



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.2.05

УДК 539.3: 534.83

## РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОБ ИЗГИБЕ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЁННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПАНЕЛИ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ

С.А. Букатый, Н.В. Осадчий

ПАО «ОДК – Сатурн», Рыбинск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 11 ноября 2021 г.

Одобрена: 23 июня 2022 г.

Принята к публикации:

08 июля 2022 г.

#### Ключевые слова:

упругость, многослойная панель,  
круговая ось, шарнирное  
закрепление, степень полинома,  
конечно-элементная модель.

### АННОТАЦИЯ

Предложен метод решения плоской задачи теории упругости об изгибе шарнирно закреплённой многослойной панели с круговой осью, основанный на полиномиальной аппроксимации перемещений по толщине панели. В отличие от известных решений этой задачи, в данном случае коэффициенты аппроксимирующих полиномов находятся из условий равновесия и равенства перемещений и поперечных напряжений при переходе через границу раздела слоёв и выполнения дифференциальных уравнений равновесия в нескольких точках по толщине слоёв. Окончательно задача сводится к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов аппроксимирующих полиномов. Достоверность данного метода продемонстрирована путем сравнения результатов расчётов, полученных на его основе, и результатов, полученных с помощью эталонной конечно-элементной модели. Задача решена в два этапа. На первом этапе для однослойной панели выполнено исследование зависимости степени полинома от отношения среднего радиуса панели к её толщине и отношения модуля поперечного сдвига к модулю продольной упругости, характеризующих нелинейность изменения перемещений. На втором этапе на примере трёхслойной панели рассмотрено применение предлагаемого метода для расчёта многослойных панелей. При этом результаты, полученные на первом этапе, использованы при выборе начальной степени полиномов, аппроксимирующих перемещения по толщине слоёв. Предложенный в работе метод позволяет получить аналитическое решение без введения упрощающих гипотез о характере перемещения слоёв и их упругих характеристик в широком диапазоне изменения геометрических размеров и упругих характеристик слоёв панелей. Данный метод может найти применение как для верификации численных моделей, так и при выполнении расчётов на прочность многослойных панелей.

© ПНИПУ

© Букатый Станислав Алексеевич – д.т.н., проф., e-mail: [bukaty\\_sa@mail.ru](mailto:bukaty_sa@mail.ru)  
Осадчий Николай Васильевич – к.т.н., e-mail: [nikosadchii@yandex.ru](mailto:nikosadchii@yandex.ru)

Stanislav A. Bukaty – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: [bukaty\\_sa@mail.ru](mailto:bukaty_sa@mail.ru)  
Nikolay V. Osadchy – CSc in Technical Sciences, e-mail: [nikosadchii@yandex.ru](mailto:nikosadchii@yandex.ru)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## SOLUTION OF THE PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY ON BENDING OF AN ARTICULATED FIXED MULTILAYER PANEL WITH A CIRCULAR AXIS

S.A. Bukaty, N.V. Osadchy

PJSC UEC-Saturn, Rybinsk, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 11 November 2021  
Approved: 23 June 2022  
Accepted for publication: 08 July 2022

#### Keywords:

elasticity, multilayered panel, circular axis, articulated fastening, degree of polynomial, finite-element model, plates and shells, exact solution, static analysis, multilayered composite and sandwich structures.

### ABSTRACT

This article suggests a method for the solution of the plane problem of the theory of elasticity on the bending of an articulated fixed multilayered panel with a circular axis based on the polynomial approximation of displacements through the thickness of the panel. In contrast to the known solutions of this problem, in this case the coefficients of the approximating polynomials are calculated from the equilibrium conditions and equality of displacements and transverse stresses at the transition across the layer interface and solution of differential equations of equilibrium at several points through the thickness of the layers. Finally, the problem is reduced to the solution of a system of linear equations with respect to the coefficients of approximating polynomials. The validity of the method is confirmed by comparing the results of calculations obtained on its basis and the results obtained with the help of the reference finite element model. The problem is solved in two stages. At the first stage, for a single-layer panel, we investigate the dependence of the polynomial degree on the ratio of the average panel radius to its thickness and the ratio of the transverse shear modulus to the modulus of longitudinal elasticity, which characterize the nonlinearity of displacements. At the second stage, on the example of a three-layered panel, we consider the application of the proposed method for the calculation of multilayered panels. In such case, the results obtained at the first stage are used in selecting the initial degree of polynomials approximating displacements through the thickness of layers. The method proposed in this article makes it possible to obtain an analytical solution without introducing simplifying hypotheses about the nature of displacement of layers and their elastic characteristics in a wide range of variation in geometric dimensions and elastic characteristics of panel layers. This method can be used both for verification of numerical models and for carrying out strength calculations of multilayer panels.

© PNRPU

### Введение

Одной из задач теории упругости, решение которой имеет прикладное значение, является задача об изгибе шарнирно закрепленной многослойной панели с круговой осью, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой. Использование в данном случае конечно-элементного метода при изменении геометрии слоёв и их упругих констант требует перестроения модели, что эквивалентно каждый раз решению новой задачи. Использование упрощённых моделей предусматривает введение гипотез относительно перемещений и упругих характеристик материалов слоёв, что сужает область использования таких моделей. Поэтому определённый интерес представляет получение аналитического решения, которое описывает изгиб шарнирно закрепленной многослойной панели с круговой осью без введения упрощающих гипотез.

