

УДК 621.982:539.319

**М.Г. Бояршинов**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

## **ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА**

Объект исследования – длинный полый цилиндр, находящийся в сложных условиях деформирования под действием собственного веса и вращения крутящим моментом. Исследуется напряженное состояние по сечению цилиндра и кривизна его продольной оси. В качестве основных допущений, принимаемых для решения рассматриваемой задачи, рассматриваются обычные для механики материалов и инженерных приближений гипотеза о линейности физических соотношений между напряжениями и деформациями (линейная теория упругости) и предположение о малых деформациях. Решение задачи строится на основе дифференциального уравнения упругого изгиба центральной оси цилиндра и основных соотношений между кривизной этой оси, приложенными нагрузками, деформациями и напряжениями по сечению цилиндра. Граничная задача для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с соответствующими граничными условиями решается с помощью метода вариаций произвольных постоянных. Это позволило получить точное решение задачи изгиба длинного цилиндра, вращающегося вокруг продольной оси. Это позволило определить зависимость кривизны центральной оси цилиндра от продольной координаты и найти характер распределения напряжения по сечению цилиндра. Выполнена оценка вклада в напряженное состояние от каждого из факторов, действующих на рассмотренное изделие. Решение поставленной задачи позволило определить эквивалентное напряжение в периферийных слоях цилиндра как результат воздействия всех рассмотренных силовых факторов.

**Ключевые слова:** изгиб, деформации, напряжения, прогиб, вращение.

**M.G. Boyarshinov**

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

## **ESTIMATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE REVOLVING LONG CYLINDER**

Subject of a study is a difficult stress state of long hollow cylinder which is being bended by its own weight and rotated by turning moment. The stressed state over the cylinder section and the curvature of its longitudinal axis are investigated. The basic assumptions taken in the attention to solve the problem in question are usual common for the mechanics of materials and engineering approximations the hypothesis about the linearity of the physical relationships between the stresses and strains (linear theory of elasticity) and assumption about the small strains. Solution of problem is built on the basis of the differential equation of the elastic flexure of the central axis of cylinder and fundamental relationships between the curvature of this axis, applied loads, strains and stresses in the region of cylinder

section. Boundary-value problem for the ordinary differential equation of the fourth order with the appropriate boundary conditions is solved using the method of variations of the arbitrary constants. This made it possible to obtain the exact solution of the task of the long cylinder bending which rotates around the longitudinal axis. This, as a result, made possible to determine the dependence of the curvature of cylinder central axis on the longitudinal coordinate and to find the stress distribution in the of cylinder section. The estimation of the contribution from each of the factors, which act on the subject of study, to the stressed state is executed. Solution of the presented problem made it possible to define equivalent stress in the outlying layers of cylinder as the result of the action of all power factors examined.

**Keywords:** bend, deformation, stress, sagging, the rotation.

Тяжелый длинный полый цилиндр зашцеилен на конце и вращается вокруг продольной оси. Напряженно-деформированное состояние такого объекта в общем случае можно описать с применением современной высокопроизводительной вычислительной техники на основе трехмерной математической модели, включающей полную систему уравнений равновесия, определяющих соотношений упругопластического деформирования, учитывающих эффекты циклического нагружения материала, с соответствующими начальными и граничными условиями.

В первом приближении решение этой задачи может быть получено с использованием инженерных подходов на основе простейших соотношений теории упругости, сопротивления материалов и механики материалов [1–4].

### 1. Изгиб длинного полого цилиндра под действием силы тяжести

Изгиб длинного полого цилиндра под действием силы тяжести (рис. 1) описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка [1, 2]

$$EI \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = q(x) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u(x) \Big|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \Big|_{x=l} = \frac{M(x)}{EI} \Big|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{d^3 u(x)}{dx^3} \right|_{x=l} = \left. \frac{Q(x)}{EI} \right|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

В формулах (1)–(5) обозначено:  $u(x)$  – функция прогиба цилиндра;  $x$  – продольная координата;  $\xi$  – ось изогнутой балки;  $M(x)$  – внешний изгибающий момент;  $Q(x)$  – внешняя перерезывающая сила;  $q(x)$  – распределенная массовая нагрузка, причем  $q(x) = m_0 g = \text{const}$ , где  $m_0$  – погонная масса цилиндра;  $g$  – ускорение свободного падения ( $9,81 \text{ м/с}^2$ ).

