



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.2.10

УДК 539.3

## КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ

Д.А. Пожарский<sup>1</sup>, Н.Б. Золотов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону, Россия

<sup>2</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 07 февраля 2022 г.

Одобрена: 23 июня 2022 г.

Принята к публикации:

04 июля 2022 г.

### Ключевые слова:

теория упругости, контактные задачи, интегральные уравнения, трансверсальная изотропия, слой, скользящая заделка.

### АННОТАЦИЯ

Рассматриваются две пространственные, одна осесимметричная и две плоские контактные задачи для трансверсально-изотропного упругого слоя, одна грань которого находится в условиях скользящей заделки. В пространственных и плоских контактных задачах плоскости изотропии могут быть параллельны или перпендикулярны граням слоя. В случае осевой симметрии плоскости изотропии параллельны граням слоя. При помощи интегрального преобразования Фурье контактные задачи сводятся к интегральным уравнениям относительно контактного давления, из которых предельными переходами можно получить известные уравнения соответствующих задач для изотропного слоя. Для решения пространственных задач с неизвестной областью контакта применяется метод нелинейных граничных интегральных уравнений, который позволяет одновременно определить контактные давления и область контакта. При выделении главной части ядра интегрального уравнения пространственной задачи, когда плоскости изотропии перпендикулярны граням слоя, используется полученное ранее в форме, свободной от квадратур, ядро интегрального уравнения соответствующей контактной задачи для трансверсально-изотропного полупространства. Интегральное уравнение осесимметричной задачи при помощи метода парных уравнений сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, для численного решения которого применяется метод механических квадратур. Получены замкнутые решения плоских контактных задач, основанные на специальных аппроксимациях символов ядер. Точность аппроксимаций возрастает с увеличением анизотропии. При этом уровень анизотропии можно охарактеризовать отклонением отношения корней характеристического уравнения от единицы, соответствующей изотропному случаю. Расчеты механических характеристик и погрешностей аппроксимаций сделаны для известных трансверсально-изотропных материалов.

© ПНИПУ

© Пожарский Дмитрий Александрович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: pozharda@rambler.ru,

ИД: 0000-0001-6372-1866.

Золотов Никита Борисович – асс., e-mail: zolotov.nikita.borisovich@gmail.com, ИД: 0000-0002-2193-0616.

Dmitrii A. Pozharskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department,

e-mail: pozharda@rambler.ru, ИД: 0000-0001-6372-1866.

Nikita B. Zolotov – Assistant, e-mail: zolotov.nikita.borisovich@gmail.com, ИД: 0000-0002-2193-0616.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## CONTACT PROBLEMS FOR A TRANSVERSELY ISOTROPIC LAYER

D.A. Pozharskii, N.B. Zolotov

<sup>1</sup>Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation<sup>2</sup>Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 07 February 2022  
Approved: 23 June 2022  
Accepted for publication: 04 July 2022

## Keywords:

contact problems, elasticity theory,  
integral equations, transversal  
isotropy, layer, sliding support.

## ABSTRACT

Two spatial, one axisymmetric and two plane contact problems are considered for a transversely isotropic elastic layer with one face subjected to sliding support. In the spatial and plane contact problems, the planes of isotropy may be either parallel or perpendicular to the layer faces. In the case of axial symmetry, the planes of isotropy are parallel to the layer faces. By using Fourier integral transforms, the contact problems are reduced to integral equations with respect to the contact pressure, the limiting cases of which are the well-known equations of the corresponding problems for an isotropic layer. For solving the spatial problems with unknown contact domains, the nonlinear boundary integral equations method is used, which make it possible to determine the contact pressure and the contact domain simultaneously. To extract the kernel principal part of the spatial problem integral equation when the isotropy planes are perpendicular to the layer faces, it is used the kernel of the integral equation of the corresponding contact problem for a transversely isotropic half-space obtained earlier without quadratures. The integral equation of the axially symmetric problem is reduced to a Fredholm integral equation of the second kind with the help of the method of pair equations, and the method of mechanical quadratures is used for numerical solutions. Plane problems are solved in a closed form based on special approximations of the kernel symbols. The approximations accuracy grows as anisotropy increases. Here, the anisotropy level can be characterized by the difference between ratio of a characteristic equation roots and unit because the unit value corresponds to the isotropic case. Mechanical characteristics as well as errors of the approximations are calculated for well-known transversely isotropic materials.

© PNRPU

В современном мире контактные задачи возникают постоянно, например, при касании пальцем экрана смартфона [1], пальпационной томографии [2]. Задачи механики анизотропных материалов, контактные задачи важны для развития современной промышленности и занимают важное место в современной мировой науке [3–9]. Аналитические методы и подходы к решению контактных задач были развиты в исследованиях [10–14]. Контактные задачи для функционально-градиентных материалов исследовались в работах [15–18]. Проблемы множественного, дискретного и периодического контакта рассматривались в работах [19–21]. Учет дополнительных факторов при контактном взаимодействии (температура, адгезия) проводился в статьях [22–25]. Изучались контактные задачи для трансверсально-изотропного полупространства как с параллельными [26] или перпендикулярными [27; 28] границе плоскостями изотропии, так и с произвольно ориентированными плоскостями изотропии [29]. Отметим, что для случая параллельных границе плоскостей ядро интегрального уравнения контактной задачи отличается только множителем от соответствующего уравнения для изотропного случая, тогда как для случая перпендикулярных границе плоскостей ядро усложняется и теряет симметрию, осесимметричная формулировка становится невозможной [27]. В работе [28] ядро интегрального уравнения «нетрадиционной» [27] контактной задачи для трансверсально-изотропного полупространства получено в форме, свободной от квадратур, на основе теории обобщенных функций. Исследовались как взаимодействие жестких штампов на транс-

тропном полупространстве [30], так и контакт двух упругих трансропных тел [31]. Асимптотические решения контактных задач для изотропного слоя приведены в работе [11]. Задача о действии кругового штампа на трансропный слой (плоскости изотропии параллельны его граням) на основе оригинального метода последовательных приближений рассматривается в исследовании [32]. Интегральные уравнения контактных задач для трансропного тела связаны с интегральными уравнениями задач о трещинах в подобных телах [33]. В настоящей статье фундаментальное решение для трансропного полупространства в форме, свободной от квадратур [28], используется для выделения главной части ядра интегрального уравнения трехмерной контактной задачи для трансропного слоя, что позволяет эффективно рассчитать ядро. В связи с тем что эффективность регулярного асимптотического метода решения контактных задач [11], как правило, падает с ростом анизотропии, для плоских задач предлагается метод специальной аппроксимации символа, приводящий к замкнутому решению, эффективность которого увеличивается при возрастании анизотропии.