Решению статической задачи об изгибе многослойных пластин и оболочек при нагружении распределённой нагрузкой посвящено большое количество работ [1–27]. В исследовании [1] решена задача о цилиндрическом изгибе многослойной пластины при равномерно распределённой нагрузке. В статье [2] результаты работы [1] использованы для решения задачи об изгибе пластины в 3D-постановке. В работе [3] рассматривается цилиндрический изгиб пластины под действием локальной нагрузки. Автором работы [4] предложено точное решение 3D-задачи об изгибе пластины, где в каче-

стве неизвестных функций использованы перемещения и поперечные напряжения. Использование смешанной формы закона Гука позволило краевые условия задачи сформировать в напряжениях и понизить порядок системы разрешающих уравнений до первого. Система разрешающих уравнений решена методом Навье. В работах [5; 6] рассмотрены пластины, упругие характеристики которых изменяются по толщине. В исследованиях [7; 8] авторы предложили решение для конструкций с заполнителем. Работы [9–13] посвящены решению плоской задачи теории упругости для прямолинейной многослойной балки. Аппроксимирующие функции в этих работах построены на основе полиномов Лежандра. В работе [14] предложен метод решения уравнений равновесия для пластин с поперечной анизотропией и модулем упругости, линейно изменяющимся по толщине пластины. В статьях [15–16] предложено замкнутое решение трёхмерной задачи о деформации шарнирно закреплённой прямоугольной пластины при действии механических и термических нагрузок для свободных и вынужденных колебаний шарнирно закреплённой пластины с поперечной анизотропией. В работе [17] предложено точное решение для прямоугольных в плане анизотропных композитных ламинатов с шарнирно закреплёнными кромками с упругими свойствами, переменными по толщине слоёв

Значительно меньше работ посвящено приложениям теории упругости к расчёту оболочек, что связано со

сложностью формирования и решения системы разрешающих уравнений. В работе [18] предложена процедура вывода уравнений деформирования многослойной оболочки с использованием в качестве аппроксимирующих функций полиномов Лежандра. В работе [19] приведено решение трёхмерной задачи теории упругости об изгибе тонкой многослойной оболочки под действием синусоидальной нагрузки. В работе [20] рассматривается трёхмерная модель для исследования свободных колебаний цилиндрической оболочки. Авторы статьи [21] для статического, динамического расчёта композитных цилиндрических панелей использовали систему дифференциальных уравнений, записанную в цилиндрической системе координат. В исследовании [22] разрешающие уравнения записаны в ортогональных криволинейных координатах для сферической оболочки с использованием теоремы Гамильтона – Кэлли (Cayley – Hamilton theorem). В качестве неизвестных использованы три перемещения и три компоненты поперечных напряжений. Наиболее близким к предлагаемому методу является подход, изложенный в работах [23–27]. Так, в работе [23] предложен метод приближенного решения задач изгиба многослойных пластин, цилиндрических и сферических оболочек при шарнирном закреплении кромок, согласно которому рассматриваемая область делится на слои. В пределах каждого слоя записывается система дифференциальных уравнений равновесия при постоянном радиусе кривизны. Слои связываются друг с другом условиями непрерывности перемещений и поперечных напряжений (условиями сопряжения) при переходе через границу раздела слоёв. Однако для получения необходимой точности в данном случае необходимо разбивать область на большое количество слоёв (порядка 100). Недостатком данного метода является его большая вычислительная нагрузка, поскольку для каждого слоя приходится записывать дифференциальные уравнения. Кроме того, все перечисленные методы связаны так или иначе с трудоёмкой, особенно для криволинейных оболочек, процедурой решения системы дифференциальных уравнений.

Анализ вышеперечисленных работ показал, что решение задачи изгиба панели с круговой осью может быть выполнено либо приближенно или в численном виде, потому что:

- во-первых, система уравнений равновесия Коши для этой задачи является нелинейной;
- во-вторых, традиционный метод решения через обобщённую функцию напряжений Airy’s [28] при анализе многослойных панелей, слои которых имеют значительную поперечную анизотропию упругих характеристик при переходе через границу раздела слоёв, не пригоден в связи со сложностью формирования граничных условий смешанного типа и условий сопряжения слоёв.

В связи с этим для решения задачи изгиба, как правило, используются приближённые методы. Анализ литературы показал, что в случае шарнирного закрепления кромок решение задачи значительно упрощается,

а именно двухмерную задачу можно свести к одномерной, которая описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений относительно одной переменной, измеряемой по толщине панели.

В работе [29] предложен метод решения задачи об изгибе многослойной панели с прямолинейной осью для условий шарнирного закрепления её кромок. В данной работе этот метод применён к панели с круговой осью. При этом выражения, описывающие изменение окружных  $u^k(\theta, r)$ , радиальных  $v^k(\theta, r)$  перемещений и приложенной к ней нагрузки  $q(\theta)$ , записываются в виде функций:

$$u^k(\alpha, r) = U^k(r) \sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right), \\ v^k(\alpha, r) = V^k(r) \cos\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right), q(\theta) = Q \sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right),$$

где функции  $U^k(r)$  и  $V^k(r)$  представляют собой полиномы степени  $n$ ;  $k$  – номер слоя:

$$U^k(r) = \sum_{i=0}^n A_i^k r^i, V^k(r) = \sum_{i=0}^n B_i^k r^i. \quad (1)$$

Коэффициенты полиномов  $A_i^k, B_i^k$  (1) определяются из условий:

- равновесия на наружном и внутреннем контуре модели;
- равновесия на боковых гранях модели;
- сопряжения слоёв;
- удовлетворения системе дифференциальных уравнений равновесия Коши в нескольких точках по толщине каждого слоя.

При этом решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_i^k$  и  $B_i^k$  полиномов (1). От прямых вариационных методов, которые также сводятся к решению системы линейных уравнений, предлагаемый метод выгодно отличается тем, что:

- во-первых, не требует выполнения сложных операций интегрирования при вычислении соответствующих функционалов;
- во-вторых, система уравнений равновесия Коши в предлагаемом методе удовлетворяется точно, хотя бы в нескольких точках каждого слоя, в то время как в прямых вариационных методах эта система выполняется лишь приближённо.

В работе [29] показано, что минимальная степень полиномов в предлагаемом методе должна быть не менее двух. При этом обеспечивается выполнение условий на контуре модели, условий сопряжения слоёв и системы дифференциальных уравнений в одной точке в середине толщины слоя. Дальнейшее увеличение степени полиномов возможно посредством увеличения количества точек, для которых выполняется система уравне-

ний равновесия Коши. В случае использования полиномов первой степени задача имеет тривиальное решение: так, все неизвестные коэффициенты однозначно определяются граничными условиями и условиями сопряжения слоёв. При этом система дифференциальных уравнений равновесия Коши остаётся невыполненной.

Поэтому в данной работе ставится задача решения плоской задачи изгиба многослойной панели с круговой осью при шарнирном закреплении его концевых сечений с использованием подхода [29].

