

УДК 532.542.86. (088.8)

**Б.И. Басок, В.В. Гоцуленко**

Институт технической теплофизики НАНУ, Киев, Украина

**О МЕХАНИЗМАХ ВОЗБУЖДЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ  
В ПОТОКЕ ГАЗА ПОДВОДОМ ТЕПЛОТЫ**

Установлены механизмы возбуждения термоакустических автоколебаний, связанные со своеобразной перестройкой структуры тензоров вязких напряжений и диссипации тепловой энергии, в случае когда к движущемуся газу локально подводится теплота. В одномерном потоке тензор диссипации тепловой энергии определяет тепловое сопротивление, для которого при произвольном политропном подводе теплоты найдено аналитическое представление. Это позволило определить области образования отрицательного теплового сопротивления в зависимости от показателя политропы, что составляет новый механизм возбуждения термоакустических автоколебаний. Б.В. Раушенбахом было предложено аппроксимировать зону локального подвода теплоты некоторой поверхностью, называемой поверхностью теплоподвода. Данная поверхность является поверхностью разрывов первого рода гидродинамических и термодинамических параметров сплошной среды. В данной работе найдены граничные условия, которые должны выполняться на поверхности теплоподвода. Эти граничные условия являются следствиями выполнения на поверхности теплоподвода основных законов сохранения: массы, импульса массы и энергии и могут рассматриваться как уравнения для определения компонент тензора диссипации тепловой энергии, который является ассоциированным с поверхностью теплоподвода. Для описания рассматриваемых термоакустических автоколебаний получена математическая модель в виде диссипативной распределенной динамической системы. В качестве примера применения данной математической модели была рассмотрена задача построения продольных термоакустических автоколебаний в трубе Рийке при расположении источника теплоты непосредственно на ее входе. Показано, что причиной возбуждения автоколебаний феномена Рийке в этом случае является N-образная зависимость напряжения силы вязкостного трения по длине трубы как функции средней по сечению трубы скорости движения нагретого воздуха.

**Ключевые слова:** механизмы термоакустической неустойчивости, теплоподвод, автоколебания, тепловое сопротивление.

**B.I. Basok, V.V. Gotsulenko**Institute of Engineering Thermophysics National Academy of Sciences  
of Ukraine, Kiev, Ukraine**ON THE MECHANISM OF EXCITATION  
OF SELF-OSCILLATIONS IN GAS FLOW HEAT SUPPLY**

Established mechanisms of excitation of thermoacoustic oscillations associated with the original restructuring of the viscous stress tensor and the dissipation of heat energy when moving gas to local release of heat. In one-dimensional flow of heat dissipation tensor determines the thermal resistance,

for which an arbitrary polytropic heat supply found an analytic representation. It is possible to determine the educational negative thermal resistance as a function of the polytropic index, which is a new mechanism of excitation of thermoacoustic oscillations. B.V. Rauschenbach was invited local heat supply area approximated by a surface called the surface of the heat. This surface is a surface of discontinuity of the first kind of hydrodynamic and thermodynamic parameters of the continuum. In this paper, the boundary conditions that must be performed on the surface of the heat. These boundary conditions are a consequence of the surface of the heat fundamental conservation laws: mass, momentum, mass and energy can be considered as the equation for determining the components of the tensor of the dissipation of thermal energy, which is associated with the surface of the heat. For the description of the considered thermal acoustic oscillations found in the form of a mathematical model of distributed dissipative dynamical system. As an example of the application of this mathematical model, we considered the problem of constructing longitudinal thermoacoustic oscillations in a Rijke tube at the location of the heat source directly on its input. Is shown that the excitation of oscillations Rijke phenomenon in this case is N – shaped relationship tension forces of viscous friction along the pipe as a function of the average over the pipe section velocity of heated air.

**Keywords:** mechanisms of thermoacoustic instabilities, supply of heat, oscillations, thermal resistance.

## **Введение**

Неустойчивость потока жидкости или газа при теплоподводе или преобразовании различных форм энергии в его напор возникает во многих потенциально неустойчивых элементах теплоэнергетического оборудования. Значительные проблемы возникают перед практиками, когда они сталкиваются с явлением возбуждения термоакустических автоколебаний и автоколебаний вибрационного горения, соответственно возникающих при конвективном теплоподводе или сжигании топливных смесей в самых разных тепловых агрегатах – от простейших топочных устройств до камер горения воздухонагревателей доменных печей и камер сгорания мощных современных ракетных двигателей. С большой натяжкой этот процесс сегодня можно назвать управляемым [1, 2]. По образному выражению академика Б.В. Раушенбаха, снижение амплитуды автоколебаний вибрационного горения осуществляется «вслепую» с затратой значительных средств и времени. Создавая устройство, конструктор не может не только предсказать степень его устойчивости, но и то, какими путями возникшая неустойчивость будет надежно подавлена или в необходимых пределах инициирована. Неустойчивость возникает при сжигании и угольной пыли, и нефти, и бензина, и пропан-бутановой смеси, и водорода [2]. Так что исходное агрегатное состояние и состав горючего не имеет принципиального значения. Автоколебания давления не только создают большую знакопеременную механическую нагрузку на конструкцию топочного устройства, нередко приводящую к ее механическому разрушению, но и изменяют условия теплообмена. В камерах сгорания, надежно рабо-

