



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.2.02

УДК 539.42

## КОНТУРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ СМЕШАННЫХ ФОРМАХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

А.М. Тартыгашева

Казанский научный центр Российской академии наук, Казань, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 11 ноября 2021 г.  
Одобрена: 23 июня 2022 г.  
Принята к публикации:  
08 июля 2022 г.

#### Ключевые слова:

смешанные формы деформирования и разрушения, сингулярность в вершине трещины, трещина, нелинейная механика разрушения, инвариантность  $J$ -интеграла от пути интегрирования, контурный интеграл.

### АННОТАЦИЯ

Современные знания в области механики разрушения являются ключевыми при решении проблем безопасности и прочности объектов с трещиноподобными повреждениями различной природы происхождения. Нелинейная механика разрушения при анализе напряженно-деформированного состояния в области вершины трещины базируется на одно- и двухпараметрическом подходе. Классические однопараметрические исследования предполагают изучение сингулярных величин, включающих контурный, независимый от пути интегрирования  $J$ -интеграл, коэффициент интенсивности напряжений (КИН) и т.д. Значения КИН и  $J$ -интеграла являются взаимозависимыми. Большой популярностью пользуются комбинированные методы на основе союза численных, экспериментальных и аналитических расчетов, которые позволяют получить максимально четкое описание параметров механики разрушения. Вычисление  $J$ -интеграла в конечно-элементных моделях методом реакций или напряжений является весьма эффективным, но для этого необходимы достаточно точные аналитические представления контурного  $J$ -интеграла. Существуют определенные ограничивающие условия при получении подобных формул. В многочисленных научных работах доказано, что  $J$ -интеграл в большинстве случаев не зависит от пути интегрирования, но весьма зависим от способов описания параметров напряженно-деформированного состояния, а также их производных, от размерности задачи и от степени удаления контура интегрирования от вершины трещины. В данной работе проведен обзор и приведены авторские исследования контурных интегралов в нелинейной механике разрушения для трех случаев: классическое решение Хатчинсона – Розенгрена – Райса (ХРР), контурные интегралы в градиентной теории пластичности и вычисление  $J$ -интеграла для общего случая, когда компоненты напряжений и перемещений являются функциями трех декартовых координат. Выведен обобщенный контурный  $J$ -интеграл, используемый для характеристики нелинейного амплитудного множителя.

© ПНИПУ

© Тартыгашева Анастасия Михайловна – к.ф.-м.н., с.н.с, e-mail: [TartigashevaA@mail.ru](mailto:TartigashevaA@mail.ru),  
ID: 0000-0003-4067-3333.

Anastasiia M. Tartygasheva – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher,  
e-mail: [TartigashevaA@mail.ru](mailto:TartigashevaA@mail.ru), ID: 0000-0003-4067-3333.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# CONTOUR INTEGRALS IN NONLINEAR FRACTURE MECHANICS FOR MIXED FORMS OF DEFORMATION

A.M. Tartygasheva

Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Kazan, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 11 November 2021  
Approved: 23 June 2022  
Accepted for publication: 08 July 2022

### Keywords:

mixed mode loading, stress singularity, crack, nonlinear fracture mechanics, invariant  $J$ -integral, path of integration, contour integral.

## ABSTRACT

Modern knowledge in the field of fracture mechanics is the first key knowledge in solving the problems of safety and strength of the objects with crack-like damages of the various origins. Nonlinear fracture mechanics in the analysis of the stress-strain state in the crack tip region is based on the one- and two-parameter approaches. The classical one-parameter studies involve the study of singular quantities, including a contour  $J$ -integral, independent of the path of integration, a stress intensity factor (SIF), etc. The values of the SIF and  $J$ -integral are interdependent. Combined methods are very popular, based on the union of numerical, experimental and analytical calculations, which make it possible to obtain the most clear description of the parameters of fracture mechanics. Calculation of the  $J$ -integral in finite element models, by the method of reactions or stresses, is very effective, but this requires sufficiently accurate analytical representations of the contour  $J$ -integral. There are certain limiting conditions when obtaining such formulas. In the numerous scientific works, it has been proved that  $J$  is an integral in the most cases does not depend on the path of integration, but is highly dependent on the methods of describing the parameters of the stress-strain state, as well as their derivatives, on the dimension of the problem and on the degree of distance of the contour of integration from the crack tip. In this paper, we review and present the author's conclusions of the contour integrals in nonlinear fracture mechanics for three cases: the classical Hutchinson – Rosengren – Rice solution (HRR), contour integrals in the gradient theory of plasticity, and the calculation of the  $J$ -integral for a general case when the components of stresses and displacements are the functions of three Cartesian coordinates. A generalized  $J$ -integral is derived and used to characterize a nonlinear amplitude fac.

© PNRPU

Механика разрушения в настоящее время является ключевой дисциплиной при решении проблем безопасности и прочности объектов промышленно-гражданского, военно-оборонного, авиационного, ракетно-космического комплексов, с трещиноподобными повреждениями различной природы происхождения [1–3]. Современная научная мысль достигла высокой точки развития в области нелинейной механики разрушения. На сегодня предложено огромное количество новых моделей, методов, методологий, алгоритмов и способов решения проблем, возникающих при конструировании и эксплуатации конструкций и машин с учетом естественно возникающих дефектов [4–7]. Для обоснования жизнеспособности предлагаемых идей по-прежнему используются уже доказанные и зарекомендовавшие себя на протяжении многих лет критерии прочности, трещиностойкости, живучести и долговечности различных механизмов и конструкций. Незыблемым остается то, что основные критериальные величины при этом зависят от параметров напряженно-деформированного состояния (НДС). Зависимость параметров напряженно-деформированного состояния макро- и микроуровня рассматривается с помощью введения последовательности окружностей определенного радиуса вокруг вершины трещины. Характерное отличие полученных таким образом зон в наличии различной сингулярности поля напряжений.

Современная механика разрушения основывается на одно- и двухпараметрическом подходах при анализе

НДС в области вершины трещины [8; 9]. Однопараметрические классические исследования предполагают изучение таких величин, как  $J$ -интеграл, коэффициент интенсивности напряжений и т.д. Для более точного описания поведения материала в окрестности вершины надреза в зависимости от схемы нагружения, геометрической формы и размеров трещины необходимо также обратить внимание на несингулярные параметры сечения деформаций:  $T$ -напряжение,  $h$  – параметр трехосности, значения  $Q$  и  $T_z$  и другие. Многие из перечисленных параметров имеют функциональную аналитическую зависимость друг от друга.

Один из основных путей развития современной механики разрушения, состоит в расчетно-экспериментальном исследовании параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) в упругой и упругопластической постановках. Нелинейная механика разрушения базируется на изучении сингулярного параметра, введенного Rice [10–12] и Черепановым [8] для исследования свойств пластических деформаций в области вершины трещины. Для упругопластических деформаций в вершине трещины при нормальном отрыве авторами J.W. Hutchinson, J.R. Rice, G.F. Rosengren найдены аналитические зависимости между параметрами НДС и  $J$ -интегралом [13–14]. Хатчинсон предложил рассматривать пластический коэффициент интенсивности напряжений (КИН), связанный с  $J$ -интегралом, при описании НДС в упругопластической области вершины трещины. В условиях полномасштабной текучести

$J$ -интеграл играет ту же роль, что и коэффициент интенсивности напряжений в линейной механике разрушения. В квазихрупком приближении  $J$ -интеграл аналогичен параметру КИН и поэтому может рассматриваться как характеристика сингулярности локальных полей напряжений и деформаций в упругопластических телах с трещинами. В дальнейшем на основе пластического КИН авторами В.Н. Шлянниковым и А.В. Тумановым был найден способ определения упругопластических параметров НДС в вершине трещины в трехмерных телах конечных размеров для условий смешанных форм деформирования [16]. Авторы работ [17; 18] исследовали пластический КИН как параметр сопротивления росту сквозных и поверхностных трещин при сложном напряженном состоянии и смешанных формах деформирования. При этом показано, что расчеты на основе пластического КИН позволяют осуществить однопараметрическую количественную оценку свойств сопротивления материала статическому и циклическому разрушению, не зависящую от влияния геометрии тела с трещиной и условий нагружения. КИН и  $J$ -интеграл взаимозависимые величины, которые вполне можно определить с помощью комбинированных методов, объединяющих численные и аналитические расчеты [1–2; 19–23]. При аналитическом представлении контурного интеграла, существуют определенные ограничивающие условия.  $J$ -интеграл не зависит от пути интегрирования, но весьма зависим от его интерпретации, поскольку включает несколько параметров НДС, а также их производные. Контурный  $J$ -интеграл может содержать разное число слагаемых, в зависимости от того, учитывается ли только линейное перемещение в области вершины трещины или будут дополнительно рассматриваться вращательные эффекты, т.е. роторные компоненты. Кроме того, подынтегральная функция контурного интеграла зависима от функционального представления компонент параметров НДС, от размерности задачи и от степени удаления контура интегрирования от вершины трещины.

Во многих прикладных задачах основное внимание уделяется математическому описанию процессов деформирования и разрушения материалов [1; 14; 24–28]. Явное внимание к данному вопросу видно из огромного количества работ российских и зарубежных ученых с исследованиями поведения различных материалов при всевозможных типах нагружения в упругой, упругопластической постановках и при ползучести. Если учесть тот факт, что при разрушениях в реальных конструкциях реализуется смешанная форма деформирования, то возникает вопрос вычисления  $J$ -интеграла для определения параметров разрушения при смешанных формах деформирования. В связи с этим в данной статье продемонстрирована интерпретация контурного  $J$ -интеграла при двумерных и трехмерных значениях компонент НДС, для зоны действия классического решения Хатчинсона – Розенгрена – Райса (ХРР) полей и для зоны, максимально приближенной к области вершины трещины, где реализуется градиентная теория пластичности.

Выведен обобщенный контурный  $J$ -интеграл, используемый для характеристики нелинейного амплитудного множителя.