### 1. Однослойная панель

Вначале рассмотрим в полярной системе координат  $\theta - r$  однослойную панель с круговой осью. Радиус наружной поверхности панели  $r = R_1$ , внутренней  $r = R_2$ . Толщина панели в радиальном направлении равна  $H$ , а его угловая длина  $\alpha = \pi / 3$ . Концевые сечения имеют шарнирное закрепление. К наружной поверхности с радиусом  $r = R_1$  приложена радиальная нагрузка  $q(\theta) = Q \sin(\pi\theta / \alpha)$ . Необходимо отметить, что в случае нагрузки произвольного типа последняя раскладывается в ряд Фурье. Описанная методика применяется для каждой гармоники полученного ряда.

Материал панели ортотропный с механическими характеристиками:  $E_\theta, E_r$  – модули упругости в направлении координатных осей  $\theta, r$ ;  $G_{\theta r}$  – модуль поперечного сдвига в плоскости  $\theta r$ ;  $\mu_{\theta r}, \mu_{r\theta}$  – коэффициенты Пуассона.

Упругие константы материала определялись по формулам:

$$E_{\theta\theta} = E_\theta \frac{1}{1 - \mu_{\theta r} \mu_{r\theta}}, \quad E_{rr} = E_r \frac{1}{1 - \mu_{\theta r} \mu_{r\theta}},$$

$$E_{\theta r} = E_{r\theta} = E_\theta \frac{\mu_{r\theta}}{1 - \mu_{\theta r} \mu_{r\theta}}.$$

Коэффициенты  $A_i^k, B_i^k$  полиномов (1) находились из условий:

1. Условие равновесия на наружном, внутреннем контуре при  $r = R_1, \sigma_r = -Q_2 \sin(\pi\theta / \alpha), \tau_{r\theta} = 0$ ; при  $r = R_2, \sigma_r = 0, \tau_{r\theta} = 0$ .

2. Условие равновесия на боковых гранях:

$$\int_{R_2}^{R_1} \tau_{r\theta}(r, 0) dr = \pm \frac{\int_0^\alpha R_1 Q \cos(\theta - \alpha / 2) \sin(\pi\theta / \alpha) d\theta}{2 \cos(\alpha / 2)}. \quad (2)$$

3. Система дифференциальных уравнений равновесия Коши в полярной системе координат:

$$\frac{\partial \sigma_r^k}{\partial r} + \frac{1}{z} \frac{\partial \tau_{r\theta}^k}{\partial \alpha} + \frac{\sigma_r^k - \sigma_\theta^k}{r} = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^k}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^k}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}^k}{r} = 0. \quad (3)$$

4. Условие равновесия слоёв при  $r = R_k$ , где  $2 \leq k \leq m: \sigma_r^{k+1} = \sigma_r^k; \tau_{r\theta}^{k+1} = \tau_{r\theta}^k$ .

5. Условие совместности деформации слоёв при  $r = R_k$ , где  $2 \leq k \leq m: v^{k+1} = v^k; u^{k+1} = u^k$ , где  $m$  – количество слоёв;  $k$  – номер слоя,  $R_k$  – радиальная координата границы раздела слоёв;  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  – радиальные нормальные, окружные нормальные и касательные напряжения.

В формуле (2) выражение в правой части есть реакции на боковых гранях панели, которые найдены из условий его равновесия под действием нагрузки  $q(\alpha)$ .

Деформации связаны с окружными и радиальными перемещениями через соотношения Коши, записанные в полярной системе координат, а напряжения связаны с деформациями с помощью закона Гука [28]. Описанные выше условия 1, 2, 4 и 5 в предлагаемом методе удовлетворяются точно, в то время как система дифференциальных уравнений (3) выполняется точно только в нескольких точках по толщине каждого слоя.

Степень нелинейности перемещений и напряжений по толщине панели определяется отношениями  $R_{cp} / H$  и  $G_{\theta r} / E_\theta$ . Чем меньше значения этих отношений, тем выше степень нелинейности указанных перемещений. Поэтому исследование влияния степени полинома  $n$  на точность решения проводилось для различных значений  $R_{cp} / H$  и  $G_{\theta r} / E_\theta$ .

В качестве эталонной использовалась конечно-элементная модель, построенная в системе ANSYS, которая состояла из квадратичных элементов plane 183. Качество сетки оценивалось как с помощью стандартных процедур, которые используются в системе ANSYS, так и по условиям равновесия на контуре конечно-элементной модели и на границе раздела слоёв [16].

В расчете использовались следующие параметры. Упругие характеристики:  $E_r = E_\theta = 2 \cdot 10^4$  кгс/мм<sup>2</sup>,  $G_{\theta r} / E_\theta = 0,19; 0,39$ . Геометрические размеры модели:  $R_{cp} = 160$  мм,  $\alpha = \pi / 3$ . Для анализа рассматривались модели с относительной толщиной  $R_{cp} / H = 2; 4; 8; 20$ . Степень полиномов изменялась от 2 до 8. Интенсивность нагрузки, изменяющейся по закону синуса, равнялась 20 кгс/мм.

Параметры напряженно-деформированного состояния однослойной панели, такие как радиальные, окружные и касательные напряжения и перемещения по толщине панели, сравнивались с аналогичными параметрами, найденными по эталонной конечно-элементной модели. На рис. 1 показана эпюра радиальных напряжений в кгс/мм<sup>2</sup> по толщине однослойной панели. Точками показаны результаты, полученные с помощью эталонной конечно-элементной модели, а сплошной линией – с помощью предлагаемого метода.

