Механика

2013

УДК 539.215; 539.374

#### Б.А. Рычков, Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская

Кыргызско-Российский Славянский университет, г. Бишкек, Кыргызстан

# О ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ И ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

В статье исследуется поведение образцов горных пород, испытанных при неравномерном трехосном сжатии по схеме Кармана. Использованы известные экспериментальные данные А.Н. Ставрогина для некоторых горных пород. Как показано в [1, 2], эти материалы в исходном состоянии обладали упругой ортотропной симметрией. Пределы упругости при произвольных напряженных состояниях определены через предел упругости при одноосном сжатии на основе синтеза критерия Кулона-Мора и концепции скольжения в трактовке М.Я. Леонова. Учтен также вывод [3]: начиная с напряженного состояния, когда среднее главное напряжение достигает значения максимального касательного напряжения, и при более высоких давлениях, горные породы ведут себя как пластичные материалы. При этом наблюдаемое при меньших давлениях разрыхление материала исчезает, а критерий Кулона-Мора переходит в критерий Треска. Эти условия отображены при определении пределов прочности и теоретическом установлении угла среза при разрушении образцов. Построены соответствующие огибающие кругов Мора.

Ключевые слова: горные породы, пластичность, предел упругости, предел прочности, изотропный материал, ортотропный материал.

#### B.A. Rychkov, N.M. Komartsov, T.A. Luzhanskaya

Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyzstan

## ABOUT ELASTIC AND STRENGTH LIMITS OF ROCKS

In this paper we research how rock samples respond to irregular triaxial compression according to Karman's scheme. We have used known A. N. Stavrogin's experimental data for some type of rock. As shown [1, 2], these materials originally possessed elastic orthotropic symmetry. Elastic limits in arbitrary stressed states was determined using elastic limit under uniaxial compression on the basis of synthesis Mohr-Kulon's criterion and the concept of sliding in the treatment of M.J. Leonov. We used [3] conclusion: rocks behave as ductile materials from the state of stress when the average principal stress reaches the maximum shear stress to at higher pressures. In other words, in this situation ripping of materials disappears and Mohr-Kulon's criterion converses in Treska's criterion. These conditions was realized when establishing strength limits and teoretical determination of cutting angle at failure. Curves of Mohr's circles were constructed.

Keywords: rock, plasticity, elastic limit, strength limit, isotropic material, orthotropic material.

Рассматриваются прочностные свойства горных пород по результатам испытания по схеме Кармана цилиндрических образцов, когда  $\sigma_1 \ge \sigma_2 = \sigma_3$  ( $\sigma_i$  – главные напряжения, *i*=1,2,3). Вид напряженного со-

110

стояния характеризуется отношением минимального и максимального главных напряжений  $c = \sigma_1/\sigma_3$ . Как это часто принимается в теоретических расчетах, предел упругости будем отождествлять с пределом пропорциональности и пределом текучести. Пределы прочности определим, используя критерий Мора.

Следуя Мору [4], будем считать, что первоначальные локальные скольжения возникают на площадке, на которой касательное  $\tau_{v}$  и нормальное  $\sigma_{v}$  напряжения связаны следующим соотношением:

$$\tau_v = S_0 - \mu \sigma_v, \qquad (1)$$

где  $S_0$  и  $\mu$  – параметры материала;  $\nu$  – нормаль к рассматриваемой площадке. Правая часть выражения представляет собой сопротивление скольжению (сдвигу).

Нормальное и касательное напряжения в плоскости, повернутой относительно площадки действия максимального касательного напряжения на угол β, определяются по формулам

$$\sigma_{\beta} = \sigma_0 + T \sin 2\beta,$$
  

$$\tau_{\beta} = T \cos 2\beta,$$
(2)

где  $\sigma_0$  – среднее напряжение; T – максимальное касательное напряжение, т.е.