Для вычислений принято, что длина цилиндра  $l = 10 \text{ м}$ , его масса  $m = 1200 \text{ кг}$ , внешний и внутренний диаметры  $d_e = 0,176 \text{ м}$  и  $d_i = 0,128 \text{ м}$  соответственно. Модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

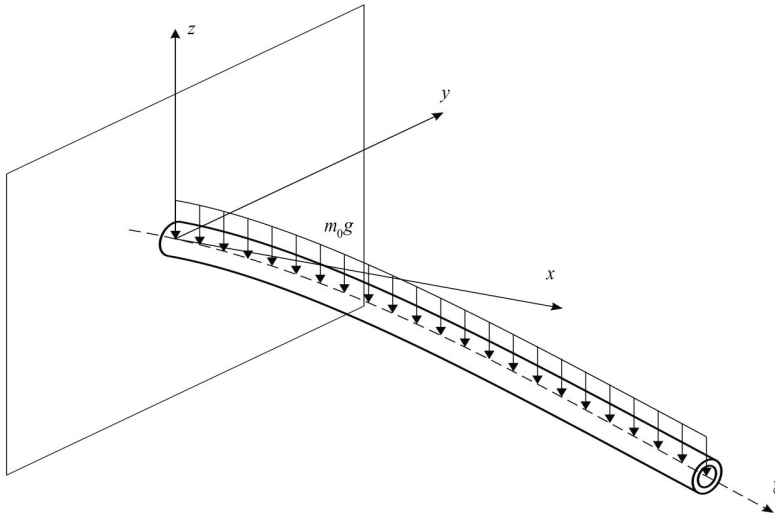


Рис. 1. Расчетная схема изгиба длинного полого цилиндра под действием силы тяжести

Решение дифференциального уравнения (1) записывается в виде [5, 6]

$$u(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \frac{m_0 g}{24EI} x^4, \quad (6)$$

причем постоянные  $C_0, C_1, C_2, C_3$  определяются с учетом граничных условий (2)–(5):

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x)|_{x=0} = C_0 + C_1 0 + C_2 0^2 + C_3 0^3 + \frac{m_0 g}{24EI} 0^4 = 0, \\ \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \left[ C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \frac{m_0 g}{6EI} x^3 \right]_{x=0} = \\ = C_1 + 2C_2 0 + 3C_3 0^2 + \frac{m_0 g}{6EI} 0^3 = 0, \\ \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \Big|_{x=l} = \left[ 2C_2 + 6C_3 x + \frac{m_0 g}{2EI} x^2 \right]_{x=l} = 2C_2 + 3C_3 l + \frac{m_0 g}{2EI} l^2 = 0, \\ \frac{d^3 u(x)}{dx^3} \Big|_{x=l} = \left[ 6C_3 + \frac{m_0 g}{EI} x \right]_{x=l} = 6C_3 + \frac{m_0 g}{EI} l = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (7) позволяет определить постоянные интегрирования:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{m_0 g l^2}{4EI}, \quad C_3 = -\frac{m_0 g l}{6EI}.$$

Решение (6) принимает вид

$$u(x) = \frac{m_0 g}{24EI} x^4 - \frac{m_0 g l}{6EI} x^3 + \frac{m_0 g l^2}{4EI} x^2 = \frac{m_0 g}{24EI} x^2 (x^2 - 4lx + 6l^2). \quad (8)$$

Кривизна осевой линии цилиндра определяется выражением

$$\kappa = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \frac{m_0 g}{2EI} x^2 - \frac{m_0 g l}{EI} x + \frac{m_0 g l^2}{2EI} = \frac{m_0 g}{2EI} (x^2 - 2lx + l^2). \quad (9)$$

На рис. 2, а приведена форма, на рис. 2, б – кривизна прогиба центральной линии длинномерного цилиндра. Наибольшая кривизна,  $m^{-1}$ , (см. рис. 2, б) имеет место в точке  $x = 0$ ,

$$\kappa|_{x=0} = \frac{m_0 g}{2EI} 0^2 - \frac{m_0 g l}{EI} 0 + \frac{m_0 g l^2}{2EI} = \frac{m_0 g l^2}{2EI} = -0,008229,$$