тающих в стационарном режиме, при возникновении автоколебаний резко возрастает поток тепла в стенки, что нередко приводит к их термическому разрушению. При создании жидкостных реактивных двигателей требуется проведение громадного количества дорогостоящих испытаний для отработки двигателя. В металлургии автоколебания вибрационного горения не позволяют повысить экономические показатели доменного производства. Известный механизм вибрационного горения (запаздывание сгорания), введенный Л. Крокко, не позволяет объяснить увеличение амплитуды автоколебаний при возрастании тепловой нагрузки. При конвективном подводе теплоты возбуждаются автоколебания, наблюдаемые в явлениях феномена Рийке, в парогенераторах, при охлаждении фурм доменных печей, в дымовых трубах, при кавитации и т.д. Сложность анализа задач такого типа в значительной степени обусловлена тем, что в рассматриваемых динамических системах, в процессе возникновения и развития автоколебаний, происходит преобразование энергии из одной формы в другую. Например, в трубе Рийке – из теплового (хаотического движения частиц среды) вида в энергию упорядоченных механических колебаний газа. При горении преобразование энергии происходит даже дважды. Вначале химическая энергия преобразуется в тепловую, а затем тепловая – в энергию механических колебаний. Описание подобных процессов требует от исследователя определенного уровня квалификации в нескольких областях знаний одновременно, понимания характера взаимосвязей процессов, лежащих на междисциплинарных гранях.

Математическая формализация рассмотренных выше задач приводит к нелинейным уравнениям гидродинамического типа (Навье – Стокса). Однако в зонах подвода теплоты в теплопроводящей жидкости помимо вязких напряжений в работу включаются дополнительные напряжения из-за теплоподвода.

Отметим, что механизмы возбуждения автоколебаний в исходных физических системах, таким образом, математически сводятся к поиску причин, из-за которых в данной системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных появляются периодические по времени решения.

В случае когда к вязкому газу подводится теплота, причина этого кроется в своеобразной перестройке структуры тензоров вязких напряжений и диссипации тепловой энергии [3]. При этом существенно

важно не пренебрегать зависимостью вязкости газа от температуры, так как именно это приводит к реализации положительной обратной связи между тензором вязких напряжений и тензором скоростей деформаций.

### **1. Постановка задачи и формализация основной математической модели**

При теоретическом рассмотрении многофазных сред, процессов горения, распространения ударных волн удобно вводить идеализацию в виде поверхности разрыва гидродинамических и термодинамических параметров [1, 4].

Далее рассматривается движение вязкой теплопроводящей сжимаемой жидкости в некоторой ограниченной пространственной области  $\Omega$ . Также предполагается, что к жидкости осуществляется подвод теплоты, причем неважно как, конвективно или от теплоты сгорания. При определенных условиях в этом случае в жидкости самовозбуждаются автоколебания.

Основная задача данной работы состоит в определении причин или механизмов, из-за которых возбуждаются данные автоколебания, а также в формализации математической модели для их теоретического описания.

Процессы, происходящие в зоне теплоподвода, являются весьма сложными и не поддаются простому описанию. Чтобы преодолеть эти сложности, академик Б.В. Раушенбах предложил окружить зону теплоподвода некоторой областью  $\sigma$ , внутри которой температурные градиенты являются существенными [1]. Линейные размеры этой области предполагаются значительно меньше характерной длины области, в которой рассматривается течение жидкости. Далее Б.В. Раушенбах предложил не рассматривать в деталях процессы, происходящие внутри области  $\sigma$ , а заменить ее некоторой поверхностью  $\Sigma$ , для которой следует записать определенные граничные условия исходя из выполнения на ней основных законов сохранения, о чем будет сказано далее.

Таким образом, зона горения, или конвективного теплоподвода, в связи с вышеуказанным замечанием определяется некоторой поверхностью  $\Sigma$  (рис. 1). Выделим мысленно в движущейся жидкости в начальный момент времени  $t_0$  произвольную область (лагранжевый объ-

ем)  $\Omega_{t_0}$ , составленную из частиц среды. Тогда в произвольный момент времени  $t > t_0$  данная область, деформируясь, перейдет в некоторую область  $\Omega_t$ . Фундаментальные законы сохранения массы, импульса массы и энергии применительно к объему  $\Omega_t$  в рассматриваемой задаче запишем в балансной интегральной форме:

$$\iiint_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega + \oint_{\Sigma_t} \rho(t, \mathbf{r})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho \mathbf{V} d\omega = \iiint_{\Omega_t} \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{g} d\omega + \oint_{\Sigma_t} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds + \iiint_{\Omega_t} \delta_{\Sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Sigma})(\mathbf{P}_T \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}) d\omega = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \iiint_{\Omega_t} \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{V}) d\omega + \oint_{\Sigma_t} \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{V} ds + \iiint_{\Omega_t} \delta_{\Sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Sigma})(\mathbf{P}_T \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}) \cdot \mathbf{V} d\omega - \\ & - \oint_{\Sigma_t} q_n ds + \iiint_{\Omega_t} \rho \varepsilon(t, \mathbf{r}) d\omega, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E(t) = \iiint_{\Omega_t} \rho \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} + u \right) d\omega$  – полная энергия сплошной среды в объеме