## 1. Контурный $J$ -интеграл Хатчинсона – Розенгрена – Райса

При описании процессов разрушения чаще всего используются два критерия, а именно энергетический  $J$ -интеграл и  $\delta$  – раскрытие трещины в вершине. Существует линейная связь между этими двумя параметрами. Важной характеристикой считается независимость  $J$ -интеграла от пути интегрирования. Установлено, что неинвариантность  $J$ -интеграла возможна в зоне вокруг вершины трещины с радиусом менее  $6\delta$ . Таким образом, в нелинейной механике разрушения пользуются независимостью выбора контура и в качестве критерия значения используют значение  $J$ -интеграла, характеризующее разрушение.

В данной части представленной работы кратко сделан обзор о классическом представлении  $J$ -интеграла и показана его авторская интерпретация.

Объектом изучения является пластина бесконечных размеров с центральной сквозной прямолинейной наклонной трещиной, находящаяся в поле двухосных напряжений (рис. 1). Начало полярной системы координат расположено в геометрическом центре вершины трещины.

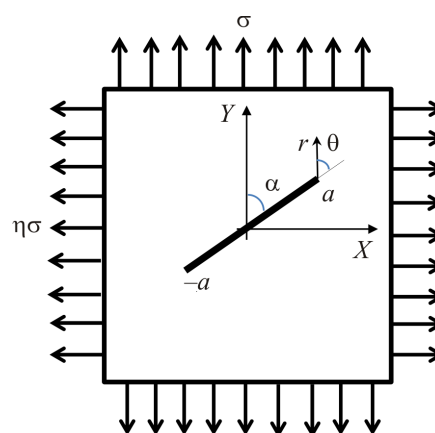


Рис. 1. Пластина с наклонной прямой трещиной в поле двухосных напряжений

Fig. 1. Plate with an inclined crack under biaxial loading

В плоских задачах управляющими уравнениями считаются уравнения равновесия и совместности деформаций, записанные в полярной системе координат. Задача сводится к решению нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием функций напряжений Эри. В решении используются комбинированные численно-аналитические методы.

Считается, что трещина находится в условиях плосконапряженного или плоскодеформированного состояния в нелинейно упругой среде, которая несжимаема. Связь между перемещениями  $u_i$  и деформациями  $\varepsilon_{ij}$  описывается формулами Коши:

$$\varepsilon_{rr}(r, \theta) = \frac{\partial U_r}{\partial r}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \quad (3)$$

где  $r, \theta$  – полярные координаты, связанные с вершиной трещины.

Деформации выражаются через компоненты напряжений  $\sigma_{ij}$  с помощью степенной функции. Например, при простом одноосном растяжении это закон Рамберга – Осгуда:

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\sigma_{ij}}{E}, & \sigma \leq \sigma_0; \\ \frac{\sigma_{ij}}{E} + \left(\frac{\sigma_{ij}}{E}\right)^n \alpha, & \sigma > \sigma_0. \end{cases} \quad i, j = 1, 2 \quad (4)$$

При сложном напряженном состоянии обобщенная модель Рамберга – Осгуда:

$$\varepsilon_{rr}(r, \theta) = \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta} + \frac{3}{4} \alpha \sigma_e^{n-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}); \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr} + \frac{3}{4} \alpha \sigma_e^{n-1} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}); \quad (6)$$

$$\varepsilon_{r\theta}(r, \theta) = (1 + \nu) \sigma_{r\theta} + \frac{3}{2} \alpha \sigma_e^{n-1} \sigma_{r\theta}. \quad (7)$$

В вышеприведенных формулах  $E$  – модуль упругости,  $\alpha$  и  $n$  – константы упрочнения,  $\sigma_0$  – предел текучести,  $\sigma_e$  – эквивалентное напряжение,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Исследователи J.W. Hutchinson, J.R. Rice, G.F. Rosengren предложили при решении представлять поля НДС с учетом сингулярности. Асимптотические формулы или, как их еще называют, HRR-асимптотики определяются соотношениями (8)–(10):

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{J}{aI_n r}\right)^{\frac{1}{(n+1)}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta); \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = a \left(\frac{J}{aI_n r}\right)^{\frac{n}{(n+1)}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta); \quad (9)$$

$$u_i(r, \theta) = \left(\frac{J}{aI_n}\right)^{\frac{n}{(n+1)}} r^{\frac{1}{(n+1)}} \tilde{u}_i(\theta), \quad (10)$$

где  $a$  – полудлина трещины,  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta), \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta), \tilde{u}_i(\theta)$  – безразмерные угловые функции,  $J$  и  $I_n$  – интегралы, связанные между собой линейной зависимостью (11), с коэффициентом пропорциональности, представленным через упругопластический коэффициент интенсивности напряжений  $K_p$ :

$$J = \alpha K_p^{n+1} I_n. \quad (11)$$

По определению,  $J$ -интеграл выражается равенством:

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - \sigma_{ij} n_i u_{i,x} ds), \quad (12)$$

где  $\Gamma$  – контур, окружающий вершину трещины,  $W$  – плотность энергии деформации,  $n_1$  и  $n_2$  – компоненты внешней нормали к контуру,  $dy$  и  $ds$  – приращение декартовой и криволинейной координат,  $u_{i,x} = \frac{\partial u_i}{\partial x}$  – краткая запись частной производной компонент перемещений.

Плотность энергии деформации определяется следующим образом:

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \alpha K_p^{n+1} \frac{n}{n+1} r^{(n+1)(\lambda-2)} \tilde{\sigma}_e^{n+1}. \quad (13)$$

С учетом всего вышесказанного авторы повторили вывод Хатчинсона – Розенгрена – Райса. Компоненты перемещений и напряжений в полярной системе координат являются функциями некоторых постоянных параметров  $K_p$  и  $\lambda$ , которые имеют смысл собственного значения. Инвариантность  $J$ -интеграла возможна только при условии, когда  $\lambda = (2n+1)/(n+1)$ .

Для удобства введем безразмерные величины:

$$\bar{J} = \frac{JE}{\sigma_0^2}; \bar{W} = \frac{WE}{\sigma_0^2}; \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}; \bar{u}_i = \frac{u_i E}{\sigma_0}; \bar{r} = \frac{r}{L}, \quad i, j = 1, 2, \quad (14)$$

где  $L$  – характерная длина (например, шкала длины градиента деформации).

Тогда поля параметров напряженно-деформированного состояния представляются в виде соотношений:

$$\bar{\sigma}_{ij}(r, \theta) = \bar{K}_p \bar{r}^{-(2-2\lambda)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta); \quad (15)$$

$$\bar{u}_i(r, \theta) = \bar{\alpha} \bar{K}_p^n \bar{r}^{-(2-2\lambda)} \tilde{u}_i(\theta), \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Полученные соотношения (15)–(16) подставляются в уравнение (12), записанное в полярной системе координат с использованием безразмерных величин (16), а также вычисляются частные производные компонент перемещений  $\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x}$ , используя формулу преобразования

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

В результате получается выражение (17) для вычисления  $J$ -интеграла.

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \int_{-\pi}^{+\pi} (\bar{W} r \cos\theta d\theta - \bar{\sigma}_{ij} n_i \bar{u}_{i,x} r d\theta) = \\ &= \frac{\bar{\alpha} n}{n+1} \bar{K}_p^{n+1} \bar{r}^{-(\lambda(n+1))} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\sigma}_e^{n+1} \cos\theta d\theta - \\ &- \bar{\alpha} \bar{K}_p^{n+1} \bar{r}^{-(3\lambda)} \int_{-\pi}^{\pi} [(2-2\lambda)(\tilde{\sigma}_{rr} \tilde{u}_r + \tilde{\sigma}_{r\theta} \tilde{u}_\theta) \cos\theta - \\ &- \sin\theta \left( \tilde{\sigma}_{rr} \left( \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \theta} - \tilde{u}_\theta \right) - \tilde{\sigma}_{r\theta} \left( \tilde{u}_r - \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) \right)] d\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Полученное уравнение (17) полностью повторяет решение, представленное классиками в своих работах. При выведении данной аналитической формулы авторы обратили внимание, что уравнение (17) может быть получено при условии, когда частные производные  $\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial r}$  и  $\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r}$  не равны нулю.

Однако структура формул (16) предполагает, что перемещения  $u_\theta$  и  $u_r$  зависят только от параметра  $\theta$ , в связи с этим рассмотрен вариант, когда  $\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial r} = 0$  и  $\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} = 0$ . При таком допущении авторы предлагают рассмотреть альтернативную форму записи  $J$ -интеграла в виде формулы (18):

$$\begin{aligned} \bar{J} = & \frac{\bar{\alpha}n}{n+1} \bar{K}_p^{n+1} \bar{r}^{-(\lambda(n+1))} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\sigma}_e^{n+1} \cos \theta d\theta - \\ & - \bar{\alpha} \bar{K}_p^{n+1} \bar{r}^{-(3\lambda)} \int_{-\pi}^{\pi} [(2-2\lambda)(\bar{\sigma}_{rr} \tilde{u}_r + \bar{\sigma}_{r\theta} \tilde{u}_\theta) \cos \theta - \\ & - \left( \bar{\sigma}_{rr} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \theta} + \bar{\sigma}_{r\theta} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) \sin \theta] d\theta. \end{aligned} \quad (18)$$

Основываясь на представлении (11), В.Н. Шлянников и А.В. Туманов провели подробное исследование контурного  $I_n$ -интеграла и упругопластического коэффициента интенсивности напряжений  $K_p$  для нагруженной прямоугольной пластины с центральной прямолинейной сквозной трещиной (ССР) и для компактного крестообразного образца со сквозной прямолинейной трещиной в центральной части (CS) и для компактного образца в виде прямоугольной пластины с односторонним боковым надрезом (СТS) при смешанных формах деформирования.

Первостепенно авторы продемонстрировали четкую зависимость  $I_n$ -интеграла от пластических свойств материала и вида напряженно-деформированного состояния при различных видах нагружения. На рис. 2 показана зависимость  $I_n$ -интеграла от параметра смешанности

$M_p$ . Из графика видно, что для всех видов нагружения при плоскодеформированном (ПД – 3D-planestrain) и плосконапряженном состоянии (ПНС – 2D-planestress) по мере увеличения пластичности материала уменьшается значение  $I_n$ -интеграла.