а значит, наибольшие растягивающие (сжимающие) напряжения, МПа, в длинномерном цилиндре достигаются именно в этом сечении,

$$\sigma_{\max} = -E \kappa_{\max} \frac{d_e}{2} = 144,84.$$

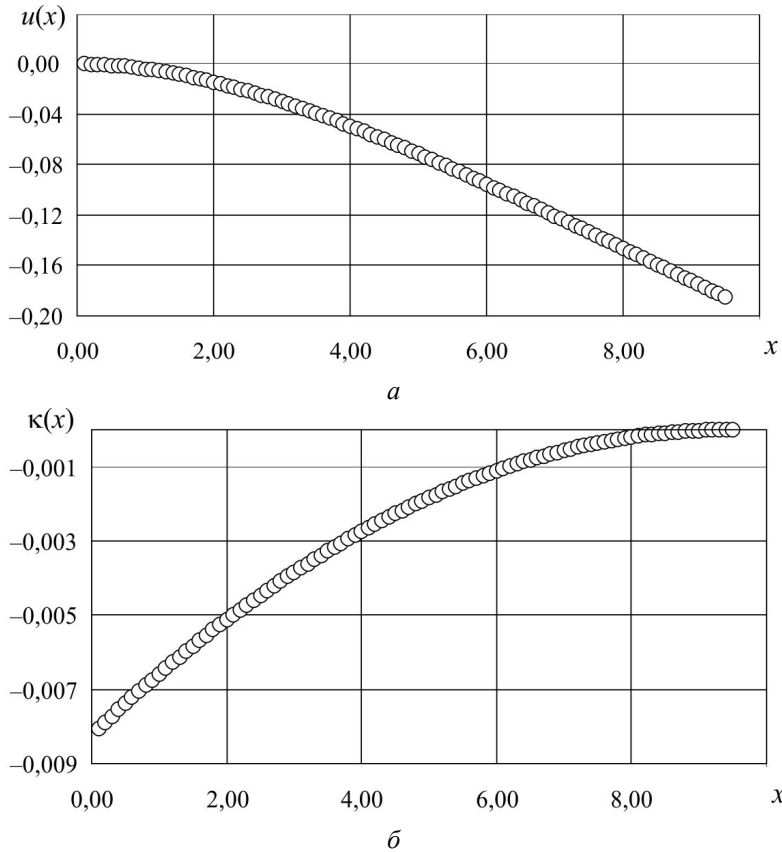


Рис. 2. Действие силы тяжести на ось длинномерного цилиндра: *a* – зависимость от продольной координаты  $x$  (м) прогиба  $u$  (м); *б* – зависимость от продольной координаты  $x$  (м) и кривизны  $\kappa$  ( $\text{м}^{-1}$ )

## 2. Изгиб вращающегося длинного цилиндра

Изгиб вращающегося длинного цилиндра обусловлен одновременным действием силы тяжести и вращения за счет момента  $M_{\text{кр}}$  внешних сил (рис. 3).

Наложение дополнительных факторов (продольное перемещение, вращение и проч.) при изгибе длинномерных изделий приводит к формированию сложного напряженного и деформированного состояния [7–10]. Моделирование таких процессов требует применения эйлерово-лагранжева подхода, прослеживания истории деформирования материальных частиц, в том числе процессов нагружения, упругой разгрузки и, возможно, упругопластического нагружения противоположного зна-

ка, в том числе с появлением вторичных пластических деформаций и изменением предела текучести материала (эффект Баушингера), учета прочих особенностей знакопеременного деформирования.

Очевидно, что при упругом изгибе наложение вращения не приводит к изменению упругой линии длинномерного изделия, поскольку для его вращения практически не требуются дополнительные энергетические затраты (кроме возможных затрат на трение): при повороте круглого сечения энергия, затрачиваемая на нагружение частиц материала, равна упругой энергии разгрузки симметрично расположенных частиц того же сечения.