$\Omega_t$ ;  $d\omega$  – элемент объема;  $ds$  – элемент поверхности;  $\rho$  – плотность среды;  $\mathbf{V}$  – скорость движения частицы среды в точке, определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ ;  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к поверхности, ограничивающей объем  $\Omega_t$ ;  $\mathbf{n}_{\Sigma}$  – нормаль к поверхности  $\Sigma$ ;  $\delta_{\Sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Sigma})$  – дельта-функция Дирака, ассоциированная с поверхностью  $\Sigma$ ; определяемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}_{\Sigma}$ ;  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения свободного падения;  $\mathbf{P}$  – тензор напряжений;  $\mathbf{P}_T$  – тензор диссипации тепловой энергии;  $u$  – удельная внутренняя энергия сплошной среды,  $q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  – количество тепла, проходящее внутрь объема  $\Omega_t$  через единицу ограничивающей его поверхности в единицу времени;  $\varepsilon$  – количество тепла, выделяемое единицей массы жидкости за единицу времени, которое, в частности, может быть связано с излучением и химическими реакциями (объемное выделение тепла).

Тензор напряжений  $\mathbf{P}$  разлагается в сумму  $\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \mathbf{R}$ , где  $p(t, \mathbf{r})$  – гидростатическое давление в жидкости;  $\mathbf{I}$  – единичный тен-

зор;  $\mathbf{R}$  – тензор вязких (касательных) напряжений. Свойство изотропности пространства приводит к следующему представлению для тензора вязких напряжений:

$$\mathbf{R} = 2\mu\mathbf{e} + (\mu'\text{div}\mathbf{V})\mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{R} = \mu\left(2\mathbf{e} - \frac{2}{3}(\text{div}\mathbf{V})\mathbf{I}\right) + \zeta(\text{div}\mathbf{V})\mathbf{I}, \quad (4)$$

где  $\mu$  – молекулярная (первая или динамическая) вязкость;  $\mu'$  – вторая вязкость;  $\zeta = \mu' + \frac{2}{3}\mu$  – объемная вязкость;  $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\text{grad}\mathbf{V} + \text{grad}\mathbf{V}^T)$  – тензор скоростей деформаций.

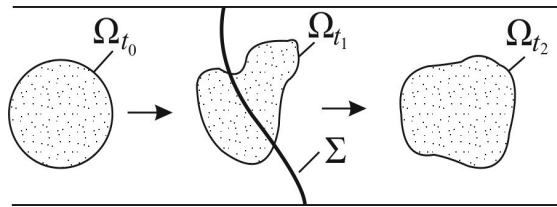


Рис. 1. Схематическое выделение в потоке среды лагранжевого объема  $\Omega_t$

Тензор  $\mathbf{P}_T$  действует на подвижный объем  $\Omega_t$  лишь в случае его пересечения поверхности теплоподвода  $\Sigma$ . Таким образом, согласно определению дельта-функции  $\delta_\Sigma$  справедливо представление (см. рис. 1)

$$\iiint_{\Omega_t} \delta_\Sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\Sigma)(\mathbf{P}_T \cdot \mathbf{n}_\Sigma) d\omega = \begin{cases} \mathbf{P}_T(\mathbf{r}_\Sigma) & \text{при } \Omega_t \cap \Sigma \neq O, \\ 0 & \text{при } \Omega_t \cap \Sigma = O. \end{cases}$$

На поверхности  $\Sigma$  терпят разрыв гидродинамические и термодинамические параметры. Ввиду этого  $\Sigma$  является поверхностью сильного разрыва. Обозначим через  $F(x, y, z) = 0$  уравнение, определяющее поверхность  $\Sigma$ . Также предполагаем, что поверхность  $\Sigma$  двусторонняя. Тогда векторное поле нормалей к одной из двух ее сторон определяется выражением  $\mathbf{n}_\Sigma = \|\text{grad}(F)\|^{-1} \text{grad}(F)$ . Обозначим через  $\mathbf{U} = U\mathbf{n}_\Sigma$  скорость движения поверхности  $\Sigma$  в направлении нормали  $\mathbf{n}_\Sigma$  к ней.

Можно показать, что следствием выполнимости законов сохранения (1)–(3) на поверхности разрыва  $\Sigma$  являются следующие граничные условия [5]:

$$\left[ \begin{array}{c} \rho(V_{n_\Sigma} - U), \\ \rho \mathbf{V}(V_{n_\Sigma} - U) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_\Sigma - \mathbf{P}_T \cdot \mathbf{n}_\Sigma, \\ \rho(V_{n_\Sigma} - U) \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_\Sigma) \cdot \mathbf{V} - (\mathbf{P}_T \cdot \mathbf{n}_\Sigma) \cdot \mathbf{V} + q_{n_\Sigma} \end{array} \right]_\Sigma = 0, \quad (5)$$

где  $[f]_\Sigma = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_\Sigma - 0} f(\mathbf{r}) - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_\Sigma + 0} f(\mathbf{r})$  – скачок величины  $f$  на поверхности разрыва  $\Sigma$ .