В указанной выше работе [30] авторы доказали, что во всех рассмотренных образцах, выполненных из одного и того же материала, при смешанных формах деформирования упругопластический коэффициент интенсивности напряжений  $K_p$  весьма зависим от вида напряженно-деформированного состояния и от геометрических характеристик (рис. 3).

Анализируя полученные результаты, было решено продолжить изучение вопроса аналитического представления контурного интеграла и рассмотреть более общую ситуацию, вычислить контурный  $J$ -интеграл при ином структурном представлении полей НДС и в зоне, максимально приближенной к вершине трещины, в месте преобладания градиентной теории пластичности.

## 2. Контурный $J$ -интеграл в градиентной теории пластичности

Суть градиентной теории пластичности заключается в том, что для определения прочностных характеристик материала рассматривается плотность дислокаций, которая может быть получена с помощью градиентов деформаций. Дефект изучается на микроуровне при максимальном приближении к краю области вершины трещины. Поля напряжений считаются зависимыми не только от самих деформаций, но и от их градиентов.

Многочисленные экспериментальные исследования ряда авторов (Н. Gao, Y. Huang, W.D. Nix, J.W. Hutchinson [31–32], N.A. Fleck, J.W. Hutchinson [37; 39], Н. Gao, Y. Huang [31], P. Gudmundson [33], D. González, J. Alkorta, J.M. Martínez-Esnaola, Gil J. Sevillano [34; 35]) убедили в необходимости учитывать масштабные эффекты при изучении поведения металлов конкретной геометрии. Классическая теория пластичности не учитывала

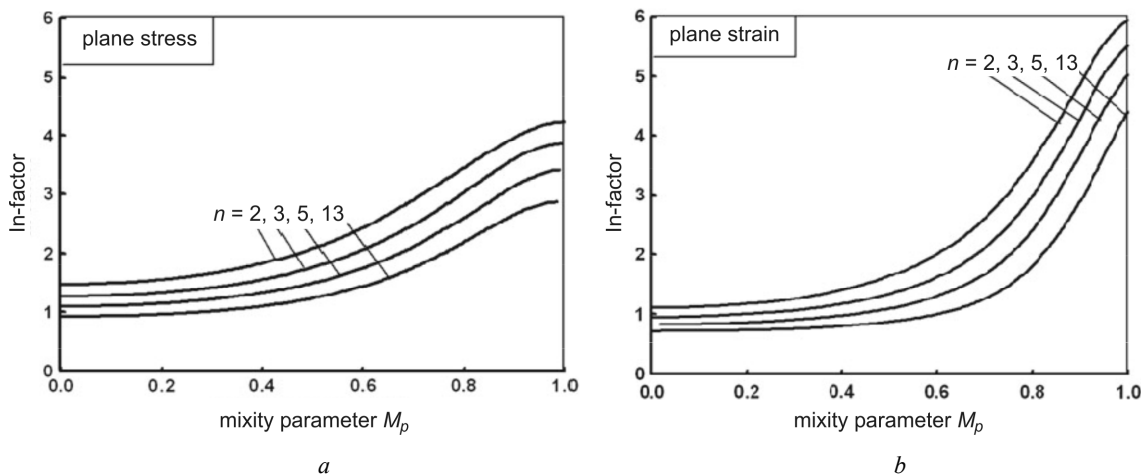


Рис. 2. Значения  $I_n$  для ПНС (a) и для ПД (b) состояний в зависимости от параметра смешанности  $M_p$

Fig. 2.  $I_n$  values for PNS (a) and for PD (b) states depending on the mixing parameter  $M_p$

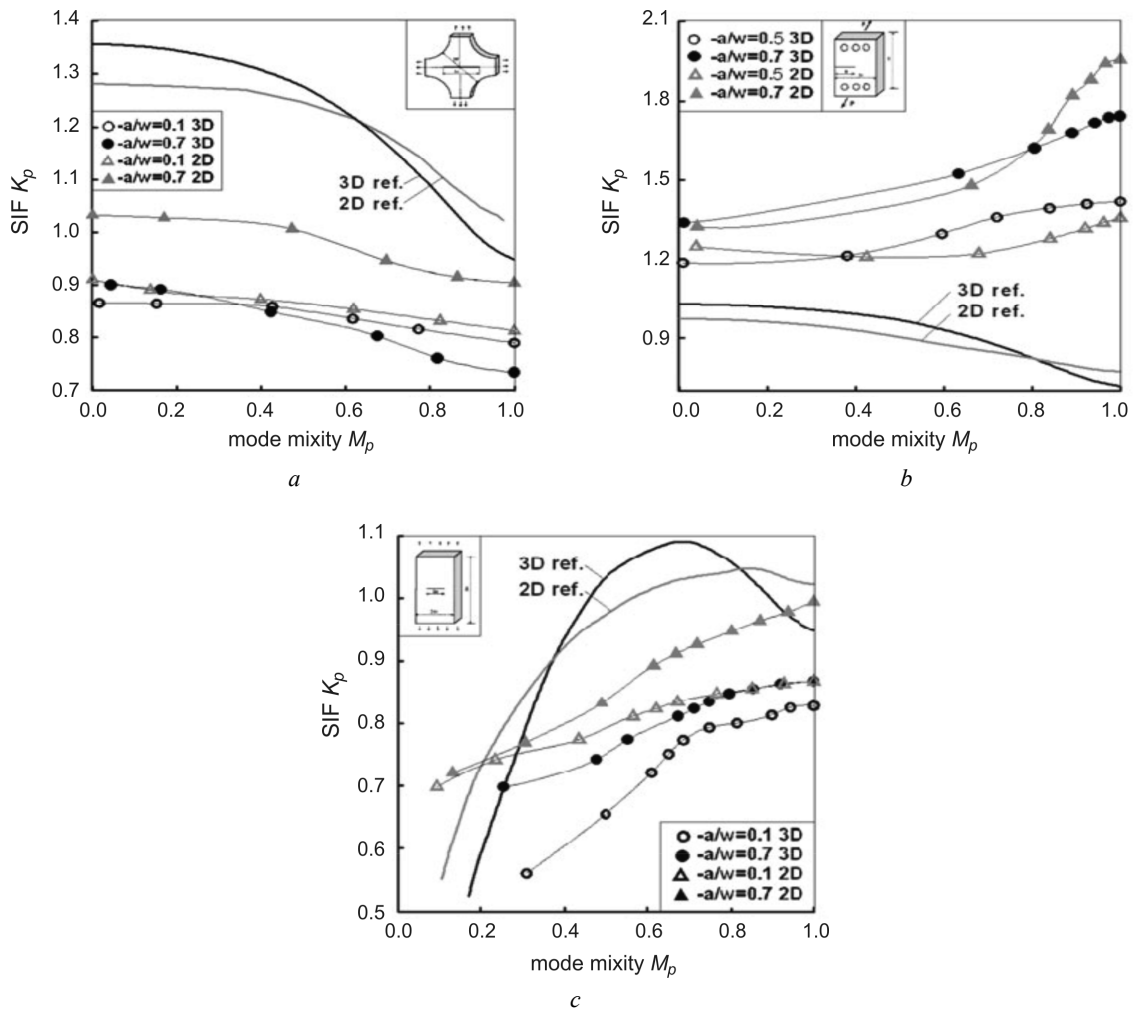


Рис. 3. Изменение коэффициента интенсивности упругопластических напряжений в (a) CS, (b) CS и (c) CCP при смешанном режиме нагружения

Fig. 3. Variation elastic-plastic stress intensity factor in (a) CS, (b) CTS and (c) CCP under mixed mode loading

геометрические параметры рассматриваемых моделей, поэтому В.Л. Бердичевским [36] и Е.С. Aifantis, М.Н. Aliabadi, D.P. Rooke предложено применить теорию пластичности на минимально возможных расстояниях от вершины трещины, что было поддержано в трудах [37–41]. Дальнейшие исследования авторов X. Pan, Y. Yuan, A. Panteghini, L. Bardella еще более убедили, что существующие проблемы деформирования и разрушения должны рассматриваться с учетом градиентов деформаций.

На данный момент известно о четырех модификациях градиентной теории пластичности: Н. Gao et al. [31; 32] сформулировали теорию механизма деформирования в градиентной пластичности (Mechanism-based strain gradient plasticity – MSG); учеными N.A. Fleck и J.W. Hutchinson [37; 38] предложена феноменологическая теория (Strain Gradient Plasticity – SGP); затем P. Gudmundson [33] доработал SGP-модель; М.Е. Gurtin [40] – является автором теории Distortion gradient plasticity (DGP). Подробный обзор данной теории представлен в работах [29; 30].

Многочисленные асимптотические поля вокруг вершины трещины имеют автомодельные формы реше-

ния. Все эти поля управляются независимым от пути интегрирования  $J$ -интегралом. J.Y. Chen et al. [42] и M. Shi et al. [43; 44] сформулировали задачу для асимптотических полей вершин трещин с градиентом деформации, для этого использовали потенциал смещения, аналогичный полю HRR в классической пластической области.

Главное отличие при вычислении контурного интеграла в рамках деформационной теории пластичности от решения ХРР заключается в том, что безразмерные компоненты полей НДС в формулах (15)–(16) зависят от двух полярных координат, и амплитудный параметр – упругопластический коэффициент интенсивности напряжений  $K_p$  – рассматривается как степенная функция координаты  $r$  формул (19)–(21).

$$\bar{\sigma}_{ij}(r, \theta) = \bar{K}_p^{\frac{1}{N}}(r) \tilde{\sigma}_{ij}(r; \theta), \quad (19)$$

$$\bar{u}_i(r, \theta) = \bar{\alpha} \bar{K}_p^{\frac{1}{N}}(r) \tilde{u}_i(r; \theta), i=1, 2, \quad (20)$$

$$\bar{K}_p(r) = C r^m, \quad (21)$$

где  $N = 1/n$  – показатель деформационного деформирования,  $C$  и  $m$  – произвольные константы.