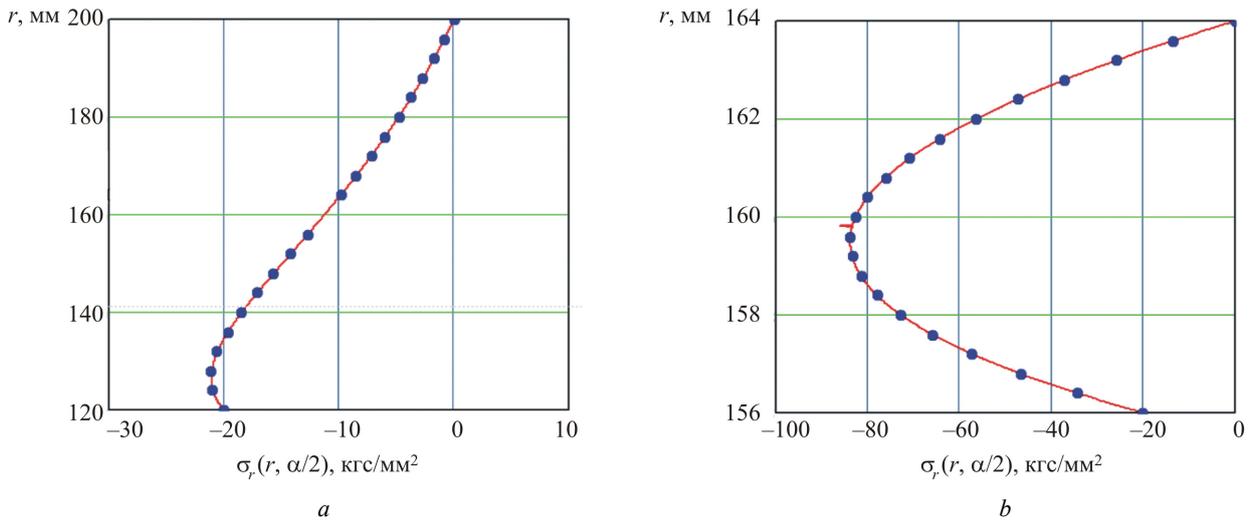


Рис. 1. Эпюры радиальных напряжений по толщине панели:  
 а –  $G_{\theta r} / E_9 = 0,19$ ;  $R_{cp} / H = 2, n = 8$ ; б –  $G_{\theta r} / E_9 = 0,19$ ;  $R_{cp} / H = 20$ ;  $n = 5$

Fig. 1. Radial stress diagrams vs plate thickness:  
 а –  $G_{\theta r} / E_9 = 0,19$ ;  $R_{cp} / H = 2, n = 8$ ; б –  $G_{\theta r} / E_9 = 0,19$ ;  $R_{cp} / H = 20$ ;  $n = 5$

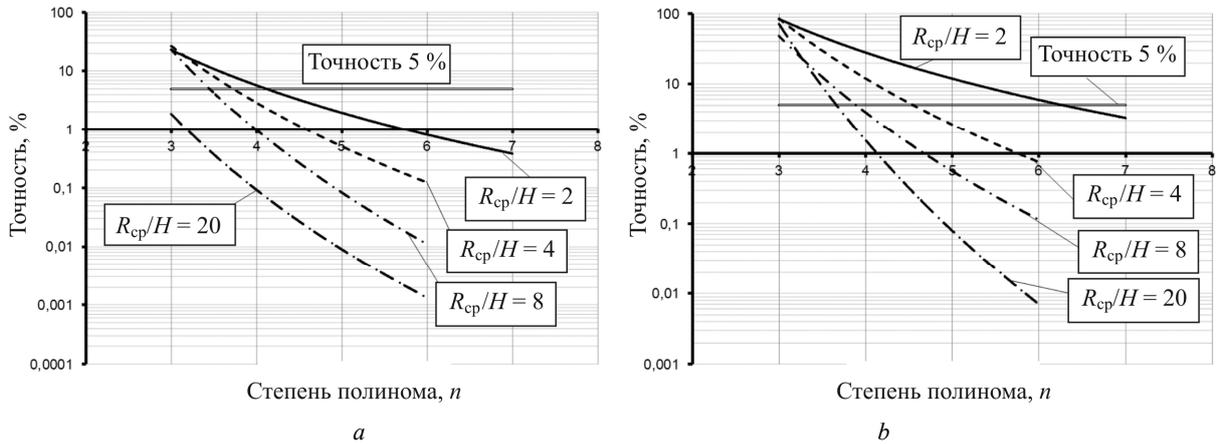


Рис. 2. Зависимость точности расчёта перемещений (а) и напряжений (б) от степени полиномов

Fig. 2. Effects of polynomial degree on the calculation accuracy for displacement (а) and stress (б)

Выбор степени полинома осуществлялся его повышением до достижения заданной точности. На рис. 2 представлены соответственно зависимости точности расчёта перемещений и напряжений от степени полинома (точки – результаты расчёта, линии – результаты по методу наименьших квадратов). Горизонтальная линия соответствует точности, принимаемой в инженерных расчётах, – 5%. Например, при  $R_{cp} / H = 20$  для расчёта перемещений с точностью 5% достаточно степени полинома 3, а для расчёта напряжений с той же точностью необходима степень полинома 5. Таким образом, расчетные значения, полученные по конечно-элементной модели и по предлагаемому методу хорошо совпадают в широком диапазоне нелинейности  $R_{cp} / H$  от 2 до 20.

Полученные результаты можно использовать в дальнейшем в качестве начального приближения при выборе степени полинома для слоёв многослойной панели.

## 2. Многослойные панели

Предлагаемый метод расчета изгиба многослойной панели рассматривается на примере трехслойной панели, поскольку с увеличением количества слоев он остается неизменным. В этом случае методика остается неизменной, необходимо лишь добавить условия равновесия и условия совместности деформаций слоёв.

В качестве примера рассмотрен расчет напряженно-деформированного состояния при изгибе трехслойной панели, конфигурация и основные геометрические размеры которой приведены на рис. 3. Радиусы наружной и внутренней поверхностей равны соответственно  $R_1$  и  $R_4$ . Радиусы границ слоёв 1–2 и 2–3 соответственно равны  $R_2$  и  $R_3$ . Угловая длина панели равна  $\alpha$ . Упругие характеристики несущих слоёв и слоя заполнителя представлены в таблице.

