

Федоренков Д.И., Косов Д.А. Реализация модели поврежденности Lemaitre кинематическим упрочнением в конечно-элементном комплексе ANSYS // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 2. – С. 147–157. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.2.12

Fedorenkov D.I., Kosov D.A. Implementation of the Lemaitre damage model with kinematic hardening in the ANSYS finite element complex. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2022, no. 2, pp. 147-157. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.2.12



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2022

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.2.12

УДК 620.172

РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ LEMAITRE С КИНЕМАТИЧЕСКИМ УПРОЧНЕНИЕМ В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS

Д.И. Федоренков, Д.А. Косов

Институт энергетики и перспективных технологий Казанского научного центра РАН, Казань, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 01 декабря 2021 г.

Одобрена: 30 мая 2022 г.

Принята к публикации:

04 июля 2022 г.

Ключевые слова:

параметр поврежденности, кинематическое упрочнение, закон Армстронга – Фредерика, модель Lemaitre, эффект Баушингера, упрочнение, разупрочнение.

АННОТАЦИЯ

В настоящее время одним из популярных направлений в механике разрушения является учет поврежденности и ее влияние на напряженно-деформированное состояние элементов конструкций. В данной работе проведена интеграция модели поврежденности Lemaitre с учетом комбинированного закона упрочнения, сочетающего в себе кинематический закон Armstrong – Frederick и изотропный закон упрочнения Voce, в программный комплекс расчетов по методу конечных элементов ANSYS. Модель внедрена в виде динамически подключаемой библиотеки пользовательского материала для трехмерных задач, которая апробирована на цилиндрическом образце с внешним кольцевым надрезом как в осесимметричной постановке, так и в трехмерной. Приведены модельные представления перечисленных законов, которые были объединены в общую структуру разрешающих уравнений и представлены в качестве обобщенного алгоритма реализации пользовательского материала. Данная работа демонстрирует лишь один из двух этапов верификации созданной программы – сравнение полей поврежденности при монотонном нагружении с известными в литературе данными – и не учитывает проверку поцикловой кинетики накопления пластических деформаций с экспериментальными данными на малоцикловую усталость. Результат верификации показал, что стадии и поля накопленных повреждений в численном эксперименте при осесимметричной и трехмерной постановках совпадают с аналогичными численными экспериментами известными в литературе. Помимо этого, была найдена аналогия с результатами, полученные с использованием TSL закона когезионного подхода механики разрушения. Несмотря на то что в модели когезионной прочности и Lemaitre используются два разных типа конститутивных уравнений, физический смысл данных уравнений состоит в одном – визуализация и идентификация механизмов и координат повреждений.

© ПНИПУ

© Федоренков Дмитрий Игоревич – м.н.с., e-mail: dif-96@mail.ru, ID: 0000-0002-7087-549X.

Косов Дмитрий Александрович – м.н.с., e-mail: dima45001@gmail.com, ID: 0000-0003-1510-4884.

Dmitrii I. Fedorenkov – Junior Researcher, e-mail: dif-96@mail.ru, ID: 0000-0002-7087-549X.

Dmitrii A. Kosov – Junior Researcher, e-mail: dima45001@gmail.com, ID: 0000-0003-1510-4884.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

IMPLEMENTATION OF THE LEMAITRE DAMAGE MODEL WITH KINEMATIC HARDENING IN THE ANSYS FINITE ELEMENT COMPLEX

D.I. Fedorenkov, D.A. Kosov

Institute of Power Engineering and Advanced Technologies FRC Kazan Scientific Center of RAS,
Kazan, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 01 December 2021
Approved: 30 May 2022
Accepted for publication: 04 July 2022

Keywords:

damage parameter, kinematic hardening, Armstrong – Frederick law, Lemaitre model, Bauschinger effect, hardening, softening.

ABSTRACT

Currently, one of the most popular in fracture mechanics is taking into account damage and its effect on the stress-strain state of structural elements. In this work, the Lemaitre damage model was integrated taking into account the combined hardening law, which combines the Armstrong – Frederick kinematic hardening law and the Voce isotropic hardening law, into the ANSYS finite element software. The model is implemented in the form of a dynamically linked library of user material for three-dimensional objects, which is tested on a cylindrical specimen with an external annular notch, both in an axisymmetric setting and in a three-dimensional one. The article presents model representations of the above-listed standard systems. This work demonstrates only one of the two stages of verification of the created program – comparison of damage fields under monotonic loading with data known in the literature – and doesn't take into account the verification of cycle-by-cycle kinetics of plastic deformation accumulation with experimental data for low-cycle fatigue. The result of verification, consistent with similar experiments known in the literature, is confirmed in accordance with similar experiments. In addition, an analogy was found using the TSL law of the cohesive fracture mechanics approach. Despite the fact that two different types of constitutive equations are used in the cohesive model and Lemaitre, the physical meaning of these equations consists in one thing – visualization and identification of mechanisms and coordinates of damage.

© PNRPU

Введение

При оценке срока службы конструктивных элементов, подверженных переменным нагрузкам, необходимо уже на этапе проектирования знать поведение материала в процессе циклической пластичности. Для этого требуются соответствующие модельные представления о накоплении и развитии повреждений, предопределяющие поведение материала.

Исходя из основных положений механики поврежденности сплошной среды, накопление различных дефектов, микропор, трещин со временем приводит к изменению механических свойств материалов. Если поведение упругого материала – это обратимый процесс, то пластичность описывает необратимую деформацию твердого тела. Полное описание поведения материала выше предела текучести невозможно без учета микроразрушения материала и процесса, ведущего к его окончательному разрушению.

В литературе известны модели накопления поврежденности, с которыми можно подробно ознакомиться в работах [1–17]. В основополагающей работе Л.М. Качанова [6] введена скалярная внутренняя переменная для моделирования разрушения металлов ползучестью при одноосном нагружении. Физическое обоснование данной переменной позднее дал Rabotnov [7], предложив считать уменьшение площади поперечного сечения за счет микротрещин в качестве меры состояния внутренних повреждений.

Со временем концепция переменного внутреннего повреждения была распространена на трехмерные си-

туации. Leckie и Hayhurst [8] использовали идею Качанова для определения модели ползучести при многоосных напряжениях. Скалярная переменная повреждения была также рассмотрена Lemaitre и Chaboche [9–11] при определении чисто феноменологической модели пластического изотропного повреждения в металлах. Основываясь на гипотезе эквивалентности деформаций, которая гласит, что деформационное поведение поврежденного материала представлено конституционными законами неповрежденного материала с заменой истинного напряжения эффективным напряжением [1], постулирован закон, в котором стандартное определение параметра повреждения с точки зрения уменьшения несущей поверхности заменяется в модели Lemaitre путем уменьшения модуля упругости в идеально изотропном случае. Эта теория была дополнена Lemaitre [11], а эффекты старения были позже включены Marquis и Lemaitre [12]. Позже оригинальная изотропная модель была расширена Lemaitre [13] для учета анизотропии повреждений.

Изотропное упрочнение хорошо подходит для описания стадий упрочнения и разупрочнения [18]. Эффект циклического упрочнения/разупрочнения соответствует уменьшению/увеличению сопротивления материала деформированию, подвергающегося циклической нагрузке. Кинематическое упрочнение благодаря обратным напряжениям способно учесть основное и хорошо известное явление циклической пластичности – эффект Баушингера [19]. Эффект Баушингера описывает явление уменьшения предела упругости при изменении знака нагружения (сжатия),

если до этого имела место малая пластическая деформация. Комбинированное упрочнение способно описать накопление пластической деформации во время циклического нагружения при наличии среднего напряжения.