Плотность энергии деформации (22) раскладывается на два слагаемых, характеризующих пластическую и упругую части.

$$\bar{W} = \bar{W}_E + \bar{W}_p = \left[ \frac{1+\nu}{3} \bar{\sigma}_e^2 + \frac{1-2\nu}{6} \bar{\sigma}_{kk}^2 \right] + \left[ \frac{\alpha}{N+1} \bar{\sigma}_e^{\frac{N+1}{N}} \right]. \quad (22)$$

В результате получено аналитическое выражение для определения конкурного интеграла (23):

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \int_{-\pi}^{+\pi} (\bar{W} r \cos \theta d\theta - \bar{\sigma}_{ij} n_i \bar{u}_{i,x} r d\theta) = \\ &= \bar{K}_1^2 \bar{r}^{(-1)} \int_{-\pi}^{+\pi} \left( \frac{1+\nu}{3} \bar{\sigma}_e^2 + \frac{1-2\nu}{6} \bar{\sigma}_{kk}^2 \right) \cos \theta d\theta + \\ &+ \frac{\bar{\alpha}}{N+1} C^{\frac{N+1}{N}} \bar{r}^{\left( \frac{m}{N+1} \right)} \left[ \frac{r}{N+1} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\sigma}_e^{\frac{N+1}{N}} \cos \theta d\theta - \right. \\ &\left. - \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{m}{N} \cos \theta (\bar{\sigma}_{rr} \bar{u}_r + \bar{\sigma}_{r\theta} \bar{u}_\theta) + r \cos \theta (\bar{\sigma}_{rr} \bar{u}_\theta + \bar{\sigma}_{r\theta} \bar{u}_r) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sin \theta}{r} \left( \bar{\sigma}_{rr} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} + \bar{\sigma}_{r\theta} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} \right) \right] d\theta \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Полученный обобщенный контурный  $J$ -интеграл используется для характеристики нелинейного амплитудного множителя. Методика его применения и результаты сравнения решений с помощью ХРР асимптотик и решений, полученных в рамках градиентной теории пластичности, подробно описаны в работе [30].

На примере нагруженной прямоугольной пластины с центральной прямолинейной сквозной трещиной и компактного образца в виде прямоугольной пластины с односторонним боковым надрезом при смешанных формах деформирования авторами проиллюстрировано, что, как и для ХРР полей, в области доминантности

градиентной теории пластичности (CMSGP) множители, определяющие контурный  $J$ -интеграл, чувствительны к свойствам материала. На рис. 4 видна монотонная зависимость пластического коэффициента интенсивности напряжений  $K_p$  от упругого коэффициента интенсивности напряжений  $K_{I,II}$  в зависимости от показателя деформационного упрочнения  $N$  для плосконапряженного и плоскодеформированного состояний.

В настоящее время достаточно широко описаны способы применения численных методов для вычисления  $J$ -интеграла. Способы описания полей напряжений и перемещений рассматриваются как в двухмерном, так и в трехмерном представлении для смешанных форм деформирования [24; 45–49; 50–51].

### 3. Контурный интеграл в пространстве при смешанных формах деформирования

В данной части статьи рассматривается более общая ситуация: трещина несквозная и эллиптическая, находится в условиях смешанных форм деформирования (рис. 5). Параметры НДС, входящие в контурный  $J$ -интеграл, вычисляются в сферической и цилиндрической системах координат в трехмерном представлении.

Плотность энергии деформации определяется по формуле (13), где  $i, j = 1, 2, 3$ .

Компоненты деформаций представляются следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}), \quad (24)$$

где  $u_{i,j}$  – частная производная компоненты перемещения  $u_i$  по координате  $x_j$ , система координат показана на рис. 5.

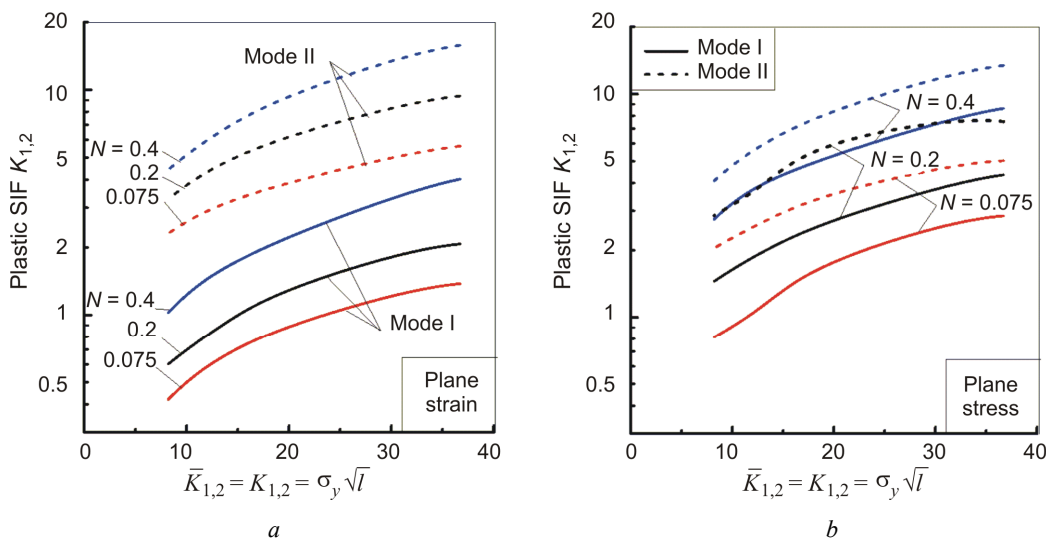


Рис. 4. Поведение пластического  $K_p$  в зависимости от упругого  $K_{I,II}$  для случая ПД и ПНС (a, b) для различных режимов разрушения и показателей деформационного упрочнения  $N$

Fig. 4. Behavior of plastic  $K_p$  as a function of elastic  $K_{I,II}$  for the case of PD and PSS (a, b) for various failure modes and strain hardening indices  $N$

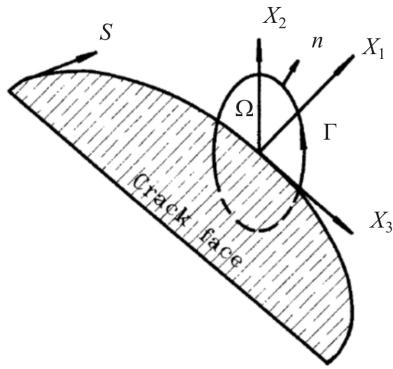


Рис. 5. Координатная система в вершине трещины и контур  $J$ -интеграла

Fig. 5. The coordinate system at the crack vertex and the contour of the  $J$ -integral

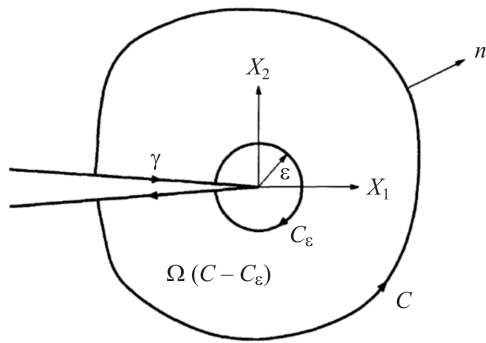


Рис. 6. Контур, перпендикулярный фронту трещины ( $x_3 = 0$ )

Fig. 6. Contour perpendicular to the crack front ( $x_3 = 0$ )

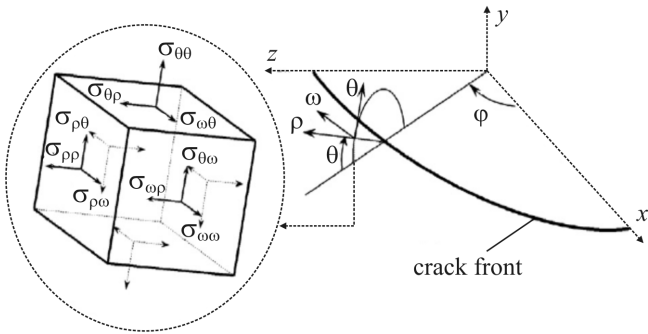


Рис. 7. Полярная система координат

Fig. 7. Polar coordinate system

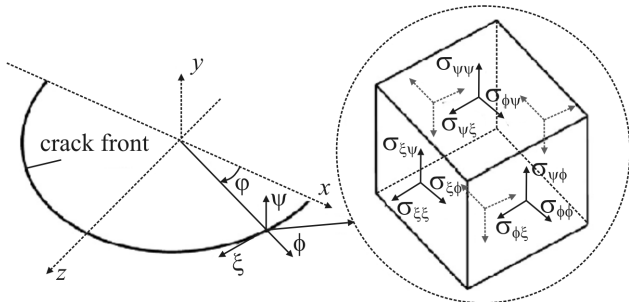


Рис. 8. Сферическая система координат

Fig. 8. Spherical coordinate system

При трехмерном представлении для полного описания контурного интеграла выбираются два контура. Контур  $\Gamma$  и контур  $\Omega(C - C_\epsilon)$  (рис. 5, 6), при этом контур определяется по формуле  $\Gamma = C + C_\epsilon + \gamma$ .

Контурный интеграл для смешанных форм деформирования в трехмерной постановке запишется в следующем виде:

$$J_k(s) = \int_{C+\gamma} (Wn_k - \sigma_{ij}u_{i,k}n_j) d\Gamma - \int_{\Omega(C)} \frac{\partial}{\partial x_3} (\sigma_{i3}u_{i,k}) d\Omega. \quad (25)$$

Компоненты полей НДС рассматриваются в полярной ( $\rho; \theta; \omega$ ) (рис. 7) и сферической ( $\psi; \xi; \phi$ ) системах координат (рис. 8). В частном случае, когда  $\phi = z$ , сферическая система координат может быть представлена как цилиндрическая. Параметр  $\phi$  характеризует угол отклонения рассматриваемой точки на контуре фронта трещины от декартовой оси  $Ox$ .

В уравнении (25) способ определения первого слагаемого рассмотрен в п. 1–2 настоящей статьи, поэтому здесь основное внимание уделено вопросам определения второго слагаемого и взаимосвязи между компонентами напряжений, представленных в различных системах координат.

Используются следующие условные обозначения для компонент перемещений:  $u_1 = u; u_2 = v; u_3 = w$  и для декартовых координат  $x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z$ .

