только линейные члены по α_3, находим

$$\begin{gathered}\gamma_{ii} = \Gamma_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + \alpha_3 K_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \;\; \gamma_{33} = 0, \\ \gamma_{ij} = \Gamma_{ij} + \alpha_3 K_{ij}, \quad \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \quad \gamma_{3i} = \Gamma_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\chi_{ii} = k_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \quad \chi_{33} = k_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \quad \chi_{ij} = k_{ij}\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \\ \chi_{3i} = 0, \quad \chi_{i3} = k_{i3}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + \alpha_3 l_{13}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$\Gamma_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + \frac{w\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{R_i},$$

$$K_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$\Gamma_{ij}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + (-1)^i\,\Omega_3\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$K_{ij}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + (-1)^i\,\iota\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \tag{3.3}$$

$$\Gamma_{i3}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = -\upsilon_i + (-1)^j\,\Omega_j\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$\Gamma_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = \psi_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + (-1)^i\,\Omega_j\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$k_{ii}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j(\alpha_1,\alpha_2)+\frac{\Omega_3(\alpha_1,\alpha_2)}{R_i},$$

$$k_{33}=\iota(\alpha_1,\alpha_2),\ k_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$k_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{R_i}\Omega_i(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_i},\ \upsilon_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_i}-\frac{u_i(\alpha_1,\alpha_2)}{R_i}.$$

Здесь Γ_{ii},Γ_{ij} – компоненты тангенциальной деформации, характеризующие деформацию срединной поверхности; величины $K_{ii},K_{ij},k_{ii},k_{ij}$ – характеризуют изгибную деформацию и скручивание срединной поверхности; Γ_{i3},Γ_{3i} – поперечные сдвиги; k_{i3},k_{3i} – изменение кривизны и кручений в нормальных к срединной поверхности плоскостях; l_{i3} – гиперкривизны или гиперкручения.

На основе обобщенного закона Гука (1.3) (имея в виду также гипотезы 2)–5)) для силовых и моментных напряжений получим

$$\sigma_{ii}=\overset{0}{\sigma}_{ii}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{ii}(\alpha_1,\alpha_2),\ \sigma_{33}=\overset{0}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\sigma_{ij}=\overset{0}{\sigma}_{ij}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{ij}(\alpha_1,\alpha_2),\ \sigma_{i3}=\overset{0}{\sigma}_{i3}(\alpha_1,\alpha_2),\tag{3.4}$$

$$\sigma_{3i}=\overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\overset{1}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)+\frac{1}{2}\left[\alpha_3^2-\frac{h^2}{3}\right]\overset{2}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\mu_{ii}=\overset{0}{\mu}_{ii}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\mu_{33}=\overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\overset{1}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)+\frac{1}{2}\left(\alpha_3^2-\frac{h^2}{3}\right)\overset{2}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\begin{gathered}\mu_{ij}=\overset{0}{\mu}_{ij}(\alpha_1,\alpha_2),\mu_{3i}=\overset{0}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\overset{1}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2),\\ \mu_{i3}=\overset{0}{\mu}_{i3}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\overset{1}{\mu}_{i3}(\alpha_1,\alpha_2),\end{gathered}\tag{3.5}$$

где

$$\overset{1}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_j\overset{0}{\sigma}_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_i\overset{0}{\sigma}_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}-$$

$$-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overset{0}{\sigma}_{ij}-\frac{1}{R_i}\overset{0}{\sigma}_{i3}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\overset{0}{\sigma}_{jj},$$

$$\overset{2}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)=\left[-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_j\overset{1}{\sigma}_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_i\overset{1}{\sigma}_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overset{1}{\sigma}_{ij}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\overset{1}{\sigma}_{jj}\right], \tag{3.6}$$

$$\overset{1}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\sigma}_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{0}{\sigma}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}+$$

$$+\frac{1}{R_1}\overset{0}{\sigma}_{11}+\frac{1}{R_2}\overset{0}{\sigma}_{22}=\frac{q_3^++q_3^-}{2h},$$