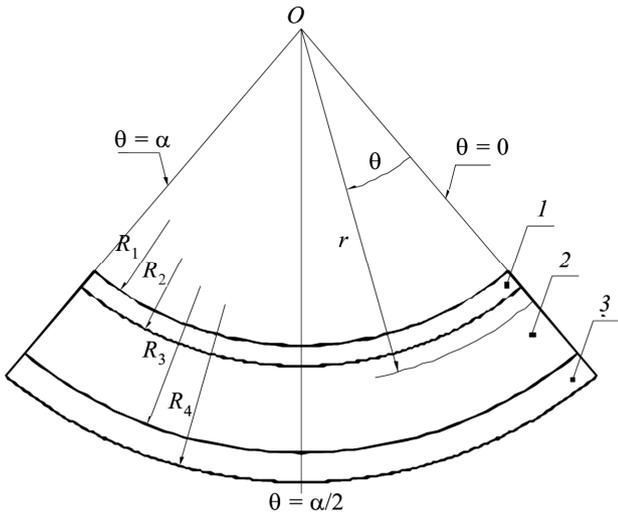


Рис. 3. Геометрия трёхслойной панели с круговой осью

Fig. 3. Three layers circular panel geometry

Степень нелинейности перемещений увеличивается с увеличением толщины слоя заполнителя. Поэтому рассматривались панели с несущими обшивками одинаковой толщины, равной 10 мм, но разной толщиной

слоя заполнителя: 20, 40, 60 мм. При этом  $R_{cp} = 160$  мм,  $\alpha = \pi/3$ .

На рис. 4 представлены эпюры окружных перемещений по толщине панели, которые были получены с помощью эталонной конечно-элементной модели (точки) и с помощью предлагаемого метода (сплошные линии) для толщин заполнителя 20 мм (a) и 60 мм (b). С ростом толщины заполнителя увеличивается степень нелинейности окружных перемещений заполнителя.

На рис. 5–7 представлены эпюры касательных, нормальных радиальных и окружных напряжений, полученных с помощью эталонной конечно-элементной модели (точки) и с помощью предлагаемого метода (сплошные линии) для толщин заполнителя 20 мм (a) и 60 мм (b).

Характеристики материала обшивок и заполнителя  
Skin and core material properties

Характеристика	Несущие слои	Заполнитель
$E_{\theta}$ , кгс/мм <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^4$	0,01
$E_r$ , кгс/мм <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^4$	200
$G_{\theta}$ , кгс/мм <sup>2</sup>	7690	2
$\mu_{\theta r}, \mu_{r\theta}$	0,3	0,3

