

УДК 539.3

**И.Н. Бояршинова**

Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет, Пермь, Россия

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ К ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ЗАГОТОВОК КВАРЦЕВОГО ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА**

Предложена методика определения величины теплового нагружения при высоких температурах, позволяющая с высокой точностью найти температуру нагрева поверхности пламенем газовой горелки, что необходимо для обеспечения точности дальнейших исследований температурных полей и напряженно-деформированного состояния изделий.

Рассматривается задача определения температуры поверхности заготовки оптического волокна из кварцевого стекла в зоне разогрева газовой горелкой и дальнейшее исследование температурных полей в заготовке в процессе производства. Методика определения температуры поверхности заготовки в зоне нагревания газовой горелкой включает проведение эксперимента, позволяющего измерить температуру в нескольких точках поверхности заготовки, удаленных от пламени горелки, и последующее решение задачи оптимизации для нахождения температуры поверхности непосредственно в зоне нагрева. В процессе эксперимента температура поверхности трубки измерялась двумя термомпарами, расположенными на расстоянии от зоны нагрева, а затем решалась задача оптимизации. В качестве целевой функции выбрана сумма квадратов отклонений расчетных значений температуры в заданных точках от значений, полученных в ходе эксперимента.

Разработанная методика проверена на ряде тестовых задач. Единственность решения задачи оптимизации была подтверждена путем «спуска» из нескольких различных начальных значений.

Исследованы температурные поля в заготовке кварцевого оптического волокна, нагреваемой с помощью равномерно движущейся газовой горелки.

Для решения нестационарной задачи теплопроводности использован метод конечных элементов, задача оптимизации решалась методом золотого сечения.

**Ключевые слова:** нестационарная задача теплопроводности, кварцевое оптическое волокно, поле температур, оптимизация, целевая функция.

**I.N. Boyarshinova**

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

## **THE USE OF OPTIMIZATION TECHNIQUES FOR NUMERICAL ANALYSIS OF TEMPERATURE FIELDS IN THE QUARTZ OPTICAL FIBER BILLET**

In this paper a procedure is proposed for determination of heat load under high temperatures. The procedure proposed allows finding temperature of a surface heated by a gas burner flame which is necessary to assure the accuracy of further research of temperature fields and stress-strain state of products.

The discussed problem is about determining surface temperature of an optical fiber billet made of quartz glass placed within heating zone of a gas burner and also further research of temperature fields within the billet in course of a production process. Method of determining surface temperature of a billet in a gas burner heating zone includes conducting an experiment to measure temperature in a number of points away from the burner flame and subsequent solving of an optimization problem to calculate the temperature of a surface within heating zone. In the course of experiment surface temperature of a tube was measured by two thermocouples at a distance from the heating zone which was followed by solving an optimization problem. As the target function, sum of squares of deviations of calculated temperature values at given points from the observed experimental values was taken.

The developed method has been tested on a series of test problems. The uniqueness of the solution of optimization problem was confirmed by 'descending' from a set of different initial values.

Temperature fields within billet of a quartz optical fiber heated by a uniformly moving gas burner were examined.

To solve a non-stationary heat conduction problem, finite elements method has been used while the optimization problem has been solved by the Golden section method.

**Keywords:** unsteady problem of heat conductivity, quartz optical fiber, temperature field, optimization, criterion function.

### **Введение**

Рассматриваемая задача была сформулирована при исследовании технологического процесса производства оптического волокна из кварцевого стекла [1]. В начале процесса кварцевая заготовка нагревается равномерно движущейся газовой горелкой до температуры выше 1500 °С. Для обеспечения точности исследования температурных полей и напряженно-деформированного состояния заготовки необходимо максимально точное определение температуры нагрева. Однако измерение температуры пламени горелки с помощью спектрометра дает высокую погрешность, которая при дальнейшем моделировании процессов производства оптического волокна составит неустранимую погрешность исходных данных. Более точно измерить температуру поверхности заготовки можно при помощи термопар, погрешность изме-

рения которых на порядок меньше, но установка термопар возможна лишь на участках поверхности, удаленных от зоны нагрева.