Первые предложения об описании кинематического упрочнения сформулировали Ишлинский [20] и Прагер [21]. Линейное кинематическое упрочнение Прагера является простейшим правилом кинематического упрочнения и способно представить эффект Баушингера, но не способно вызвать накопление пластической деформации при наличии среднего напряжения. Это связано с тем, что кривые «напряжение – деформация» имеют форму замкнутых петель гистерезиса [22]. В работе [23] Armstrong и Frederick (AF) разработали нелинейный закон кинематического упрочнения, в основу которого заложен закон Прагера и учет обратных напряжений. Применимость данной модели упрочнения описана в работах [24; 25].

Формулировка Armstrong – Frederick высоко оценена исследователями. Так в работе [26] авторы показали способность модели достаточно хорошо моделировать одноосные эксперименты, включая накопление пластической деформации во время циклического нагружения. В исследовании [27] была продемонстрирована применимость AF для прогнозирования трещотки и обратной пластичности при циклическом нагружении толстых цилиндрических и сферических сосудов при различных типах нагрузок, таких как термические, механические и их комбинации. Авторы работы [28] расширили закон и применили его для исследования поведения упругопластических композитов. В исследовании [29] использован AF для моделирования пластичности кристаллов. Кинематический закон упрочнения Armstrong – Frederick имеет множество модификаций, ознакомиться с которыми можно в работах [30–34].

В известных релизах вычислительного МКЭ-комплекса ANSYS отсутствует возможность расчёта напряжённо-деформированного состояния с учётом поврежденности материала с использованием модели Lemaitre. Возможность такой реализации представлена в статье [35] путем использования модели поврежденности Lemaitre с экспоненциальным изотропным упрочнением Voce. Тем не менее реализация кинематического закона упрочнения для расчетов напряженно-деформированного состояния тел при упругопластическом деформировании с учётом накопления и развития повреждений является актуальной, что является целью настоящей работы.

1. Модельные представления

Перед тем как описать реализацию модели поврежденности Lemaitre с кинематическим упрочнением, ниже приведены основы использованных модельных представлений.

1.1. Модель поврежденности Lemaitre

Согласно традиционной модели Lemaitre, прирост параметра поврежденности разработан на основе термодинамической теории, накоплении пластических деформаций и скорости деформации повреждений. В общем виде модель Lemaitre описывается в виде [9]:

$$\dot{\omega} = \dot{\gamma} \frac{1}{1-\omega} \cdot \left(\frac{-Y}{r} \right)^s \quad (1)$$

$$-Y = \frac{\sigma_e \cdot R_v}{2E(1-\omega)^2} \quad (2)$$

$$R_v = \frac{2}{3} \left[(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{p}{\sigma_{etr}} \right) \right], \quad (3)$$

где $\dot{\omega}$ – скорость роста параметра поврежденности, $\dot{\gamma}$ – скорость накопления пластических деформаций, Y – скорость выделения энергии деформации повреждений, E – модуль упругости первого рода, ν – коэффициент Пуассона, r, s – параметры материала, R_v – параметр трёхосности, p – гидростатическое напряжение. Отношение p / σ_{etr} является параметром трёхосности напряжений. Оно учитывает влияние многоосности нагружения на процесс накопления повреждений.

Параметр поврежденности существует в диапазоне $0 \leq \omega \leq 1$, и в случае $\omega = 0$ материал не имеет повреждений, а при $\omega = 1$ считается разрушенным.

1.2. Кинематическая модель упрочнения Armstrong – Frederick

Закон Armstrong – Frederick является классическим нелинейным законом кинематического упрочнения [23], потому что он основан на физическом механизме деформационного упрочнения и динамического восстановления и обладает способностью достаточно хорошо представлять формы петель гистерезиса. Функция текущей задаётся в виде:

$$\Phi = \frac{3}{2} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}) - k^2 = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{s} – девиатор тензора напряжений; $\boldsymbol{\beta}$ – девиатор тензора обратных напряжений, представляющий собой термодинамическую силу, связанную с кинематическим упрочнением (рис. 1, а), и определяющий перемещение поверхности текущей в пространстве главных напряжений; k – функция изотропного упрочнения, которая определяет размер поверхности текущей.

Скорость изменения обратного напряжения определяется зависимостью

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{pl} - b \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{pl} \quad (5)$$

в которой a и b – константы материала; $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{pl}$ – приращение пластической деформации; $\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}$ – общая пластическая деформация.

Очевидно, что при $\beta = 0$ поверхность текучести определяется изотропной функцией упрочнения (рис. 1, b).

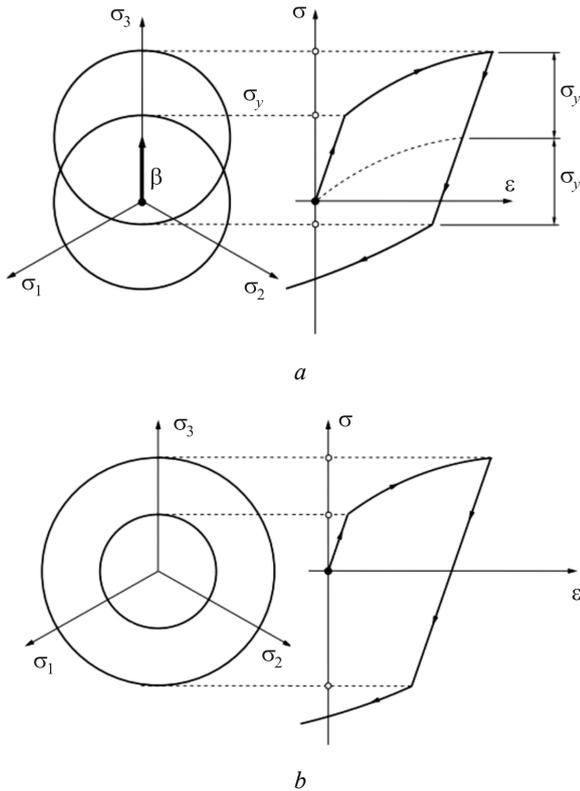


Рис. 1. Кинематическое упрочнение (a) с эффектом Баушингера и изотропное упрочнение (b) в пространстве главных напряжений

Fig. 1. Kinematic hardening (a) with the Bauschinger effect and isotropic hardening (b) in the space of large stresses

Для реализации модели поврежденности Lemaitre с кинематическим упрочнением модельные представления, представленные в уравнениях (1)–(5), были объединены в общую структуру разрешающих уравнений и заложены в конечно-элементный комплекс ANSYS для учета поврежденности и ее влияния на напряженно-деформированное состояние элементов конструкций.

1.3. Описание программы

Структура программного комплекса ANSYS такова, что она предполагает реализацию пользовательских законов поведения материала в каждом узле конечно-элементной сетки через подключаемые динамические библиотеки. Совместимость подпрограммы Usermat с остальными библиотеками программного комплекса обеспечивается predetermined набором входных и выходных параметров [36].

К входным параметрам относятся: приращения деформаций, время начала приращений, количество шагов нагружения, номер элемента, а также основные механические свойства материала, вводимые пользователем.