Для определения частных производных от перемещений воспользуемся формулами перехода от декартовой системы координат.

Цилиндрическая система координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \cdot \cos \theta - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial z} \cdot \frac{\sin \theta}{r}. \end{aligned} \quad (26)$$

Сферическая система координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \cos \theta \cdot \sin \omega - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\rho \sin \omega} + \frac{\partial u}{\partial \omega} \cdot \frac{\cos \theta}{\rho^2} \cdot \text{ctg} \omega; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \cos \omega \times \\ &\times \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cdot \cos \theta \cdot \sin \omega - \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\rho \sin \omega} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\rho^2 \sin \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial \omega \partial \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\rho^2} \cdot \text{ctg} \omega - \frac{\partial u}{\partial \omega} \cdot \frac{2 \cos \theta}{\rho^3} \cdot \text{ctg} \omega \right] - \\ &\quad - \frac{\sin \omega}{\rho} \times \\ &\times \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \omega \partial \rho} \cdot \cos \theta \cdot \sin \omega + \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \cos \theta \cdot \sin \omega - \frac{\partial^2 u}{\partial \omega \partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\rho \sin \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta \cos \omega}{\rho \sin^2 \omega} + \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\cos \theta}{\rho^2} \cdot \text{ctg} \omega - \frac{\partial u}{\partial \omega} \cdot \frac{\cos \theta}{\rho^2 \sin^2 \omega} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$



Взаимосвязь между декартовыми сферическими компонентами напряжений определяется соотношениями (28):

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} &= \sigma_{xx} \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_{zz} \cdot \sin^2 \varphi + 2\sigma_{xz} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi; \\ \sigma_{\psi\psi} &= \sigma_{yy}; \\ \sigma_{\xi\xi} &= \sigma_{zz} \cdot \cos^2 \varphi + \sigma_{xx} \cdot \sin^2 \varphi - 2\sigma_{xz} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi; \\ \sigma_{\psi\phi} &= \sigma_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_{yz} \cdot \sin \varphi; \\ \sigma_{\psi\xi} &= \sigma_{zy} \cdot \cos \varphi - \sigma_{yx} \cdot \sin \varphi; \\ \sigma_{\phi\xi} &= (\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \sigma_{xz} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (28)$$

Для перехода от сферических или цилиндрических компонент напряжений к полярным записывается одинаковая система уравнений (29):

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\xi} &= \sigma_{xz} = \frac{\sigma_{\rho\omega} - \sigma_{\theta\omega}}{2 \sin \theta}; \\ \sigma_{\xi\xi} &= \sigma_{zz} = \sigma_{\omega\omega}; \\ \sigma_{\psi\xi} &= \sigma_{yz} = \frac{\sigma_{\rho\omega} + \sigma_{\theta\omega}}{2 \cos \theta}. \end{aligned} \quad (29)$$

Полученные соотношения (26)–(29) позволяют определить подынтегральную функцию второго слагаемого уравнения (25), а именно  $\frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{i3} u_{i,k}$ , индекс  $k$  принимается равным 1.

Для простоты вычисления вводятся условные обозначения:  $\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = A$ , тогда в сферической и цилиндрической системах координат получается:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} &= A = \sigma_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{23} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \\ &= \sigma_{xz} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yz} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial x}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sigma_{\rho\omega} - \sigma_{\theta\omega}}{2 \sin \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \right) + \\ &= \frac{\sigma_{\rho\omega} + \sigma_{\theta\omega}}{2 \cos \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \right) + \\ &+ \sigma_{\omega\omega} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \right). \end{aligned}$$

С учетом  $\frac{\partial A}{\partial x_3} = \frac{\partial A}{\partial x_3} \left( \sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)$ ; уравнения (30), частная производная определится уравнением (31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x_3} &= \frac{\partial A}{\partial x_3} \left( \sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) = \\ &= \frac{\partial (\sigma_{\rho\omega} - \sigma_{\theta\omega})}{2 \sin \theta \cdot \partial z} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\sigma_{\rho\omega} - \sigma_{\theta\omega}}{2 \sin \theta} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \cdot \cos \theta - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial z} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \right) + \\ &+ \frac{\partial (\sigma_{\rho\omega} + \sigma_{\theta\omega})}{2 \cos \theta \cdot \partial z} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \right) + \\ &+ \frac{\sigma_{\rho\omega} + \sigma_{\theta\omega}}{2 \cos \theta} \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} \cdot \cos \theta - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial z} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \right) + \\ &+ \frac{\partial \sigma_{\omega\omega}}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \right) + \\ &+ \sigma_{\omega\omega} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \cdot \cos \theta - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial z} \cdot \frac{\sin \theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

При подстановке формулы (31) в уравнение (25), с учетом формул (18) и (23) получается окончательное выражение для контурного  $J$ -интеграла в пространстве при смешанных формах деформирования.

В качестве примера, демонстрирующего свойства  $J$ -интеграла в трехмерном случае, приведены графики зависимостей из работы [70]. В данной работе авторами рассмотрено эксплуатационное повреждение насадного диска в радиусном сопряжении шпоночного паза в виде четвертьэллиптической трещины.

На рис. 9, а, показаны распределения  $I_n$  по двум направлениям: на торцевой поверхности ступицы (точка а) и на внутренней поверхности шпоночного паза по толщине ступицы (точка b) в зависимости от нормированного размера трещины, и на рис. 9, b, распределения пластического коэффициента интенсивности напряжений  $K_p$  вдоль фронта трещины для двух геометрий дефектов.

Анализ результатов показал, что значения  $I_n$  на свободной поверхности наиболее высокие. Параметр  $K_p$  показывает чувствительность к геометрическим размерам трещины.

#### 4. Контурный интеграл при смешанных формах деформирования в условиях ползучести

Эксплуатация машин и механизмов достаточно часто происходит с появлением дефектов в условиях усталости и ползучести. Подобные явления малоизучены. Основоположниками исследований в данной области являются Л.М. Качанов и Ю.Н. Работнов. В дальнейшем Q. Meng, J.W. Hutchinson, J.L. Bassani, S. Murakami сконцентрировались на вопросах изучения микромеханизмов разрушения, в том числе при термомеханическом нагружении. Самый сложный вопрос касается прогнозирования роста трещины. В подробных исследованиях, описанных в трудах А. Saxena, К.В. Yoon, J.L. Bassani, продемонстрировано, что в условиях ползучести наиболее подходящим параметром, описывающим поведение среды, является  $C$ -интеграл, предложенный в работе J.D. Landes аналогично  $J$ -интегралу в условиях развитой пластичности.

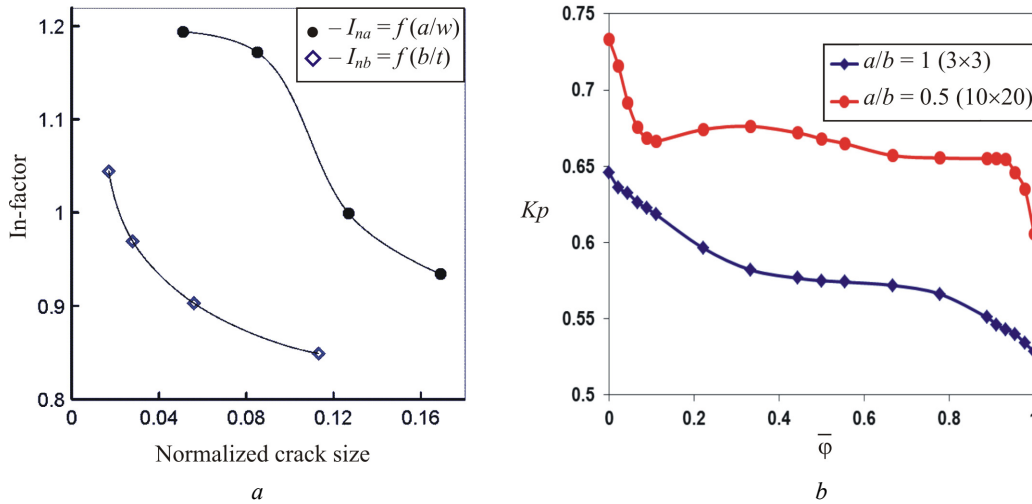


Рис. 9. Распределение  $I_n$  и пластического КИН в зависимости от (a) размера трещины и (b) вдоль фронта трещины

Fig. 9. Plastic SIF distributions as a function of (a) crack size and (b) crack front angle

Уравнения для определения C-интеграла

Параметр	Первая стадия ползучести	Вторая стадия ползучести
Маломасштабная ползучесть	$(Ct)_{SSC}$	$C_I$
	$(Ct)_{avg}$	
Переходная ползучесть	$t_{Tp}$	$t_T$
Развитая ползучесть	$C^*(t)$	$C^*$
	$C^*(t) (C_I)_{avg}$	

Подробный анализ существующих представлений C-интеграла приведен в работе Н.В. Бойченко [54] для маломасштабной, переходной и развитой ползучести в первой и во второй стадиях и обобщен автором в форме таблицы.