## 1. Пространственные контактные задачи

Рассмотрим трансверсально-изотропный упругий слой  $\{x| < \infty, y| < \infty, 0 \leq z \leq h\}$ , в верхнюю грань которого без перекося вдавливаются жесткий штамп под действием силы  $P$ . Форма основания штампа описывается функцией  $f(x, y)$ , осадка штампов равна  $\delta$ . Нижняя

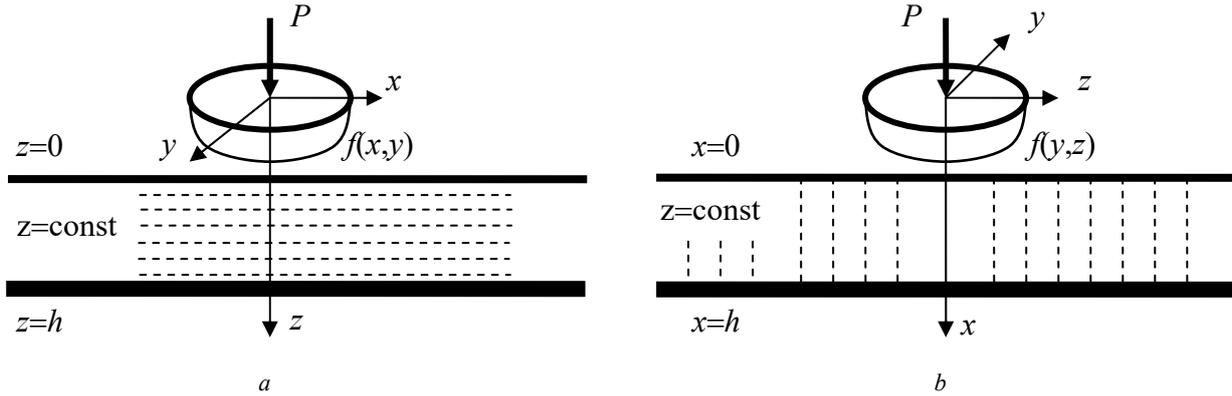


Рис. 1. Схема контакта в задачах А (а) и Б (b)  
Fig. 1. Scheme of contact in problems A (a) and B (b)

грань слоя лежит без трения на недеформируемом основании (скользящая заделка). Плоскости изотропии  $z = \text{const}$  параллельны граням слоя (задача А, рис. 1, а). Рассмотрим аналогичную задачу Б для слоя  $\{0 \leq x \leq h, |y| < \infty, |z| < \infty\}$ , которая отличается от задачи А направлением осей координат и тем, что плоскости изотропии  $z = \text{const}$  перпендикулярны граням слоя (рис. 1, б).

Для обеих задач закон Гука имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_y &= (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= A_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = A_{66} \frac{\partial u_x}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \tau_{yz} &= A_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} + A_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = A_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} + A_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x}. \end{aligned}$$

В частном случае изотропного тела в формулах (1) следует положить ( $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона)

$$A_{11} = A_{33} = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad A_{13} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \quad A_{44} = A_{66} = G. \quad (2)$$

Граничные условия задачи А имеют вид ( $\Omega$  — область контакта)

$$\begin{aligned} z=0: \quad & u_z = \delta - f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega; \\ \sigma_z &= 0, \quad (x,y) \notin \Omega; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \\ z=h: \quad & u_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а для задачи Б

$$\begin{aligned} x=0: \quad & u_x = \delta - f(y,z), \quad (y,z) \in \Omega; \\ \sigma_x &= 0, \quad (y,z) \notin \Omega; \quad \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0, \\ x=h: \quad & u_x = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При заданных параметрах упругости  $A_{mn}$ , известных величинах  $h, \delta$ , функции  $f(x,y)$  (задача А) или  $f(y,z)$  (задача Б) требуется определить область контакта  $\Omega$  и контактное давление  $\sigma_z(x,y,0) = -q(x,y)$  ( $(x,y) \in \Omega$ , задача А) или  $\sigma_x(0,y,z) = -q(y,z)$  ( $(y,z) \in \Omega$ , задача Б), затем при использовании интегрального условия равновесия штампов может быть найдена сила  $P$ .