$$\overset{0}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{q_3^+-q_3^-}{2},\quad \overset{0}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{m_i^+-m_i^-}{2},$$

$$\overset{1}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_j\overset{0}{\mu}_{ii}\right)}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial\left(A_i\overset{0}{\mu}_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overset{0}{\mu}_{ij}-$$

$$-\frac{\overset{0}{\mu}_{i3}}{R_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\overset{0}{\mu}_{jj}-(-1)^j\left(\overset{0}{\sigma}_{j3}-\overset{0}{\sigma}_{3j}\right)=\frac{m_i^++m_i^-}{2h}, \tag{3.7}$$

$$\overset{1}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{0}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{0}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}+\frac{\overset{0}{\mu}_{11}}{R_1}+\frac{\overset{0}{\mu}_{22}}{R_2}-\left(\overset{0}{\sigma}_{12}-\overset{0}{\sigma}_{21}\right),$$

$$\overset{2}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)=\left[-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\overset{1}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\overset{1}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}-\left(\overset{1}{\sigma}_{12}-\overset{1}{\sigma}_{21}\right)\right].$$

Кроме того,

$$\overset{0}{\sigma}_{11}=\left[\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{11}-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{22}-\left(\frac{\alpha_{1\theta}\cdot a_{22}-\alpha_{2\theta}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right)\cdot\theta_0\right],$$

$$\overset{1}{\sigma}_{11}=\left[\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}K_{11}-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}K_{22}-\left(\frac{\alpha_{1\theta}\cdot a_{22}-\alpha_{2\theta}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right)\cdot\theta_1\right],$$

$$\overset{0}{\sigma}_{22}=\left[-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{11}+\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{22}-\left(\frac{-\alpha_{1\theta}\cdot a_{12}+\alpha_{2\theta}a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right)\cdot\theta_0\right], \tag{3.8}$$

$$\overset{1}{\sigma}_{22}=\left[-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}K_{11}+\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}K_{22}-\left(\frac{\alpha_{1\theta}\cdot a_{22}+\alpha_{2\theta}a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right)\cdot\theta_1\right],$$

$$\sigma_{23}=\frac{a_{55}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{23}-\frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{32},$$

$$\overset{0}{\sigma}_{32}=\frac{a_{44}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{32}-\frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{23},$$

$$\sigma_{13}=\frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{13}-\frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{31}, \tag{3.9}$$

$$\overset{0}{\sigma}_{31}=\frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{31}-\frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{13},$$

$$\overset{0}{\sigma}_{12}=\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{12}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{21},$$

$$\overset{1}{\sigma}_{12}=\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}K_{12}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}K_{21},$$

$$\overset{0}{\sigma}_{21}=\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{21}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{12}, \tag{3.10}$$

$$\overset{1}{\sigma}_{21}=\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}K_{21}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}K_{12},$$

$$\mu_{11}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}k_{11}+\frac{\Delta_{12}}{\Delta}k_{22}+\frac{\Delta_{13}}{\Delta}k_{33},$$

$$\mu_{22}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta}k_{11}+\frac{\Delta_{22}}{\Delta}k_{22}+\frac{\Delta_{23}}{\Delta}k_{33}, \tag{3.11}$$

$$\overset{0}{\mu}_{33}=\frac{\Delta_{13}}{\Delta}k_{11}+\frac{\Delta_{23}}{\Delta}k_{22}+\frac{\Delta_{33}}{\Delta}k_{33},$$

$$\mu_{12}=\frac{b_{88}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{12}-\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{21},$$
$$\mu_{21}=\frac{b_{77}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{21}-\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{12}, \tag{3.12}$$

$$\overset{0}{\mu}_{13}=\frac{1}{b_{66}}k_{13},\qquad \overset{1}{\mu}_{13}=\frac{1}{b_{66}}l_{13},$$
$$\overset{0}{\mu}_{23}=\frac{1}{b_{44}}k_{23},\qquad \overset{1}{\mu}_{23}=\frac{1}{b_{44}}l_{23}. \tag{3.13}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{12} & b_{22} & b_{23}\\ b_{13} & b_{23} & b_{33}\end{vmatrix}, \tag{3.14}$$

а $\Delta_{11},\Delta_{12},a_{13},a_{22},a_{23},a_{33}$ – соответствующие алгебраические дополнения в детерминанте Δ.