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \ T = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$
(3)

Согласно определению сопротивление сдвигу ( $S_{\beta}$ ) выражается в данном контексте следующим образом:

$$S_{\beta} = S_0 - \mu(\sigma_0 + T\sin 2\beta).$$
<sup>(4)</sup>

При первом скольжении касательные к кривым  $S_{\beta} = S_{\beta}(\beta)$ и  $\tau_{\beta} = \tau_{\beta}(\beta)$  совпадут, т.е. касательное напряжение  $\tau_{\beta}(\beta)$  достигает значения сопротивления сдвигу в направлении этого скольжения:

$$\frac{dS_{\beta}}{d\beta} = \frac{d\tau_{\beta}}{d\beta} \, \text{при } \beta = \beta_0 \,, \tag{5}$$

111

где  $\beta_0$  – угол, определяющий направление первого скольжения, отсчитываемый от направления действия максимального касательного напряжения *T*.

Из (5), учитывая (1), (2), (3) и (4), вытекает, что

$$\mu = tg 2\beta_0. \tag{6}$$

Таким образом, величина угла  $\beta_0$  определяется параметром  $\mu$ , величину которого будем считать зависящей от вида напряженного состояния.

Естественно считать, что при пропорциональном нагружении в площадках, отмечаемых углом  $\beta_0$ , интенсивность скольжений с ростом уровня напряжений наибольшая, и именно по этим площадкам происходит срез при разрушении образца.

Согласно опытным данным [5], начиная с напряженного состояния c=1/3 и выше, угол  $\beta_0 = 0$ , т.е. при данном напряженном состоянии срез происходит по плоскости максимального касательного напряжения (*T*), и горные породы деформируются как пластичный материал. Тогда при c=1/3 из соотношений (2) и (3) вытекает, что

$$\frac{\sigma_{\beta_0}}{\tau_{\beta_0}} = 2. \tag{7}$$

При *с*, отличных от 1/3, это отношение выглядит следующим образом:

$$\frac{\sigma_{\beta_0}}{\tau_{\beta_0}} = \frac{(1+c) + (1-c)\sin 2\beta_0}{(1-c)\cos 2\beta_0} = k(c).$$
(8)

Предположим, что отношение (8) линейно изменяется от значения  $k_0 = k(0)$  до k(1/3) = 2. Исходя из геометрических построений в круге Мора на сжатие (рис. 1), величина  $k_0$  определяется по формуле

$$k_0 = \frac{1 + \cos 2\alpha_0}{\sin 2\alpha_0},\tag{9}$$

где угол  $\alpha_0 = 45^\circ - \beta_0$  определяется экспериментально.



Рис. 1. Круг Мора при одноосном сжатии

На этом рисунке  $O_{\mu}$  – центр круга Мора при одноосном сжатии;  $\sigma^{0}, \tau^{0}$  – координаты точки касания огибающей круга на одноосное сжатие;  $\sigma_{c}$  – предел прочности при одноосном сжатии;  $\alpha_{0}$  – угол среза.

Из приведенного выше предположения, что  $\alpha \rightarrow 45^{\circ}$  при c=1/3 получим, что в плоскости среза соотношение между нормальным и касательным напряжениями все время изменяется с изменением вида напряженного состояния. Это обстоятельство можно учесть, если для коэффициента k ввести интерполяционную формулу:

$$k = k(c) = \frac{1}{1/3} \left[ ck_n + (\frac{1}{3} - c)k_0 \right],$$

где  $k_n$  равно значению, получаемому для предельного напряженного состояния (c=1/3), при котором еще справедлив критерий Кулона–Мора.

Из соотношения (8), учитывая формулы (2) и (3), можно определить угол среза  $\beta_0$  при произвольном *с*:

$$\sin 2\beta_0 = \frac{-(1+c) + k\sqrt{(1+k^2)(1-c)^2 - (1+c)^2}}{(1-c)(1+k^2)}.$$
 (10)

Учитывая (2),(3) и (7), условие (1) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{1}^{s} = \sigma_{1}^{s}(c) = \frac{2S_{0}}{(1-c)(\cos 2\beta_{0} + k \cdot \sin 2\beta_{0})},$$
(11)

где  $\sigma_1^s$  – предел прочности при произвольном напряженном состоянии для  $c \le 1/3$ .

Величина  $S_0$  определяется из сопоставления с экспериментальными данными. Подобно аналогичному методу [5] выражения пределов прочности,  $S_0$  представляется в следующем виде:

$$S_0 = S_0^0 \exp(\xi c + \eta c^2), \qquad (12)$$

где ξ и η в общем случае определяются [6] по экспериментальным данным для пределов прочности при каких-либо двух видах напряженного состояния.