Для сведения задач с граничными условиями (3) и (4) к интегральным уравнениям следует рассмотреть вспомогательные задачи типа Буссинеска о действии заданной сосредоточенной силы на грани слоя при разных ориентациях плоскостей изотропии. Решения таких задач находятся при помощи двойных преобразований Фурье. Получив вспомогательные решения, интегрируем выражения для нормальных перемещений по области контакта и удовлетворяем первому граничному условию (1.3) или (1.4). Для задачи А придем к интегральному уравнению ( $(x,y) \in \Omega$ )

$$\iint_{\Omega} q(\xi, \eta) K(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta = 2\pi\theta h [\delta - f(x,y)],$$

$$K(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{L_1(w)}{w} \cos\left(s \frac{x}{h}\right) \cos\left(t \frac{y}{h}\right) ds dt, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} L_1(w) &= \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 \text{cth}(w/\gamma_1) - \gamma_2 \text{cth}(w/\gamma_2)}, \\ \theta &= \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}{A_{11}(\gamma_1 + \gamma_2)}, \quad w = \sqrt{s^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Для задачи Б аналогичное уравнение имеет вид ( $(y,z) \in \Omega$ )

$$\iint_{\Omega} q(\xi, \eta) K_1(y-\xi, z-\eta) d\xi d\eta = 2\pi A_{66} h [\delta - f(y,z)],$$

$$K_1(y,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} M(s,t) \cos\left(s \frac{z}{h}\right) \cos\left(t \frac{y}{h}\right) ds dt,$$

$$M(s,t) = \frac{(m_2 - m_1)\gamma_3^2 s^2 \zeta_1 \zeta_2}{D}, \quad (6)$$

$$D = m_2 h_1^2 \zeta_2 \operatorname{cth} \zeta_1 - m_1 h_2^2 \zeta_1 \operatorname{cth} \zeta_2 + 4(m_1 - m_2) t^2 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \operatorname{cth} \zeta_3,$$

$$m_l = \frac{A_{11} \gamma_l^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}}, \quad h_l = (m_l + 1) \gamma_3^2 s^2 + 2t^2 \quad (l=1,2),$$

$$\zeta_l = \sqrt{\gamma_l^2 s^2 + t^2} \quad (l=1,2,3).$$

Здесь  $\gamma_l$  ( $l=1,2$ ) — корни характеристического уравнения (возможно, комплексно сопряженные,  $\operatorname{Re} \gamma_l > 0$ ) [4; 27]

$$\gamma^4 A_{11} A_{44} - \gamma^2 [A_{11} A_{33} - A_{13} (A_{13} + 2A_{44})] + A_{33} A_{44} = 0, \quad (7)$$

$$\gamma_3 = \sqrt{A_{44} / A_{66}}.$$

Ввиду положительной определенности матрицы упругих постоянных  $\theta > 0$  [5]. При переходе к изотропному материалу в формулах (5) следует учесть соотношения (2) и пределы

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} L_1(w) = L(w) = \frac{\operatorname{ch} 2w - 1}{\operatorname{sh} 2w + 2w}, \quad \lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \theta = \frac{G}{1 - \nu}, \quad (8)$$

что приводит к известному интегральному уравнению контактной задачи для изотропного слоя [11]. Соответствующий предельный переход возможен и из формул (6). При  $h \rightarrow \infty$  функции-символы ядер (5) и (6) переходят в известные для трансформного полупространства [27; 28; 32] ( $L_1(w)$  переходит в 1, в  $M(s, t)$  исчезают котангенсы).

Для символа в задаче А выполняется асимптотика

$$L_1(w) - 1 = O(\exp(-2/\gamma_1)) \quad (w \rightarrow \infty, \gamma_1 > \gamma_2). \quad (9)$$

Символ в задаче Б обладает важными асимптотическими свойствами: поведение в бесконечности по одному из аргументов связано с поведением в нуле по другому аргументу. Именно, если один из аргументов фиксирован,

$$M(s, t) \rightarrow \frac{B_1}{t} L(t) \quad (s \rightarrow 0),$$

$$B_1 = \frac{\gamma_3^2 (m_2 - m_1)}{2(\gamma_3^2 (m_2 - m_1) - m_2 \gamma_1^2 + m_1 \gamma_2^2)},$$

$$M(s, t) s \rightarrow B_2 \quad (s \rightarrow \infty),$$

$$B_2 = \frac{(m_2 - m_1) \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3^2 (m_1 + m_2 + 2)(\gamma_2 - \gamma_1)}, \quad (10)$$

$$M(s, t) \rightarrow \frac{B_2}{s} L_2(s) \quad (t \rightarrow 0);$$

$$M(s, t) t \rightarrow B_1 \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$L_2(s) = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 \operatorname{cth}(\gamma_2 s) - \gamma_2 \operatorname{cth}(\gamma_1 s)}.$$

Для решения задач А и Б применим метод нелинейных граничных интегральных уравнений (ГИУ) [14; 34; 35], в соответствии с которым уравнения (5), (6) по неизвестной области  $\Omega$  сводятся к нелинейным уравнениям по заданному прямоугольнику  $S$  со сторонами  $2b$  и

$2c$  ( $b \geq c$ ), содержащему  $\Omega$ . При численном решении нелинейных уравнений используется модифицированный метод Ньютона, область  $\Omega$  определяется по точкам разбиения  $S$ , в которых решение положительно. В ходе метода требуется рассчитать ядра (5), (6) в узлах решетки. Для эффективного проведения расчетов ниже выделим из ядер главные члены.

Введем безразмерные обозначения

$$x_* = \frac{x}{b}, \quad y_* = \frac{y}{b}, \quad z_* = \frac{z}{b},$$

$$q_*(x_*, y_*) = \frac{q(x, y)}{2\pi\theta}, \quad q_*(y_*, z_*) = \frac{q(y, z)}{2\pi A_{66}}, \quad \varepsilon = \frac{c}{b}, \quad (11)$$

$$\delta_* = \frac{\delta}{b}, \quad \lambda = \frac{h}{b},$$

$$f_*(x_*, y_*) = \frac{f(x, y)}{b}, \quad f_*(y_*, z_*) = \frac{f(y, z)}{b}, \quad \Omega \rightarrow \Omega_*$$

и т.д., звездочки далее опускаем. Параметр  $\lambda$  характеризует относительную толщину слоя.

Используя известную технику [14], асимптотику (9) и обозначения (11), преобразуем ядро (5) для задачи А к форме

$$K(x, y) = \frac{1}{R} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty [L_1(u) - 1] J_0\left(u \frac{R}{\lambda}\right) du, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (12)$$

где  $J_0(u)$  — функция Бесселя [36].