Замыкающими соотношениями в системе (1)–(3) являются термодинамическое уравнение состояния и реологическое уравнение (4), связывающее тензор напряжений  $\mathbf{P}$  с тензором скоростей деформаций  $\mathbf{e}$ . Тензор  $\mathbf{P}_T$  при этом однозначно определяется из соотношений (5). Полученная в результате динамическая система является диссипативной. Действительно, согласно основным положениям неравновесной термодинамики в открытых диссипативных естественных процессах энтропия  $S(t)$  не убывает [6] т.е.  $dS/dt \geq 0$ . По аналогии с законами сохранения (1)–(3) выводится уравнение для изменения энтропии  $S$  в лагранжевом объеме  $\Omega_t$  [6]

$$S(t) = \iiint_{\Omega_t} \rho s_m(t, \mathbf{r}) d\omega, \quad \frac{dS(t)}{dt} = - \oint_{\Sigma_t} \frac{q_n}{p} ds + \iiint_{\Omega_t} \left[ - \frac{\nabla T \cdot \mathbf{q}}{T^2} + \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}}{T} \right] d\omega, \quad (6)$$

где  $s_m$  – удельная массовая энтропия.

Уравнение (6) является независимым от (1)–(3) и, таким образом, выступает контролирующим органом правильности проведенных вычислений. При подстановке в (6) вектора скорости  $\mathbf{V}$ , давления  $p$  и температуры  $T$ , полученных путем интегрирования уравнений (1)–(3), дополненных граничными условиями (5), мы должны получить энтропию  $S(t)$  как неубывающую функцию времени  $t$ .

Покажем, что из (6) вытекает соотношение  $dS/dt \geq 0$ . Действительно, согласно закону Фурье  $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ , где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности сплошной среды. Из уравнения (6) следует, что изменение энтропии в объеме  $\Omega_t$  осуществляется из-за притока тепла (первое слагаемое) и двух диссипативных процессов теплопроводности

(второе слагаемое) и вязкости (третье слагаемое). Далее, учитывая, что  $q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\|\nabla T\| = \nabla T \cdot \mathbf{n}$  и реологическое соотношение (4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = & \lambda \oint_{\Sigma_t} \frac{\|\nabla T\|}{p} ds + \lambda \iiint_{\Omega_t} \left( \frac{\|\nabla T\|}{T} \right)^2 d\omega + \iiint_{\Omega_t} \frac{p}{\rho T} \frac{dp}{dt} d\omega + \\ & + \mu' \iiint_{\Omega_t} \frac{\|\operatorname{div} \mathbf{V}\|^2}{T} d\omega + 2\mu \iiint_{\Omega_t} \frac{\|\mathbf{e}\|^2}{T} d\omega \geq 0. \end{aligned}$$

## 2. Реализация положительной обратной связи между тензором вязких напряжений и тензором скоростей деформаций при постоянной мощности теплового потока

Пренебрегая второй вязкостью, приходим к следующему представлению между тензорами вязких напряжений и скоростей деформаций:

$$\mathbf{R} = 2\mu \mathbf{e}. \quad (7)$$

В системах, где возникают существенные температурные градиенты, молекулярная вязкость  $\mu$  является функцией температуры  $T$  сплошной среды. Причем известно, что для газов данная зависимость является монотонно возрастающей, а для жидкостей наоборот – монотонно убывающей.

Рассмотрим качественно, как возникает положительная обратная связь между тензорами  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{R}$  при теплоподводе постоянной мощности к движущемуся газу. В этом случае данная положительная обратная связь является механизмом самовозбуждения автоколебаний теплоподводом. Действительно, предположим, что случайно изменилась скорость стационарного течения газа, например (для определенности) увеличилась. Тогда через зону теплоподвода увеличилась масса проходящего газа. Но поскольку рассматривается подвод теплоты с постоянной мощностью, то это приводит к локальному уменьшению температуры потока. При этом также, например, согласно формуле Сазерленда уменьшается вязкость газа, что согласно (7) приводит к уменьшению силы вязкостного трения. Следовательно, получается, что с увеличением скорости газа в рассматриваемом случае сила вязкостного трения играет дестабилизирующую роль, приводящую к потере устойчивости стационарного течения газа и самовозбуждению автоколебаний. Эти качественные рассуждения далее будут продемонстрированы количе-



ственно при математическом моделировании термоакустических автоколебаний в трубе Рийке.

### 3. Выражение тензора диссипации тепловой энергии в одномерном установившемся течении невязкого идеального газа

Рассмотрим одномерное установившееся течение невязкого идеального в термодинамическом смысле газа в канале постоянного сечения (рис. 2). Отметим, что в зоне теплоподвода из-за изменения плотности среды (в силу уравнения неразрывности) изменяется и скорость среды. Поэтому согласно определениям гидравлики зона теплоподвода является местным гидравлическим сопротивлением, которое в работах Б.В. Раушенбаха [1] и Г.Н. Абрамовича [7] было названо тепловым сопротивлением. Обобщение данного понятия на пространственные течения приводит к понятию тензора диссипации тепловой энергии.