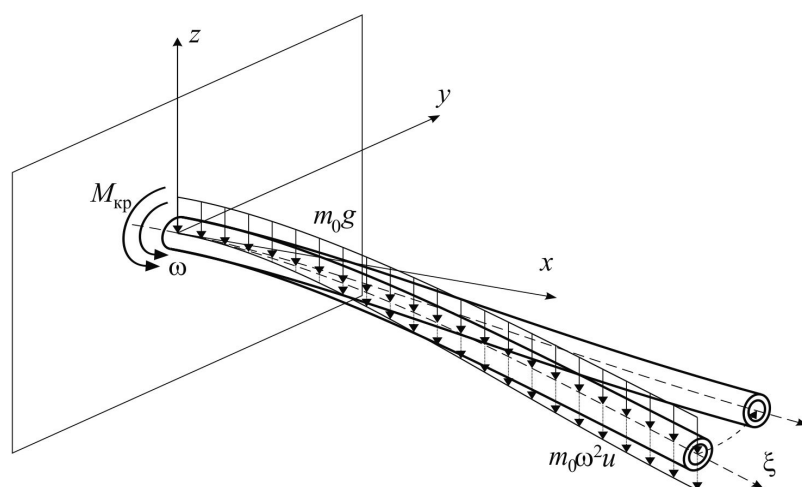


Рис. 3. Расчетная схема изгиба и вращения длинного полого цилиндра

При наличии зоны пластических деформаций в области высоких значений кривизны продольной оси цилиндра (например, область заземления левого конца длинного цилиндра на рис. 2) ситуация меняется существенно, поскольку в результате пластического нагружения формируется остаточная кривизна цилиндра. Вращение цилиндра вокруг продольной оси  $\xi$  (см. рис. 3) требует значительных затрат на преодоление остаточной кривизны, и энергетически более выгодным становится вращение цилиндра с искривленной осью вокруг оси  $x$ .

Оценка напряженно-деформированного состояния длинного цилиндра, изогнутого под действием собственного веса и поворачивающегося вокруг оси  $x$ , может быть выполнена приближенно с привлечением уравнений механики материалов. Для учета динамической нагрузки, возникающей при вращении объекта, может быть применен

принцип Даламбера [11], согласно которому ко всем действующим внешним силам необходимо добавить силы инерции, равные в рассматриваемом случае  $m_0\omega^2u$ , где  $\omega^2u$  – центростремительное ускорение;  $\omega$  – угловая скорость вращения длинномерного цилиндра под действием момента  $M_{кр}$ ;  $u$  – прогиб оси цилиндра, равный расстоянию от оси вращения  $x$ .

В рассматриваемом случае наибольший прогиб, а значит, и наиболее опасное напряженно-деформированное состояние длинного цилиндра имеют место в низшем положении объекта, когда массовые силы тяжести суммируются с силами инерции (см. рис. 3). При прочих положениях цилиндра эти силы частично или полностью компенсируют друг друга. Уравнение изгиба центральной линии длинномерного цилиндра, учитывающее действие сил инерции, имеет вид [1, 2, 4]

$$EI \frac{d^4u(x)}{dx^4} = m_0g + m_0\omega^2u(x) \quad (10)$$

с теми же граничными условиями (2)–(5). Решение неоднородного дифференциального уравнения (10) четвертого порядка представляется суммой [5, 6] общего решения  $u_1(x)$  однородного дифференциального уравнения

$$EI \frac{d^4u_1(x)}{dx^4} - m_0\omega^2u_1(x) = 0 \quad (11)$$

и частного решения  $u_2(x)$  неоднородного уравнения

$$EI \frac{d^4u_2(x)}{dx^4} - m_0\omega^2u_2(x) = m_0g . \quad (12)$$

Общее решение  $u_1(x)$  уравнения (11) строится в виде [5, 6]

$$u_1(x) = Ae^{\alpha x} , \quad (13)$$

частное решение  $u_2(x)$  уравнения (12) согласно [5, 6] разыскивается в виде

$$u_2(x) = B , \quad (14)$$

соответствующем виду правой части уравнения (12), где  $A$ ,  $B$  и  $\alpha$  – искомые константы. Подстановка решения (13) в однородное дифференциальное уравнение (11) приводит к характеристическому уравнению

$$EI\alpha^4 Ae^{\alpha x} - m_0\omega^2 Ae^{\alpha x} = 0.$$

Введение обозначения  $D^4 = m_0\omega^2 / EI$  дает возможность представить полученное соотношение в виде алгебраического уравнения четвертой степени

$$\alpha^4 = D^4,$$

корни которого

$$\alpha_1 = +D, \quad \alpha_2 = -D, \quad \alpha_{31} = iD, \quad \alpha_4 = -iD,$$