Выходными параметрами являются: векторы напряжений и пластических деформаций в точке интегри-

рования, матрица Якоби, пластическая и упругая работы при приложении нагрузки.

На первом шаге интегрирования модели накопления повреждений в программном комплексе расчётов по методу конечных элементов необходимо составить упругую матрицу жёсткости [37]:

$$C = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{1+\nu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{1+\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+\nu} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В качестве основы для математического моделирования пластичности по теории конечных деформаций тензор полных деформаций ϵ может быть разделен на упругую и пластическую составляющие:

$$\epsilon = \epsilon_0 + d\epsilon - \epsilon_{pl}, \quad (7)$$

где ϵ_0 – тензор деформаций на предыдущем шаге нагружения; $d\epsilon$ – тензор приращения деформаций на данном шаге нагружения, где ϵ_{pl} – тензор пластической деформации на предыдущем шаге нагружения.

В первом приближении на основе полученных приращений деформаций тензор напряжения вычисляется по закону Гука:

$$\sigma_{etr} = C\epsilon. \quad (8)$$

Вычитая обратное напряжение, получаем относительное напряжение:

$$\sigma_r = \sigma_{etr}^d - \beta, \quad (9)$$

где σ_{etr}^d – тензор дивергента приближенных напряжений, найденные в (8).

Далее рассчитывается тензор-дивергент относительных напряжений и определяются его эквивалентные напряжения:

$$D_{\sigma_r} = \begin{pmatrix} \sigma_r^{xx} - \sigma_r^{cp} & \sigma_r^{xy} & \sigma_r^{xz} \\ \sigma_r^{yx} & \sigma_r^{yy} - \sigma_r^{cp} & \sigma_r^{yz} \\ \sigma_r^{zx} & \sigma_r^{zy} & \sigma_r^{zz} - \sigma_r^{cp} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\sigma_r^{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_r^{xx} + \sigma_r^{yy} + \sigma_r^{zz}), \quad (11)$$

$$\sigma_r^e = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_r^{ij}\sigma_r^{ji}}, \quad (12)$$

где $\sigma_r^{xx}, \sigma_r^{yy}, \sigma_r^{zz}$ – напряжения главной диагонали матрицы напряжений.

Аналогично с эквивалентными деформациями:

$$D_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon^{xx} - \epsilon^{cp} & \epsilon^{xy} & \epsilon^{xz} \\ \epsilon^{yx} & \epsilon^{yy} - \epsilon^{cp} & \epsilon^{yz} \\ \epsilon^{zx} & \epsilon^{zy} & \epsilon^{zz} - \epsilon^{cp} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\varepsilon^{cp} = \frac{1}{3}(\varepsilon^{xx} + \varepsilon^{yy} + \varepsilon^{zz}), \quad (14)$$

$$\varepsilon^e = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon^{ij}\varepsilon^{ji}}. \quad (15)$$

Предел текучести на данном шаге нагружения рассчитывается по экспоненциальному закону упрочнения Восе и зависит от эквивалентных пластических деформаций ε_{pl} :

$$k = \sigma_0 + R_{inf}(1 - \exp(-\gamma \cdot \varepsilon_{pl})), \quad (16)$$

где R_{inf} – асимптотический предел временного сопротивления, γ – показатель упрочнения материала, σ_0 – предел текучести материала по результатам испытания на статическое растяжение.

Уравнение (16) описывает изотропное упрочнение, а k называют термодинамической силой изотропного упрочнения [1]. Сочетание кинематического и изотропного законов позволяет считать реализованный в данной статье закон упрочнения комбинированным. Как правило, в реальных материалах наблюдается именно комбинация упрочнения, так как при пластической деформации поверхность текучести расширяется/сжимается и одновременно перемещается в пространстве напряжений.

Критерий текучести (4) с учетом (12) и значением параметра поврежденности на данном шаге нагружения в каждой точке интегрирования принимает форму:

$$\Phi = \frac{\sigma_r^e}{1 - \omega} - k. \quad (17)$$

При $\Phi > 0$ упругие приближенные деформации и напряжения остаются неизменными, и подпрограмма считается выполненной ввиду того, что отсутствие пластических деформаций означает отсутствие поврежденности. При $\Phi \leq 0$ – производится перерасчет напряжений и определяется приращение пластических деформаций.

Определение параметра поврежденности осуществляется с помощью выполнения условия сходимости, основанном на итерационном методе Ньютона – Рафсона, который зависит от приращения пластических деформаций $d\varepsilon_{pl}$. Алгоритм подробно описан в работе [25]:

$$\begin{pmatrix} A^\Phi \\ \mathbf{A}^\sigma \\ \mathbf{A}^\beta \\ A^\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_r^e}{1 - \omega} - k(\varepsilon_{pl}^0 + d\varepsilon_{pl}) \\ \boldsymbol{\sigma}_r - (1 - \omega) \cdot \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{elast} - d\varepsilon_{pl} \cdot \mathbf{N}) \\ \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0 - d\varepsilon_{pl} \cdot (a\mathbf{N} - b\boldsymbol{\beta}) \\ \omega - \omega_0 - \frac{1}{1 - \omega} \cdot \left(\frac{-Y}{r}\right)^s \cdot d\varepsilon_{pl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_r, \boldsymbol{\beta}, \omega) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}_r}{(1 - \omega)\sigma_r^e}, \quad (19)$$

$$Y(\boldsymbol{\sigma}_r, \omega) = -\frac{1}{2(1 - \omega)^2} \boldsymbol{\sigma}_r : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_r. \quad (20)$$

Запишем внутренние переменные, от которых зависят уравнения (18)–(20) в виде $\chi(\boldsymbol{\sigma}_r, \omega, \Delta\varepsilon_{pl}, \boldsymbol{\beta})$.

Для решения этой нелинейной задачи система линеаризуется с помощью разложения в ряд Тейлора без учета членов более высокого порядка:

$$\mathbf{A}(\chi^i) = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \chi}\right)^{-1} : \mathbf{A}(\chi^{i-1}) + (\chi^i - \chi^{i-1}) \approx 0, \quad (21)$$

$$\chi^i = \chi^{i-1} - \mathbf{J}^{-1} : \mathbf{A}(\chi^{i-1}), \quad (22)$$

где $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \chi} = \mathbf{J}$ – матрица Якобиана.

Полностью матрица Якобиана записывается в следующем виде

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_\sigma^\Phi & A_D^\Phi & A_{\Delta\varepsilon_{pl}}^\Phi & \mathbf{A}_\beta^\Phi \\ \mathbf{A}_\sigma^\sigma & \mathbf{A}_D^\sigma & \mathbf{A}_{\Delta\varepsilon_{pl}}^\sigma & \mathbf{A}_\beta^\sigma \\ \mathbf{A}_\sigma^\beta & \mathbf{A}_D^\beta & \mathbf{A}_{\Delta\varepsilon_{pl}}^\beta & \mathbf{A}_\beta^\beta \\ \mathbf{A}_\sigma^D & A_D^D & A_{\Delta\varepsilon_{pl}}^D & \mathbf{A}_\beta^D \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где

$$\mathbf{A}_\sigma^\Phi = \frac{\partial \mathbf{A}^\Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{N}, \quad (24)$$

$$A_{\Delta\varepsilon_{pl}}^\Phi = \frac{\partial A^\Phi}{\partial \Delta\varepsilon_{pl}} = -\gamma R_{inf} e^{-\gamma(\varepsilon_{pl}^0 + \Delta\varepsilon_{pl})}, \quad (25)$$

