



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.2.08

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ НЕОСЕССИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Д.А. Иванычев

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 01 декабря 2021 г.

Одобрена: 30 мая 2022 г.

Принята к публикации:

04 июля 2022 г.

Ключевые слова:

метод граничных состояний,
трансверсально-изотропные тела,
краевые задачи, пространство
состояний, смешанная задача,
неосесимметричные задачи.

АННОТАЦИЯ

Разработана методика решения смешанных неосесимметричных задач теории упругости для ограниченных тел вращения из трансверсально-изотропного материала, находящихся под действием поверхностных сил, заданных по циклическому закону.

Методика предполагает развитие энергетического метода граничных состояний, основу которого составляют понятия пространств внутренних и граничных состояний, сопряженных изоморфизмом, что позволяет установить взаимно однозначное соответствие между элементами этих пространств. Во внутреннее состояние входят компоненты тензора напряжений, деформаций и вектора перемещений. В граничное состояние входят усилия и перемещения на границе тела. Доказан изоморфизм пространств состояний, позволяющий отыскание внутреннего состояния, что сводится к исследованию изоморфного ему граничного состояния. Базис формируется на основе общего решения краевой задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения. Проводится ортогонализация пространств состояний, где в качестве скалярных произведений в пространстве внутренних состояний используется внутренняя энергия упругого деформирования; в пространстве граничных состояний используется работа внешних сил. Окончательно отыскание внутреннего состояния сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье.

Представлено решение задачи со смешанными граничными условиями для кругового в плане цилиндра из трансверсально-изотропного алевролита крупного темно-серого с осью анизотропии, совпадающей с геометрической осью симметрии. Заданные поверхностные силы изменяются по закону синуса и косинуса. Решение является аналитическим и характеристики напряженно-деформированного состояния имеют полиномиальный вид. Представлены явные и косвенные признаки сходимости решения задачи и графическая визуализация результатов.

© ПНИПУ

© Иванычев Дмитрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доц., e-mail: Lsivdmal@mail.ru.

Dmitriy A. Ivanychev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: Lsivdmal@mail.ru.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

SOLUTION OF A MIXED NONAXISYMMETRIC PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR ANISOTROPIC BODIES OF REVOLUTION

D.A. Ivanychev

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 December 2021
Approved: 30 May 2022
Accepted for publication: 04 July 2022

Keywords:

boundary state method, transversely isotropic bodies, boundary value problems, state space, mixed problem, nonaxisymmetric problems.

ABSTRACT

The paper developed a technique for solving mixed nonaxisymmetric problems of the theory of elasticity for bounded bodies of revolution made of a transversely isotropic material under the action of surface forces specified according to a cyclic law.

The technique involves the development of the energy method of boundary states, which is based on the concepts of spaces of internal and boundary states, conjugated by isomorphism, which makes it possible to establish a one-to-one correspondence between the elements of these spaces. The internal state includes the components of the tensor of stresses, deformations, and the displacement vector. The boundary state includes efforts and displacements at the boundary of the body. The isomorphism of the state spaces is proved, which allows finding the internal state to be reduced to the study of the boundary value problem of elastostatics for a transversely isotropic body of revolution. Orthogonalization of state spaces is carried out, where the internal energy of elastic deformation is used as scalar products in the space of internal states; in the space of boundary states, the work of external forces is used. Finally, finding the desired state is reduced to solving an infinite system of algebraic equations for the Fourier coefficients.

The solution of the problem with mixed boundary conditions for a circular in plan cylinder of transversely isotropic coarse dark gray siltstone with anisotropy axis coinciding with the geometric axis of symmetry is presented. The solution is analytical and the characteristics of the stress-strain state have a polynomial form. Explicit and indirect signs of convergence of problem solutions and graphical visualization of the results are presented.

© PNRPU

Детали машин и механизмов, изготовленные из современных материалов, таких как эластомеры, поликристаллические металлы, керамика, а также горные породы и обладающие значительной анизотропией свойств, пребывают в условиях сложного кинематического взаимодействия с другими телами. Естественно, что силы взаимодействия этих тел не распределяются симметрично относительно, например, оси вращения цилиндрического тела или какой-либо плоскости. Исследование напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле и которое носит несимметричный характер, является актуальной научной задачей для анизотропных тел.

Решению краевых задач для трансверсально-изотропных тел посвящено множество работ. На сегодняшний момент исследуются частные аспекты данных задач для усложненных по геометрии и структуре материалов, например многосвязные, слоистые и др. Например, в работе [1] получены точные аналитические решения задач о равновесии полых и составных трансферопных сфер, находящихся под действием внешнего или внутреннего давления. В работе [2] рассмотрена задача о деформации трансверсально-изотропного цилиндрического слоя под действием нормального давления. Полученные асимптотические формулы позволяют описать поведение слоя с разными жесткостями в трансверсальном и тангенциальном направлениях. В работе [3] с помощью преобразования Фурье решена смешанная краевая задача Дирихле – Неймана для

уравнения Пуассона в области, ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями. Решение записывается через построенную функцию Грина оператора Лапласа. В работе [4] предлагается подход к определению трехмерного напряженно-деформированного состояния (НДС) многослойного трансферопного полупространства в случае воздействия на него нормальной нагрузки. Работа [5] посвящена решению контактной задачи для трансферопного полупространства с неизвестной областью контакта. Задача сведена к интегральному уравнению относительно давления в зоне контакта, для решения которого применяется численный метод Галанова.

Ряд работ посвящен расчету оболочек. Например, в работе [6] рассмотрены осесимметричные краевые задачи теории упругости для неоднородной трансферсально-изотропной конической оболочки. Решение строится методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. В работе [7], применяя прямую формулировку метода граничных состояний, решены краевые задачи трехмерной анизотропной теории упругости. Приведены численные примеры для нескольких видов анизотропии. В работе [8] исследовалось предельное нагружение конструкций из трансферсально-изотропных материалов в условиях кусочно-линейной текучести. В работе [9] приводятся доказательства теорем существования и единственности решения упругопластической краевой задачи, основанной на теории пластического течения трансферсально-изотропных тел.

Смешанные задачи в теории упругости рассматривались реже, чем задачи с односторонними граничными условиями, однако их исследование проводилось в приложении к различным направлениям механики. Например, в работе [10] рассматривался алгоритм численного решения смешанной задачи теории упругости для тела, имеющего одностороннее контактное взаимодействие с упругим полупространством. В исследовании [11] предложен аналитический метод решения смешанной плоской задачи теории упругости для двухслойной кольцевой области. В статье [12] осуществлены математический и численный анализ асимптотических решений трехмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями. В работе [13] Для решения смешанных задач использовались конечно-элементные технологии, основанные на смешанной формулировке, построенной с помощью функционала Рейсснера. В исследовании [14] метод граничных состояний применен для решения смешанных задач теории изотропной упругости, а в статье [15] он получил развитие на класс смешанных задач для неограниченной упругой среды с полостями. В исследовании [16] для односвязного изотропного тела построены параметрические решения, содержащие константы среды в неявном виде. В работе [17] метод граничных состояний применен для решения задачи о движении идеальной жидкости в осесимметричной трубе при смешанных граничных условиях.