где  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая (комплексная) единица. Общее решение однородного дифференциального уравнения (11) принимает вид

$$u_1(x) = A_1 e^{Dx} + A_2 e^{-Dx} + A_3 e^{iDx} + A_4 e^{-iDx}.$$

Подстановка решения (14) в неоднородное дифференциальное уравнение (12) приводит к уравнению относительно константы  $B$ :

$$-m_0\omega^2 B = m_0 g,$$

откуда следует, что  $B = -g/\omega^2$ . В итоге решение дифференциального уравнения (10) записывается в виде

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) = A_1 e^{Dx} + A_2 e^{-Dx} + A_3 e^{iDx} + A_4 e^{-iDx} - \frac{g}{\omega^2}$$

или, с учетом формулы Эйлера [5],

$$u(x) = A_1 e^{Dx} + A_2 e^{-Dx} + A_3 \cos Dx + A_4 \sin Dx - \frac{g}{\omega^2}. \quad (15)$$

Для нахождения значения постоянных интегрирования  $A_1, A_2, A_3, A_4$  используются граничные условия (2)–(5)



$$\begin{aligned}
 u(x)\Big|_{x=0} &= \left[ A_1 e^{Dx} + A_2 e^{-Dx} + A_3 \cos Dx + A_4 \sin Dx - \frac{g}{\omega^2} \right]_{x=0} = 0, \\
 \frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=0} &= \left[ A_1 D e^{Dx} - A_2 D e^{-Dx} - A_3 D \sin Dx + A_4 D \cos Dx \right]_{x=0} = 0, \\
 \frac{d^2u(x)}{dx^2}\Big|_{x=l} &= \left[ A_1 D^2 e^{Dx} + A_2 D^2 e^{-Dx} - A_3 D^2 \cos Dx - A_4 D^2 \sin Dx \right]_{x=l} = 0, \quad (16) \\
 \frac{d^3u(x)}{dx^3}\Big|_{x=l} &= \left[ A_1 D^3 e^{Dx} - A_2 D^3 e^{-Dx} + A_3 D^3 \sin Dx - A_4 D^3 \cos Dx \right]_{x=l} = 0.
 \end{aligned}$$

Соотношения (16) представляют собой систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно искомых величин  $A_1, A_2, A_3, A_4$ :

$$\begin{cases}
 1A_1 & +1A_2 & +1A_3 & +0A_4 & = \frac{g}{\omega^2}, \\
 DA_1 & -DA_2 & +0A_3 & +DA_4 & = 0, \\
 D^2 e^{Dl} A_1 & +D^2 e^{-Dl} A_2 & -D^2 \cos Dl A_3 & -D^2 \sin Dl A_4 & = 0, \\
 e^{Dl} D^3 A_1 & -e^{-Dl} D^3 A_2 & +D^3 \sin Dl A_3 & -D^3 \cos Dl A_4 & = 0.
 \end{cases}$$

Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений для принятых ранее данных и угловой скорости вращения  $\omega = 2\pi/3 \text{ с}^{-1}$  позволяет определить постоянные интегрирования

$$A_1 = -0,27618, \quad A_2 = -1,3187, \quad A_3 = -0,64157, \quad A_4 = -1,0425.$$

Решение (15) принимает вид

$$u(x) = -0,27618 e^{Dx} - 1,3187 e^{-Dx} - 0,64157 \cos Dx - 1,0425 \sin Dx - \frac{g}{\omega^2}, \quad (17)$$

где  $D = 0,095218, \text{ м}^{-1}$ .

На рис. 4 приведены форма прогиба осевой линии длинномерного цилиндра и ее кривизна, которая определяется выражением

$$\begin{aligned}
 \kappa = \frac{d^2u(x)}{dx^2} &= -D^2 \left( 0,27618 e^{Dx} + 1,3187 e^{-Dx} - \right. \\
 &\quad \left. -0,64157 \cos Dx - 1,0425 \sin Dx \right). \quad (18)
 \end{aligned}$$

Наибольшая кривизна (см. рис. 4, б) имеет место в точке  $x = 0$ ,

$$\kappa|_{x=0} = -D^2(0,27618e^{D0} + 1,3187e^{-D0} - 0,64157\cos 0 - 1,0425\sin 0) = -0,00864 \text{ м}^{-1},$$

а значит, наибольшие (по модулю) растягивающие и сжимающие напряжения в длинномерном изделии достигаются именно в этом сечении,

$$\sigma_{\max} = -E\kappa_{\max} \frac{d_e}{2} = 152,11 \text{ МПа}.$$

По сравнению с результатами, полученными при расчете напряжения при изгибе под действием силы тяжести, инерция вращательного движения повысила максимальное напряжение на 7,27 МПа, или на 5 %.