4. Математическая модель термоупругости микрополярных ортотропных тонких оболочек

С целью приведения трехмерной задачи микрополярной термоупругости к двумерной, что уже выполнено для перемещений, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в теории микрополярных упругих оболочек вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия $T_{ii},S_{ij},N_{i3},N_{3i}$, моменты $M_{ii},H_{ij},L_{ii},L_{ij},L_{i3},L_{33}$ и гипермоменты Λ_{i3}, которые с учетом предположения 4) выражаются следующим образом:

$$T_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}d\alpha_3,\ S_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}d\alpha_3,\ N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}d\alpha_3,$$

$$N_{3i}=\int_{-h}^{h}\sigma_{3i}d\alpha_3,\ M_{ii}=\int_{-h}^{h}\alpha_3\sigma_{ii}d\alpha_3,\ H_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_3\sigma_{ij}d\alpha_3,$$

$$L_{ii} = \int_{-h}^{h} \mu_{ii} d\alpha_3, \quad L_{ij} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ij} d\alpha_3, \quad L_{33} = \int_{-h}^{h} \mu_{33} d\alpha_3,$$
$$L_{i3} = \int_{-h}^{h} \mu_{i3} d\alpha_3, \quad \Lambda_{i3} = \int_{-h}^{h} \alpha_3 \mu_{i3} d\alpha_3. \tag{4.1}$$

Имея в виду относительно α_3 качественные стороны поведения искомых функций, удовлетворяя граничные условия (1.4) на лицевых поверхностях оболочки и перейдя к усредненным величинам, получим математическую модель термоупругости микрополярных ортотропных тонких оболочек.

Основная система уравнений термоупругости микрополярных ортотропных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

– уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(T_{ii} - T_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(S_{ji} + S_{ij}\right) + \frac{N_{i3}}{R_i} = -\left(q_i^+ + q_i^-\right),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(M_{ii} - M_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} +$$
$$+ \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(H_{ji} + H_{ij}\right) - N_{3i} = -h\left(q_i^+ + q_i^-\right),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 N_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 N_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] = q_3^+ + q_3^-, \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(L_{ii} - L_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_j A_i}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(L_{ji} + L_{ij}\right) + \frac{L_{i3}}{R_i} +$$
$$+ (-1)^j \left(N_{j3} - N_{3j}\right) = -\left(m_i^+ + m_i^-\right),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 L_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 L_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] - \left(S_{12} - S_{21}\right) = m_3^+ + m_3^-,$$

$$L_{33} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 \Lambda_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 \Lambda_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] - \left(H_{12} - H_{21}\right) = h\left(m_3^+ - m_3^-\right);$$

– физические соотношения упругости

$$T_{11}=C_{11}\Gamma_{11}+C_{12}\Gamma_{22}-T_{11\Theta},\ T_{22}=C_{12}\Gamma_{11}+C_{22}\Gamma_{22}-T_{22\Theta},$$

$$M_{11}=D_{11}K_{11}+D_{12}K_{22}-M_{11\Theta},\ M_{22}=D_{12}K_{11}+D_{22}K_{22}-M_{22\Theta},$$

$$S_{12}=C_{77}\Gamma_{12}+C_{78}\Gamma_{21},\ S_{21}=C_{78}\Gamma_{12}+C_{88}\Gamma_{21},\ N_{13}=C_{66}\Gamma_{13}+C_{56}\Gamma_{31},$$

$$N_{23}=C_{44}\Gamma_{23}+C_{45}\Gamma_{32},\ N_{31}=C_{56}\Gamma_{13}+C_{55}\Gamma_{31},\ N_{32}=C_{45}\Gamma_{23}+\tilde{C}_{55}\Gamma_{32},$$