На сегодняшний момент для трансверсально-изотропных тел вращения средствами метода граничных состояний решена первая основная задача теории упругости при участии массовых сил [18; 19]. Решению второй основной задачи теории упругости при одновременном действии на тело массовых сил посвящена работа [20]. По идентичной методике, что и во второй основной задаче, решены основная смешанная [21; 22] и контактная [23] задачи. Особенность решения данных задач заключается в том, что полученное упругое поле удовлетворяет одновременно заданным граничным условиям и заданным массовым силам.

Целью данной работы является решение неосесимметричных смешанных задач теории упругости для трансверсально-изотропных тел вращения.

1. Постановка задачи

Рассматривается упругое равновесие трансверсально-изотропного конечного и односвязного тела вращения с осью анизотропии, совпадающей с геометрической осью симметрии. Требуется восстановить упругое поле в области V по заданным поверхностным усилиям $\mathbf{p} = \{p_r, p_\theta, p_z\}$ на части границе S_p и перемещениям $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ на части границе S_u (рис. 1). Естественно, что $S = S_p + S_u$.

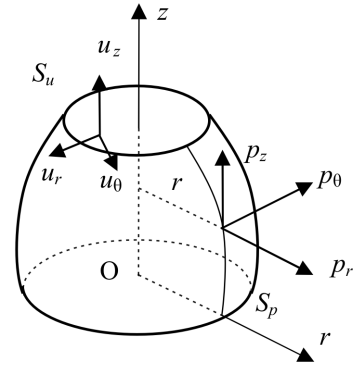


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

Fig. 1. The transversely isotropic body of revolution

Статические поверхностные усилия и ненулевые перемещения точек границы изменяются по циклическому закону (синуса или косинуса). Объемные силы отсутствуют.

2. Определяющие соотношения для среды

Для однородной трансверсально-изотропной среды в цилиндрических координатах r, θ, z имеют место следующие соотношения.

Дифференциальные уравнения равновесия при отсутствии объемных сил [24; 25]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения Коши [24]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения совместности деформаций [26]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} &= 0; \\ -\frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z\theta})}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta \partial z} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z0}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r0}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial r \partial z} = 0.$$

Обобщенный закон Гука [24]:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)];$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z;$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z;$$

$$\gamma_{zr} = \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z0} = \frac{1}{G_z} \tau_{z0}; \quad \gamma_{r0} = \frac{1}{G_r} \tau_{r0} = \frac{2(1+\nu_r)}{E_r} \tau_{r0}.$$

Здесь: u, v, w – компоненты вектора перемещений \mathbf{u} вдоль оси r, θ, z соответственно; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r0}, \gamma_{z0}, \gamma_{zr}$ – компоненты тензора деформаций; $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r0}, \tau_{z0}, \tau_{zr}$ – компоненты тензора напряжений; E_z и E_r – модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии; ν_z – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль оси r при растяжении вдоль оси z ; ν_r – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости; G_r и G_z – модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярной к ней.

3. Метод решения

Для решения поставленной задачи используется метод граничных состояний (МГС) [27].

Основу метода составляют пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}. \quad (5)$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений (индекс k в правой части помещен наверх):

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}.$$

Воспользуемся при построении решения основных задач механики уравнением Клапейрона при отсутствии объемных сил [25; 28]:

$$\int_S \mathbf{p}_v \mathbf{u}_v dS - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0. \quad (6)$$

На основе равенства (6) можно назначить скалярные произведения в пространствах состояний. Скалярное произведение в пространстве внутренних состояний выражает внутреннюю энергию упругого деформирования (например, для 1-го и 2-го внутреннего состояний):

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V (\varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1) dV, \quad (7)$$

причем в силу коммутативности состояний среды:

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV = \int_V \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 dV.$$

Граничное состояние γ_k определяется наборами компонент вектора перемещения точек границы $\mathbf{u}_v = u_{vi}$, поверхностными усилиями $\mathbf{p}_v = p_i$:

$$\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k\}, \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j, \quad (8)$$

где n_j – компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний Γ согласно (6) скалярное произведение выражает работу внешних сил по поверхности тела S (например, для 1-го и 2-го внутреннего состояний):

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS,$$

причем в силу тождества Бетти и соотношения Клапейрона: $(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1)$.

В случае гладкой границы и в силу (6) оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. По определению каждому элементу $\xi_k \in \Xi$ соответствует единственный элемент $\gamma_k \in \Gamma$, причем это соответствие взаимно-однозначное: $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$. Это позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния.

После построения базисов пространств внутренних и граничных состояний, их необходимо ортонормировать. Ортонормирование базиса пространства Ξ осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [29], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимается (7). Алгоритм основан на процессе Грама – Шмидта, переписанном в форме, использующей лишь перекрестные скалярные произведения элементов исходного базиса, которые сведены в матрицу Грама. Если в процессе ортогонализации на k -м шаге встречается некоторый элемент базиса внутренних состояний ξ_k , алгоритм на этом шаге выдаст «0» (нулевое), если этот элемент является линейной комбинацией элементов ξ_1, \dots, ξ_{k-1} . Для сохранения ортогональности выходных элементов и для предотвращения деления на ноль при ортонормировании алгоритм делает проверку на нулевые элементы и исключает их. На их место идут следующие элементы исходного базиса внутренних состояний, и процесс повторяется.

Ортонормированный базис Γ редуцируется из ортонормированного базиса внутренних состояний, используя выражения (8) и (1).

Окончательно проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, раз-

ложения искомым внутреннему ξ и граничного γ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k ; \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k ,$$

или в развернутом виде:

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k ; \quad u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k ; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k ; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k . \quad (9)$$

Ортонормированный базис позволяет для элементов базиса граничных состояний записать следующие выражения:

$$\int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS + \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS = 2\delta_{ij} ; \quad (10)$$

Представим слагаемые из (10) в следующем виде (нижний индекс v в развернутых выражениях опущен):

$$\int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS = \int_{S_u} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u + \int_{S_p} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p ;$$

$$\int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS = \int_{S_u} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u + \int_{S_p} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p$$

и, подставляя их в (10), получим:

$$\int_{S_u} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u + \int_{S_p} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p + \int_{S_u} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u + \int_{S_p} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p = 2\delta_{ij} .$$

Группируя слагаемые и обозначая:

$$\beta_{ij} = \int_{S_p} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p + \int_{S_u} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u ; \quad (11)$$

$$\lambda_{ij} = \int_{S_p} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p + \int_{S_u} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u ;$$

легко убедиться что $\beta_{ij} + \lambda_{ij} = 2\delta_{ij}$.