$$\mathbf{A}_\beta^\Phi = \frac{\partial \mathbf{A}^\Phi}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{N}, \quad (26)$$

$$A_D^\Phi = \frac{\partial A^\Phi}{\partial D} = \frac{\sigma_r^e}{(1 - \omega)^2} - \frac{3}{2(1 - \omega)^2} \sigma_{etr}^d : \boldsymbol{\sigma}_r, \quad (27)$$

$$\mathbf{A}_\sigma^\sigma = \frac{\partial \mathbf{A}^\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{1}^{sym} + (1 - \omega) \Delta\varepsilon_{pl} \mathbf{C} : \left[\frac{3}{2(\sigma_r^e)^3 (1 - \omega)} \left((\sigma_r^e)^2 \mathbf{1}^{dev} \cdot -\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_r \otimes \boldsymbol{\sigma}_r \right) \right], \quad (28)$$

$$\mathbf{A}_D^\sigma = \frac{\partial \mathbf{A}^\sigma}{\partial D} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_{etr}^d : \boldsymbol{\sigma}_r)}{2(1 - \omega)\sigma_r^e} + \mathbf{C} : \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{elast} - \Delta\varepsilon_{pl} \mathbf{N} + (1 - \omega) \Delta\varepsilon_{pl} \left(\frac{9}{4(\sigma_r^e)^3} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{etr}^d : \boldsymbol{\sigma}_r) \boldsymbol{\sigma}_r}{(1 - \omega)^2} - \frac{3}{2\sigma_r^e} \frac{\boldsymbol{\beta}}{(1 - \omega)^2} \right) \right], \quad (29)$$

$$\mathbf{A}_{\Delta\varepsilon_{pl}}^\sigma = \frac{\partial \mathbf{A}^\sigma}{\partial \Delta\varepsilon_{pl}} = (1 - \omega) \mathbf{C} : \mathbf{N}, \quad (30)$$

$$\mathbf{A}_{\beta}^{\sigma} = \frac{\partial \mathbf{A}^{\sigma}}{\partial \beta} = (1-\omega) \Delta \varepsilon_{pl} \mathbf{C} : \left[\frac{3}{2(\sigma_r^e)^3 (1-\omega)} \times \left((\sigma_r^e)^2 \mathbf{1}^{sym} - \frac{3}{2} \sigma_r \otimes \sigma_r \right) \right], \quad (31)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma}^{\beta} = \frac{\partial \mathbf{A}^{\beta}}{\partial \sigma} = a \Delta \varepsilon_{pl} \left[\frac{3}{2(\sigma_r^e)^3 (1-\omega)} \times \left((\sigma_r^e)^2 \mathbf{1}^{dev} - \frac{3}{2} \sigma_r \otimes \sigma_r \right) \right], \quad (32)$$

$$\mathbf{A}_D^{\beta} = \frac{\partial \mathbf{A}^{\beta}}{\partial D} = -a \Delta \varepsilon_{pl} \left(\frac{9}{4(\sigma_r^e)^3} \frac{(\sigma_{etr}^d : \sigma_r) \sigma_r}{(1-\omega)^2} - \frac{3}{2\sigma_r^e} \frac{\beta}{(1-\omega)^2} \right), \quad (33)$$

$$\mathbf{A}_{\Delta \varepsilon_{pl}}^{\beta} = \frac{\partial \mathbf{A}^{\beta}}{\partial \Delta \varepsilon_{pl}} = b \beta - a \mathbf{N}. \quad (34)$$

$$\mathbf{A}_{\beta}^{\beta} = \frac{\partial \mathbf{A}^{\beta}}{\partial \beta} = (1 + b \Delta \varepsilon_{pl}) \mathbf{1}^{sym} - a \Delta \varepsilon_{pl} \left[\frac{3}{2(\sigma_r^e)^3 (1-\omega)} \left((\sigma_r^e)^2 \mathbf{1}^{sym} - \frac{3}{2} \sigma_r \otimes \sigma_r \right) \right], \quad (35)$$

$$\mathbf{A}_{\sigma}^D = \frac{\partial A^D}{\partial \sigma} = \frac{s \Delta \varepsilon_{pl}}{r(1-\omega)} \left(-\frac{1}{(1-\omega)^2} \mathbf{C}^{-1} : \sigma_r \right) \left(\frac{-Y}{r} \right)^{s-1}, \quad (36)$$

$$A_D^D = \frac{\partial A^D}{\partial D} = 1 - \frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{(1-\omega)^2} \left(\frac{-Y}{r} \right)^s, \quad (37)$$

$$A_{\Delta \varepsilon_{pl}}^D = \frac{\partial A^D}{\partial \Delta \varepsilon_{pl}} = \frac{1}{1-\omega} \left(\frac{-Y}{r} \right)^s, \quad (38)$$

$$\mathbf{A}_{\beta}^D = \frac{\partial A^D}{\partial \beta} = 0, \quad (39)$$

$$\mathbf{1}^{sym} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$\mathbf{1}^{dev} = \begin{pmatrix} 0,667 & -0,333 & -0,333 & 0 & 0 & 0 \\ -0,333 & 0,667 & -0,333 & 0 & 0 & 0 \\ -0,333 & -0,333 & 0,667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

В уравнениях (18)–(36) подразумевается, что $\mathbf{A} : \mathbf{B} = tr(\mathbf{A} \mathbf{B}^T)$, а $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{ijkl} = \mathbf{A}^{ij} \mathbf{B}^{kl}$ – диадическое произведение.

Следует отметить, что при $\omega \rightarrow 1$ критерий текучести в (17) стремится к бесконечности $\Phi \rightarrow \infty$, что не позволяет достичь предельного теоретического параметра поврежденности.

Изложенный алгоритм был реализован в виде программного кода на языке Fortran.

2. Верификация программы

Верификация программы, основанная на алгоритме (6)–(41), осуществлялась поэтапно. На первом этапе, который представлен и описан в данной статье, внимание сконцентрировано на верификации накопления пластической деформации и параметра поврежденности при монотонном нагружении. Помимо этого, была проверена способность приведенной динамической библиотеки описывать диаграмму статического растяжения. Вторым этапом будет относиться к верификации поциклового кинетики накопления пластических деформаций и способности кинематического упрочнения описать петли гистерезиса при испытаниях на малоцикловую усталость.

В данной работе объектом верификации выступал цилиндрический образец с внешним кольцевым надрезом, подвергнутый монотонному осевому растяжению. Пошаговое перемещение торца образца не связано с циклическим деформированием, а учитывает лишь накопление пластической деформации. Для сравнения полученных данных, таких как параметр поврежденности, а также положение максимального значения поврежденности, была выбрана геометрия образца (рис. 2), используемая в работах [1; 38].

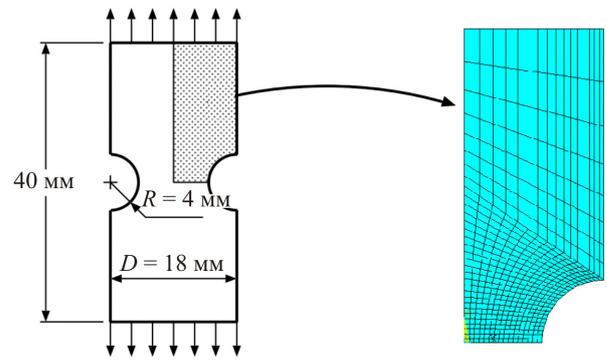


Рис. 2. Конечно-элементная модель образца

Fig. 2. Finite element specimen model

Расчетная схема метода конечных элементов была сформирована из восьмиузловых элементов второго порядка (см. рис. 2). Задача моделировалась в осесимметричной постановке с приложением перемещений к верхней грани образца, максимальная величина которых $u = 0,576$ мм соответствовала литературным данным [1; 38].