Для задачи Б, используя ядро соответствующей контактной задачи для полупространства в форме свободной от квадратур [28], представим ядро в виде

$$K_1(y, z) = M_1(y, z) + \frac{2}{\pi\lambda} \int_0^\infty \int_0^\infty [M(s, t) - M_1(s, t)] \cos\left(s \frac{z}{\lambda}\right) \cos\left(t \frac{y}{\lambda}\right) ds dt,$$

$$M_1(s, t) = \frac{(m_2 - m_1) \gamma_3^2 s^2 \zeta_1 \zeta_2}{D_1}, \quad (13)$$

$$D_1 = m_2 h_1^2 \zeta_2 - m_1 h_2^2 \zeta_1 + 4(m_1 - m_2) t^2 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3.$$

Важно, что в формулах (12) и (13) функции в квадратных скобках экспоненциально убывают на бесконечности.

Для расчетов выберем штампы в форме круговых параболоидов  $f(x, y) = A(x^2 + y^2)$  (задача А) и  $f(y, z) = A(y^2 + z^2)$  (задача Б). Возьмем следующие трансформные материалы (параметры упругости  $A_{ij}$  см. [4, с. 22–23]): древесина (ель Дугласа,  $\gamma_1^2 = 13,79$ ,  $\gamma_2^2 = 0,1227$ ,  $\gamma_3^2 = 0,7101$ ,  $m_1 = 76,22$ ,  $m_2 = 1/m_1$ ), гнейс влажный ( $\gamma_1^2 = 2,627$ ,  $\gamma_2^2 = 0,2999$ ,  $\gamma_3^2 = 0,5660$ ,  $m_1 = 4,085$ ,  $m_2 = 1/m_1$ ). На рис. 2 и 3 показаны зависимости безразмерной интегральной характеристики контактных

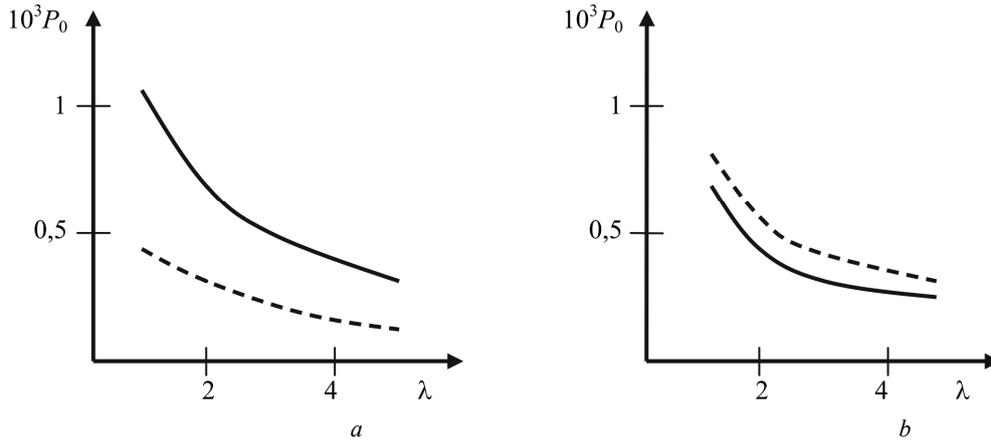


Рис. 2. Графики зависимостей  $P_0(\lambda)$  для древесины (а) и гнейса влажного (б) для задач А (сплошные линии) и Б (пунктир) при  $\delta=A=B=10^{-3}$

Fig. 2. Plots of relation  $P_0(\lambda)$  for wood (a) and gneiss rock water-saturated (b) for problems A (solid lines) and B (dashed) for  $\delta=A=B=10^{-3}$

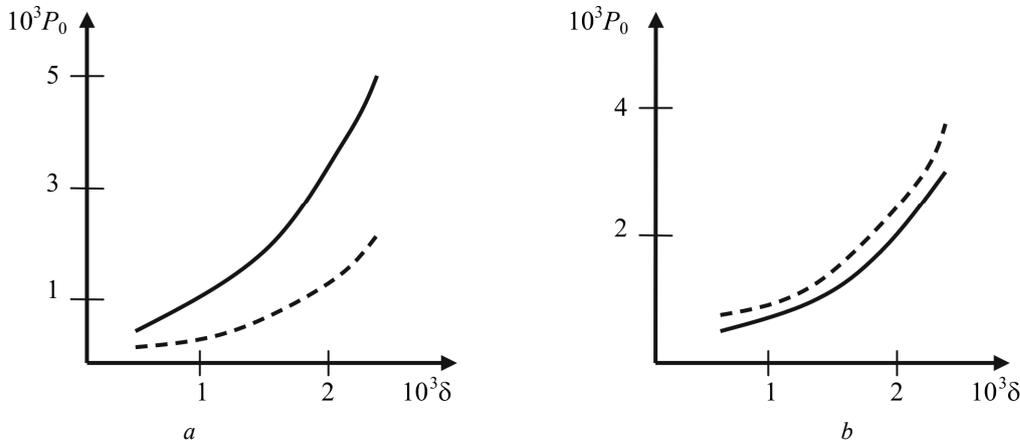


Рис. 3. Графики зависимостей  $P_0(\delta)$  для древесины (а) и гнейса влажного (б) для задач А (сплошные линии), Б (пунктир) при  $\lambda=1, A=B=10^{-3}$

Fig. 3. Plots of relation  $P_0(\delta)$  for wood (a) and gneiss rock water-saturated (b) for problems A (solid lines) and B (dashed) for  $\delta=A=B=10^{-3}$

давлений  $P_0 = P/\theta$  от относительной толщины слоя  $\lambda$  и осадки штампа  $\delta$  соответственно ( $\varepsilon = 1$ ). Как видим, вдавливающая сила может быть больше в одной из задач в зависимости от материала слоя. Интегральная характеристика уменьшается с ростом  $\lambda$  в связи с усилением влияния скользящей заделки нижней грани слоя (рис. 2) и возрастает с ростом осадки (рис. 3).