Преобразуем λ_{ij} следующим образом: базисные упругие характеристики \mathbf{p}_v^j , \mathbf{u}_v^j заменяем заданными, и перебор будем осуществлять по индексу j , образуя тем самым матрицы коэффициентов:

$$\alpha_j = \int_{S_p} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^j dS_p + \int_{S_u} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^j dS_u ;$$

$$A = [\alpha_j]_N ; \quad B = [\beta_{ij}]_{N \times N} .$$

Следует отметить, что матрица B является косимметричной ($\beta_{ij} = -\beta_{ji}$, $i \neq j$). Матрица-столбец коэффициентов Фурье $C = \{c_k\}_N$ рассчитывается так:

$$C = \{c_k\}_N = B^{-1}A , \quad (12)$$

где N – число используемых элементов базиса.

Окончательно решение имеет вид (9). Тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой одного из базисных элементов с соответствующими ГУ в качестве заданного, при этом должны выполняться усло-

вия $c_n = 1$, где n – номер тестируемого элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

4. Формирование базиса

Основную сложность формирования решения в МГС является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды; также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

В работе [24] с помощью метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного конечного тела без полостей и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных).

При установлении зависимости используется следующий прием. Упругое тело, напряженное состояние которого требуется изучить, рассматривается как часть некоторого бесконечного цилиндра с осью η , параллельной образующей цилиндра. С телом связана система координат $r\theta z$. Меридианное сечение тела совпадает с плоскостью поперечного сечения бесконечного цилиндра с осями координат zy (направление $\eta \perp$ плоскости zy , ось z общая для тела и цилиндра). Предполагается, что цилиндр находится в некотором двумерном напряженном состоянии, не меняющемся вдоль образующей. Компоненты этого состояния u_y^{pl} , u_η^{pl} , u_z^{pl} , σ_y^{pl} , σ_z^{pl} , σ_{zy}^{pl} , σ_η^{pl} определяют плоскую деформацию с депланацией сечения цилиндра в плоскости zy . Эти же компоненты определяют напряженное состояние заданного упругого тела, так как оно является частью цилиндра. Для определения пространственного напряженного состояния тела рассматривается ряд цилиндров, отличающихся направлением образующей, или углом поворота относительно оси z . Представляя последовательно тело вырезанным из каждого такого цилиндра при $m \rightarrow \infty$ (m – число цилиндров), редуцируется ряд напряженных состояний, суперпозиция которых и дает суммарное трехмерное состояние. В общем случае напряженное состояние каждого цилиндра в процессе поворота изменяется, и трехмерное состояние тела будет неосесимметричным (зависящим от угловой координаты θ). Например, для компоненты вектора перемещения w пространственного состояния имеет место выражение:

$$w = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (u_z^{pl})_k .$$

Перейдя к пределу при $m \rightarrow \infty$, сумма заменяется интегралом. При последующей замене переменной интегрирования окончательно связь между перемещениями неосесимметричной деформации и плоской деформации соответствующего цилиндра имеет вид [24]:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{n=a}^b [u_n \cos n\theta + u_n \sin n\theta]; \\
 v &= \sum_{n=a}^b [-v_n \sin n\theta + v_n \cos n\theta]; \\
 w &= \sum_{n=a}^b [w_n \cos n\theta + w_n \sin n\theta]; \\
 u_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos(n-1)\beta d\beta + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos(n+1)\beta d\beta; \\
 v_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos(n-1)\beta d\beta - \\
 &- \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos(n+1)\beta d\beta; \\
 w_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_z^{pl} \cos n\beta d\beta,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где a и b – пределы суммирования.

Соответственно для компонент тензора напряжений имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= \sum_{n=a}^b [\sigma_z^n \cos n\theta + \sigma_z^n \sin n\theta]; \\
 \sigma_r &= \sum_{n=a}^b [\sigma_y^n \cos n\theta + \sigma_y^n \sin n\theta]; \\
 \sigma_\theta &= \sum_{n=a}^b [\sigma_\eta^n \cos n\theta + \sigma_\eta^n \sin n\theta]; \\
 \sigma_{zr} &= \sum_{n=a}^b [\sigma_{zy}^n \cos n\theta + \sigma_{zy}^n \sin n\theta]; \\
 \sigma_{r\theta} &= \sum_{n=a}^b [\sigma_{y\eta}^n \cos n\theta - \sigma_{y\eta}^n \sin n\theta]; \\
 \sigma_{z\theta} &= \sum_{n=a}^b [\sigma_{z\eta}^n \cos n\theta - \sigma_{z\eta}^n \sin n\theta]; \\
 S_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sigma_z^{pl} \cos n\beta d\beta; \\
 S_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl}) \cos n\beta d\beta; \\
 S_3 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl} + 2\sigma_{y\eta}^{pl}) \cos(n-2)\beta d\beta; \\
 S_4 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl} - 2\sigma_{y\eta}^{pl}) \cos(n+2)\beta d\beta; \\
 S_5 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sigma_{zy}^{pl} + \sigma_{z\eta}^{pl}) \cos(n-1)\beta d\beta;
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$S_6 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sigma_{zy}^{pl} - \sigma_{z\eta}^{pl}) \cos(n+1)\beta d\beta;$$

$$\sigma_z^n = S_1; \quad \sigma_y^n = (2S_2 + S_3 + S_4) / 4;$$

$$\sigma_{zy}^n = (S_5 + S_6) / 2; \quad \sigma_\eta^n = (2S_2 + S_3 + S_4) / 4;$$

$$\sigma_{z\eta}^n = (S_5 - S_6) / 2; \quad \sigma_{y\eta}^n = (S_3 - S_4) / 4.$$

Здесь компоненты с верхним индексом pl соответствуют компонентам плоского вспомогательного состояния.