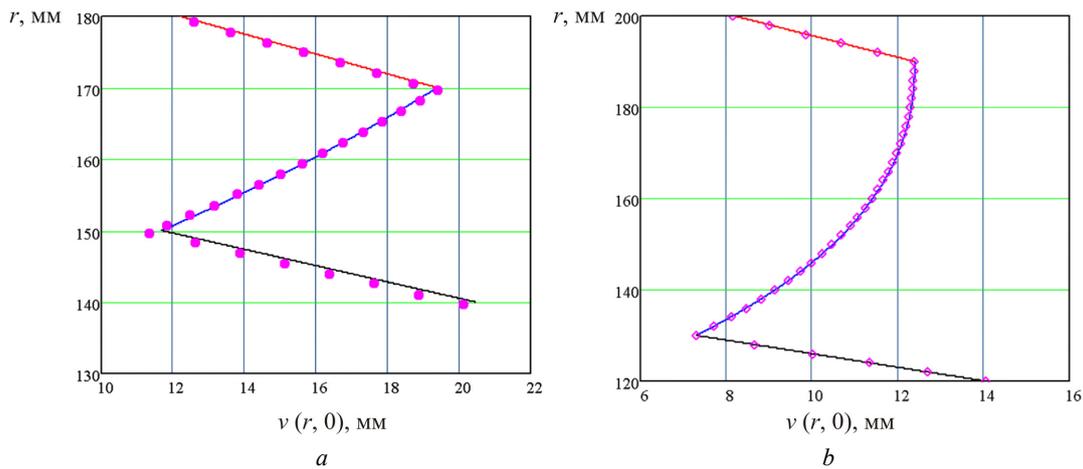


Рис. 4. Эпюры окружных перемещений по толщине панели

Fig. 4. Through thickness circular stress distribution

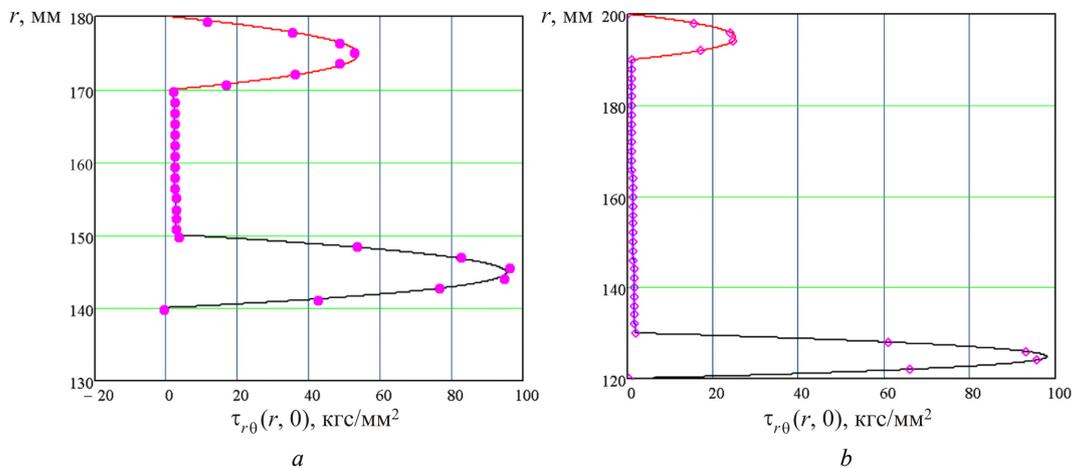


Рис. 5. Эпюры касательных напряжений по толщине панели

Fig. 5. Through thickness shear stress distribution

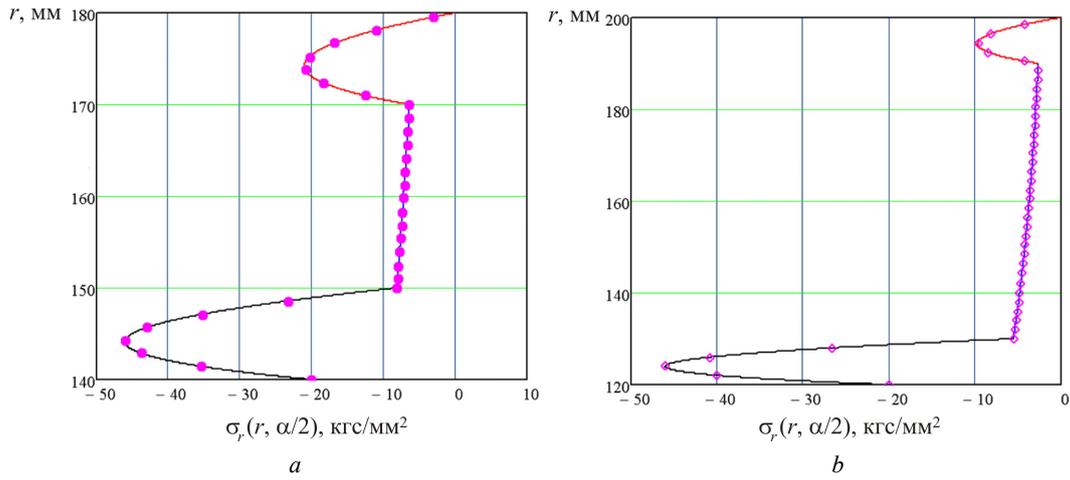


Рис. 6. Эпюры нормальных радиальных напряжений по толщине панели

Fig. 6. Through thickness radial stress distribution

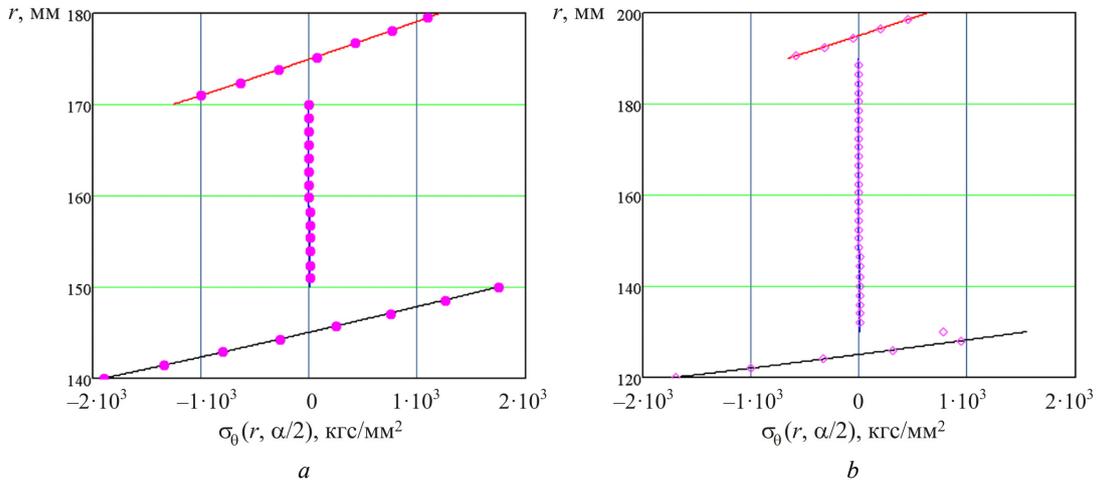


Рис. 7. Эпюры окружных напряжений по толщине панели

Fig. 7. Through thickness circular stress distribution

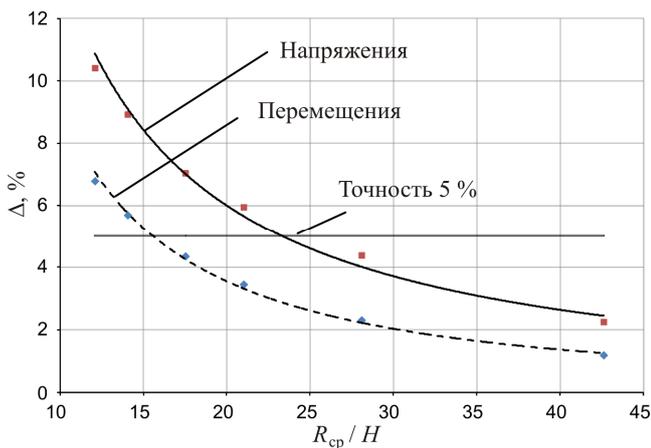


Рис. 8. Влияние  $R_{cp}/H$  на  $\Delta$  для перемещений и напряжений

Fig. 8. Effects  $R_{cp}/H$  on the  $\Delta$  for displacement and stress

Анализ эпюр показывает хорошее совпадение результатов, полученных с помощью эталонной конечно-элементной модели и с помощью предлагаемого метода. Погрешность не превышала 0,5 %.

Дополнительно проведено сравнение результатов, полученных с помощью предлагаемого метода, и результатов, полученных с помощью модели, построенной на основе вариационного исчисления при линейном распределении продольных перемещений по толщине заполнителя [31]. На рис. 8 приведена зависимость разницы  $\Delta$  между результатами вышеперечисленных расчётов перемещений и напряжений в зависимости от отношения  $R_{cp}/H$ . Расчёты выполнены для трёхслойной панели с толщинами обшивок 2 мм. Толщина заполнителя равна: 15, 25, 35, 43, 55, 65 мм.

Из рис. 8 следует, что при расчёте перемещений разница между результатами не превышает 5 %, если  $R_{cp}/H \geq 15$ , а при расчёте напряжений – если  $R_{cp}/H \geq 23$ . То есть для тонких панелей с  $R_{cp}/H \geq 23$  можно использовать гипотезу о линейном распределении перемещений по толщине заполнителя.

## Заключение

1. Предлагаемый метод позволяет оценивать напряженно-деформируемое состояние при изгибе шарнирно закрепленных многослойных панелей с круговой осью с произвольным количеством слоев без введения упрощающих гипотез относительно перемещения и механических характеристик слоев. Точность метода сравнима с точностью метода конечных элементов при использовании квадратичных твердотельных элементов.