$$H_{12}=D_{77}K_{12}+D_{78}K_{21},\ H_{21}=D_{78}K_{12}+D_{88}K_{21}, \tag{4.3}$$

$$L_{11}=d_{11}k_{11}+d_{12}k_{22}+d_{13}k_{33},\ L_{21}=d_{12}k_{11}+d_{22}k_{22}+d_{23}k_{33},$$

$$L_{33}=d_{13}k_{11}+d_{23}k_{22}+d_{33}k_{33},\ L_{12}=d_{77}k_{12}+d_{78}k_{21},\ L_{21}=d_{78}k_{12}+d_{88}k_{21},$$

$$L_{13}=d_{66}k_{13},\ L_{12}=d_{77}k_{12}+d_{78}k_{21},\ \Lambda_{13}=\lambda_{66}l_{13},\ \Lambda_{23}=\lambda_{44}l_{23},$$

где

$$C_{11}=2h\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\ C_{12}=-2h\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\ C_{22}=2h\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},$$

$$C_{77}=2h\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ C_{78}=-2h\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ C_{88}=2h\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},$$

$$C_{66}=2h\frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2},\ C_{56}=-2h\frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2},\ C_{44}=2h\frac{a_{55}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},$$

$$C_{45}=-2h\frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},\ C_{55}=2h\frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2},\ \tilde{C}_{55}=2h\frac{a_{44}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},$$

$$D_{77}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ D_{78}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ D_{88}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2} \tag{4.4}$$

$$D_{77}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ D_{78}=-\frac{2h^3}{3}\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\ D_{88}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},$$

$$d_{11}=2h\frac{\Delta_{11}}{\Delta},\ d_{12}=2h\frac{\Delta_{12}}{\Delta},\ d_{13}=2h\frac{\Delta_{13}}{\Delta},\ d_{22}=2h\frac{\Delta_{22}}{\Delta},\ d_{23}=2h\frac{\Delta_{23}}{\Delta},$$

$$d_{33}=2h\frac{\Delta_{33}}{\Delta},\ d_{77}=2h\frac{b_{88}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\ d_{78}=-2h\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\ d_{88}=2h\frac{b_{77}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},$$

$$d_{66}=2h\frac{1}{b_{66}},\ d_{44}=2h\frac{1}{b_{44}},\ \lambda_{66}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{66}},\ \lambda_{44}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{44}},$$

$$T_{11\Theta}=2h\frac{\alpha_{1\Theta}a_{22}-\alpha_{2\Theta}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Theta_0,\ T_{22\Theta}=2h\frac{\alpha_{2\Theta}a_{11}-\alpha_{1\Theta}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Theta_0,$$

$$M_{11\Theta}=\frac{2h^2}{3}\frac{\alpha_{1\Theta}a_{22}-\alpha_{2\Theta}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Theta_1,\ M_{22\Theta}=\frac{2h^2}{3}\frac{\alpha_{2\Theta}a_{11}-\alpha_{1\Theta}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Theta_1. \tag{4.5}$$

К уравнениям равновесия (4.2) и соотношениям упругости (4.3) необходимо присоединить геометрические соотношения (3.3).

Представим «смягченные» граничные условия на граничном контуре Г срединной поверхности оболочки, считая, что этот контур совпадает с координатной линией $\alpha_1=\text{const}$ [7, 8]:

$$T_{11}=T_{11}^*\ \text{или}\ u_1=u_1^*,\ S_{12}=S_{12}^*\ \text{или}\ u_2=u_2^*,\ N_{13}=N_{13}^*$$
$$\text{или}\ w=w^*,M_{11}=M_{11}^*\ \text{или}$$

$$K_{11}=K_{11}^*,\ H_{12}=H_{12}^*\ \text{или}\ K_{12}=K_{12}^*,\ L_{11}=L_{11}^*\ \text{или}\ \kappa_{11}=\kappa_{11}^*, \tag{4.6}$$

$$L_{12}=L_{12}^*\ \text{или}\ \kappa_{12}=\kappa_{12}^*,\ L_{13}=L_{13}^*\ \text{или}\ \kappa_{13}=\kappa_{13}^*,\ \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^*\ \text{или}\ l_{13}=l_{13}^*.$$