В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация и депланация, возникающие в сечениях цилиндра, имеющего в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости zy (направление $\eta \perp$ плоскости zy) [24]:

$$u_y^{pl} = \text{Re}[iq_1\varphi_1(\zeta_1) + iq_2\varphi_2(\zeta_2)];$$

$$u_z^{pl} = \text{Re}[p_1\varphi_1(\zeta_1) + p_2\varphi_2(\zeta_2)];$$

$$\sigma_z^{pl} = -\text{Re}[\gamma_1^2\varphi_1'(\zeta_1) + \gamma_2^2\varphi_2'(\zeta_2)];$$

$$\sigma_y^{pl} = \text{Re}[\varphi_1'(\zeta_1) + \varphi_2'(\zeta_2)];$$

$$\sigma_{zy}^{pl} = -\text{Re}[\gamma_1\varphi_1'(\zeta_1) + \gamma_2\varphi_2'(\zeta_2)];$$

$$\sigma_{z\eta}^{pl} = \text{Re}[i\gamma_3\varphi_3(\zeta_3)]; \quad \sigma_{y\eta}^{pl} = -\text{Re}[\varphi_3(\zeta_3)];$$

$$\sigma_\eta^{pl} = \nu_r \sigma_y^{pl} + \nu_z \frac{E_r}{E_z} \sigma_z^{pl},$$

где константы q_i , p_i и γ_3 определены упругими параметрами материала; $\zeta_j = z / \gamma_j + iy$; γ_1 и γ_2 – комплексные корни характеристического уравнения [24]; функции $\varphi_j(\zeta_j)$ – аналитические по своим переменным.

Придавая функциям $\varphi_j(\zeta_j)$ поочередно значения:

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{c} \varphi_1(\zeta_1) \\ \varphi_2(\zeta_2) \\ \varphi_3(\zeta_3) \end{array} \right) \in \left\{ \left(\begin{array}{c} \zeta_1^m \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \zeta_2^m \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \zeta_3^m \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} i\zeta_1^m \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ i\zeta_2^m \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ i\zeta_3^m \end{array} \right), \dots \right\}, \\
 m \in N,
 \end{aligned} \tag{15}$$

можно сгенерировать набор плоских вспомогательных состояний (15) и по зависимостям (13) и (14) построить совокупность пространственных состояний, образуя базис пространства внутренних состояний (5).

5. Решение задач

Исследуется упругое равновесие трансверсально-изотропного кругового в плане цилиндра из горной породы алевролита крупного темно-серого [28]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи, ана-

логия которой приведена в работе [30], упругие характеристики материала составили: $E_z = 6,21$; $E_r = 5,68$; $G_z = 2,55$; $\nu_z = 0,22$; $\nu_r = 0,24$. Цилиндр занимает область $V = \{(z,r) \mid 0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$.

При построении базиса внутренних состояний необходимо стремиться к наибольшей простоте вида функций, описывающих компоненты упруго поля.

Рассмотрим сначала базис, формируемый из левых частей выражений (13) и пределами суммирования $a = 0$ и $b = 1$ (аналогично и для напряжений):

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta)];$$

$$w = \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta)]. \quad (16)$$

В данном случае задача будет разрешима, если на поверхностях тела компоненты заданных сил p_r, p_θ, p_z содержат тригонометрические функции $\cos \theta, \sin \theta, \cos \theta$ соответственно, например:

$$R = r^m z^k (1 - p \cos \theta); \quad m, k \in N; \quad p \in Z. \quad (17)$$

В противном случае коэффициенты Фурье (12) будут равны нулю.

Если формировать базис из правых частей выражений (13):

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \sin(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [v_n \cos(n\theta)];$$

$$w = \sum_{n=a}^b [w_n \sin(n\theta)], \quad (18)$$

то решение существует, если силы p_r, p_θ, p_z содержат тригонометрические функции $\cos \theta, \sin \theta, \cos \theta$ соответственно.

Если в выражениях (16) и (18) использовать пределы суммирования $a = 1$ и $b = 1$, то для заданных поверхностных сил вида (17) решения не существует, в этом случае приближенное решение задачи ищется для заданных функций вида $r^m z^k p \cos \theta$ или $r^m z^k p \sin \theta$.

В случае, когда заданные силы имеют вид

$$r^m z^k (\cos \theta + \sin \theta), \quad (19)$$

уже необходимо использовать выражения (13) в полной мере с пределами суммирования $a = 0$ и $b = 1$. При этом возможно получение не только приближенных, но и строгих решений.

Если при \sin и \cos в выражении (19) разные коэффициенты, например $r^m z^k (p \cos \theta + h \sin \theta)$, $p \neq h$, то решения не существует. Это связано с одинаковыми коэффициентами (единица) при соответствующих функциях в базисных выражениях (13), (14). В этом случае целесообразно воспользоваться принципом независимости дей-

ствия сил и решить две отдельные задачи, в каждой из которых заданы $r^m z^k p \cos \theta$ и $r^m z^k h \sin \theta$, а полученные упругие поля сложить.

В случае, когда заданные силы зависят от $\sin n\theta$ или $\cos n\theta$, $n = 1, 2, 3, \dots$, то в выражениях (13), (16), (18) необходимо использовать пределы суммирования $a = b = n$.

Для последнего случая и приведем пример решения задачи.

Цилиндр жестко закреплен по верхнему торцу. На нижнем торце действуют усилия $\mathbf{p} = \{0, r \cos 2\theta, r^3 \sin 2\theta\}$ (рис. 2).

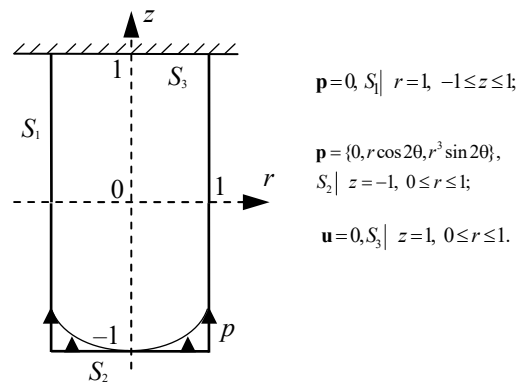


Рис. 2. Граничные условия к задаче для цилиндра

Fig. 2. Boundary conditions to the problem for a cylinder

После процедуры ортонормирования и исключения линейно-зависимых элементов базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в табл. 1 (показано 6 элементов). В табл. 1 и 2 истинное значение показанной величины равно показанному значению, умноженному на k .

Усеченная до $N = 6$ матрица коэффициентов β_{ij} (11) представлена в табл. 2 (i – строка, j – столбец).

При решении использовался базис из 71 элемента. Приведем значения для восьми коэффициентов Фурье:

$$c_1 = -0,11309; \quad c_2 = -0,0743; \quad c_3 = 0,21027;$$

$$c_4 = 0,02882; \quad c_5 = -0,25717; \quad c_6 = -0,15268;$$

$$c_7 = -0,03611; \quad c_8 = 0,1477.$$

График, иллюстрирующий «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя), представлен на рис. 3. Это является косвенным признаком сходимости решения.

Искомые характеристики упругого поля определяются по зависимостям (9).