При c=0 параметр  $S_0$  должен быть равен пределу прочности на одноосное сжатие  $\sigma_c$ . Согласно этому условию и учитывая (11) и (12), получим

$$S_0^0 = \frac{1}{2}\sigma_c \left(\cos 2\beta_0^0 + k_0 \sin 2\beta_0^0\right) \ \left(\beta_0^0 = \beta_0\Big|_{c=0}, k_0 = k\Big|_{c=0}\right).$$

Входящие в выражение для  $S_0$  параметры  $\xi$  и  $\eta$  можно определить в первом приближении, используя только эксперимент на одноосное сжатие. Для этого вначале надо рассмотреть построение огибающей к кругам Мора.

Уравнение кругов Мора можно представить в виде [6]

$$\varphi(\sigma,\tau,c) = \sigma^2 + \tau^2 - (1+c)\sigma_1\sigma + c\sigma_1^2 = 0, \qquad (13)$$

где в качестве параметра данного семейства кругов фигурирует с.

Согласно известной теореме [7] огибающая семейства вида (13) должна также удовлетворять уравнению

$$\varphi_c(\sigma,\tau,c) = 0 \ (\varphi_c = \partial \varphi / \partial c \) \tag{14}$$

ИЛИ

$$\varphi_c(\sigma,\tau,c) = -(\sigma_1)_c(1+c)\sigma - \sigma_1\sigma + \sigma_1^2 + 2\sigma_1c(\sigma_1)_c = 0.$$
(15)

Из системы уравнений (11) и (15) определяется совокупность точек (  $\sigma$ ,  $\tau$  ) данной огибающей:

$$\sigma = \frac{\sigma_1^s [\sigma_1^s + 2c(\sigma_1^s)_c]}{\sigma_1^s + (1+c)(\sigma_1^s)_c}, \quad \tau = \frac{(1-c)\sigma_1^s}{\sigma_1^s + (1+c)(\sigma_1^s)_c} \sqrt{[\sigma_1^s + c(\sigma_1^s)_c](\sigma_1^s)_c}.$$
(16)

Используя (11), найдем

$$(\sigma_1^s)_c = \sigma_1^s R(c), \tag{17}$$

где

$$R(c) = \xi + 2c\eta + \frac{1}{1-c} - \frac{(k - \text{tg}2\beta_0)(\sin 2\beta_0)_c + k_c \sin 2\beta_0}{\cos 2\beta_0 + k \sin 2\beta_0}.$$
 (18)

Сопоставляя выражения (16) и (17), получим

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{1+2cR}{(1-c)\sqrt{(1+cR)R}}.$$
(19)

В случае одноосного сжатия (c = 0) из (19) имеем

$$R_0 = R(0) = 1/(\sigma^0 / \tau^0)^2, \qquad (20)$$

где

$$\sigma^{0} / \tau^{0} = (\sigma / \tau) \Big|_{c=0}.$$
(21)

Из (17), учитывая (11) и (18), при c = 0 получим выражение для параметра  $\xi$ :

$$\xi = R + \frac{(\sin 2\beta_0)_c (k - \operatorname{tg} 2\beta_0) + k_c \sin 2\beta_0}{\cos 2\beta_0 + k \sin 2\beta_0} \bigg] \left( (\sin 2\beta_0)_c = \frac{\partial}{\partial c} \sin 2\beta_0; k_c = \frac{\partial}{\partial c} k(c) \right).$$

Второе условие (для определения параметра η) получим, используя свойства огибающей к кругам Мора.

Координаты точки касания огибающей круга на одноосное сжатие ( $\sigma^0, \tau^0$ ) определяется двумя методами.

1. Рассмотрим геометрическое построение (см. рис. 1).