Огромная многолетняя систематическая работа по изучению вопросов поведения материалов в условиях усталости и ползучести проделана коллективом авторов во главе со В.Н. Шлянниковым Первостепенно авторы [54–62], основываясь на расчетно-экспериментальных исследованиях, показали эффективность использования пластического коэффициента интенсивности напряжений для интерпретации скорости роста трещины при смешанных формах разрушения для образцов различной геометрии с прямолинейными иповерхностными трещинами. В.Н. Шлянников и А.В. Туманов показали, как можно выразить асимптотические поля НДС через параметр коэффициента интенсивности напряжений при ползучести. В результате представлен алгоритм нахождения контурного  $I_n$ -интеграла в области вершины трещины с учетом локализованной и развитой нелинейности при ползучести, уточнена формула определения  $C^*$ -интеграла через параметры скоростей перемещений на линии нагружения для условий интенсивной ползучести, а также представлена новая формулировка характеристики сопротивления разрушению в виде коэффициента интенсивности напряжений для условий маломасштаб-

ной и развитой ползучести для прямолинейных и криволинейных по фронту сквозных и поверхностных трещин в экспериментальных образцах. Поскольку стадия установившейся ползучести проявляется как идеальная пластичность, данными авторами в дальнейших работах предложено вычислять  $C^*$ -интеграл из решения для  $J$ -интеграла с помощью замены компонент деформаций на их скорости. В работах [47–57] продолжено исследование поведение параметров ползучести и сопротивления разрушению в трехмерных задачах конечной толщины с использованием уравнений эволюции повреждений. Модель повреждения представлена с использованием формулировки, основанной на напряжениях. С помощью метода конечных элементов проанализированы изменения напряжения ползучести и управляющего параметра вершины трещины в терминах  $I_n$ -интеграла ползучести по времени и изменения повреждений ползучести, рассмотрены вариации контура повреждения ползучестью и управляющих параметров вершины трещины в терминах интеграла ползучести по времени, а также размера трещины. Обсуждается применение ранее введенного коэффициента интенсивности напряжений ползучести в качестве чувствительного к повреждению ползучести параметра взаимодействия ползучести и усталости. Далее исследования с использованием C-интеграла продолжено в работе [48], получено единое уравнение скорости роста трещины с использованием эквивалентного нелинейного коэффициента интенсивности напряжений, малоциклового усталости и свойств материала ползучести при повышенной температуре.

Контурные интегралы  $J$  и  $C^*$  содержат в явном виде параметры  $I_n$  и  $K_p$ , в связи с чем в научных исследованиях акцент делается на демонстрации результатов вычислений для этих параметров. Выше приведены демонстрационные примеры для контурных интегралов

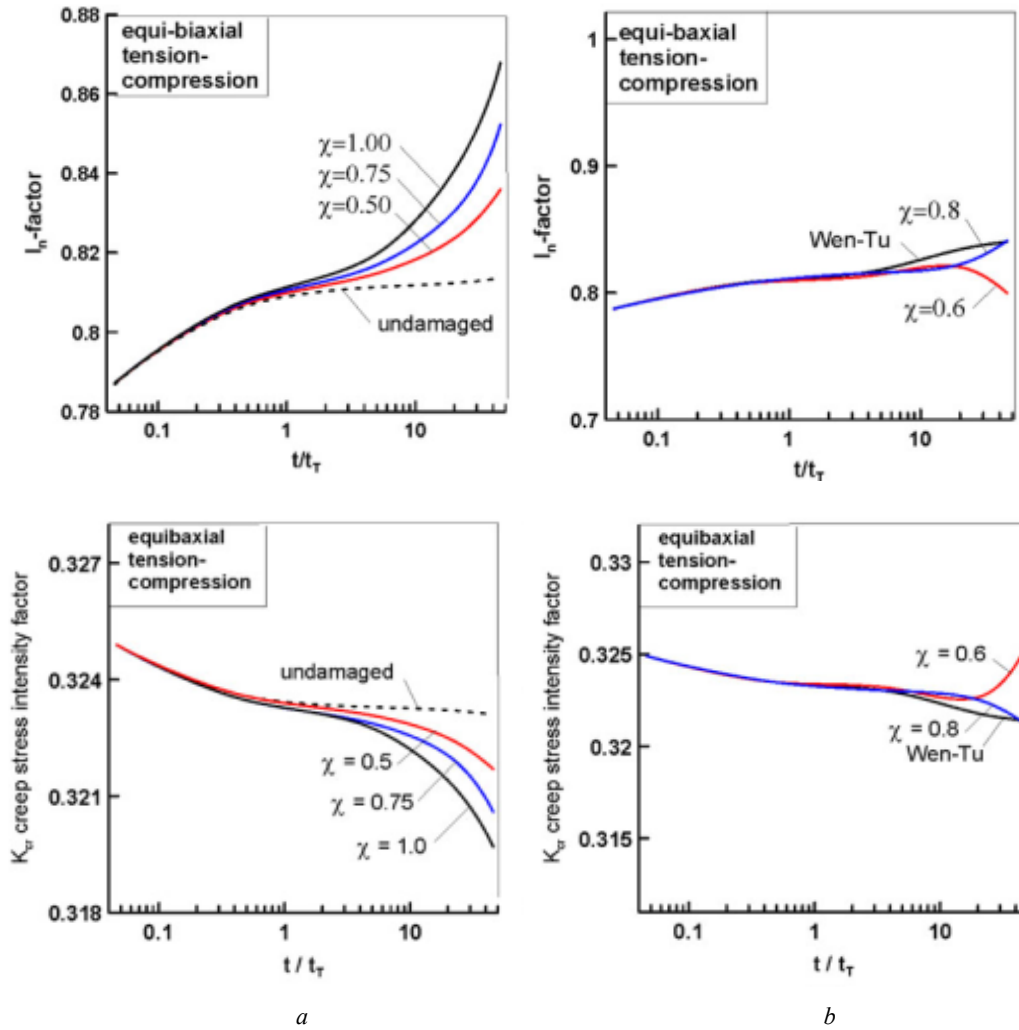


Рис. 10. Поведение контурного  $I_n$  интеграла и коэффициента интенсивности напряжений при ползучести для моделей на основе напряжений (a) и на основе деформаций (b)

Fig. 10. Behaviour of creep  $I_n$ -factor and Creep stress intensity factor for (a) stress-based and (b) ductility-based models

в плоских и трехмерных задачах в условиях пластичности и градиентной пластичности. В данной части продемонстрированы графики зависимостей величин  $I_n$  и  $K_p$  от различных параметров при смешанных формах деформирования (рис. 10) в условиях ползучести для различных степеней поврежденности, представленные в работе [49].

Из графиков видна прямая зависимость контурного интеграла от степени поврежденности, эти эффекты особенно заметно проявляются с увеличением времени.

### Библиографический список

1. Гундина М.А. Энергетические инварианты в теории упругопластических трещин. – СПб.: Наука и техника, 2017. – Т. 16, № 4. – С. 355–362. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-4-355-362.
2. Матвиенко Ю.Г., Чернятин А.С., Разумовский И.А. Численный анализ несингулярных составляющих трехмерного поля напряжений в вершине трещины смешанного типа // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2013. – № 4. – С. 40–48.

### Заключение

В представленной работе получены аналитические формулы для контурных интегралов в нелинейной механике разрушения для плоских и трехмерных задач при смешанных формах деформирования в условиях пластичности и ползучести. Описан обобщенный контурный  $J$ -интеграл в рамках градиентной теории пластичности. Представлен обзор задач с применением контурных интегралов.

3. Dobrovolsky D.S. Criteria of Crack Resistance of Nonlinear Fracture Mechanics of Structural Elements // Intellekt. Sist. Proizv. – 2017. – Vol. 15, no 2. – P. 23–26.
4. Contour integral approaches for the evaluation of stress intensity factors using displacement discontinuity method / X. Cui [et al.] // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2017. – Vol. 82. – P. 119–129.
5. Heng Zhang, Pizhong Qiao On the computation of energy release rates by a peridynamic virtual crack extension method //

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2020. – Vol. 363.

6. A complex-variable virtual crack extension finite element method for elastic-plastic fracture mechanics / A. Montoya [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. – 2018. – Vol. 202. – P. 242–258.

7. "McMeeking R.M. Finite deformation analysis of crack-tip opening in elastic-plastic materials and implications of fracture // J. Mech. Phys. Solids. – 1977. – Vol. 25, no. 5. – P. 357–387.

8. Черепанов Г.П. О распространении трещин в сплошной среде // ПММ. – 1967. – Т. 31, № 3. – С. 476–488.

9. Donato G.H.B., Moreira F.C. Validity limits of the one-parameter elastic-plastic fracture mechanics (J-integral) considering SE (B), C (T) and clamped SE (T) specimens // Procedia Structural Integrity. – 2018. – Vol. 13. – P. 1879–1887.

10. Райс Дж.Р. Не зависящий от пути интеграл и приближенный анализ концентрации деформаций у вырезов и трещин // Труды амер. общества инж. мех. – Сер. E. – 1968. – Т. 35, № 4. – С. 340–350.

11. Rice J.R. A path Independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // ASME. – 1967.

12. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // Journ. Mech. Phys. Solids. – 1968. – Vol. 16. – P. 1–12.

13. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // Journ. Mech. Phys. Solids. – 1968. – Vol. 16. – P. 337–347.

14. Hutchinson J.W. Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material // Journ. Mech. Phys. Solids. – 1968. – Vol. 16. – P. 13–31.

15. Nonlinear crack opening integral: Mode mixity for finite cracks / A.T. L'Armée [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. – 2017. – Vol. 186. – P. 283–299.

16. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Characterization of crack tip stress fields in test specimens using mode mixity parameters // International Journal of Fracture. – 2014. – Vol. 185, no. 1. – P. 49–76. DOI.org/10.1007/s10704-013-9898-0

17. Захаров А.П., Шляниников В.Н., Ишгыряков И.С. Пластический коэффициент интенсивности напряжений в задачах механики разрушения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 100–115.

18. The elastic and plastic constraint parameters for three-dimensional problems / V.N. Shlyannikov, N.V. Boychenko, A.V. Tumanov, A. Fernandez-Canteli // Engineering Fracture Mechanics. – 2014. – Vol. 127. – P. 83–96.

19. Звягин А., Лужин А., Панфилов Д., Шамина А. Численный метод разрывных смещений в пространственных задачах механики трещин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2021. – № 1. – С. 148–152.

20. Christer S., Eriksson K. The J-contour integral in peridynamics via displacements // International Journal of Fracture. – 2019. – Vol. 216. – P. 173–183.

21. Okada H. [et al.] J-integral computation for elastic-plastic materials with spatially varying mechanical properties // Engineering Fracture Mechanics. – 2019. – Vol. 207. – P. 181–202.

22. Razavia M.J., Majidib H.R., Bertoa F. Brittle fracture prediction of key-hole notched specimens by means of J-integral expression // Procedia Structural Integrity. – 2020. – Vol. 26. – P. 246–250.

23. Zou G., Chen H. Path-dependent J-integrals under mixed-mode loads of mode I and mode II // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2018. – Vol. 96. – P. 380–386.