Проверка результата и оценка точности осуществляются сопоставлением заданных ГУ с восстановленными граничными условиями в результате решения (рис. 4). Здесь и далее на графиках заданные (| | | |) и восстановленные (—) ГУ изображены в масштабе. Например, истинное значение p_r на левом

Перемещения ортонормированного базиса ($\kappa = 10^{-3}$)

Displacements of an orthonormal basis ($\kappa = 10^{-3}$)

| ξ | U | v | w |
|---------|--|---|-------------------------|
| ξ_1 | $131r \sin 2\theta$ | $131r \cos 2\theta$ | 0 |
| ξ_2 | $143rz \sin 2\theta$ | $143rz \cos 2\theta$ | $66r^2 \sin 2\theta$ |
| ξ_3 | $-178rz \sin 2\theta$ | $-178rz \cos 2\theta$ | $200r^2 \sin 2\theta$ |
| ξ_4 | $-(8r + 47r^3 - 132rz^2) \sin 2\theta$ | $-(8r + 23r^3 - 132rz^2) \sin 2\theta$ | $132r^2 z \sin 2\theta$ |
| ξ_5 | $(11r + 6r^3 - 266rz^2) \sin 2\theta$ | $(11r + 147r^3 - 266rz^2) \sin 2\theta$ | $251r^2 z \sin 2\theta$ |
| ξ_6 | $(185r - 52r^3 - 14rz^2) \sin 2\theta$ | $(185r - 225r^3 - 14rz^2) \sin 2\theta$ | $137r^2 z \sin 2\theta$ |

Таблица 2/Table 2

Матрица коэффициентов β_{ij} ($\kappa = 10^{-2}$)

Coefficients matrix β_{ij} ($\kappa = 10^{-2}$)

| | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | -14,537 | -11,687 | -27,86 | 1,567 | 0,247 | -27,402 | 15,066 |
| 14,537 | 1 | -32,307 | -21,544 | -25,096 | -9,843 | -27,518 | -9,731 |
| 11,687 | 32,307 | 1 | 39,493 | -33,379 | -19,345 | 22,967 | -55,473 |
| 27,86 | 21,544 | -39,493 | 1 | -41,755 | -14,774 | -13,841 | -31,805 |
| -1,567 | 25,096 | 33,379 | 41,755 | 1 | -9,349 | 20,157 | -33,541 |
| -0,247 | 9,843 | 19,345 | 14,774 | 9,349 | 1 | 2,769 | 1,029 |
| -27,402 | 27,518 | -22,967 | 13,841 | -20,157 | -2,769 | 1 | -13,668 |
| -15,066 | 9,731 | 55,473 | 31,805 | 33,541 | -1,029 | 13,668 | 1 |

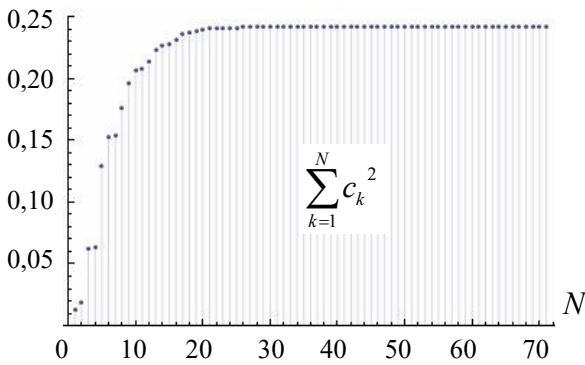


Рис. 3. Сумма Бесселя

Fig. 3. Bessel sum

графике рис. 4 равно значению на графике, умноженному на коэффициент κ . С целью выявления максимальной погрешности, угол θ выбран таким образом, чтобы тригонометрические функции имели максимальные значения.

На рис. 5 показана верификация граничных условий в зависимости от угловой координаты θ для нену-

левых компонент заданной распределенной силы на поверхности S_2 .

Характеристики полученного напряженно-деформированного состояния, имеющие полиномиальный вид, представлены в виде изолиний на рис. 6 (в явном виде необозримы). Истинное значение показанной величины равно соответствующему значению на изолиниях, умноженному на коэффициент κ . На изолиниях рис. 6, *a*, показана область $0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1$. На рис. 6, *b*, показаны изолинии некоторых компонент тензора напряжений в зависимости от угловой координаты θ . Показано сечение $z = -1$.

Полученные компоненты упругого поля удовлетворяют всем уравнениям теории упругости для трансверсально-изотропного тела (1)–(4).

Таким образом, в работе сформулирована методика решения неосесимметричных краевых задач смешанного типа для трансверсально-изотропных тел вращения в случае, когда ненулевые усилия или перемещения точек границы заданы по циклическому закону. Методика представляет собой развитие метода граничных состояний, а именно представлен новый способ формирования