Свойства используемого материала представлены в таблице и были получены в работе [39] путём проведения статических одноосных испытаний на низкоуглеродистой стали AISI 1010.

Основные механические свойства материала

Main mechanical properties of the material

E , МПа	σ_0 , МПа	ν	R_{inf}	γ	r	s	a , МПа	b
210 000	620	0.3	3300	0.4	1	3.5	2500	20

На рис. 3 приведена зависимость параметра поврежденности от значения приложенных перемещений к верхней грани образца. Накопление повреждений на протяжении численного эксперимента имеет идентичный характер по отношению к известным решениям в литературе [38]. Следует отметить, что при увеличении значений поврежденности точность расчёта уменьшается, но максимальное значение поврежденности выше. Наблюдаемые отличия в результатах расчета обусловлены зависимостью программной реализации модели и размерностью конечно-элементной схемы.

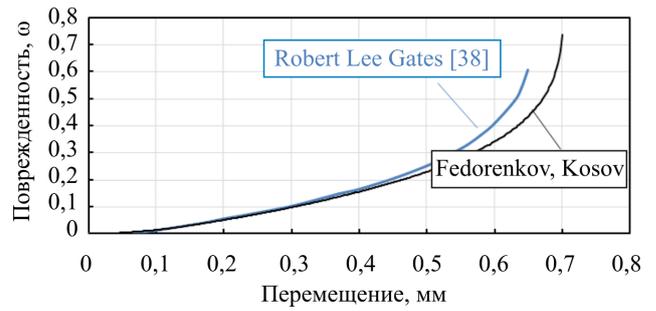


Рис. 3. Максимальное значение параметра поврежденности в зависимости от перемещения верхнего края образца

Fig. 3. The maximum value of the damage parameter depending on the movement of the upper edge of the sample

На рис. 4 изображены контуры распределения поврежденности для различных стадий статического нагружения, где в правом ряду показаны поля, полученные

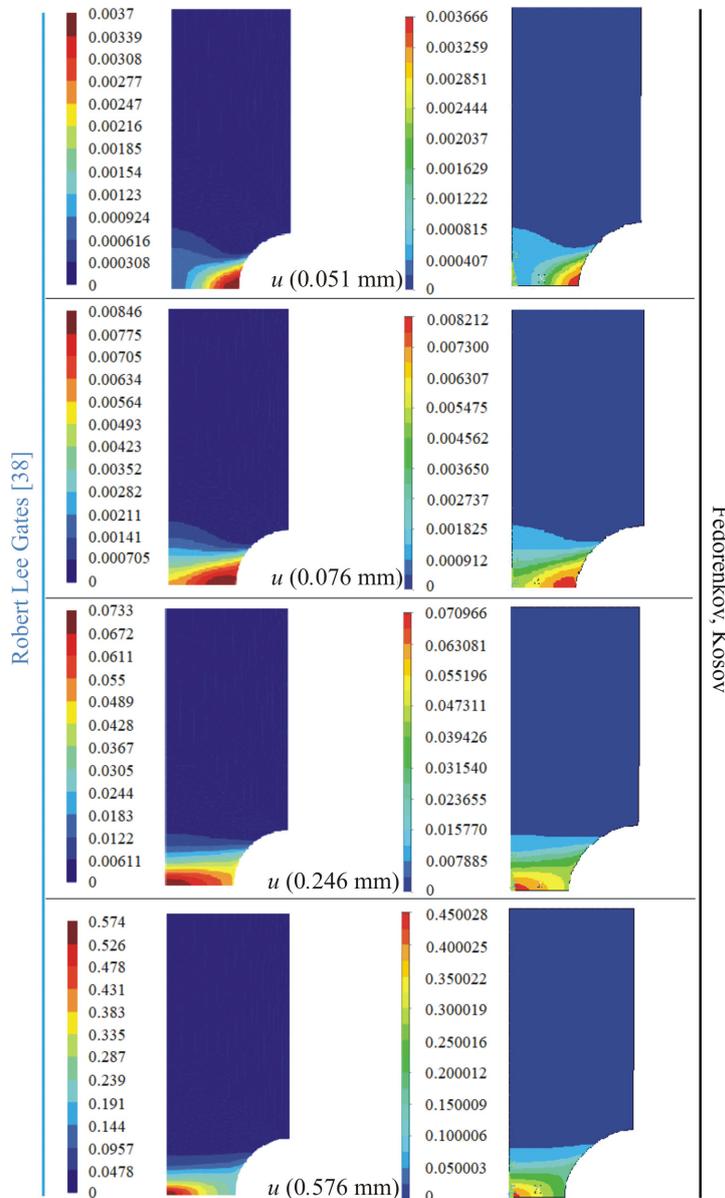


Рис. 4. Распределение параметра поврежденности в зависимости от перемещения верхнего края образца

Fig. 4. Distribution of the damage parameter depending on the displacement of the upper edge of the sample

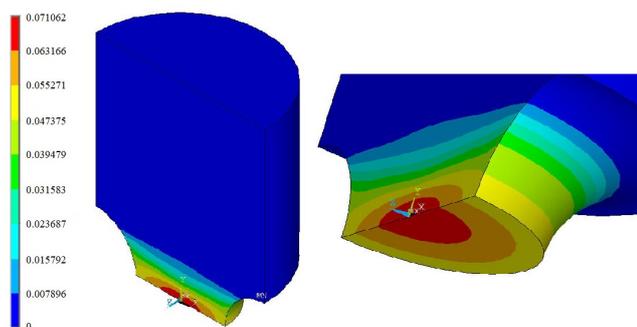


Рис. 5. Распределение параметра поврежденности при значении перемещения $u = 0,576$ мм

Fig. 5. Distribution of the damage parameter with the value moving $u = 0.576$ mm

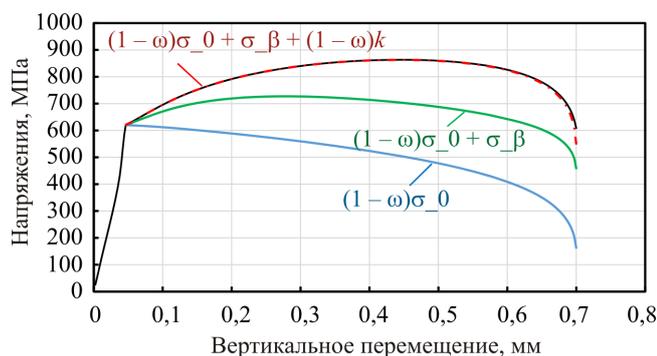


Рис. 6. Диаграммы одноосного растяжения стали AISI 1010

Fig. 6. Tension test curve of AISI 1010 steel

благодаря внедренной динамической библиотеке, а в левом ряду – поля, приведенные в работе [28]. Можно наблюдать перераспределение полей поврежденности по мере увеличения приложенных смещений к верхней грани образца. При малых значениях приложенных смещений максимум поврежденности наблюдается на внешней поверхности образца в вершине кольцевой выточки. По мере увеличения приложенных перемещений максимум поврежденности смещается к линии симметрии образца. Данная тенденция изменения полей напряжений подтверждается литературными данными [1; 38].