## 2. Осесимметричная контактная задача

Частный случай задачи А, когда выполнены условия осевой симметрии, назовем задачей В. Используя обозначения (11) при  $\varepsilon = 1$ , вводя полярные координаты [11], преобразуем интегральное уравнение задачи В к безразмерной форме

$$\int_0^a q_0(\rho) K_0(\rho, r) \rho d\rho = \frac{\lambda}{2\pi} [\delta - f_0(r)], \quad 0 \leq r < a, \quad (14)$$

$$K_0(\rho, r) = \int_0^\infty L_1(u) J_0\left(u \frac{\rho}{\lambda}\right) J_0\left(u \frac{r}{\lambda}\right) du,$$

где  $a$  – радиус области контакта,  $q_0(\rho)$  – контактное давление,  $f_0(r)$  – форма основания штампа.

Вводя новые функции  $A(u)$  и  $\varphi(t)$  по формулам

$$A(u) = L_1(u) \int_0^\infty q_0(\rho) J_0\left(u \frac{\rho}{\lambda}\right) \rho d\rho = L_1(u) \int_0^a \varphi(t) \cos\left(u \frac{t}{\lambda}\right) dt,$$

сведем уравнение (14) к парным уравнениям

$$\int_0^\infty A(u) J_0\left(u \frac{r}{\lambda}\right) du = \frac{\lambda}{2\pi} [\delta - f_0(r)], \quad 0 \leq r < a, \quad (15)$$

$$\int_0^\infty A(u) \frac{u}{L_1(u)} J_0\left(u \frac{r}{\lambda}\right) du = 0, \quad a < r < \infty.$$

Применяя для решения парных уравнений (15) известный метод [10], приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\varphi(s) - \frac{2}{\pi\lambda} \int_0^a \varphi(t) \int_0^\infty [1 - L_1(u)] \cos\left(u \frac{t}{\lambda}\right) \cos\left(u \frac{s}{\lambda}\right) du dt = F(s), \quad 0 \leq s \leq a,$$

$$F(s) = \frac{1}{\pi^2} \left[ \delta - f_0(0) - s \int_0^{\pi/2} f_0'(s \sin \psi) d\psi \right], \quad (16)$$

для численного решения которого применим метод механических квадратур.

При условии ограниченности давления на краю области контакта неизвестный радиус  $a$  можно определить из условия [10]

$$\varphi(a) = 0. \quad (17)$$

Зная решение уравнения (16), безразмерную интегральную характеристику контактных давлений можно найти по формуле [10]

$$P_0 = 2\pi \int_0^a \varphi(t) dt. \quad (18)$$

Расчеты интегральной характеристики по формулам (16)–(18) показывают хорошее совпадение с численными результатами для задачи А, полученными при помощи метода нелинейных ГИУ (отличие около 1 %). На рис. 4 показаны зависимости радиуса области контакта  $a$ , найденного из условия (17), от осадки  $\delta$  для кругового параболоида ( $f_0(r) = Ar^2$ ). При  $\lambda = \infty$  (полупространство) упругие характеристики не влияют на зависимость  $a$  ( $\delta$ ), поскольку ядро интегрального уравнения (16) тождественно обращается в нуль. В случае слоя ( $\lambda = 1$ ) область контакта расширяется, а значения  $a$  ( $\delta$ ) для древесины превышают соответствующие значения для изотропного материала.

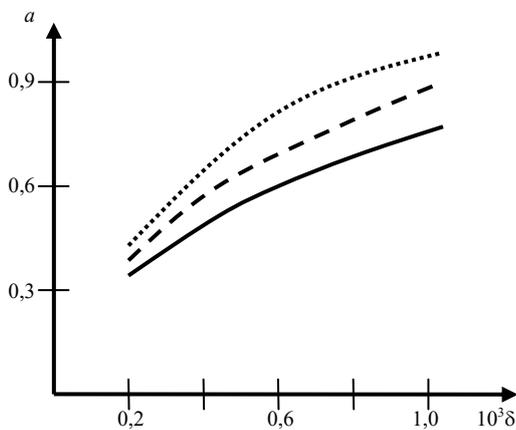


Рис. 4. Графики зависимостей  $a$  ( $\delta$ ), задача В, при  $A=10^{-3}$ :  $\lambda=\infty$  – сплошная линия;  $\lambda=1$  – пунктир для изотропного материала, точки для древесины

Fig. 4. Plots of relation  $a$  ( $\delta$ ) in problem C for  $A=10^{-3}$ : solid line for  $\lambda=\infty$ ; dashed for isotropic material ( $\lambda=1$ ), dotted for wood ( $\lambda=1$ )

### 3. Плоские контактные задачи

Пусть трансверсально-изотропные слои, изображенные на рис. 1,  $a$  и  $b$ , взаимодействует с жесткими полосовыми штампами соответственно по заданным областям

$\{|x| \leq a, |y| < \infty\}$  (задача Г) и  $\{|z| \leq a, |y| < \infty\}$  (задача Д). Формы оснований штампов в задача Г и Д описываются соответственно функциями  $f(x)$  и  $f(z)$ . Интегральные уравнения контактных задач Г и Д относительно соответственно контактных давлений  $q(x)$  и  $q(z)$  можно вывести из уравнений (5) и (6), используя теорию обобщенных функций, а для задачи Д еще и асимптотику (10) функции  $M(s, t)$  при  $t \rightarrow 0$ . После введения безразмерных обозначений  $\lambda = h/a$ ,

$$\Gamma) x_* = x/a, \quad g_*(x_*) = [\delta - f(x)]/a, \quad \varphi(x_*) = q(x)/\theta, \quad (19)$$

$$Д) x_* = z/a, \quad g_*(x_*) = [\delta - f(z)]/a, \quad \varphi(x_*) = q(z)/(B_2 A_{66}),$$

(звездочки далее опускаем) интегральные уравнения обеих плоских контактных задач можно записать в форме ( $n=1$  для задачи Г,  $n=2$  для задачи Д)

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) k \left( \frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi = \pi g(x) \quad (|x| \leq 1), \quad (20)$$

$$k(t) = \int_0^\infty L_n(u) \cos(ut) du.$$

Здесь функции-символы ядер определяются по формулам (5) и (10).