24. Murakami S. Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. – Dordrecht: Springer, 2012. – 423 p.

25. Richard H.A., Schramm B., Schirmeisen N.H. Cracks on Mixed Mode loading – Theories, experiments, simulations // International Journal of Fatigue. – 2014. – No. 62. – P. 93–103.

26. Shih C.F. Small scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems // Fracture Analysis ASTM STP 560. – 1974. – P. 187–210.

27. Stepanova L.V. Stress-strain state near the crack tip under mixed-mode loading: Asymptotic approach and numerical solutions of nonlinear eigenvalue problems // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1785 (030030). – P. 1300. DOI: 10.1063/1.4967051.

28. Torabi A.R., Abedinasab S.M. Brittle fracture in key-hole notches under mixed mode loading: Experimental study and theoretical predictions // Engineering Fracture Mechanics. – 2015. – No. 134. – P. 35–53.

29. Хамидуллин Р.М. Обзор теорий градиентной пластичности // Труды Академэнерго. – 2020. – № 3. – С. 85–98. DOI: 10.34129/2070-4755-2020-60-3-85-98.

30. Shlyannikov V., Martínez-Pañeda E, Tumanov A. and Tartygasheva A., Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity // International Journal of Solids and Structures. – 2021. – Vol. 208–209. – P. 63–82. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015.

31. Mechanism-based strain gradient plasticity-I. theory / H. Gao, Y. Huang, W.D. Nix, J.W. Hutchinson // J MechPhys Solids. – 1999. – Vol. 47. – P. 128–152. DOI: 10.1016/S0022-5096(98)00103-3

32. Mechanism-based analysis / Y. Huang, H. Gao, W.D. Nix, J.W. Hutchinson // J MechPhys Solids. – 2000. – Vol. 48. DOI: 10.1016/S0022-5096(99)00022-8

33. Gudmundson P. A unified treatment of strain gradient plasticity // J MechPhys Solids. – 2004. – Vol. 52. – P. 1379–1406. DOI: 10.1016/j.jmps.2003.11.002

34. Sevillano Numerical analysis of the indentation size effect using a strain gradient crystal plasticity model / D. González, J. Alkorta, J.M. Martínez-Esnaola, J. Gil // Comput Mater Sci. – 2013. – Vol. 82. – P. 314–319. DOI: 10.1016/j.commatsci.2013.10.004

35. Martínez-Pañeda E., Niordson C.F. On fracture in finite strain gradient plasticity // International Journal of Plasticity. – 2016. – Vol. 80. – P. 154–167. DOI: 10.1016/j.ijplas.2015.09.009

36. Berdichevskii V.L., Sedov L.I. Dynamic theory of continuously distributed dislocations. Its relation to plasticity theory // J Appl Math Mech. – Vol. 31. – P. 989–1006. DOI: 10.1016/00218928(67)90203-1.

37. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity // AdvAppl Mech. – 1997. – Vol. 33. – P. 295–361. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70388-0

38. Fleck N.A., Hutchinson J.W. A reformulation of strain gradient plasticity // J MechPhys Solids. – 2001. – Vol. 49. – P. 2245–2271. DOI: 10.1016/S0022-5096(01)00049-7

39. Fleck N.A., Hutchinson J.W., Willis J.R. Guidelines for constructing strain gradient plasticity theories // J Appl Mech. – 2015. – Vol. 82 (071030). DOI: 10.1115/1.4030323.

40. Gurtin M.E. A gradient theory of small-deformation isotropic plasticity that accounts for the Burgers vector and for dissipation due to plastic spin // J MechPhys Solids. – 2004. – Vol. 52. – P. 2545–2568. DOI: 10.1016/j.jmps.2004.04.010

41. Voyiadjis G.Z., Song Y. Strain gradient continuum plasticity theories: theoretical, numerical and experimental investigations // International Journal of Plasticity. – 2019. – Vol. 121. – P. 21–75.

42. Crack tip fields in strain gradient plasticity: the asymptotic and numerical analyses / J.Y. Chen, Y. Wei, Y. Huang, J.W. Hutchinson, K.C. Hwang // Eng. Fract. Mech. – 1999. – Vol. 64. – P. 625–648.

43. Shi M., Huang Y., Gao H., Hwang K.C. Non-existence of separable crack tip field in mechanism based strain gradient plasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – Vol. 37. – P. 5995–6010.

44. The boundary-layer effect on the crack tip field in mechanism-based strain gradient plasticity / Y. Huang, H. Jiang, K.C. Hwang, M. Li // *Int. J. Fract.* – 2001. – Vol. 112. – P. 23–41.

45. Aliabadi M.H., Rooke D.P. *Numerical Fracture Mechanics.* // Kluwer Academic Publishers Dordrecht, The Netherlands and Computational Mechanics Publications, Southampton. – 1991. – 276 p.

46. Aliabadi M.H., Rigby R.H. Decomposition of the mixed-mode J-integral-revisited // *Int. Solids Structures.* – 1998. – Vol. 35, no 17. – P. 20173–2099.

47. De Lorenzi H.G. Energy release rate by the finite element method // *Eng. Fract. Mech.* – 1985. – Vol. 21. – P. 129–143. DOI: 10.1002/NME.1620240914

48. Dodds R.H. Jr. and Read D.T. Experimental and numerical studies of the J-integral for a surface flaw // *International Journal of Fracture.* – 1990. – Vol. 43. – 47–67.

49. Huber O., Nickel J., Kuhn G. On the decomposition of the J-integral for 3D crack problems // *International Journal of Fracture.* – 1993. – Vol. 64, no 4. – P. 339–348.

50. Nikishkov G.P., Atluri S.N. An equivalent domain integral method for computing crack-tip integral parameters in non-elastic, thermo-mechanical fracture // *Engineering Fracture Mechanics.* – 1987. – Vol. 26, no. 6. – P. 851–867.

51. Rigby R.H., Aliabadi M.H. Mixed-mode J-integral method for analysis of 3D fracture problems using BEM // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 1993. – Vol. 11. – P. 239–256. DOI: 10.1016/0955-7997(93)90026-N.

52. Туманов А.В., Шлянников В.Н. Расчетно-экспериментальный метод определения констант уравнений накопления и развития повреждений при ползучести // *Труды Академэнерго.* – Казань, 2018. – № 4. – С. 115–126.

53. Бойченко Н.В. Параметры поведения тел с трещиной в условиях ползучести // *Труды Академэнерго.* – Казань, 2017. – № 1. – С. 104–118.

54. Shlyannikov V.N., Zakharov A.P. Multiaxial crack growth rate under variable T-stress // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2014. – Vol. 123. – P. 86–99.

55. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Zakharov A.P. The mixed mode crack growth rate in cruciform specimens subject to biaxial loading // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* – 2014. – Vol. 73. – P. 68–81.

56. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Boychenko N.V. A creep stress intensity factor approach to creep-fatigue crack growth // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2015. – Vol. 142. – P. 201–219.

57. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems // *International Journal of Solid and Structures.* – 2018. – Vol. 150. – P. 166–183.

58. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Creep crack growth assessment in terms of continuum damage mechanics // *Matec Web of Conferences* 165. – 2018. – No. 19003. DOI: 10.1051/mateconf/201816519003

59. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Creep-fracture resistance parameters determination based on stress and ductility damage models // *Fatigue FractEng Mater Struct.* – 2018. – Vol. 41. – P. 2110–2129. DOI: 10.1111/ffe.12766

60. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Boychenko N.V. Creep-fatigue crack growth rate assessment using ductility damage model // *International Journal of Fatigue* 116. – 2018. – P. 448–461.

61. Shlyannikov V.N. Creep-fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zone models // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2019. – Vol. 214. – P. 449–463.

62. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. The effect of creep damage formulation on crack tip fields, creep stress intensity factor and crack growth assessments // *Frattura e Integrità Strutturale.* – 2017. – Vol. 41. – P. 291–298. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.41.39

## References

1. Gundina M.A. *Jenergeticheskie invarianty v teorii uprugoplastichestva* [Energy invariants in the theory of elastic-plastic cracks]. *Saint Petersburg: Science and technology*, 2017, vol. 16, no. 4, pp. 355–362. doi: 10.21122/2227-1031-2017-16-4-355-362.

2. Matvienko Yu.G., Chernyatin A.S., Razumovsky I.A. Chislennyj analiz nesingulyarnyh sostavlajushih trehmernogo polja naprjazhenij v vershine treshhiny smeshannogo tipa [Numerical analysis of non-singular components of a three-dimensional stress field in the vertex of a mixed-type crack]. *Problems of mechanical engineering and machine reliability*, 2013, no 4, pp. 40–48.

3. Dobrovolsky D.S. Criteria of Crack Resistance of Nonlinear Fracture Mechanics of Structural Elements. *Intellekt. Sist. Proizv.*, 2017, vol. 15, no 2, pp. 23–26.

4. Cui X. [et al.] Contour integral approaches for the evaluation of stress intensity factors using displacement discontinuity method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2017, vol. 82, pp. 119–129.

5. Heng Zhang, Pizhong Qiao. On the computation of energy release rates by a peridynamic virtual crack extension method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, vol. 363.

6. Montoya A. [et al.] A complex-variable virtual crack extension finite element method for elastic-plastic fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, vol. 202, pp. 242–258.

7. McMeeking R.M. Finite deformation analysis of crack-tip opening in elastic-plastic materials and implications of fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 1977, vol. 25, no. 5, pp. 357–387.

8. Cherepanov G.P. O rasprostraneniitreshhin v sploshnojsrede [On the propagation of cracks in a continuous medium]. *PMM*, 1967, vol. 31, no. 3, pp. 476–488.

9. Donato G.H.B., Moreira F.C. Validity limits of the one-parameter elastic-plastic fracture mechanics (J-integral) considering SE (B), C (T) and clamped SE (T) specimens. *Procedia Structural Integrity*, 2018, vol. 13, pp. 1879–1887.

10. Rice J.R. Ne zavisjashhijotputi integral ipriblizhennyjanalizkoncentraciideformacij u vyrezovitreshhin [Path-independent integral and approximate analysis of the concentration of deformations at cutouts and cracks]. *Transactionsofamer.eng.mekh. society*, Ser. E, 1968, vol. 35, no. 4, pp. 340–350.