Помимо осесимметричной постановки также была решена объемная задача при моделировании монотонного нагружения образца с внешним кольцевым надрезом (рис. 5). Распределение параметра поврежденности при значении перемещения $u = 0,576$ мм демонстрирует идентичные значения с осесимметричной постановкой при соответствующем значении перемещения.

Поведение материала в каждом узле конечно-элементной сетки должно соответствовать диаграмме одноосного растяжения вне зависимости от характера и направления приложенной нагрузки. На рис. 6 изображена зависимость напряжений от перемещения (красный цвет) для узла с максимальным значением поврежденности, полученная с помощью численного расчета по методу конечных элементов с использованием соб-

ственной подпрограммы пользовательского материала. Можно заметить, что данная зависимость совпадает с экспериментальной (черный цвет), полученной в исследовании [39]. Помимо этого, на рисунке наглядно продемонстрировано, как повреждение в равной степени снижает предел текучести (синий цвет), эквивалентные обратные напряжения σ_β (зеленый цвет), являющиеся атрибутом кинематического упрочнения, а также термодинамическую силу изотропного упрочнения k (красный цвет). При этом по мере накопления пластических деформаций параметр поврежденности, который связан с ними непосредственно (1), оказывает большее влияние на перечисленные напряжения. Это связано с тем, что в модели Lemaitre [9] эквивалентные напряжения заменяются на эффективные напряжения путем деления первых на $1-\omega$. Приведенные распределения также подтверждаются литературными данными [38].

3. Обсуждение

В результате верификации, полученной в настоящей работе на основе (1)–(5), наблюдается подобие в перемещении координаты максимума поврежденности с данными по закону traction-separation law – TSL [40] когезионного подхода механики разрушения, который широко используется для композиционных, квазихрупких и пластичных материалов. TSL описывает поведение повреждающего материала перед вершиной трещины и используется для моделирования локализации поврежденности и разрушения конструкции [41].

В отличие от модели Lemaitre, в которой накопление поврежденности зависит от роста пластической деформации, в когезионной модели поврежденность учитывается в неявном виде [42–44]. Форма закона TSL состоит в том, что напряжения, которые могут возникнуть в материале, не должны превышать предел истинной прочности. Поврежденность образуется при достижении предельных когезионных напряжений, обуславливающие локальный отрыв и раскрытие.

Подобие результатов данной статьи с уравнениями когезионной прочности можно наблюдать в работе [45], в которой на цилиндрическом образце с внешним кольцевым надрезом при монотонном растяжении авторами было получено распределение осевых напряжений. Эти напряжения увеличивались вдоль плоскости, проходящей через область сужения образца, от внешней поверхности к его центру. Максимальное осевое напряжение локализовано в центре образца и являлось предельным – то есть напряжением, при котором происходит разрушение.

Несмотря на то что в модели когезионной прочности и Lemaitre используются два разных типа конститутивных уравнений, физический смысл данных уравнений состоит в одном – визуализация и идентификация механизмов и координат поврежденности. Они достигают

ся разными путями, но приводят к одному и тому же результату.

Заключение

Результаты данной работы можно изложить в следующем виде:

А. Сформирован алгоритм, основанный на наборе разрешающих уравнений, объединяющий модель накопления повреждений Lemaitre и закон кинематического упрочнения Armstrong – Frederic.

Б. Реализован алгоритм, включающий модель повреждения Lemaitre с кинематическим законом уп-

рочнения, в виде динамически подключаемой библиотеки пользовательского материала программного комплекса расчетов по методу конечных элементов ANSYS.

В. Проведена верификация алгоритма в отношении параметра накопления поврежденности в случае монотонного нагружения, а также способности описывать диаграмму статического растяжения. Продемонстрировано, что стадии и поля накопленных повреждений в численном эксперименте при осесимметричной и трехмерной постановках совпадают с аналогичными численными экспериментами, известными в литературе.

Г. Приведена аналогия с доминирующими моделями механики разрушения.

Библиографический список

1. De Souza Neto E., Peric D., and Owen D. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. – Wiley, 2008.
2. A simple and unified implementation of phase field and gradient damage models / E. Azinpour, J.P.S. Ferreira, M.P.L. Parente [et al.] // Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci. – 2018. – Vol. 15. – P. 5.
3. Rice J.R., Tracey D.M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1969. – Vol. 17, issue 3. – P. 201–217.
4. Gurson A.L. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I – Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media // ASME. J. Eng. Mater. Technol. – 1977. – Vol. 99 (1). – P. 2–15.
5. Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar // Acta Metallurgica. – 1984. – Vol. 32, issue 1. – P. 157–169.
6. Kachanov L.M. Time of the Rupture Process under Creep Condition // Izv. Akad. Nauk. SSSR, Otd. Tekhn. Nauk. – 1958. – No. 8. – P. 26–31.
7. Rabotnov Y.N. Paper 68: On the Equation of State of Creep. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers // Conference Proceedings. – 1963. – Vol. 178 (1). – P. 2-117-2-122.
8. Leckie F.A., Hayhurst D.R. Creep Rupture of Structures // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1974. – Vol. 340. – P. 323–347.
9. Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture // J Eng Mater Technol. – 1985. – Vol. 107. – P. 83.
10. Chaboche J.L. Continuum damage mechanics: part I – general concepts // J Appl Mech. – 1988. – Vol. 55. – P. 59.
11. Chaboche J.L. Continuum damage mechanics: part II – damage growth, crack initiation, and crack growth // J Mech. – 1988. – Vol. 55. – P. 65–72.
12. Marquis D., Lemaitre J. Constitutive Equations for the Coupling Between Elasto-plasticity Damage and Ageing // Rev. Phys. Applic. – 1988. – Vol. 23. – P. 615–624.
13. Lemaitre, J., Desmorat, R., Sauzay M. Anisotropic Damage Law of Evolution // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2000. – Vol. 19. – P. 187–208.
14. Murakami, S. and Ohno, N. 1981. A Continuum Theory of Creep and Creep Damage // Proceedings of the IUTAM Symposium on Creep in Structures, Leicester, 1980. – Berlin: Springer, 1981. – P. 422–443.
15. Junhe L., Yuan F., Sebastian M. A Modified Lemaitre Damage Model Phenomenologically Accounting for the Lode Angle Effect on Ductile Fracture // Procedia Materials Science. – 2014. – № 3.
16. Armero F. and Oller S. A General Framework for Continuum Damage Models. I. Infinitesimal Plastic Damage Models in Stress Space // Int. J. Solids Structs. – 2000. – Vol. 37. – P. 7409–7436.
17. M. Zehsaz, F.V. Tahami, H. Akhani. Experimental determination of material parameters using stabilized cycle tests to predict thermal ratcheting // UPB Sci Bull Series D. – 2016. – P. 78–2.
18. Крыжевич Г.Б., Филатов А.П. Модель упругопластического деформирования алюминиевых сплавов и критерии малоциклового усталости конструкций // Труды Крыловского государственного научного центра. – 2018. – № S2. – С. 85–95.
19. Determination of combined hardening material parameters under strain controlled cyclic loading by using the genetic algorithm method / H. Badnava [et al.] // J Mech Sci Technol. – 2012. – Vol. 26 (10). – P. 3067–3072.
20. Ishlinskii A.Iu. General theory of plasticity with linear strain hardening // Ukr. Mat. Zh. – 1954. – Vol. 6. – P. 314.
21. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains on work-hardening plastic solids // ASME J. Appl. Mech. – 1956. – Vol. 23.
22. Mohamad Rezaiee-Pajand, SinaSinaie. On the calibration of the Chaboche hardening model and a modified hardening rule for uniaxial ratcheting prediction // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – Vol. 46, issue 16. – P. 3009–3017.
23. Armstrong P.J., Frederick C.O. A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect // GEGB Report No. RD/B/N731. – 1966.
24. H. Mahbadi, M.R. Eslami. Cyclic loading of thick vessels based on the Prager and Armstrong–Frederick kinematic hardening models // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2006. – Vol. 83, issue 6.
25. Eslami M.R., Mahbadi H. Cyclic Loading of Thermal Stress // Journal of Thermal Stress. – 2001. – Vol. 24. – P. 577–603.
26. Yannis F. Dafalias, Kyriakos I. Kourousis, George J. Saridis. Multiplicative AF kinematic hardening in plasticity // International Journal of Solids and Structures. – 2008. – Vol. 45, issue 10.
27. Mahbadi H., Eslami M.R. Cyclic loading of thick vessels based on the Prager and Armstrong–Frederick kinematic hardening models // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2006. – Vol. 83, issue 6.
28. Incremental variational homogenization of elastoplastic composites with isotropic and Armstrong-Frederick type nonlinear kinematic hardening / Antoine Lucchetta, François Auslender, Michel Bornert, Djimédo Kondo // International Journal of Solids and Structures. – 2021. – Vol. 222–223.