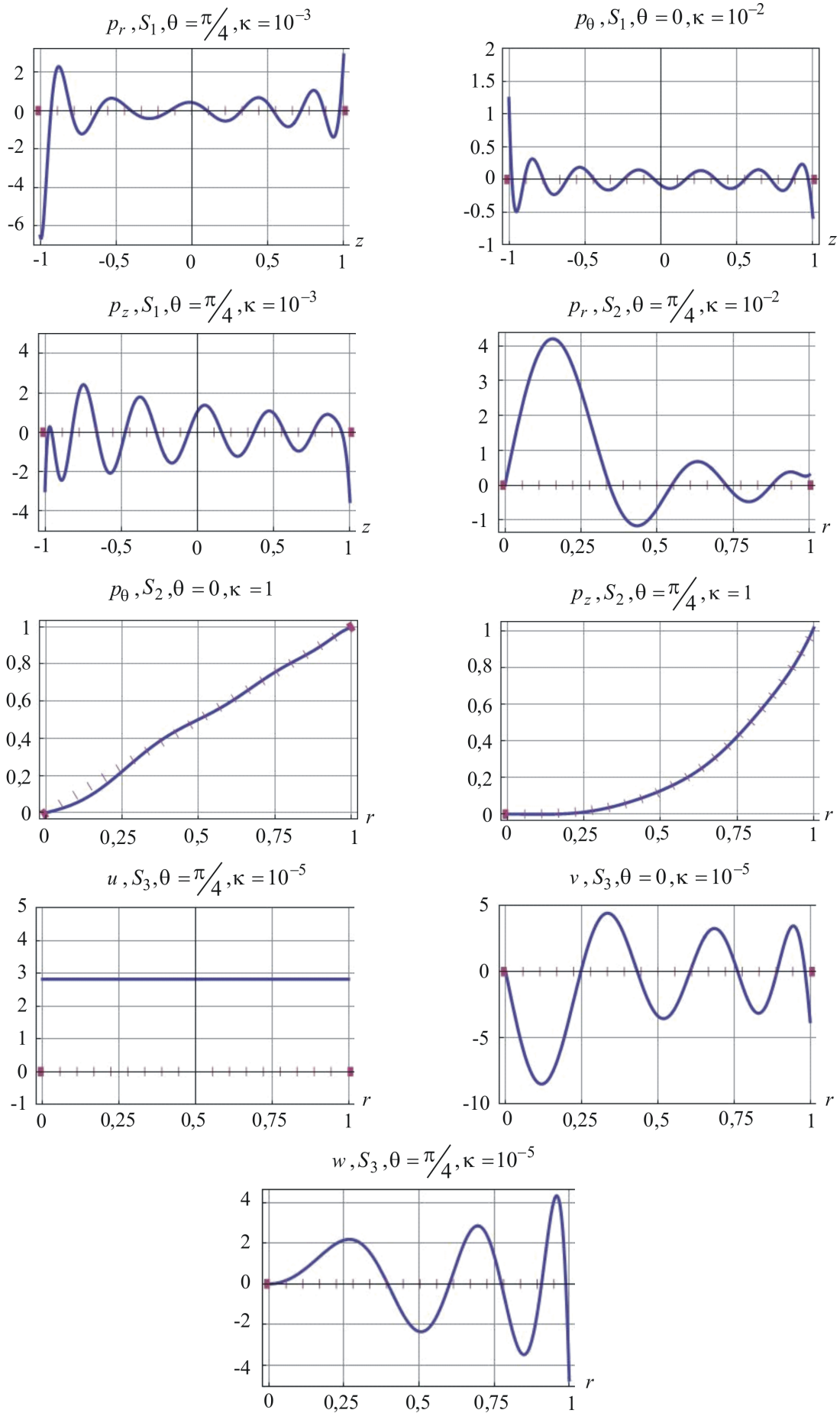


Рис. 4. Верификация граничных условий на участках поверхности

Fig. 4. Verification of boundary conditions on surface areas

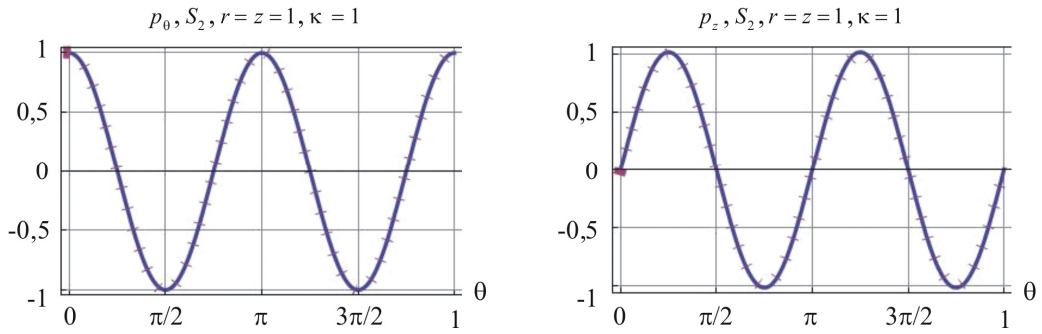
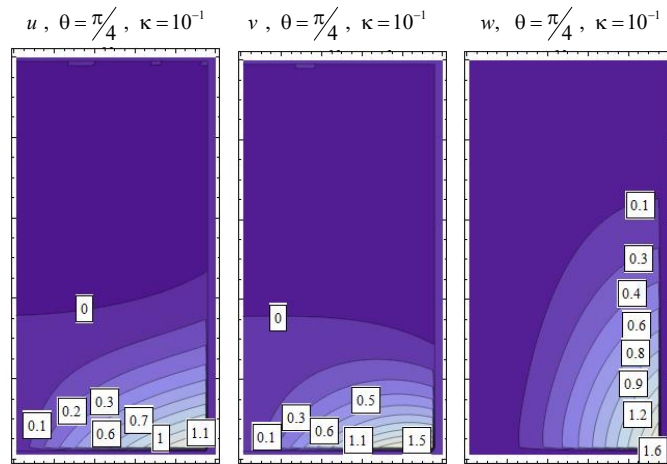
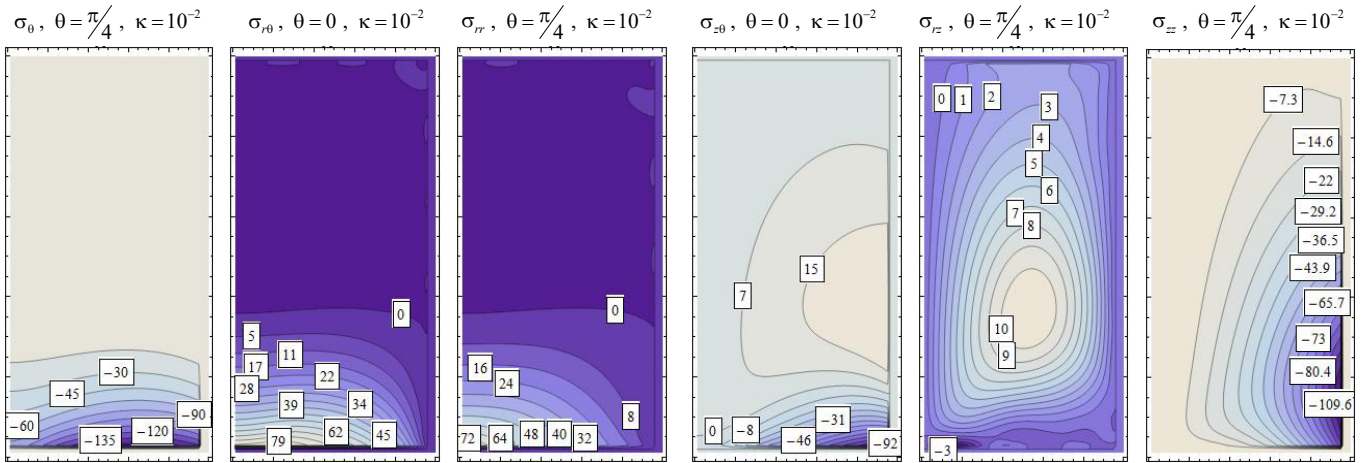
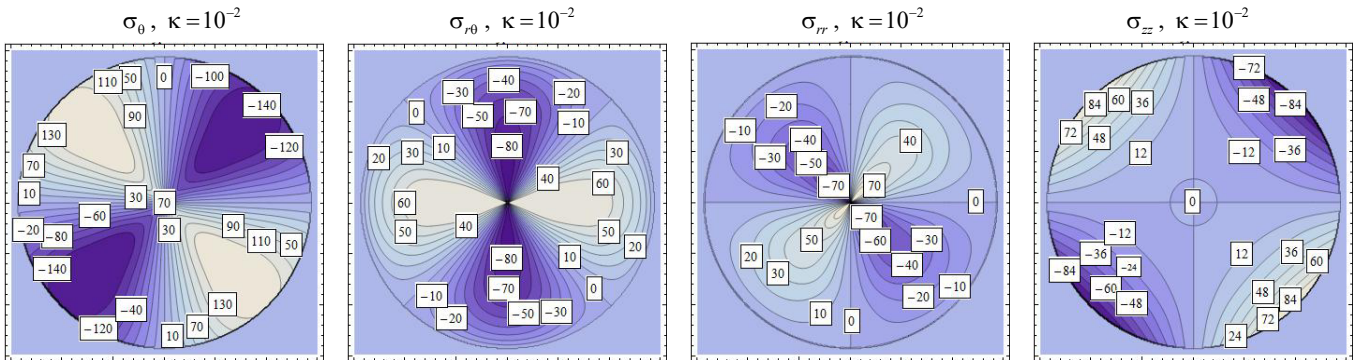