При известном экспериментальном значении угла среза  $\alpha_0$ и пределе прочности на сжатие  $\sigma_c$  с помощью тригонометрических соотношений из круга Мора на сжатие определяются  $\sigma^0, \tau^0$ , что дает

$$\sigma^0 / \tau^0 = \frac{1 - \cos 2\alpha_0}{\sin 2\alpha_0}.$$
 (22)

2. Выразим отношение  $\sigma^0, \tau^0$  как функцию от истинной пористости (*P*) ряда горных пород [8]:

$$\sigma^0, \tau^0 = f(P).$$

Предварительно отношение  $\sigma^0$ ,  $\tau^0$  для каждой конкретной породы определяется методами, изложенными в [9]:

$$\sigma^0, \tau^0 = \sqrt{\frac{2\sigma_c/\sigma_p}{1+(\sigma_c/\sigma_p)^2}},$$

где  $\sigma_p$  – предел прочности при растяжении.

При известных данных пористости горных пород можно получить графическую зависимость  $\sigma^0/\tau^0 - f(P)$ , при аппроксимации которой получаем аналитическое выражение вида

$$\sigma^0/\tau^0 = a + b \ln P,$$

где а и b имеют определенные значения для конкретных горных пород.

Определив тем или иным способом величину  $\sigma^0 / \tau^0$ , условие для параметра  $\eta$ , входящего в формулу (12), получим следующим образом.

Максимальное касательное напряжение при переходе за указанное выше предельное состояние  $c_n$  (т.е. при  $c > c_n$ ) остается постоянным. Иначе говоря,

$$\frac{\partial}{\partial c} \tau_{\max} \bigg|_{c > c_n} = 0.$$
(23)

Из этого равенства вытекает

$$(\sigma_1^s)_c = \sigma_1^s \frac{1}{1-c} \quad (c \ge c_n).$$

$$(24)$$

Для большинства горных пород, как известно,  $c_n = 1/3$ . При этом и угол  $\beta_0$  с ростом *c* не изменяется, т.е.

$$\left(\sin 2\beta_0\right)_c\Big|_{c\ge 1/3} = 0. \tag{25}$$

Таким образом, из условия (24), с учетом (17) и (18), при c = 1/3 получаем выражение для параметра  $\eta$ :

$$\eta = -\frac{3}{2}\xi$$

Графики зависимостей расчетных (сплошная линия) и полученных А.Н. Ставрогиным экспериментально (штриховая линия) значений пределов прочности приведены для некоторых горных пород в виде предельных кругов Мора и огибающих к этим кругам на рис. 2.



Рис. 2. Предельные круги Мора и огибающие к ним для талькохлорита (*a*); мрамора-II (*б*); кварцевого диорита Д-2 (*в*)

Примечание. Координаты огибающих, полученные А.Н. Ставрогиным, построены согласно прил. 5 [5]. Каким образом вычислены эти координаты в монографии [5], не указано. Возможно, в данном приложении имеются некоторые ошибки (опечатки), что наглядно проявилось в изображении соответствующей огибающей для кварцевого диорита Д-2.

Аналогично можно определить предел упругости при произвольном напряженном состоянии, заменив во всех представленных выше соотношениях пределы прочности на соответствующие пределы упругости для рассматриваемых горных пород.

Особое место занимает вопрос определения предела упругости горных пород при одноосном сжатии. Кроме того, необходимо установить, к каким материалам следует их отнести: к изотропным или анизотропным.

Как показано в [1], для многих горных пород приемлемо предположение об ортотропной симметрии в исходном состоянии.

Закон Гука для ортотропного материала представляется в виде

$$e_{1} = \frac{1}{E_{1}}\sigma_{1} - \frac{v_{12}}{E_{2}}\sigma_{2} - \frac{v_{13}}{E_{3}}\sigma_{3},$$

$$e_{2} = -\frac{v_{21}}{E_{1}}\sigma_{1} + \frac{1}{E_{2}}\sigma_{2} - \frac{v_{23}}{E_{3}}\sigma_{3},$$

$$e_{3} = -\frac{v_{31}}{E_{1}}\sigma_{1} - \frac{v_{32}}{E_{2}}\sigma_{2} + \frac{1}{E_{3}}\sigma_{3},$$

$$E_{i}, v_{ij} = \text{const}; i, j = 1, 2, 3.$$

Как определить константы, входящие в этот закон, показано в [1]. Их значения для талькохлорита и мрамора-II взяты здесь именно из [1], а для кварцевого диорита Д-2 [10]. Для этих пород константы упругости в предположении изотропности материала приведены в [11].