Рис. 2. Схема к обоснованию теплового сопротивления

Таким образом, в одномерном течении газа тензор  $\mathbf{P}_T$  имеет одну компоненту и определяет тепловое сопротивление. В этом случае существенно упрощается и форма записи уравнения, выражающего закон сохранения энергии. Для определения теплового сопротивления запишем для сечений 1-1 и 2-2 (см. рис. 2) уравнение энергии в форме первого начала термодинамики для потока [8]:

$$q + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{w_1^2}{2} + u_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{w_2^2}{2} + u_2 + \Delta h_T, \quad (8)$$

где  $\Delta h_T$  – потери энергии из-за теплового сопротивления;  $w_1$  и  $w_2$  – соответственно средние скорости движения газа в первом и втором сечениях канала. При политропном подводе теплоты  $q = c_v \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1)$ , где

$n$  – показатель политропы;  $k$  – показатель адиабаты;  $c_v$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Далее, с учетом того, что изменение внутренней энергии  $u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1)$ ,  $c_p - c_v = R$ , где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} = R(T_2 - T_1)$  и  $R(T_2 - T_1) = c_v(k - 1)(T_2 - T_1)$ . Следовательно, уравнение (8) позволяет определить  $\Delta h_T$  в таком виде:

$$\Delta h_T = n \left( \frac{k-1}{1-n} \right) c_v (T_2 - T_1) + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2}. \quad (9)$$

Воспользовавшись уравнением неразрывности  $\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2$  и соотношением между параметрами политропного процесса  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{n-1}}$ , из зависимости (9) получаем

$$h_T = \rho_1 n \left( \frac{k-1}{1-n} \right) c_v (T_2 - T_1) + \frac{\rho_1 w_1^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{2}{n-1}} \right), \quad (10)$$

где положено  $h_T = \rho_1 \Delta h_T$  – потери давления из-за теплового сопротивления.

Если величина, определяемая выражением (10), является отрицательной, то из уравнения (8) следует, что тепловое сопротивление является отрицательным. В этом случае тепловое сопротивление не уменьшает, а увеличивает напор потока и, следовательно, составляет механизм неустойчивости.

Таким образом, неравенство  $h_T < 0$  является условием возникновения отрицательного теплового сопротивления и составляет отдельный механизм термоакустической неустойчивости.

Непосредственная формальная аналогия теплового сопротивления с местными гидравлическими сопротивлениями проще всего просматривается при изобарном теплоподводе, когда показатель политропы  $n = 0$ . В этом случае выражение для теплового сопротивления принимает следующий вид:

$$h_T = \xi \frac{\rho_1 w_1^2}{2}, \text{ где } \xi = 1 - \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2.$$

Например, для сравнения, формула И.Е. Идельчика для местных гидравлических потерь, возникающих при внезапном сужении канала с сечением площадью  $S_1$  до сечения площади  $S_2$ , имеет вид

$$h = \xi \frac{\rho_1 w_1^2}{2}, \text{ где } \xi = 1 - \frac{S_2}{S_1}.$$

#### 4. Математическое моделирование автоколебаний феномена Рийке

Рассматривается следующая задача. В вертикальной трубе (рис. 3) в нижней ее части расположен источник подвода теплоты. При определенных условиях в такой системе самовозбуждаются продольные термоакустические автоколебания. Отметим, что в случае теплоподвода от источника постоянной мощности, например электронагревателя, рассматриваемая модель называется трубой Рийке [9]. Потерю устойчивости стационарной естественной конвекции в трубе Рийке и рождение автоколебательного режима (труба начинает «звучать») принято называть в научной литературе феноменом Рийке [9]. Проводились многочисленные экспериментальные и теоретические исследования данного феномена [9–11].

В трубе Рийке самовозбуждаются продольные автоколебания при потере устойчивости ламинарного конвективного движения нагретого воздуха. Таким образом, для их теоретического описания достаточно ограничиться одномерной нелинейной постановкой задачи. В этом случае общие уравнения (1)–(3) упрощаются и приводятся к следующей форме [12]:

$$\frac{\partial \rho(t, r)}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad (11)$$

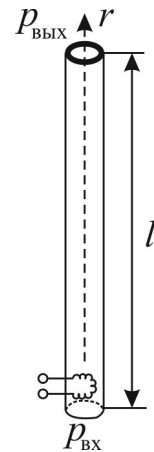


Рис. 3. Схема трубы Рийке с расположением электронагревателя на ее входе

$$\frac{\partial v(t, r)}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{32}{d^2} \mu(T) v - g, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho u \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho v \left( \frac{v^2}{2} + i \right) \right] + q \delta(r). \quad (13)$$

Зависимость молекулярной вязкости от температуры для газа определяется по формуле Сазерленда

$$\mu(T) = \mu_0 \frac{T_0 + C}{T + C} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}},$$

где  $\mu_0$  – контрольная вязкость при некоторой контрольной температуре  $T_0$ ;  $C$  – постоянная Сазерленда, для воздуха  $C = 120$  [К].

Для упрощения будем предполагать, что спираль электронагревателя расположена непосредственно на входе в трубу. В этом случае исключаются граничные условия (5). Согласно [4, 9] из экспериментов следует, что эффект (или феномен) Рийке (т.е. возбуждение автоколебаний) наблюдается лишь в определенном диапазоне скоростей направленного движения воздуха. Поэтому, чтобы иметь возможность регулировать стационарную скорость течения воздуха в трубе, на ее выходе устанавливается дроссель.