29. Comparative assessment of backstress models using high-energy X-ray diffraction microscopy experiments and crystal plasticity finite element simulations / Ritwik Bandyopadhyay, Sven E. Gustafson, Kartik Kapoor, Diwakar Naragani, Darren C. Pagan, Michael D. Sangid // *International Journal of Plasticity*. – 2021. – Vol. 136.
30. Serhaty A., Tillmann W., Kluge S., Kluge S. Coupling of the phase field approach to the Armstrong-Frederick model for the simulation of ductile damage under cyclic load // *International Journal of Plasticity*. – 2021. – Vol. 143.
31. Dylan Agius, Kyriakos I. Kourousis, Chris Wallbrink. A modification of the multicomponent Armstrong-Frederick model with multiplier for the enhanced simulation of aerospace aluminium elastoplasticity // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2018. – Vol. 144. – P. 118–133.
32. Cleja-Țigoiu S., Stoicuța N.E. Variational inequality in classical plasticity. Applications to Armstrong-Frederick elastoplastic model // *Computers & Mathematics with Applications*. – 2019. – Vol. 77, issue 11. – P. 2953–2970.
33. Pei, Pingsha Dong, Jifa Mei. The effects of kinematic hardening on thermal ratcheting and Bree diagram boundaries // *Thin-Walled Structures*. – 2021. – Vol. 159.
34. Knut Andreas Meyer, Magnus Ekh, Johan Ahlström. Modeling of kinematic hardening at large biaxial deformations in pearlitic rail steel // *International Journal of Solids and Structures*. – 2018. – Vol. 130–131. – P. 122–132.
35. Косов Д.А., Федоренков Д.И., Туманов А.В. Реализация модели поврежденности Lemaitre в конечно-элементном комплексе ANSYS // *Труды Академэнерго*. – 2020. – № 4 (61). – С. 30–48.
36. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference Release 14. 5 // ANSYS, Inc. Southpointe, 275 Technology Drive, Canon-Burg, PA. – 2012.
37. Шлянников В.Н. Вычислительная механика деформирования и разрушения. – Казань: Изд-во КГЭУ, 2001.
38. Robert Lee Gates. A Finite Element Implementation of a Ductile. – Bachelor Thesis. 2012.
39. Crack Initiation and Propagation Analyses Taking into Account Initial Strain Hardening and Damage Fields / A. Benallal, R. Billardon, I. Doghri, L. Moret-Bailly // *Numerical Methods in Fracture Mechanics: Proceedings of the Fourth International Conference held in San Antonio, Texas, 23–27 March 1987*. – Pineridge Press, 1987. – P. 337–351
40. Brocks, Wolfgang & Scheider, Ingo. Application of cohesive elements for the simulation of crack extension // 19th European Conference on Fracture: Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety, ECF 2012. – 2012.
41. Lin Chen, René de Borst. Phase-field modeling of cohesive fracture // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. – 2021. – Vol. 90. – P. 104343.
42. Yangjian Xu, Huang Yuan. Applications of normal stress dominated cohesive zone models for mixed-mode crack simulation based on extended finite element methods, *Engineering Fracture Mechanics*. 2011. – Vol. 78, issue 3. – P. 544–558.
43. Насонов А.Н. Когезионные модели образования дефектов в материалах // *Новая наука: Опыт, традиции, инновации*. – 2017. – Т. 3, № 4. – С. 48–51.
44. Lucas Amaro de Oliveira, Mauricio Vicente Donadon. Delamination analysis using cohesive zone model: A discussion on traction-separation law and mixed-mode criteria // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2020. – Vol. 228. – P. 106922.
45. Alfred Cornec, Ingo Scheider, Karl-Heinz Schwalbe. On the practical application of the cohesive model // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2003. – Vol. 70, issue 14. – P. 1963–1987.

References

1. De Souza Neto, E., Peric, D., and Owen, D. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Wiley, 2008.
2. Azinpour, E., Ferreira, J.P.S., Parente, M.P.L. [et al.] A simple and unified implementation of phase field and gradient damage models. *Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci.* 5, 15, 2018.
3. J.R. Rice, D.M. Tracey. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1969, vol. 17, iss. 3, pp. 201–217.
4. Gurson, A.L. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I – Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *ASME. J. Eng. Mater. Technol.* January, 1977; no. 99 (1), pp. 2–15.
5. V. Tvergaard, A. Needleman, Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar, *Acta Metallurgica*, 1984, vol. 32, iss. 1, pp. 157–169.
6. Kachanov, L.M. 1958. Time of the Rupture Process under Creep Condition. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Otd. Tekhn. Nauk.*, 8, 26–31.
7. Rabotnov YN. Paper 68: On the Equation of State of Creep. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*. 1963; vol. 178 (1), pp. 2-117-2-122.
8. Leckie, F.A. and Hayhurst, D.R. 1974. Creep Rupture of Structures. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 340, pp. 323–347.
9. Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J Eng Mater Technol.* 1985; 107: 83.
10. Chaboche JL. Continuum damage mechanics: part I – general concepts. *J Appl Mech.* 1988; 55: 59.
11. Chaboche JL. Continuum damage mechanics: part II – damage growth, crack initiation, and crack growth. *J Mech.* 1988; 55: 65–72
12. Marquis, D. and Lemaitre, J. Constitutive Equations for the Coupling Between Elasto-plasticity Damage and Ageing. *Rev. Phys. Applic*, 1988, 23, 615–624.
13. Lemaitre, J., Desmorat, R. and Sauzay, M. Anisotropic Damage Law of Evolution. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2000, 19, 187–208.
14. Murakami, S. and Ohno, N. 1981. A Continuum Theory of Creep and Creep Damage. Pages 422–443 of: Ponter, A.R.S. (ed), *Proceedings of the IUTAM Symposium on Creep in Structures*, Leicester, Berlin: Springer 1980.
15. Junhe L., Yuan F., Sebastian M. A Modified Lemaitre Damage Model Phenomenologically Accounting for the Lode Angle Effect on Ductile Fracture. *Procedia Materials Science* 3. 2014.
16. Armero, F. and Oller, S. A General Framework for Continuum Damage Models. I. Infinitesimal Plastic Damage Models in Stress Space. *Int. J. Solids Structs*, 2000, 37, pp. 7409–7436.
17. M. Zehsaz, F.V. Tahami, H. Akhani. Experimental determination of material parameters using stabilized cycle tests to predict thermal ratcheting. *UPB Sci Bull Series D*, 78–2 (2016). ISSN 1454-2358
18. Kryzhevich, G.B. Model' uprugoplasticheskogo deformirovaniia aliuminievykhsplavov i kriterii amotsiklovo i ustalostikon struktсии [Model of elastoplastic deformation of aluminum alloys and criteria for low-cycle fatigue of structure] / G.B. Kryzhevich, A.R. Filatov. *Trudy Krylovskogo gosudarstvennogo nauchnogo tsentra*, 2018, no. S2, pp. 85–95.
19. H.Badnava, [et al.] Determination of combined hardening material parameters under strain controlled cyclic loading by