## Библиографический список

- Pagano N.J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending // *Journal Composite Materials*. – 1969. – Vol. 3. – P. 398–411.
- Pagano N J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // *Journal of Composite Materials*. – 1970. – Vol. 4. – P. 20–34.
- Pagano N. J, Wang A.S.D. Further study of composite laminates under cylindrical bending // *Journal of Composite Materials*. – 1971. – Vol. 5. – P. 521–528.
- Demasi L. Three-dimensional closed form solutions and exact thin plate theories for isotropic plates // *Composite Structures*. – 2007. – Vol. 80. – P. 183–195.
- Wuxiang L., Zhong Z. Three-Dimensional Analysis of Simply Supported Functionally Graded Plate with Arbitrary Distributed Elastic Modulus // *Tsinghua science and technology*. – 2009. – Vol. 14. – P. 58–63.
- Zhong Z, Shang E.T. Three-dimensional exact analysis of a simply supported functionally gradient piezoelectric plate // *International Journal of Solids Structures*. – 2003. – Vol. 40. – P. 5335–5352.
- Meyer-Piening H.R. Application of the elasticity solution to linear sandwich beam, plate and shell analyses // *Journal of Sandwich Structures and Materials*. – 2004. – Vol. 6. – P. 295–312.
- Fan J., Ye J. An exact solution for the statics and dynamics of laminated thick plates with orthotropic layers // *International Journal of Solids Structures*. – 1990. – Vol. 26. – P. 655–662.
- Алексеев А.Е. Изгиб трёхслойной ортотропной балки // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1995. – № 3 (36). – С. 158–166.
- Алексеев А.Е., Алёхин В.В., Анин Б.Д. Плоская задача теории упругости для неоднородного слоистого тела // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2001. – Т. 42, № 6. – С. 136–141.
- Волчков Ю.М., Дергилева Л.А., Иванов Г.А. Численное моделирование напряжённых состояний в плоских задачах теории упругости методом слоёв // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1994. – Т. 35, № 6. – С. 129–135.
- Волчков Ю.М., Полтавская Е.Н. Моделирование напряженно-деформированного состояния в слоистых ортотропных пластинах // *Математические заметки СВФУ*. – 2015. – Т. 22, № 2. – С. 62–71.
- Алексеев А.Е. Построение уравнений слоя переменной толщины на основе разложений по полиномам Лежандра // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1994. – Т. 35, № 4. – С. 137–147.
- Khoma I.Y. Integration of the equilibrium equations for inhomogeneous, transversely isotropic plates // *International Journal of Applied Mechanics*. – 2002. – Vol. 11. – P. 1371–1380.
- Novizna предлагаемого метода заключается в том, что полученное общее аналитическое решение справедливо для широкого диапазона изменения механических характеристик слоев, их геометрии и не связано с трудоёмкой процедурой решения системы разрешающих дифференциальных уравнений.
- Целесообразность использования данного метода при проектировании обусловлена простотой его применения, высокой точностью и малыми временными затратами на анализ при переборе большого количества вариантов конструкции панели.
- Vel S.S., Batra R.C. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates // *Journal of Sound and Vibration*. – 2004. – Vol. 272. – P. 703–730.
- Vel S.S., Batra R.C. Three-dimensional analysis of transient thermal stress in functionally graded plates // *International Journal of Solids Structures*. – 2003. – Vol. 25. – P. 7181–7196.
- Pan E. Exact solution for functionally graded anisotropic composite laminates // *Journal of Composite Materials*. – 2003. – Vol. 37. – P. 1903–1919.
- Алексеев А.Е., Анин Б.Д. Уравнения деформирования упругого неоднородного слоистого тела вращения // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2003. – Т. 44, № 3. – С. 157–163.
- Varadan T. K, Bhaskar K. Bending of laminated orthotropic cylindrical shells an elasticity approach // *Composite Structures*. – 1991. – Vol. 17. – P. 141–156.
- Chen W.Q, Ding H.J, Xu R.Q. On exact analysis of free vibrations of embedded transversely isotropic cylindrical shells // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. – 1998. – Vol. 75. – P. 961–966.
- Fan J.R, Zhang J.Y. Exact solutions for thick laminated shells // *Science China Life Sciences*. – 1992. – Vol. 35. – P. 1343–1355.
- Fan J., Zhang J. Analytical solutions for thick, doubly curved, laminated shells // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1992. – Vol. 118. – P. 1338–1356.
- Brischetto S. Exact three-dimensional static analysis of single- and multi-layered plates and shells // *Composites Part B*. – 2017. – Vol. 119. – P. 230–252.
- Brischetto S. Three-dimensional exact free vibration analysis of spherical, cylindrical, and flat one-layered panels // *Journal Shock and Vibration*. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–29.
- Brischetto S. An exact 3D solution for free vibrations of multilayered cross-ply composite and sandwich plates and shells // *International Journal of Applied Mechanics*. – 2014. – Vol. 6. – P. 1–42.
- Brischetto S. A general exact elastic shell solution for bending analysis of functionally graded structures // *Composite Structures*. – 2017. – Vol. 175. – P. 70–85.
- Brischetto S. A closed-form 3D shell solution for multilayered structures subjected to different load combinations // *Aerospace Science Technology*. – 2017. – Vol. 70. – P. 29–46.
- Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: пер. с англ. / под ред. Г.С. Шапиро. – 2-е изд. – М.: Наука; главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 500 с.
- Осадчий Н.В., Малышев В.А., Шепель В.Т. Исследование изгиба трёхслойной прямоугольной панели вариационным методом // *Деформации и разрушение материалов*. – 2016. – № 7. – С. 6–11.

30. Осадчий Н.В., Малышев В.А., Шепель В.Т. Метод выбора плотности сетки и типа конечных элементов в задачах статической прочности многослойных конструкций // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – № 1. – С. 10–17.

31. Осадчий Н.В., Шепель В.Т. Исследование поперечного изгиба сотовой трехслойной панели с круговой осью // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2018. – № 1. – С. 86–93.