Следовательно, система уравнений (11)–(13) дополняется следующими граничными условиями на входе и выходе из трубы:

$$p = p_{\text{вх}} \text{ при } r = 0; \quad p = p_{\text{вых}} + k_{\text{др}} v^2 \text{ при } r = \ell, \quad (14)$$

где  $p_{\text{вых}}$  – давление на выходе из трубы;  $k_{\text{др}} v^2$  – местные гидравлические потери давления на дросселе; соответственно  $p_{\text{вх}} = p_{\text{вых}} + \rho_0 g \ell$  – давление и  $\rho_0$  – плотность воздуха на входе в трубу.

Проблема феномена Рийке, в рассматриваемом случае, сводится к определению причин, из-за которых в краевой задаче (11)–(14) появляются периодические по времени решения. Уравнение (12) отличается от уравнения Эйлера (приводящего к консервативной динамической системе) наличием диссипативного слагаемого  $h = \frac{32}{d^2} \mu(T) v$  – напряжения силы вязкостного трения о стенки трубы.

На рис. 4 приведен график зависимости  $h$  от скорости  $v$ . Из данного графика видно, что при  $v_{кр} \leq v \leq v_{min}$  выполняется неравенство  $\partial h / \partial v < 0$ , т.е. на этом интервале происходит снижение вязкостного сопротивления. Если текущее значение скорости  $v$  принадлежит интервалу  $(v_{кр}; v_{min})$ , то в этом случае сила вязкостного трения играет дестабилизирующую роль. При случайном увеличении скорости сила вязкости не увеличивается, а уменьшается, что приводит к дальнейшему увеличению скорости. Это происходит до тех пор, пока значение скорости  $v$  не выйдет из диапазона  $(v_{кр}; v_{min})$ , где уже с ростом скорости сила трения будет препятствовать ее увеличению, так как вне интервала  $(v_{кр}; v_{min})$  имеет место неравенство  $\partial h / \partial v \geq 0$ .

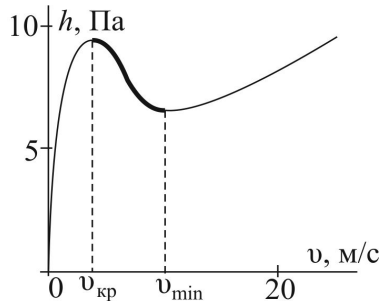


Рис. 4. Зависимость напряжения силы вязкостного трения в трубе Рийке при мощности 4 кВт электронагревателя, расположенного непосредственно на входе в трубу диаметром  $d = 4,5$  см и длиной  $\ell = 1,25$  м

Таким образом, сценарий самовозбуждения автоколебаний в рассматриваемой трубе Рийке (см. рис. 3) является следующим. Стационарный конвективный режим течения  $v(x, t) = \xi = \text{const}$  при  $\xi < v_{кр}$  или  $\xi > v_{min}$  является устойчивым, и колебания не возбуждаются. Когда  $v_{кр} < \xi < v_{min}$ , линейный анализ гидродинамической устойчивости показывает, что в этом случае стационарный режим является неустойчивым и от него в результате суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа ответвляются продольные автоколебания, которые иллюстрированы на рис. 5. Характер демпфирования колебаний давления в трубе Рийке в области устойчивости стационарного режима приведен на рис. 6.