using the genetic algorithm method. *J MechSciTechnol*, 2012, 26–10, pp. 3067–3072

20. A. Iu. Ishlinskii. General theory of plasticity with linear strain hardening. *Ukr. Mat. Zh.*, 6 (1954), p. 314

21. W. Prager. A new method of analyzing stresses and strains on work-hardening plastic solids. *ASME J. Appl. Mech.*, 23 (1956), pp.

22. Mohamad Rezaiee-Pajand, SinaSinaie. On the calibration of the Chaboche hardening model and a modified hardening rule for uniaxial ratcheting prediction. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, vol. 46, iss. 16, pp. 3009–3017. ISSN 0020-7683

23. Armstrong, P. J., Frederick, C.O., 1966. A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect. *GEGB Report No. RD/B/N731*.

24. H. Mahbadi, M.R. Eslami. Cyclic loading of thick vessels based on the Prager and Armstrong–Frederick kinematic hardening models. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2006, vol. 83, iss. 6.

25. Eslami, M.R. and Mahbadi, H. (2001) Cyclic Loading of Thermal Stress. *Journal of Thermal Stress*, 24, 577–603.

26. Yannis F. Dafalias, Kyriakos I. Kourousis, George J. Saridis. Multiplicative AF kinematic hardening in plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, vol. 45, iss. 10.

27. H. Mahbadi, M.R. Eslami. Cyclic loading of thick vessels based on the Prager and Armstrong–Frederick kinematic hardening models. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2006, vol. 83, iss. 6.

28. Antoine Lucchetta, François Auslender, Michel Bornert, Djimédo Kondo. Incremental variational homogenization of elastoplastic composites with isotropic and Armstrong-Frederick type nonlinear kinematic hardening. *International Journal of Solids and Structures*, 2021, vol. 222–223.

29. Ritwik Bandyopadhyay, Sven E. Gustafson, Kartik Kapoor, DiwakarNaragani, Darren C. Pagan, Michael D. Sangid. Comparative assessment of backstress models using high-energy X-ray diffraction microscopy experiments and crystal plasticity finite element simulations. *International Journal of Plasticity*, 2021, vol. 136.

30. Serhat Aygün, TillmannWiegold, Sandra Klinge. Coupling of the phase field approach to the Armstrong-Frederick model for the simulation of ductile damage under cyclic load. *International Journal of Plasticity*, 2021, vol. 143.

31. Dylan Agius, Kyriakos I. Kourousis, Chris Wallbrink. A modification of the multicomponent Armstrong–Frederick model with multiplier for the enhanced simulation of aerospace aluminiumelastoplasticity. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, vol. 144, pp. 118–133

32. S. Cleja-Țigoiu, N.E. Stoicuța. Variational inequality in classical plasticity. Applications to Armstrong–Frederick elastoplastic model. *Computers & Mathematics with Applications*, 2019, vol. 77, iss. 11, pp. 2953–2970.

33. Pei, Pingsha Dong, Jifa Mei. The effects of kinematic hardening on thermal ratcheting and Bree diagram boundaries. *Thin-Walled Structures*, 2021, vol. 159.

34. Knut Andreas Meyer, Magnus Ekh, Johan Ahlström. Modeling of kinematic hardening at large biaxial deformations in pearlitic rail steel. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 130–131, pp. 122–132

35. Kosov, D.A. Realizatsiamodelipovrezhdennosti Lemaitre v konechno-elementnomkomplekse ANSYS / D.A. Kosov, D.I. Fedorenkov, A.V. Tumanov. *Trudy Akademenergo*, 2020, no. 4 (61), pp. 30–48.

36. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference Release 14.5. *ANSYS, Inc. Southpointe, 275 Technology Drive, Canon-Burg, PA 2012*;

37. Shliannikov V.N. Vychislitel'naimekhanikadeformirovaniiairazrusheniia [Shlyannikov V.N. Computational mechanics of deformation and destructio] / Shliannikov V.N. *Izd-vo KGEU. Kazan'*, 2001;

38. Robert Lee Gates. A Finite Element Implementation of a Ductile. Bachelor Thesis. 2012

39. Benallal, A., Billardon, R., Doghri, I. and Moret-Bailly, L. 1987. Crack Initiation and Propagation Analyses Taking into Account Initial Strain Hardening and Damage Fields. Pages 337–351 of: Luxmore, A.L., Owen, D.R.J., Rajapakse, Y.P.S. and Kanninen, M.F. (eds), Numerical Methods in Fracture Mechanics: Proceedings of the Fourth International Conference held in San Antonio, Texas, 23–27 March 1987. PineridgePress.

40. Brocks, Wolfgang & Scheider, Ingo. (2012). Application of cohesive elements for the simulation of crack extension. 19th European Conference on Fracture: Fracture Mechanics for Durability, *Reliability and Safety, ECF 2012*.

41. Lin Chen, René de Borst. Phase-field modelling of cohesive fracture. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2021, vol. 90, 104343, ISSN 0997-7538.

42. Yangjian Xu, Huang Yuan. Applications of normal stress dominated cohesive zone models for mixed-mode crack simulation based on extended finite element methods, *Engineering Fracture Mechanics*, 2011, vol. 78, iss 3, pp. 544–558.

43. Nasonov, A.N. Kogezionnyemodeliobrazovaniia defektov v materialakh [Cohesive models of defect formation in materials] / A.N. Nasonov. *Novaianauka: Opyt, traditsii, innovatsii*, 2017, vol. 3, no. 4, pp. 48–51.

44. Lucas Amaro de Oliveira, Maurício Vicente Donadon. Delamination analysis using cohesive zone model: A discussion on traction-separation law and mixed-mode criteria. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, vol. 228, 106922, ISSN 0013-7944.

45. Alfred Cornec, Ingo Scheider, Karl-Heinz Schwalbe. On the practical application of the cohesive model. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, vol. 70, iss. 14, pp. 1963–1987

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Financing. The study was not sponsored.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.