## References

- Pagano N.J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *Journal Composite Materials*, 1969, vol. 3, pp. 398–411.
- Pagano N J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // *Journal of Composite Materials*, 1970, vol. 4, pp. 20–34.
- Pagano N. J, Wang A.S.D. Further study of composite laminates under cylindrical bending. *Journal of Composite Materials*, 1971, vol. 5, pp. 521–528.
- Demasi L. Three-dimensional closed form solutions and exact thin plate theories for isotropic plates. *Composite Structures*, 2007, 80, pp. 183–195.
- Wuxiang L., Zhong Z. Three-Dimensional Analysis of Simply Supported Functionally Graded Plate with Arbitrary Distributed Elastic Modulus. *Tsinghua science and technology*, 2009, vol. 14, pp. 58–63.
- Zhong Z, Shang E.T. Three-dimensional exact analysis of a simply supported functionally gradient piezoelectric plate. *International Journal of Solids Structures*, 2003, vol. 40, pp. 5335–5352.
- Meyer-Piening H.R. Application of the elasticity solution to linear sandwich beam, plate and shell analyses. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 2004, vol. 6, pp. 295–312.
- Fan J., Ye J. An exact solution for the statics and dynamics of laminated thick plates with orthotropic layers. *International Journal of Solids Structures*, 1990, vol. 26, pp. 655–662.
- Alekseev A.E. Izgib trjohslojnoj ortotropnoj balki [Bending of a three-layer orthotropic beam]. *Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika*, 1995, no. 3 (36), pp. 158–166.
- Alekseev A.E., Aljohin V.V., Anin B.D. Ploskaja zadacha teorii uprugosti dlja ne-odnorodnogo sloistogo tela. *Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika*, 2001, vol. 42, no. 6, pp. 136–141.
- Volchkov Ju.M., Dergileva L.A., Ivanov G.A. Chislenoe modelirovanie naprja-zhjonnyh sostojanij v ploskih zadachah teorii uprugosti metodom slojov [Numerical modeling of stress states in plane problems of elasticity theory by the layer method]. *Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika*, 1994, vol. 35, no. 6, pp. 129–135.
- Volchkov Ju. M., Poltavskaja E.N. Modelirovanie naprjazhjonno-deformirovannogo sostojanija v sloistyh ortotropnyh plastinah [Modeling of the stress-strain state in layered orthotropic plates]. *Matematicheskie zametki SVFU*, 2015, vol. 22, no. 2, pp. 62–71.
- Alekseev A.E. Postroenie uravnenij sloja peremennoj tolshhiny na osnove razlo-zhenij po polinomam Lezhandra [Construction of equations for a layer of variable thickness based on expansions in Legendre polynomials]. *Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika*, 1994, vol. 35, no. 4, pp. 137–147.
- Khoma I.Y. Integration of the equilibrium equations for inhomogeneous, transversely isotropic plates. *International Journal of Applied Mechanics*, 2002, vol. 11, pp. 1371–1380.
- Vel S.S., Batra R.C. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, vol. 272, pp. 703–730.
- Vel S.S., Batra R.C. Three-dimensional analysis of transient thermal stress in functionally graded plates. *International Journal of Solids Structures*, 2003, vol. 25, pp. 7181–7196.
- Pan E. Exact solution for functionally graded anisotropic elastic composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 2003, vol. 37, pp. 1903–1919.
- Alekseev A.E., Anin B.D. Uravnenija deformirovanija uprugogo neodnorodnogo sloistogo tela vrashhenija [Deformation equations for an elastic inhomogeneous layered body of revolution]. *Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 157–163.
- Varadan T. K, Bhaskar K. Bending of laminated orthotropic cylindrical shells an elasticity approach. *Composite Structures*, 1991, vol. 17, pp. 141–156.
- Chen W.Q, Ding H.J, Xu R.Q. On exact analysis of free vibrations of embedded transversely isotropic cylindrical shells. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 1998, vol. 75, pp. 961–966.
- Fan J.R, Zhang J.Y. Exact solutions for thick laminated shells. *Science China Life Sciences*, 1992, vol. 35, pp. 1343–1355.
- Fan J., Zhang J. Analytical solutions for thick, doubly curved, laminated shells. *Journal of Engineering Mechanics*, 1999, vol. 118, pp. 1338–1356.
- S. Brischetto. Exact three-dimensional static analysis of single- and multi-layered plates and shells. *Composites Part B*, 2017, vol. 119, pp. 230–252.
- Brischetto S. Three-dimensional exact free vibration analysis of spherical, cylindrical, and flat one-layered panels. *Journal Shock and Vibration*, 2014, vol. 2014, pp. 1–29.
- Brischetto S. An exact 3D solution for free vibrations of multilayered cross-ply composite and sandwich plates and shells. *International Journal of Applied Mechanics*, 2014, vol. 6, pp. 1–42.
- Brischetto S. A general exact elastic shell solution for bending analysis of functionally graded structures. *Composite Structures*, 2017, vol. 175, pp. 70–85.
- Brischetto S. A closed-form 3D shell solution for multi-layered structures subjected to different load combinations. *Aerospace Science Technology*, 2017, vol. 70, pp. 29–46.
- Timoshenko S.P., Gud'yer Dzh. Teoriya uprugosti: Per. S angl./ Pod red. G.S. Shapiro. – 2-e izd. *Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury*, 1979, 500 p.
- Osadchij N.V., Malyshev V.A., Shepel' V.T. Issledovaniye izgiba trekh-sloynoy pryamougol'noy paneli variatsionnym metodom [Investigation of the bending of a three-layer rectangular panel by the variational method]. *Deformatsii i razrusheniye materialov*, 2016, no. 7, pp. 6–11.
- Osadchij N.V., Malyshev V.A., Shepel' V.T. Metod vybora plotnosti setki i tipa konechnykh elementov v zadachakh staticheskoy prochnosti mnogoslownykh kon-struktsiy. *Deformatsiya i razrusheniye materialov*, 2017, no. 1, pp. 10–17.
- N.V. Osadchij, V.T. Shepel'. Issledovaniye poperechnogo izgiba sotovoy trekh-sloynoy paneli s krugovoy os'yu. *Problemy mashinostroyeniya i naděžnosti mashin*, 2018, no. 1, 2018, pp. 86–93.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Financing.** The study was not sponsored.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.