*Замечание.* Если для слоя, показанного на рис. 1,  $b$ , полосовой штамп направить вдоль оси  $z$ , то в каждом плоском сечении, перпендикулярном оси штампа, будет изотропия упругих свойств. В этом случае на основании асимптотики (10) функции  $M(s, t)$  при  $s \rightarrow 0$  интегральное уравнение плоской контактной задачи также будет иметь вид (19), где следует в качестве символа взять функцию  $L(u)$  из формул (8), которая соответствует контактной задаче для изотропного слоя [11]. В результате интегральное уравнение будет отличаться от известного [11] только множителем, учитывающим анизотропию (он исключается введением обозначений типа (20)), для решения такой задачи можно рекомендовать асимптотические методы [11].

Регулярный асимптотический метод [11], основанный на разложении решения в ряд по степеням малого геометрического параметра  $1/\lambda$ , может применяться при  $\lambda > 1$  в контактной задаче для изотропного слоя, при  $\lambda > \max(|\gamma_1|, |\gamma_2|)$  в задаче Г или  $\lambda > \max(|\gamma_1^{-1}|, |\gamma_2^{-1}|)$  в задаче Д, когда сходятся соответствующие разложения ядер (20). С ростом анизотропии (действительные корни  $\gamma_1 \gg 1 \gg \gamma_2 > 0$ ) область применимости метода в задачах Г и Д существенно снижается. Заметим, что в этом случае членом с одним из котангенсов в функциях-символах  $L_n(u)$  ядер (20) можно пренебречь ( $\gamma_2 \text{cth}(u/\gamma_2)$  в задаче Г и  $\gamma_2 \text{cth}(\gamma_1 u)$  в задаче Д), что позволяет получить решение уравнения (20) в замкнутой форме. Именно при учете асимптотического поведения символов  $L_n(u)$  в нуле и бесконечности аппроксимируем их при  $0 \leq u < \infty$  выражением

$$L(u) \approx \text{th}(Bu); \Gamma) \quad B = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \text{Д)} \quad B = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (21)$$

Интегральное уравнение (20), (21) сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, имеющему точное решение [14]. Для штампов с плоским основанием ( $f(x) = \text{const}$ ) приближенные решения контактных задач  $\Gamma$  и  $\text{Д}$  имеют вид

$$\varphi(x) = \frac{fA_*d}{K(e)} \left[ 2(\text{ch}(2A_*x) - \text{ch}(2A_*x)) \right]^{-1/2},$$

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \frac{fK'(e)}{K(e)}, \quad (22)$$

$$A_* = \pi / (2B\lambda), \quad d = \exp A_*,$$

$$e = \exp(-2A_*), \quad K'(e) = K(\sqrt{1-e^2}),$$

где  $K(e)$  — полный эллиптический интеграл. Относительная погрешность решения (22) не превышает погрешности аппроксимации (21) и уменьшается с ростом анизотропии. Важно, что решение (22) справедливо для любой относительной толщины слоя  $\lambda$ .

Корни характеристического уравнения (7) и погрешность аппроксимации (21)

Roots of the characteristic equation (7) and error of the approximation (21)

Материал	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_1/\gamma_2$	$\varepsilon, \%$
Изотропный	1,000	1,000	1,00	9,5
Гнейс влажный	1,621	0,5476	2,96	7,1
Композит (60 % волокон)	4,724	0,6888	6,86	4,1
Ламинат Т650/950-1	5,413	0,6458	8,38	3,5
Древесина (ель Дугласа)	3,713	0,3504	10,6	2,8

### Библиографический список

1. Argatov I.I., Borodich F.M. A macro model for electroadhesive contact of a soft finger with a touchscreen // IEEE Transactions on Haptics. – 2020. – Vol. 13, no. 3. – P. 504–510. DOI: 10.1109/TOH.2020.2969628
2. Argatov I.I., Jin X.Q., Keer L.M. Collective indentation as a novel strategy for mechanical palpation tomography // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2020. – Vol. 143. – P. 104063. DOI: 10.1016/j.jmps.2020.104063
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. Ding H., Chen W., Zhang L. Elasticity of transversely isotropic materials. – Dordrecht: Springer, 2006. – 435 p.
5. Pan E., Chen W. Static Green's functions in anisotropic media. – New York: Cambridge University Press, 2015. – 356 p.
6. Popov V.L., Heß M. Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction. – Berlin: Springer, 2015. – 265 p. DOI: 10.1007/978-3-642-53876-6
7. Argatov I., Heß M., Pohrt R., Popov V.L. The extension of the method of dimensionality reduction to non-compact and non-axisymmetric contacts // ZAMM. – 2016. – Vol. 96, no. 10 – P. 1144–1155. DOI: 10.1002/zamm.201600057

В таблицу включено несколько известных трансверсально-изотропных материалов ([4, табл. 1.4]), а также изотропный материал, указана относительная погрешность  $\varepsilon$  аппроксимации (21), практически одинаковая для задач  $\Gamma$  и  $\text{Д}$ . Как видно из данных таблицы, относительная погрешность  $\varepsilon$  монотонно снижается с ростом параметра  $\gamma_1/\gamma_2$  (с увеличением анизотропии).