11. Rice J.R. A path Independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *ASME.* – 1967.

12. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journ. Mech. Phys. Solids*, 1968, vol. 16, pp. 1–12.

13. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip. *Journ. Mech. Phys. Solids*, 1968, vol. 16, pp. 337–347.

14. Hutchinson J.W. Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journ. Mech. Phys. Solids*, 1968, vol. 16, pp. 13–31.

15. L'Armée A.T. [et al.] Nonlinear crack opening integral: Mode mixity for finite cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, vol. 186, pp. 283–299.
16. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Characterization of crack tip stress fields in test specimens using mode mixity parameters. *International Journal of Fracture*, 2014, V. 185, no. 1, pp. 49–76. doi.org/10.1007/s10704-013-9898-0.
17. Zakharov A.P., Shlyannikov V.N., Plastic coefficient of stress intensity in problems of fracture mechanics. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 100–115.
18. Shlyannikov V.N. The elastic and plastic constraint parameters for three-dimensional problems / Shlyannikov V.N., Boychenko N.V., Tumanov A.V., Fernandez-Canteli A. *Engineering Fracture Mechanics*, 2014, V. 127, pp. 83–96.
19. Zvyagin A., Luzhin A., Panfilov D., Shamina A. Chislennyj metod razryvnyh smeshhenij v prostranstvennyh zadachah mehaniki treshhin [Numerical method of discontinuous displacements in spatial problems of crack mechanics]. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics*, 2021, no. 1, pp. 148–152.
20. Christer S. Eriksson K. The J-contour integral in peridynamics via displacements. *International Journal of Fracture*, 2019, vol. 216, pp. 173–183.
21. Okada H. [et al.] J-integral computation for elastic-plastic materials with spatially varying mechanical properties. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, vol. 207, pp. 181–202.
22. Razavia M.J., Majidib H.R., Berto F. Brittle fracture prediction of key-hole notched specimens by means of J-integral expression. *Procedia Structural Integrity*, 2020, vol. 26, pp. 246–250.
23. Zou G., Chen H. Path-dependent J-integrals under mixed-mode loads of mode I and mode II. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2018, vol. 96, pp. 380–386.
24. Murakami S. Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. *Dordrecht: Springer*, 2012, 423 p.
25. Richard H.A., Schramm B., Schreimeisen N.H. Cracks on Mixed Mode loading – Theories, experiments, simulations. *International Journal of Fatigue*, 2014, no. 62, pp. 93–103.
26. Shih C.F. Small scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems. *Fracture Analysis ASTM STP 560*, 1974, pp. 187–210.
27. Stepanova L.V. Stress-strain state near the crack tip under mixed-mode loading: Asymptotic approach and numerical solutions of nonlinear eigenvalue problems. *AIP Conference Proceedings*, 2016, V. 1785 (030030), pp. 1300. doi: 10.1063/1.4967051.
28. Torabi A.R., Abedinasab S.M. Brittle fracture in key-hole notches under mixed mode loading: Experimental study and theoretical predictions. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, no. 134, pp. 35–53.
29. Khamidullin R.M. Obzorteorijgradientnojplastichnosti [Review of theories of gradient plasticity]. *Transactions of Academenergo*, 2020, no. 3, pp. 85–98. doi: 10.34129/2070-4755-2020-60-3-85-98.
30. Shlyannikov V., Martínez-Pañeda E, Tumanov A. and Tartygasheva A., Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2021, V. 208–209, pp. 63–82. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015.
31. Gao H., Huang Y., Nix W.D., Hutchinson J.W. Mechanism-based strain gradient plasticity-I. theory. *J. Mech. Phys. Solids*, 1999, vol. 47, pp. 128–152. doi: 10.1016/S0022-5096(98)00103-3
32. Huang Y., Gao H., Nix W.D., Hutchinson J.W. Mechanism-based analysis. *J MechPhys Solids*, 2000, vol. 48. doi: 10.1016/S0022-5096(99)00022-8
33. Gudmundson P. A unified treatment of strain gradient plasticity. *J MechPhys Solids*, 2004, vol. 52, pp. 1379–1406. doi: 10.1016/j.jmps.2003.11.002
34. González D., Alkorta J., Martínez-Esnaola J.M., Gil J. Seviliano Numerical analysis of the indentation size effect using a strain gradient crystal plasticity model. *Comput Mater Sci*, 2013, vol. 82, pp. 314–319. doi: 10.1016/j.commatsci.2013.10.004
35. Martínez-Pañeda E., Niordson C.F., Bardella, L. A finite element framework for distortion gradient plasticity with applications to bending of thin foils. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, vol. 96, pp. 288–299. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2016.06.001.
36. Berdichevskii V.L., Sedov L.I. Dynamic theory of continuously distributed dislocations. Its relation to plasticity theory. *J Appl Math Mech*, vol. 31, pp. 989–1006. doi: 10.1016/00218928(67)90203-1.
37. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity. *Adv Appl Mech*, 1997. V. 33, pp. 295–361. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70388-0
38. Fleck N.A., Hutchinson J.W. A reformulation of strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 2001, vol. 49, pp. 2245–2271. doi: 10.1016/S0022-5096(01)00049-7
39. Fleck N.A., Hutchinson J.W., Willis J.R. Guidelines for constructing strain gradient plasticity theories. *J Appl Mech*, 2015, vol. 82 (071030). doi: 10.1115/1.4030323.
40. Gurtin M.E. A gradient theory of small-deformation isotropic plasticity that accounts for the Burgers vector and for dissipation due to plastic spin. *J MechPhys Solids*. 2004, vol. 52, pp. 2545–2568. doi: 10.1016/j.jmps.2004.04.010
41. Voyiadjis G.Z., Song Y. Strain gradient continuum plasticity theories: theoretical, numerical and experimental investigations // *International Journal of Plasticity*, 2019, vol. 121, pp. 21–75.
42. Chen J.Y., Wei Y., Huang Y., Hutchinson J.W., Hwang K.C., 1999. Crack tip fields in strain gradient plasticity: the asymptotic and numerical analyses. *Eng. Fract. Mech.* 1999, vol. 64, pp. 625–648.
43. Shi, M., Huang, Y., Gao, H., Hwang, K.C. Non-existence of separable crack tip field in mechanism based strain gradient plasticity. *Int. J. Solids Struct*, 2000, vol. 37, pp. 5995–6010.
44. Shi M., Huang Y., Jiang H., Hwang K.C., Li M. The boundary-layer effect on the crack tip field in mechanism-based strain gradient plasticity. *Int. J. Fract*, 2001, vol. 112, pp. 23–41.
45. Aliabadi M.H., Rooke D.P. Numerical Fracture Mechanics. *Kluwer Academic Publishers Dordrecht, The Netherlands and Computational Mechanics Publications, Southampton*, 1991, 276 p.
46. Aliabadi M.H., Rigby R.H. Decomposition of the mixed-mode J-integral-revisited. *Int. Solids Structures*. 1998, vol. 35, no 17, pp. 20173–2099.
47. De Lorenzi H.G. Energy release rate by the finite element method. *Eng. Fract. Mech.* 1985, vol. 21, pp. 129–143. doi: 10.1002/nme.1620240914
48. Dodds R.H. Jr. and Read D.T. Experimental and numerical studies of the J-integral for a surface flaw. *International Journal of Fracture*, 1990, vol. 43, pp. 47–67.
49. Huber O., Nickel J., Kuhn, G. On the decomposition of the J-integral for 3D crack problems. *International Journal of Fracture*. 1993, vol. 64, No 4, pp. 339–348.
50. Nikishkov G.P., Atluri S.N. An equivalent domain integral method for computing crack-tip integral parameters in non-elastic, thermo-mechanical fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, vol. 26, no. 6, pp. 851–867.
51. Rigby R.H., Aliabadi M.H. Mixed-mode J-integral method for analysis of 3D fracture problems using BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1993, vol. 11, pp. 239–256. doi: 10.1016/0955-7997(93)90026-H.

52. Tumanov A.V., Shlyannikov V.N., Shljannikov V.N. Raschetno-jeksperimental'nyj metod opredelenija konstant uravnenij nakoplenija i razvitija povrezhdenij pri polzuchesti [Calculation-experimental method for determining the constants of the equations of accumulation and development of damage during creep]. *Transactions of Academenergo, Kazan*, 2018, no. 8, pp. 115–126.
53. Boychenko N.V. Parametry povedenijatel s treshhinoj v uslovijah polzuchesti [Parameters of cracked bodies behavior under creep conditions. *Transactions of Academenergo*]. Kazan, 2017, no. 1, pp. 104–118.
54. Shlyannikov V.N. Multiaxial crack growth rate under variable T-stress / Shlyannikov V.N., Zakharov A.P. *Engineering Fracture Mechanics*, 2014, vol. 123, pp. 86–99.
55. Shlyannikov V.N. The mixed mode crack growth rate in cruciform specimens subject to biaxial loading / Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Zakharov A.P. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2014, V. 73, pp. 68–81.
56. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Boychenko N.V. A creep stress intensity factor approach to creep-fatigue crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, vol. 142, pp. 201–219.
57. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems. *International Journal of Solid and Structures*, 2018, vol. 150, pp. 166–183.
58. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Creep crack growth assessment in terms of continuum damage mechanics. *Matec Web of Conferences 165*, 2018, no. 19003. doi: 10.1051/mateconf/201816519003
59. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Creep-fracture resistance parameters determination based on stress and ductility damage models. *Fatigue FractEng Mater Struct*, 2018, vol. 41, pp. 2110–2129. doi: 10.1111/ffe.12766
60. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Boychenko N.V. Creep-fatigue crack growth rate assessment using ductility damage model. *International Journal of Fatigue 116*, 2018, pp. 448–461.
61. Shlyannikov V.N. Creep-fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zone models. *Engineering Fracture Mechanics 214*, 2019, pp. 449–463.
62. Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. The effect of creep damage formulation on crack tip fields, creep stress intensity factor and crack growth assessments. *Frattura ed Integrità Strutturale 41*, 2017, pp. 291–298. doi: 10.3221/IGF-ESIS.41.39

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-79-10160).

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Financing.** The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (Project No. 19-79-10160).

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.