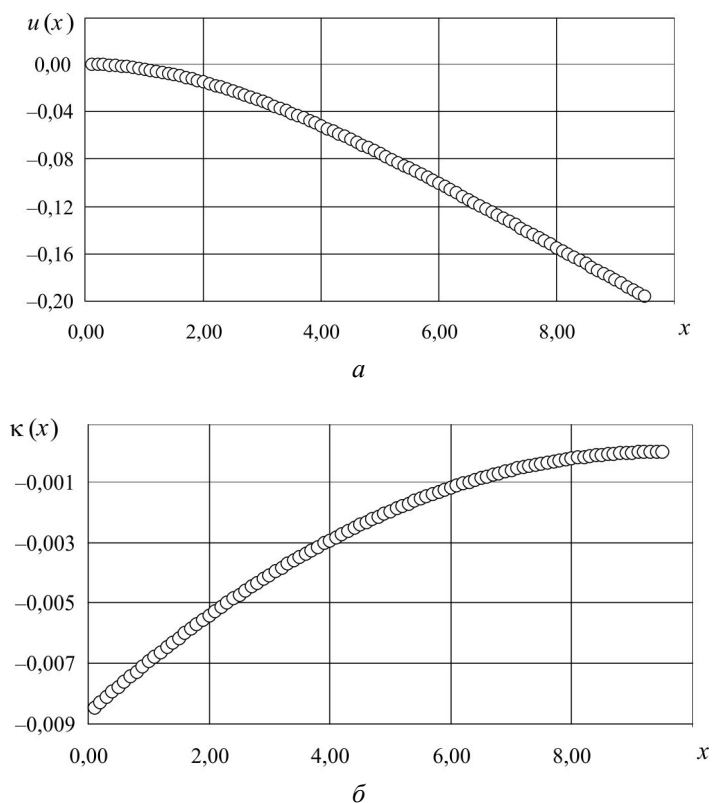


Рис. 4. Действие силы тяжести и вращения на ось длинномерного цилиндра: а – зависимость от продольной координаты  $x$  (м) прогиба  $u$  (м); б – зависимость от продольной координаты  $x$  (м) кривизны  $\kappa$  ( $\text{м}^{-1}$ )

### 3. Сдвиговые напряжения от крутящего момента

Определение величины касательного напряжения от действия крутящего момента  $M_{кр}$ , приложенного к длинномерному цилиндру, выполняется согласно [1, 2, 4]:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{I_p} r, \quad (19)$$

где  $r$  – расстояние от оси кручения до рассматриваемой точки;  $I_p$  – полярный момент инерции поперечного сечения. Для заданных диаметрах  $d_e$  и  $d_i$  цилиндра и величине крутящего момента  $M_{кр} = 11250$  кН·м максимальное сдвиговое напряжение определяется величиной

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{I_p} \frac{d_e}{2} = 14,59 \text{ МПа.}$$

Учитывая сложное напряженное состояние длинномерного цилиндра, испытывающего растягивающее напряжение от изгибающих нагрузок и сдвиговое напряжение от крутящего момента, эквивалентное (суммарное) напряжение следует определять с использованием понятия интенсивности напряжения  $\sigma_i$ , определяемого общим выражением [1, 4, 12]

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (20)$$

В рассматриваемом случае, учитывая  $\sigma_{max} = 152,11$  МПа и  $\tau_{max} = 14,59$  МПа, эквивалентное напряжение принимает значение

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} = 154,19 \text{ МПа.}$$

### Выводы

Основным фактором, определяющим напряженно-деформированное состояние длинного цилиндра, является изгиб за счет собственного веса. Вращение длинного цилиндра вокруг собственной оси обеспечивает знакопеременное нагружение периферийных слоев длинного цилиндра. Дополнительное вращение длинного цилиндра, обусловленное

наличием инерционных массовых сил, способствовало увеличению амплитудного значения напряжения на 5 %. Наличие крутящего момента привело к появлению сдвиговых напряжений, достигающих максимального значения на поверхности длинного цилиндра. Эквивалентное напряжение, учитывающее сложное напряженное состояние, увеличилось по сравнению с изгибом и вращением на 1,4 %.