А.Н. Ставрогин [5] для определения пределов упругости предлагал использовать зависимость объемной деформации от среднего напряжения ( $\theta \sim \sigma$ , где  $\theta = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ ,  $\sigma = (\sigma_1 + 2\sigma_2)/3$ ), причем за предельные упругие состояния принимаются точки, когда экспериментальные кривые этой зависимости отходят от линии гидростатического сжатия (c = 1). При этом на начальном участке диаграммы деформирования осевая деформация ( $\varepsilon_1$ ) должна быть пропорциональна осевому напряжению. Анализируя полученные таким образом значения пределов упругости при различных видах напряженного состояния, приходим к выводу: точки, отвечающие значениям ( $\sigma_1^e, \varepsilon_1^e$ ), действительно располагаются на соответствующем начальном участке диаграмм деформирования, но эти участки не отвечают закону Гука ни для изотропного, ни для ортотропного материала.

Иначе говоря, для каждого напряженного состояния значения предела упругости определялись эмпирически при использовании линейной аппроксимации начальных участков диаграмм  $\sigma_1 \sim \varepsilon_1$  и зависимости  $\theta \sim \sigma$ , что, в свою очередь, зависит в определенной мере от воли экспериментатора. Кроме того, остается непонятным, каким образом определять пределы упругости для тех напряженных состояний, для которых нет экспериментальных данных.

В данной работе предлагается следующий метод определения величин пределов упругости.

Предел упругости при одноосном сжатии определяем по методике А.Н. Ставрогина, т.е. для рассматриваемых материалов принимаем те их значения, которые даны в [5]. Но точку ( $\sigma_1^e, \varepsilon_1^e$ ) на диаграмме  $\sigma_1 \sim \varepsilon_1$  откладываем не на экспериментальной кривой деформирования, а на линии, отвечающей закону Гука для ортотропного материала. Затем таким же образом отмечаем пределы упругости (вычисляемые по указанным выше зависимостям) при произвольных напряженных состояниях.

Ниже, на рис. 3, приведены диаграммы деформирования, построенные по экспериментальным данным (сплошная линия) [5] для талькохлорита, мрамора-II и кварцевого диорита Д-2, линейные зависимости, построенные по закону Гука для ортотропного материала (штрихпунктирная линия) и для изотропного материала (штриховая линия), отмечены табличные (кругом) и расчетные (ромбом) значения пределов упругости.



Рис. 3. Диаграммы деформирования талькохлорита (*a*); мрамора-II (*б*); диорита Д-2 (*в*) при различных напряженных состояниях (см. также с. 120)



Рис. 3. Окончание

#### Библиографический список

1. Рычков Б.А. О деформационном упрочнении горных пород // Изв. РАН МТТ. – 1999. – № 2.

2. Рычков Б.А. Условие текучести, дилатансия и разрушение горных пород // Физ.-техн. пробл. прочности разраб. полезн. ископ. – 2001. – № 1.

3. Тарасов Б.Г. Закономерности деформирования и разрушения горных пород при высоких давлениях: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – СПб., 1991.

4. Мор О. Чем обусловлены предел упругости и временное сопротивление материалов. – СПб.: Образование, 1915. – 75 с.

5. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. – М.: Недра, 1979.

6. Рычков Б.А., Кондратьева Е.И., Маматов Ж.Ы. Дилатансия геоматериалов с учетом разупрочнения // Вестник Самар. гос. ун-та. – 2004. – Спец. вып.

7. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1974.

8. Рычков Б.А. О пределах упругости и прочности горных пород // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и кон-

струкций: тез. докл. II Всерос. конф., Новосибирск, 10–14 окт. 2007. – Новосибирск, 2007.

9. О теоретическом и экспериментальном построении огибающей предельных кругов Мора / В.М. Жигалкин [и др.] // Физ.-техн. пробл. прочности разраб. полезн. ископ. – 2010. – № 6. – С. 25–36.

10. Комарцов Н.М., Рычков Б.А. Деформационное поведение горных пород // Современные проблемы механики сплошной среды: сб. тр. междунар. науч. конф. – Бишкек, 2012.

11. Ставрогин А.Н., Георгиевский В.С. Каталог механических свойств горных пород. – 2-е изд. / Всесоюз. науч.-исслед. маркшейдер. ин-т. – Л., 1972. – 267 с.