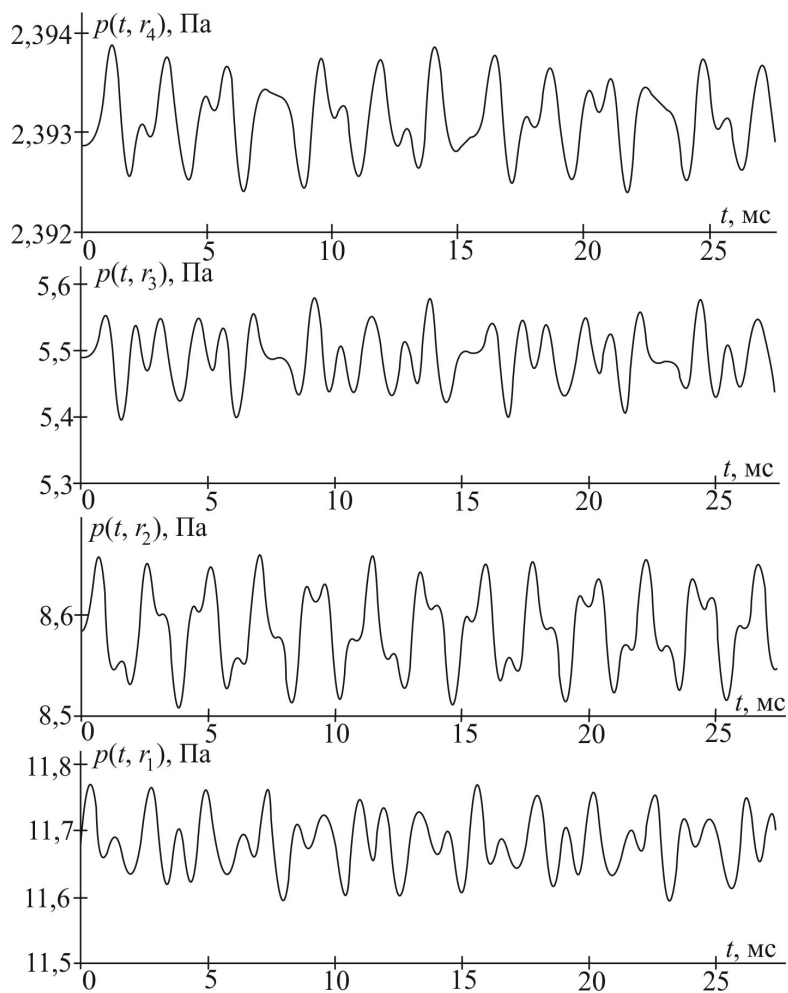


Рис. 5. Автоколебания давления в сечениях  $r_i = i\Delta\ell$  ( $i = \overline{1;4}$ ) при мощности 4 кВт электронагревателя, расположенного непосредственно на входе в трубу диаметром  $d = 4,5$  см и длиной  $\ell = 1,25$  м, когда  $v_{кр} \approx 4$  м/с  $< \xi = 5,5$  м/с  $< v_{min} \approx 11$  м/с

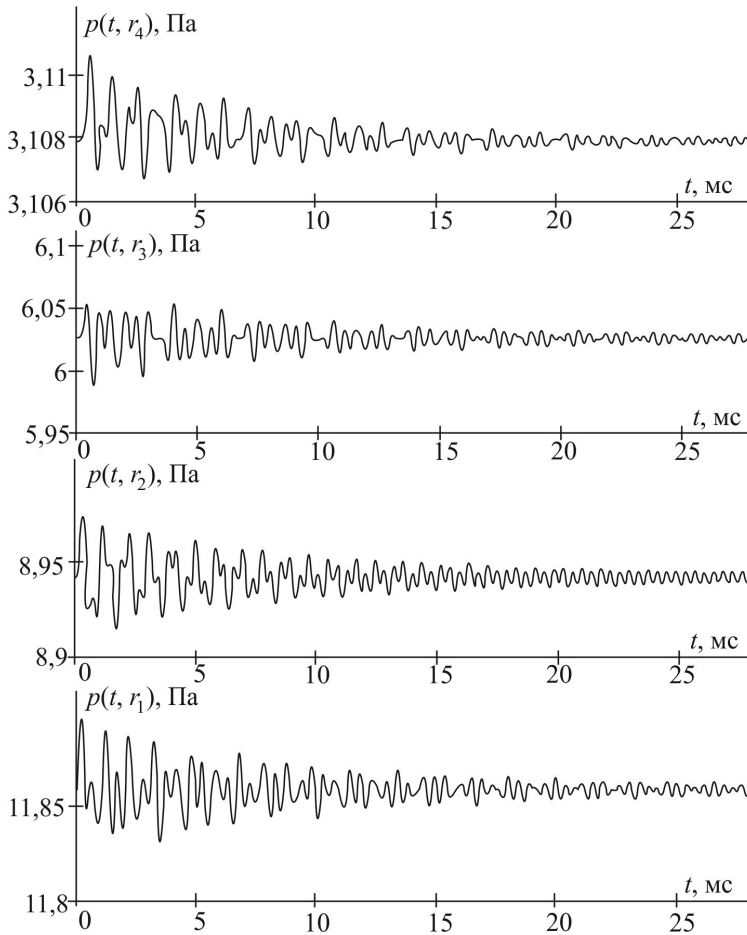


Рис. 6. Затухающие колебания давления в сечениях  $r_i = i\Delta\ell$  ( $i = \overline{1;4}$ ) при мощности 4 кВт электронагревателя, расположенного непосредственно на входе в трубу диаметром  $d = 4,5$  см и длиной  $\ell = 1,25$  м, когда  $\xi = 2,5$  м/с  $<$   $v_{кр} \approx 4$  м/с

### Заключение

Уравнения гидродинамики, описывающие движение сплошной среды с сосредоточенным теплоподводом, дополнены обобщенной функцией (тензором диссипации тепловой энергии), ассоциированной с поверхностью теплоподвода и характеризующей наличие теплового сопротивления.

Использование уравнения энергии для потока в форме 1-го закона термодинамики позволило определить тепловое сопротивление для политропных процессов. Это дает возможность установить образова-

ние отрицательного теплового сопротивления при различных показателях политропы  $n$ , что составляет новый механизм возбуждения автоколебаний при теплоподводе.

Также установлено, что причиной возбуждения автоколебаний при подводе теплоты к вязкому газу является реализация положительной обратной связи между тензором вязких напряжений и тензором скоростей деформаций, существенно определяемая зависимостью молекулярной вязкости газа от его температуры.