### Библиографический список

1. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. – СПб.: Лань, 2002 – 672 с.
2. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б.. Расчет на прочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
3. Светлицкий В.А. Механика стержней. – М.: Высшая школа, 1987. – Ч. I. – 304 с.
4. Филин А.П. Прикладная механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1978. – Т. 2. – 616 с.
5. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
7. Алгоритм исследования напряженно-деформированного состояния проволоки при деформировании знакопеременным изгибом с натяжением / М.Г. Бояршинов, Е.М. Киреев, Б.А. Никифоров, П.В. Трусов // Изв. высш. учеб. зав. Черная металлургия. – 1984. – № 8. – С. 79–83.
8. Бояршинов М.Г. Интервальные векторы и тензоры в прикладных инженерных задачах // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 2. – С. 418–428.
9. Boyarshinov M.G. Interval vectors and tensors in applied engineering problems // Journal of engineering physics and thermo-physics. – 2011. – Vol. 84. – No. 2. – P. 451–462.
10. Boyarshinov M.G., Gitman M.B., Trusov P.V. A method of solution for the cyclic bending problem // Int. J. Mech. Sci. – 1992. – Vol. 34, No. 11. – P. 881–889.
11. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. школа, 1986. – 416 с.
12. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории упругости и пластичности. – Киев: Наукова думка, 1981. – 496 с.

## References

1. Timoshenko S.P., Gere J.M. *Mehanika materialov* [Mechanics of materials]. Saint-Petersbourg.: Lan', 2002. 672 p.
2. Birger I.A., Shorr B.F., Iosilevich G.B. *Raschjot na prochnost' detalej mashin* [Calculations of strength of the machine parts]. Moscow: Mashinostroenie, 1979. 702 p.
3. Svetlickij V.A. *Mehanika sterzhnej* [Mechanics of the pivots]. Moscow: Vysshaja shkola, 1987, part I, 304 p.
4. Filin A.P. *Prikladnaja mehanika deformiruемого tvjordogo tela* [Applied mechanics of deformable solids]. Moscow: Nauka, 1978, vol. 2, 616 p.
5. Bermant A.F., Aramanovich I.G. *Kratkij kurs matematicheskogo analiza* [Brief manual of the mathematical analysis]. Moscow: Nauka, 1973. 720 p.
6. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam* [Differential gleichungen]. Moscow: Nauka, 1976. 576 p.
7. Boyarshinov M.G., Kireev E.M., Nikiforov B.A., Trusov P.V. *Algoritm issledovanija naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija provoloki pri deformirovanii znakoperemennym izgibom s natjazheniem* [The study algorithm of the stress-strained state of wire deformed under cyclic bending and tension]. *Izvestija vysshikh uchebnykh zavedeniy. Chernaja metallurgija*, 1984, no. 8, pp. 79-83.
8. Boyarshinov M.G. *Interval'nye vektory i tenzory v prikladnyh inzhenernyh zadachah* [Interval vectors and tensors in applied engineering problems]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal*, 2011, vol. 84, no. 2, pp. 418-428.
9. Boyarshinov M.G. *Interval vectors and tensors in applied engineering problems*. *Journal of engineering physics and thermo-physics*, 2011, vol. 84, no. 2, pp. 451-462.
10. Boyarshinov M.G., Gitman M.B., Trusov P.V. *A method of solution for the cyclic bending problem*. *Int. J. Mech. Sci.*, 1992, vol. 34, no. 11, pp. 881-889.
11. Targ S.M. *Kratkij kurs teoreticheskoy mehaniki* [Brief manual of the theoretical mechanics]. Moscow: Vysshaja shkola, 1986. 416 p.
12. Pisarenko G.S., Mozharovskij N.S. *Uravenenija i kraevye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti* [Equations and the boundary-value problems of the theory of elasticity and plasticity]. Kiev: Naukova dumka, 1981. 496 p.

### **Сведения об авторе**

**Бояршинов Михаил Геннадьевич** (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор кафедры динамики и прочности машин Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: michaelgb@mail.ru).

### **About the authors**

**Boyarshinov Michael Gennadyevich** (Perm, Russian Federation) – Professor of Department of Dynamics and Strength of Machines, Doctor of Sciences in Engineering, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: michaelgb@mail.ru).

Получено 15.02.2013