#### References

1. Rychkov B.A. O deformatsionnom uprochnenii gornih porod [About strain hardening of rocks]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mehanika tverdogo tela*, 1999, no. 2.

2. Rychkov B.A. Uslovie tekuchesti, dilatansiya i razrushenie gornih porod [The yield condition, dilatancy and fracture of rocks]. *Phiziko-tehnicheskie problemi prochnosti razrabotki poleznih iskopaemih*, 2001, no. 1.

3. Tarasov B.G. Zakonomernosti deformirovaniya i razrusheniya gornih porod pri vysokih davleniyah [Logics of deformation and fracture of rocks under high pressure]. Abstract of the thesis of doctors of technical sciences, St.-Petersburg, 1991.

4. Mohr O. Chem obuslovlen predel uprugosti i vremennoe soprotivlenie materialov [How specified strength limit and temporary material resistance]. St.-Petersburg: Obrazovanie, 1915, 75 p.

5. Stavrogin A.N., Protosenya A.G. Plastichnost' gornih porod [Plasticity of rocks]. Moskow: Nedra, 1979.

6. Rychkov B.A., Kondrat'eva E.I., Mamatov J.Y. Dilatansiya geomaterialov s uchetom razuprochneniya [Dilatancy of geomaterials inclusive of strength loss]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2004, special issue.

7. Pogorelov A.V. Differentsial'naya geometriya [Differential geometry]. Moscow: Nauka, 1974.

8. Rychkov B.A. O predelah uprugosti i prochnosti gornih porod [About elastic and strength limits of rocks]. *Tezisy doklada II Vserossiiskoi konferentsii "Deformirovanie i razrushenie strukturno-neodnorodnih sred i konstruktsii"*. Novosibirsk, 2011.

9. Zhigalkin V.M. [et al.] O teoreticheskom i eksperimental'nom postroenii ogibayushei predel'nih krugov Mora [About theoretical and experimental constructing of extremal Mohr's circles curve]. *Phiziko-tehnicheskie* problemi prochnosti razrabotki poleznih iskopaemih, 2010, no. 6, pp. 25-36.

10. Komartsov N.M., Rychkov B.A. Deformatsionnoe povedenie gornih porod [Deformationable behavior of rocks]. *Trudy mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii "Sovremennye problemy mehaniki sploshnoi sredy"*. Bishkek, 2012.

11. Stavrogin A.N., Georgievskii V.S. Katalog mehanicheskih svoistv gornih porod [Catalogue of rocks mechanical properties]. Vsesoyuznii nauchno-issledovatel'skii marksheiderskii institut, 2 edition, Leningrad, 1972, 267 p.

# Об авторах

**Рычков Борис Александрович** (Бишкек, Кыргызстан) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры механики Кыргызско-Российского Славянского университета (720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44, e-mail: rychkovba@mail.ru).

Комарцов Никита Михайлович (Бишкек, Кыргызстан) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Кыргызско-Российского Славянского университета (720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44, e-mail: komartsovnm@mail.ru).

**Лужанская Татьяна Александровна** (Бишкек, Кыргызстан) – аспирант кафедры механики Кыргызско-Российского Славянского университета (720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44, e-mail: tatianaluzhan-skaya@gmail.com).

## About the authors

**Rychkov Boris Aleksandrovich** (Bishkek, Kyrgyzstan) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mechanics, Kyrgyz-Russian Slavic University (44, Kievskaya st., 720000, Bishkek, Kyrgyzstan, e-mail: rychkovba@mail.ru).

**Komartsov Nikita Mihailovich** (Bishkek, Kyrgyzstan) – Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, Department of Mathematics, Kyrgyz-Russian Slavic University (44, Kievskaya st., 720000, Bishkek, Kyrgyzstan, e-mail: komartsovnm@mail.ru).

Luzhanskaya Tatiana Aleksandrovna (Bishkek, Kyrgyzstan) – postgraduate student, Kyrgyz-Russian Slavic University (44, Kievskaya st., 720000, Bishkek, Kyrgyzstan, e-mail: tatianaluzhanskaya@gmail.com).

Получено 28.02.13