Рис. 5. Верификация граничных условий на участке границы S_2 в зависимости от угловой координаты
 Fig. 5. Verification of the boundary conditions at the border section S_2 depending on the angular coordinate



a



b

Рис. 6. Изолинии компонент полученного упругого поля
 Fig. 6. Isolines of the components of the obtained elastic field

базиса внутренних состояний, основанный на общем решении задачи о плоской деформации. Исследован прием декомпозиции базиса под условия конкретной задачи.

Предложенная методика, однако, не является общей для любого класса рассматриваемых областей (одно-связных и многосвязных). Скорость сходимости рядов

Библиографический список

1. Фукалов А.А., Кутергин А.В. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (4). – С. 25–26.
2. Стружанов В.В. Сагдуллаева Д.А. Осесимметричные деформации трансверсально-изотропного цилиндрического слоя под действием нормального давления // Вестник СПбГУ. – 2015. – Серия 1. – Т. 2 (60). – Вып. 3. – С. 426–430.
3. Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. – 2015. – № 1. – С. 3–13. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13.
4. Круподеров А.В. Функции Грина для трансверсально-изотропных оснований // Вестник БНТУ. – 2011. – № 5. – С. 54–60.
5. Пожарский Д.А., Давтян Д.Б. Трёхмерная контактная задача для трансверсально изотропного тела // Вестник ДГТУ. – 2013. – № 7/8 (75). – С. 22–26. DOI: 10.12737/2016.
6. Ахмедов Н.К., Мехтиев М.Ф., Шахвердиева Г.Н. Анализ осесимметричной задачи теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки // Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. – 2015. – № 2. – С. 5–11.
7. Игумнов Л.А., Марков И.П., Пазин В.П. Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропной теории упругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. – № 1 (3). С. 115–119.
8. Семькина Т.Д., Цуканова Л.П. Расчет предельных нагрузок для конструкций из трансверсально-изотропных материалов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 4. – С. 233–236.
9. Кодиров А.У. Решение задач для упругопластических трансверсально-изотропных тел // Бюллетень науки и практики. – 2015. – Т. 5, № 2. – С. 10–13. DOI: 10.33619/2414-2948/39/01.
10. Станкевич И.В. Численное решение смешанных задач теории упругости с односторонними связями // Математика и математическое моделирование. – 2017. – № 5. – С. 40–53. DOI: 10.24108/mathm.
11. Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицина Г.И. Смешанная плоская задача теории упругости для двухслойной кольцевой области // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. – 2011. – № 1 (11). – С. 217–221.
12. Соболев Б.В. Об асимптотических решениях трехмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (4). – С. 1778–1780.
13. Станкевич И.В. Математическое моделирование задач теории упругости с использованием МКЭ на основе

зависит от граничных условий и условий внутри области, а так же от геометрии тела.

Решение является аналитическим и имеет полиномиальный вид, что позволяет легко проводить анализ полученных характеристик напряженно-деформированного состояния.

функционала Рейсснера // Символ науки. – 2017. – № 4 (2). – С. 21–25.

14. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Применение метода граничных состояний для решения основной смешанной задачи линейного континуума // Известия Тульского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2000. – Т. 6, № 2. – С. 124–127.

15. Пеньков В.Б., Саталкина Л.В., Шульмин А.С. Основная смешанная задача для сферической полости в упругом пространстве // Известия Тульского государственного университета. Серия: Естественные науки. – 2014. – Вып. 1. – Ч. 1. – С. 207–215.

16. Пеньков В.Б., Новикова О.С., Левина Л.В. Построение полнопараметрических аналитических решений в основной смешанной задаче эластостатики односвязного тела. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 586–598. DOI: 10.14498/vsgtu1603.

17. Penkov V.B., Polikarpov M.V., Levina L.V. Efficient solutions of mixed-type axial symmetry problems for perfect fluids. Proceedings – 2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2020. – 2020. – P. 52–55. DOI: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280583.

18. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении первой основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 66. – С. 96–111. DOI: 10.17223/19988621/66/8.

19. Ivanychev D.A. The solution of boundary value problems of various types with consideration of volume forces for anisotropic bodies of revolution // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. – 2021. – № 4 (97). – С. 59–70. DOI: 10.18698/1812-3368-2021-4-57-70.

20. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2019. – № 61. – С. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.

21. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний при решении смешанной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. – № 71. – С. 63–77. DOI: 10.17223/19988621/71/6.

22. Solving the mixed problem of elasticity theory with mass forces for transversal-isotropic body. Proceedings – 2020 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2020. – P. 56–61. DOI: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280697.

23. Иванычев Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Вестник Пермского национального исследователь-

ского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.

24. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). – М.: Наука, 1978. – 464 с.

25. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

26. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

27. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т. 2, № 2. – С. 115–137.

References

1. Fukalov A.A., Kutergin A.V. Tochnyye analiticheskiye resheniya zadach o ravновесии uprugikh anizotropnykh tyazhelykh tel s tsentral'noy i osevoy simmetriyey i ikh prilozheniya [Exact analytical solutions of equilibrium problems for elastic anisotropic heavy bodies with central and axial symmetry and their applications]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2011, no 4 (4), pp. 25–26.

2. Struzhanov V.V. Sagdullayeva D.A. Osesimmetrichnyye deformatsii transversal'no-izotropnogo tsilindricheskogo sloya pod deystviyem normal'nogo davleniya [Axisymmetric deformations of a transversely isotropic cylindrical layer under normal pressure]. *Vestnik SPbGU*, 2015, series 1, vol. 2 (60), iss. 3, pp. 426–430.

3. Algazin O.D., Kopayev A.V. Resheniye smeshannoy krayevoy zadachi dlya uravneniya Laplasya v mnogomernom beskonечnom sloye [Solution of a mixed boundary value problem for the Laplace equation in a multidimensional infinite layer]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Yestestvennyye nauki*, 2015, no. 1, pp. 3–13. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13.