Система уравнений (4.2), (4.3), (3.3) и граничные условия (4.6) представляют математическую модель термоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

Система уравнений (4.2), (4.3), (3.3) термоупругости микрополярных ортотропных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений представляет собой систему диференциальных уравнений 18-го порядка с девятью граничными условиями (4.6) на каждом из контуров срединной поверхности оболочки Г. Это система из 52 уравнений относительно 52 неизвестных функций $u_i, w, \psi_i, \Omega_i, \Omega_3, l, v_i,\ T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i},\ M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij},\ L_{33}, \Lambda_{i3}, \Gamma_{ii},\ \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3},$ $\Gamma_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, k_{ii}, k_{ij}, k_{i3}, l_{i3}$.

Если в системе уравнений (4.2), (4.3), (3.3) перейти к плоскому случаю $\left(\frac{1}{R_i}=0\right)$, тогда получим модель термоупругости плоского напряженного состояния и модель термоупругости изгибной деформации микрополярных ортотропных тонких пластин.

Библиографический список

1. Подстригач Я.С., Швац Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наукова думка, 1978. – 344 с.

2. Швец Р.Н., Лунь Е.И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7, № 10. – С. 121–125.

3. Новацкий В. Моментные напряжения в термоупругости // Прикладная механика. – 1967. – Т. 3, № 1. – С. 3–17.

4. Nowacki W. Couple-stresses in the theory of thermoelasticity // Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics in moving fluids. IUTAM Symposia. – Vienna, 1966. Ed. H. Parkus, L.I. Sedov. Springer-Verlag. Wien; New York, 1966. – P. 259–278.

5. Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. – Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt, 1986. – 383 p.

6. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 53. – Вып. 2. – С. 148–155.

7. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т. 14, №1. – С. 55–66.

8. Sargsyan S.H. Mathematical models of micropolar elastic thin shells // Advanced structured materials. Shell-like structures. Non-classical theories and applications. Springer. – 2011. – Vol. 15. – P. 91–100.

9. Sargsyan S.H. Termoelasticity of thin shells on the basis of asymmetrical theory of elasticity // Journal of thermal stresses. – 2009. – Vol. 32. – No. 6. – P. 791–818.

10. Саркисян С.О. Термоупругость микрополярных тонких оболочек // Актуальные проблемы механики сплошной среды: сб. науч. тр. междунар. конф. 8–12 октября 2012. Цахкадзор. Армения. – Ереван: Изд-во Ереван. гос. ун-та архитектуры и строительства. – 2012. – С. 184–189.

11. Iesen D. Torsion of anisotropic micropolar elastic cylinders // ZAMM. – 1974. – Vol. 54. – No. 12. – P. 773–779.

12. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Гос. изд. техн. теорет. лит., 1953. – 544 с.

13. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.

14. Подстригач Я.С., Пелех Б.Л. Термоупругие задачи для оболочек и пластин с низкой сдвиговой жесткостью // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – Вып. 10. – С. 17–23.

References

1. Podstrugach Ya. S., Shvac R.N. Termouprugost tonkikh obolochek [Thermoelasticity of thin shells]. Kiev: Naukova dumka, 1978, 344 p.

2. Shvec R.N., Lun E.I. Nekotorie vaprosi teorii termouprugosti ortotropnix obolochek s uchotom inercii vrasheniya I poperechnovo sdviga [Some problems of theory of thermoelasticity of orthotropic shells with consideration of rotation inertia and transverse shear]. *Applied mechanics*, 1971, vol. 7, no. 10, pp. 121-125.

3. Nowacki V. Momentnie naprajeniya v termouprugosti [Moment stresses in thermoelasticity]. *Applied mechanics*, 1967, vol. 3, no. 1, pp. 3-17.