### Заключение

Показана связь интегральных уравнений пространственных контактных задач для трансверсально-изотропного слоя с уравнениями соответствующих плоских задач и задачи при осевой симметрии. Можно сделать вывод о существенном влиянии ориентации плоскостей изотропии на характеристики контакта. Для случая перпендикулярных граням слоя плоскостей изотропии фундаментальное решение соответствующей задачи для трансверсально-изотропного полупространства в форме, свободной от квадратур, позволяет эффективно регуляризовать ядро интегрального уравнения контактной задачи для слоя. При уменьшении  $\lambda$  (относительной толщины слоя) возрастает отличие контактных характеристик от соответствующих величин для случая трансверсально-изотропного полупространства. В случае осевой симметрии радиус заранее неизвестной круговой области контакта для слоя оказывается больше, чем в соответствующей задаче для полупространства, а для трансверсально-изотропного слоя область контакта может быть больше, чем для изотропного слоя. В то время как эффективность регулярного асимптотического метода для рассмотренных плоских контактных задач снижается при увеличении анизотропии, эффективность метода, основанного на специальной аппроксимации ядра интегрального уравнения, наоборот, возрастает с ростом анизотропии.

8. Barber J.R. Contact mechanics. – Berlin: Springer, 2018. – 585 p. DOI: 10.1007/978-3-319-70939-0
9. Argatov I. From Winkler's foundation to Popov's foundation // Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering. – 2019. Vol. 17, no 2. – P. 181–190. DOI: 10.22190/FUME190330024A
10. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 368 с.
11. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
12. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
13. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.
14. Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-dimensional contact problems. – Dordrecht: Kluwer, 2001. – 406 p.
15. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.С. Васильев, Л.И. Кренев, И.С. Трубочник. – М.: Физматлит, 2011. – 192 с.

16. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора / С.С. Волков, А.С. Васильев, С.М. Айзикович, Н.М. Селезнев, А.В. Леонтьева // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 20–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.02
17. Васильев А.С., Волков С.С., Айзикович С.М. Приближенное аналитическое решение задачи о вдавливании проводящего штампа в электроупругое полупространство с неоднородным покрытием // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 478, № 1. – С. 34–39. DOI: 10.7868/S0869565218010073
18. Yastrebov V.A., Ancaix G., Molinari J.-F. From infinitesimal to full contact between rough surfaces: evolution of the contact area // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – Vol. 52. – P. 83–102. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.09.019
19. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y. Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 991, no. 1 – P. 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012028
20. Пожарский Д.А. Периодические контактные и смешанные задачи теории упругости (обзор) // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 22–33. DOI: 10.18522/1026-2237-2021-2-22-33
21. Yakovenko A., Goryacheva I. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // Tribology International. – 2021. – Vol. 161. – P. 107078. DOI: 10.1016/j.triboint.2021.107078
22. Индикация термоупругой неустойчивости скользящего контакта с помощью заглубленной пьезокерамической прослойки / В.Б. Зеленцов, Б.И. Митрин, А.Г. Сукиязов, С.М. Айзикович // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 63–84. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.05
23. Goryacheva I.G., Makhovskaya Y. Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // Friction. – 2017. – Vol. 5, no. 3. – P. 339–350. DOI: 10.1007/s40544-017-0179-1
24. He X., Li Q., Popov V.L. Simulation of adhesive contact of soft microfibrils // Lubricants. – 2020. – Vol. 8, no. 10. – P. 94. DOI: 10.3390/lubricants8100094
25. He X., Li Q., Popov V.L. Strength of adhesive contact between a rough fibrillar structure and an elastic body: influence of fibrillar stiffness // Journal of Adhesion. – 2021. – Published online June 2021. – P. 1–14. DOI: 10.1080/00218464.2021.1939017
26. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating // Materials Physics and Mechanics. – 2016. – Vol. 28, no. 1–2. – P. 11–15.
27. Fabrikant V.I. Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 64, no. 2. – P. 151–170. DOI: 10.1093/qjmam/hbq029
28. Давтян Д.Б., Пожарский Д.А. Действие полосового штампа на трансверсально изотропное полупространство // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, вып. 5. – С. 783–794.
29. Fabrikant V.I. Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space // Acta Mechanica. – 2017. – Vol. 228, no. 4. – P. 1541–1560. DOI: 10.1007/s00707-016-1788-x
30. Бедоидзе М.В., Пожарский Д.А. Взаимодействие штампов на трансверсально изотропном полупространстве // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т. 78, вып. 4. – С. 576–582.
31. Пожарский Д.А. Контакт транслопных тел в теории Герца // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 3. – С. 121–128. DOI: 10.15372/PMTF20180313
32. Fabrikant V.I. Contact and crack problems in linear elasticity. – Sharjah: Bentham, 2010. – 1030 p.
33. Fabrikant V.I. New approach to interface crack problems in transversely isotropic materials // ZAMP. – 2021. – Vol. 72. – P. 86. DOI: 10.1007/s00033-020-01445-y
34. Галанов Б.А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // Прикладная математика и механика. – 1985. – Т. 49, вып. 5. – С. 827–835.
35. Пожарский Д.А. Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения. – Ростов-на-Дону: ООО «ДГТУ-Принт», 2019. – 312 с. [https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o\\_2089067](https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_2089067)
36. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