4. Krupoderov A.V. Funktsii Grina dlya transversal'no-izotropnykh osnovaniy [Green's functions for transversally isotropic bases]. *Vestnik BNTU*, 2011, no. 5, pp. 54–60.

5. Pozharskiy D.A., Davtyan D.B. Trokhmernaya kontaktnaya zadacha dlya transversal'no izotropnogo tela [Three-dimensional contact problem for a transversally isotropic body]. *Vestnik DGTU*, 2013, № 7/8 (75), pp. 22–26. DOI: 10.12737/2016.

6. Akhmedov N.K., Mekhtiyev M.F., Shakhverdiyeva G.N. Analiz osesimmetrichnoy zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnoy transversal'no-izotropnoy konicheskoy obolochki [Analysis of the axisymmetric problem of the theory of elasticity for an inhomogeneous transversely isotropic conical shell]. *Izvestiya vuzov. Severo-kavkazskiy region. Yestestvennyye nauki*, 2015, no. 2, pp. 5–11.

7. Igumnov L.A., Markov I.P., Pazin V.P. Granichno-elementnoye resheniye krayevykh zadach trekhmernoy anizotropnoy teorii uprugosti [Boundary element solution of boundary value problems of three-dimensional anisotropic theory of elasticity]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2013, no 1 (3), pp. 115–119.

8. Semykina T.D., Tsukanova L.P. Raschet predel'nykh nagruzok dlya konstruktivnykh iz transversal'no-izotropnykh materialov [Calculation of ultimate loads for structures made of transversely isotropic materials]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2011, vol. 7, no 4, pp. 233–236.

9. Kodirov A.U. Resheniye zadach dlya uprugoplasticheskikh transversal'no-izotropnykh tel [Solving problems for elastoplastic transversely isotropic bodies]. *Byulleten' nauki i praktiki*, 2015, vol. 5, no. 2, pp. 10–13. DOI: 10.33619/2414-2948/39/01.

28. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

29. Саталкина Л.В. Нарастивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. – Липецк: ЛГТУ, 2007. – С. 130–131.

30. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник ЛГТУ. – 2016. – № 2 (28). – С. 16–24.

10. Stankevich I.V. Chislennoye resheniye smeshannykh zadach teorii uprugosti s odnostoronnimi svyazyami [Numerical solution of mixed problems of elasticity theory with one-way connections]. *Matematika i matematicheskoy modelirovaniye*, 2017, no. 5, pp. 40–53. DOI: 10.24108/mathm.

11. Bozhkova L.V., Ryabov V.G., Noritsina G.I. Smeshannaya ploskaya zadacha teorii uprugosti dlya dvukhsloynoy kol'tsevoy oblasti [Mixed plane problem of the theory of elasticity for a two-layer annular region]. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI*, 2011, no. 1 (11), pp. 217–221.

12. Sobol' B.V. Ob asimptoticheskikh resheniyakh trekhmernykh staticheskikh zadach teorii uprugosti so smeshannymi granichnymi usloviyami [On asymptotic solutions of three-dimensional static problems of elasticity theory with mixed boundary conditions]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2011, no. 4 (4), pp. 1778–1780.

13. Stankevich I.V. Matematicheskoye modelirovaniye zadach teorii uprugosti s ispol'zovaniyem MKE na osnove funktsionala Reyssnera [Mathematical modeling of problems of elasticity theory using FEM based on the Reissner functional]. *Simvol nauki*, 2017, no. 4 (2), pp. 21–25.

14. Penkov V.B., Penkov V.V. Primeneniye metoda granichnykh sostoyaniy dlya resheniya osnovnoy smeshannoy zadachi lineynogo kontinuum [Application of the method of boundary states for solving the main mixed problem of linear continuum]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2000, vol. 6, no. 2, pp. 124–127.

15. Penkov V.B., Satalkina L.V., Shulmin A.S. Osnovnaya smeshannaya zadacha dlya sfericheskoy polosti v uprugom prostranstve [The main mixed problem for a spherical cavity in elastic space]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Yestestvennyye nauki*, 2014, iss. 1, part 1, pp. 207–215.

16. Pen'kov V.B., Novikova O.S., Levina L.V. Postroyeniye polnparametricheskikh analiticheskikh resheniy v osnovnoy smeshannoy zadache elastostatiki odnosvyaznogo tela [Construction of full-parameter analytical solutions in the main mixed problem of elastostatics of a simply connected body]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskiye nauki*, 2018, vol. 22, no 3, pp. 586–598. DOI: 10.14498/vsgtu1603.

17. Penkov V.B., Polikarpov M.V., Levina L.V. Efficient solutions of mixed-type axial symmetry problems for perfect fluids. *Proceedings – 2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2020*, 2020, pp. 52–55. DOI: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280583.

18. Ivanychev D.A. Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii pervoy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [The method of boundary states in solving the first main problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2020, no. 66, pp. 96–111. DOI: 10.17223/19988621/66/8.

19. Ivanychev D.A. The solution of boundary value problems of various types with consideration of volume forces for anisotropic bodies of revolution. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Yestestvennyye nauki*, 2021, no. 4 (97), pp. 59–70. DOI: 10.18698/1812-3368-2021-4-57-70.

20. Ivanychev D.A. Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii vtoroy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [The method of boundary states in solving the second main problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2019, no. 61, pp. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.

21. Ivanychev D.A. Metod granichnykh sostoyaniy pri reshenii smeshannoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [The method of boundary states in solving a mixed problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2021, no. 71, pp. 63–77. DOI: 10.17223/19988621/71/6.

22. Solving the mixed problem of elasticity theory with mass forces for transversal-isotropic body. *Proceedings – 2020 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2020*, 2020, pp. 56–61. DOI: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280697.

23. Ivanychev D.A. Resheniye kontaktnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya s massovymi

silami [The contact problem Solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.

24. Aleksandrov A.Ia., Solov'ev Iu.I. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo) [Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. *Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fizikomatematicheskoi literatury*, 1978, 464 p.

25. Novatskii V. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Mir*, 1975, p. 872.

26. Lur'ye A.I. Teoriya uprugosti. [Theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1970, p. 940.

27. Penkov V.B., Penkov V.V. Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineinoy mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137.

28. Lekhnitskii S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [The theory of elasticity of an anisotropic body]. *Moscow, Nauka*, 1977, 416 p.

29. Satalkina L.V. Narashchivaniye bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoyemkosti vychisleniy [Increasing the basis of the state space under severe constraints on the energy intensity of calculations]. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov LGTU. Lipetsk: LGTU*, 2007, pp. 130–131.

30. Levina L.V., Novikova O.S., Penkov V.B. Polnoparametricheskoye resheniye zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennogo tela [Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik LGTU*, 2016, no. 2 (28), pp. 16–24.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Financing. The study was not sponsored.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.