4. Nowacki W. Couple-stresses in the theory of thermoelasticity. Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics in moving fluids. IUTAM Symposia.Vienna, 1966. Editors H.Parkus, L.I.Sedov. Springer-Verlag. Wien; New York, 1966, pp. 259-278.

5. Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt, 1986, 383 p.

6. Sargsyan S.H. Matematicheskaya model mikropolyarnix uprugikh tonkikh plastin I osobennosti ikh prochnostnikh i joskostnikh xarakteristikh [Mathematical model of micropolar elastic thin plates and features of strength and rigidity]. *Applied mechanics and technical physics*, 2012, vol. 53, no. 2, pp.148-155.

7. Sargsyan S.H. Obshaya teoriya mikropolyarnix uprugix tonkix obolochek [General theory of micropolar elastic thin shells]. *Physical mesomechanics*, 2011, vol. 14, no. 1, pp. 55-66.

8. Sargsyan S.H. Mathematical models of micropolar elastic thin shells. Advanced structured materials. Shell-like structures. Non-classical theories and applications. Springer, 2011, vol. 15, pp. 91-100.

9. Sargsyan S.H. Termoelasticity of thin shells on the basis of asymmetrical theory of elasticity. *Journal of Thermal Stresses*, 2009, vol. 32, no. 6, pp. 791-818.

10. Sargsyan S.H. Termouprugost mikropolyarnikh tonkikh obolochek [Thermoelasticity of micropolar thin shells]. *Sbornik nauchnykh trudov mezhdunarodnoy konferencii «Aktualnye problemy mehaniki sploshnoi sredy»*. 8-12 October 2012. Tcaxkadzor. Armenia. Yerevan, 2012, pp. 184-189.

11. Iesen D. Torsion of anisotropic micropolar elastic cylinders. *ZAMM*, 1974, vol. 54, no. 12, pp. 773-779.

12. Goldenveyzer A.L.. Teoriya uprugikh tonkikh obolochek [Theory of elastic thin shells]. Moscow: *Gosudarstvennoje isdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury,* 1953, 544 p.

13. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T. Teoriya obolochek peremennoy jostkosti [Theory of shells of variable rigidity]. Kiev: Naukova dumka, 1981, 544 p.

14. Podstrigach Ya.S., Pelekh B.L. Termouprugie zadachi dlya obolochek I plastin s nizkoj sdvigavoy joskostu [Thermoelastic problems for shells and plates with low shear rigidity]. *Teplovye napryazheniya v e'lementakh konstruktsiy*, 1970, vol. 10, pp. 17-23.

Об авторах

Саркисян Самвел Оганесович (Гюмри, Республика Армения) – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Армении, заслуженный деятель науки Армении, заведующий кафедрой высшей математики Гюмрийского государственного педагогического института (377526, г. Гюмри, ул. Паруйра Севака, 4, Республика Армения, e-mail: s_sargsyan@yahoo.com).

Фарманян Анаит Жораевна (Гюмри, Республика Армения) – кандидат физико-математических наук, доцент, проректор по науке и внешним связям Гюмрийского государственного педагогического института (377526, г. Гюмри, ул. Паруйра Севака, 4, Республика Армения, e-mail: afarmanyan@yahoo.com).

About the authors

Sargsyan Samvel Hovhannes (Gyumri, Republic of Armenia) – Ph.D., Doctor of Sciences, Professor, Correspondent-member of NAS RA, Head for Higher Mathematics Chair, Gyumri State Pedagogical Institute (4, Paruyr Sevak st., 377526, Gyumri, Republic of Armenia, e-mail: s_sargsyan@yahoo.com).

Farmanyan Anahit Jora (Gyumri, Republic of Armenia) – Ph.D., Vice-rector on Scientific and International Affairs, Gyumri State Pedagogical Institute (4, Paruyr Sevak st., 377526, Gyumri, Republic of Armenia, e-mail: afarmanyan@yahoo.com).

Получено 16.07.2013