## References

1. Argatov I.I., Borodich F.M. A macro model for electroadhesive contact of a soft finger with a touchscreen. *IEEE Transactions on Haptics*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 504–510. DOI: 10.1109/TOH.2020.2969628
2. Argatov I.I., Jin X.Q., Keer L.M. Collective indentation as a novel strategy for mechanical palpation tomography. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, vol. 143, pp. 104063. DOI: 10.1016/j.jmps.2020.104063
3. Lekhnitskii S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [Theory of elasticity of anisotropic solid]. Moscow, Nauka, 1977, 416 p.
4. Ding H., Chen W., Zhang L. Elasticity of transversely isotropic materials. Dordrecht, Springer, 2006, 435 p.
5. Pan E., Chen W. Static Green's functions in anisotropic media. New York, Cambridge University Press, 2015, 356 p.
6. Popov V.L., Heß M. Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction. Berlin, Springer, 2015, 265 p. DOI: 10.1007/978-3-642-53876-6
7. Argatov I., Heß M., Pohrt R., Popov V.L. The extension of the method of dimensionality reduction to non-compact and non-axisymmetric contacts. *ZAMM*, 2016, vol. 96, no. 10, pp. 1144–1155. DOI: 10.1002/zamm.201600057
8. Barber J.R. Contact mechanics. Berlin, Springer, 2018, 585 p. DOI: 10.1007/978-3-319-70939-0
9. Argatov I. From Winkler's foundation to Popov's foundation. *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*, 2019, vol. 17, no 2, pp. 181–190. DOI: 10.22190/FUME190330024A
10. Ufliand I.A.S. Integral'nye preobrazovaniia v zadachakh teorii uprugosti [Integral transforms in problems of the elasticity theory]. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of USSR Publishing, 1963, 368 p.
11. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti [non-classical mixed problems of the elasticity theory]. Moscow, Nauka, 1974, 456 p.
12. Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V. Zadachi mekhaniki sploshnyh sred so smeshannymi granichnymi usloviiami [Problems with mixed boundary conditions in continuum mechanics]. Moscow, Nauka, 1986, 336 p.

13. Aleksandrov V.M., Romalis B.L. Kontaktnye zadachi v mashinostroenii [Contact problems in machine-building]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 176 p.
14. Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-dimensional contact problems. Dordrecht, Kluwer, 2001, 406 p.
15. Aizikovich S.M., Aleksandrov V.M., Vasil'ev A.S., Krennev L.I., Trubchik I.S. Analiticheskie resheniia smeshannykh o-simmetrichnykh zadach dlia funktsional'no-gradientnykh sred [Analytical solutions of mixed axially symmetric problems for functionally-graded media]. Moscow, Fizmatlit, 2011, 192 p.
16. Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M., Seleznev N.M., Leontieva A.V. Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie uprugogo miagkogo funktsional'no-gradientnogo pokrytiia pri vnedrenii sfericheskogo indentora [Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 20–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.02
17. Vasiliev A.S., volkov S.S., Aizikovich S.M. Approximated analytical solution of a problem on indentation of an electro-elastic half-space with inhomogeneous coating by a conductive punch. *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, no. 1, pp. 18–22. DOI: 10.1134/S1028335818010020
18. Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F. From infinitesimal to full contact between rough surfaces: evolution of the contact area. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 52, pp. 83–102. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.09.019
19. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y. Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 991, no. 1, pp. 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012028
20. Pozharskii D.A. Periodicheskie kontaktnye i smeshannye zadachi teorii uprugosti (obzor) [Periodic contact and mixed problems of the elasticity theory (review)]. *Izvestiia Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Estestvennye Nauki*, 2021, no. 2, pp. 22–33. DOI: 10.18522/1026-2237-2021-2-22-33
21. Yakovenko A., Goryacheva I. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space. *Tribology International*, 2021, vol. 161, pp. 107078. DOI: 10.1016/j.triboint.2021.107078
22. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Sukiyazov A.G., Aizikovich S.M. Indikatsiia termouprugoi neustoichivosti skol'ziashego kontakta s pomosh'yu zaglublennoi p'ezokeramicheskoi prosloiki [Indication of thermoelastic instability of sliding contact using embedded piezoceramic interlayer]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 1, pp. 63–84. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.05
23. Goryacheva I.G., Makhovskaya Y. Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies. *Friction*, 2017, vol. 5, no. 3, pp. 339–350. DOI: 10.1007/s40544-017-0179-1
24. He X., Li Q., Popov V.L. Simulation of adhesive contact of soft microfibrils. *Lubricants*, 2020, vol. 8, no. 10, pp. 94. DOI: 10.3390/lubricants8100094
25. He X., Li Q., Popov V.L. Strength of adhesive contact between a rough fibrillar structure and an elastic body: influence of fibrillar stiffness. *Journal of Adhesion*, 2021, published online June 2021. pp. 1–14. DOI: 10.1080/00218464.2021.1939017
26. Vasiliev A.S., volkov S.S., Aizikovich S.M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating. *Materials Physics and Mechanics*, 2016, vol. 28, no. 1–2, pp. 11–15.
27. Fabrikant V.I. non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2011, vol. 64, no. 2, pp. 151–170. DOI: 10.1093/qjmam/hbq029
28. Davtyan D.B., Pozharskii D.A. The action of a strip punch on a transversely isotropic half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 558–566.
29. Fabrikant V.I. Contact problem for an arbitrarily oriented transversely isotropic half-space. *Acta Mechanica*, 2017, vol. 228, no. 4, pp. 1541–1560. DOI: 10.1007/s00707-016-1788-x
30. BeDOIdze M.V., Pozharskii D.A. The interaction of punches on a transversely isotropic half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 409–414. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2014.12.012
31. Pozharskii D.A. Contact of transversely isotropic bodies in the Hertz theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 491–497. DOI: 10.1134/S0021894418030136
32. Fabrikant V.I. Contact and crack problems in linear elasticity. Sharjah, Bentham, 2010, 1030 p.
33. Fabrikant V.I. New approach to interface crack problems in transversely isotropic materials. *ZAMP*, 2021, vol. 72, pp. 86. DOI: 10.1007/s00033-020-01445-y
34. Galanov B.A. The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1985, vol. 49, no. 5, pp. 634–640.
35. Pozharskii D.A. Fundamental'nye resheniia statiki uprugogo klina i ikh prilozheniia [Fundamental solutions of statics of an elastic wedge and their applications]. Rostov-on-Don, DSTU-Print, 2019, 312 p. [https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o\\_2089067](https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_2089067)
36. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Nauka, 1971, 1108 p.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00013).

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Financing.** This study was supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 22-21-00013).

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.