### **Библиографический список**

1. Раушенбах Б.В. Вибрационное горение. – М.: Физматгиз, 1961. – 500 с.
2. Гладышев В.Н. Автоколебания при горении и термоядерных взаимодействиях. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 135 с.
3. Гоцуленко В.В., Басок Б.И. Контроль и управление автоколебаниями в теплоэнергетических системах // Промышленная теплотехника. – 2011. – Т. 33, № 7. – С. 40–41.
4. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. – М.: ЛИБРОКОМ, 2010. – 552 с.
5. Basok B.I., Gotsulenko V.V., Gotsulenko V.N. Control vibration combustion and thermoacoustic oscillations in potentially unstable elements heat and power equipment // XIV Minsk International Heat and Mass Transfer Forum. – Minsk, 2012. – P. 22–30.
6. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. – М.: Научный мир, 2007. – 350 с.
7. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – М.: Наука, 1969. – 824 с.
8. Гоцуленко В.В., Гоцуленко В.Н. Тепловое сопротивление как механизм возбуждения автоколебаний // Сб. науч. тр. Днепропетровского гос. техн. ун-та. – 2009. – Вып. 1 (11). – С. 95–100.
9. Беляев Н.М., Белик Н.П., Польшин А.В. Термоакустические колебания газожидкостных потоков в сложных трубопроводах энергетических установок. – Киев: Высшая школа, 1985. – 160 с.
10. Басок Б. И., Гоцуленко В.В. Теория феномена Рийке в системе с сосредоточенными параметрами // Акустический вестник. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 3–8.



11. Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Автоколебания в распределенной модели трубы Рийке // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. XIV, № 4 (48). – С. 3–13.

12. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 225 с.

### References

1. Raushenbah B.V. Vibratsionnoe gorenje [Vibrating combustion]. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 500 p.

2. Gladyshev V.N. Avtokolebaniya pri gorenii i termoyaderniyh vzaimodeystviyah [Self-oscillations in combustion and fusion interactions]. Novosibirsk: Sibirskoe otdeleniye Rossiyskoy akademii nauk, 1999, 135 p.

3. Gotsulenko V.V., Basok B.I. Kontrol i upravlenie avtokolebaniyami v teploenergeticheskikh sistemah [Control and management of self-excited oscillations in the heating system]. *Promyshlennaya teplotekhnika*, 2011, vol. 33, no. 7, pp. 40-41.

4. Landa P.S. Nelineynyye kolebaniya i volny [Nonlinear Waves]. Moscow: LIBROKOM, 2010, 552 p.

5. Basok B.I., Gotsulenko V.V., Gotsulenko V.N. Control vibration combustion and thermoacoustic oscillations in potentially unstable elements heat and power equipment. *XIV Minsk International Heat and Mass Transfer Forum*. Minsk, 2012, pp. 22-30.

6. Elizarova T.G. Kvazigazodinamicheskie uravneniya i metodyi rascheta vyazkih techeniy [Quasi-gasdynamics equations and methods for calculating viscous flows]. Moscow: Nauchnyy mir, 2007, 350 p.

7. Abramovich G.N. Prikladnaya gazovaya dinamika [Applied Gas Dynamics]. Moscow: Nauka, 1969. 824 p.

8. Gotsulenko V.V., Gotsulenko V.N. Teplovoe soprotivlenie kak mehanizm vzbuzhdeniya avtokolebaniy [Thermal resistance as a mechanism of excitation of oscillations]. *Sbornik nauchnykh trudov Dneprodzerzhinskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta*, 2009, no. 1 (11), pp. 95-100.

9. Belyaev N.M., Belik N.P., Polshin A.V. Termoakusticheskie kolebaniya gazozhidkostnykh potokov v slozhnykh truboprovodakh energeticheskikh ustanovok [Thermoacoustic oscillations of gas-liquid flows in complex pipelines of power plants]. Kiev: Vysshaya shkola, 1985. 160 p.

10. Basok B.I., Gotsulenko V.V. Teoriya fenomena Riyke v sisteme s sosredotochennyimi parametrami [Theory Rijke phenomenon in a system with lumped parameters]. *Akusticheskiy vestnik*, 2010, vol. 13, no. 3, pp. 3-8.

11. Basok B.I., Gotsulenko V.V. Avtokolebaniya v raspredelennoy modeli trubyi Riyke [Oscillations in a distributed model Rijke tube]. *Sibirskiy zhurnal industrialnoy matematiki*, 2011, vol. XIV, no. 4 (48), pp. 3–13.

12. Charny I.A. Neustanovivsheesya dvizhenie realnoy zhidkosti v trubah [Unsteady motion of a real fluid in pipes]. Moscow: Nedra, 1975. 296 p.

### **Об авторах**

**Басок Борис Иванович** (Киев, Украина) – член-корреспондент Национальной академии наук Украины, замдиректора по научным вопросам Института технической теплофизики НАН Украины (03057, Украина, г. Киев, ул. Желябова, 2а, e-mail: basok@ittf.kiev.ua).

**Гоцуленко Владимир Владимирович** (Киев, Украина) – кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела теплофизических основ энергосберегающих теплотехнологий Института технической теплофизики НАН Украины (03057, Украина, г. Киев, ул. Желябова, 2а, e-mail: gosul@ukr.net).

### **About the authors**

**Basok Boris Ivanovich (Kiev, Ukraine)** – Corresponding Member of the NAS of Ukraine, Vice-Director in Science of the Institute of Engineering Thermophysics National Academy of Sciences of Ukraine (2a, Zhelyabov str., 03057, Kiev, Ukraine, e-mail: basok@ittf.kiev.ua)

**Gotsulenko Vladimir Vladimirovich** (Kiev, Ukraine) – Ph D. of Technical Sciences, Senior research fellow of the Institute of Engineering Thermophysics National Academy of Sciences of Ukraine (2a, Zhelyabov str., 03057, Kiev, Ukraine, e-mail: gosul@ukr.net).

Получено 15.02.2013