В статье представлена методика определения температуры поверхности заготовки из кварцевого стекла в зоне нагрева и применение ее для исследования температурных полей в заготовке оптического волокна.

Методика включает проведение эксперимента, позволяющего измерить температуру в нескольких точках поверхности заготовки, удаленных от пламени горелки, и последующее решение задачи оптимизации для нахождения температуры поверхности непосредственно в зоне нагрева. Подобная методика была использована в работах [2, 3].

### **1. Постановка и методика решения задачи определения температуры в зоне нагрева**

Трубка из кварцевого стекла в виде полого цилиндра, жестко закрепленная с торцов, нагревается пламенем горелки, положение которой зафиксировано. Внутри трубки для охлаждения подается воздух. С внешней поверхности и с торцов заготовки происходит теплоотдача в воздух. Коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и теплоотдачи зависят от температуры.

Расчетная схема заготовки представлена на рис. 1. Вследствие симметрии области и задача рассматривается как осесимметричная.

При известной температуре в зоне нагревания задача является классическим примером нестационарной задачи теплопроводности: необходимо найти температурное поле в трубке в произвольный момент времени. Поле температур в рассматриваемой области  $S$  с границей  $l$  должно удовлетворять:

уравнению теплопроводности

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T) \mathbf{grad}(T)), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (1)$$

где  $c(T)$ ,  $\lambda(T)$ ,  $\rho$  – соответственно теплоемкость, теплопроводность и плотность материала;

начальным условиям

$$T(0, \mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S; \quad (2)$$

граничным условиям

$$-\lambda(T)\mathbf{grad}(T) \cdot \mathbf{n} = \alpha(T) \cdot (T - T_c(t)) + \varepsilon\sigma_0(T)^4, \quad \mathbf{x} \in l, \quad (3)$$

где первое слагаемое правой части описывает конвективный теплоперенос, а второе – излучение. Здесь  $\varepsilon$  – коэффициент черноты;  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $\alpha(T)$  – коэффициент теплоотдачи,  $T_c(t)$  – температура окружающей среды;  $n$  – нормаль к границе  $l$ .

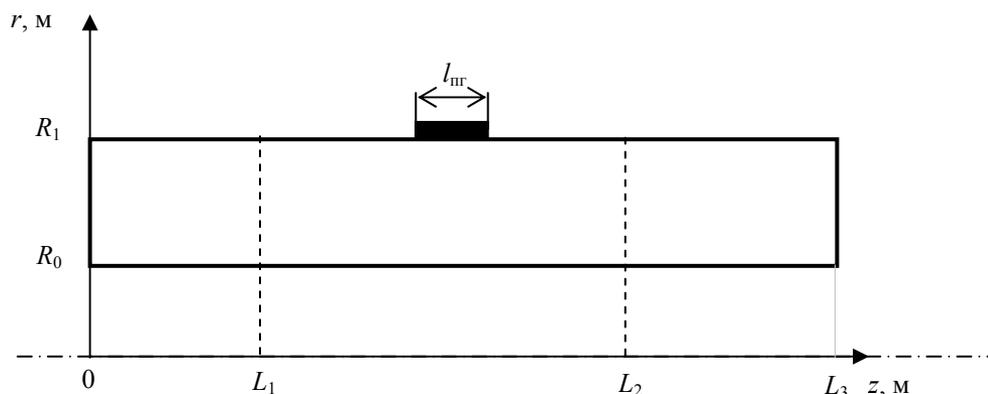


Рис. 1. Расчетная схема

Для определения температуры поверхности заготовки в зоне нагрева проводится эксперимент, в процессе которого температура измеряется в определенный момент времени в нескольких точках, поэтому в качестве целевой функции в задаче оптимизации выбрана сумма квадратов отклонений расчетных значений температуры в заданных точках от значений, полученных в ходе эксперимента:

$$J = \sum_{i=1}^n (T(R_1, l_i, \tau, T_r) - T_i)^2 \rightarrow \mathbf{min}, \quad (4)$$

где  $T(R_1, l_i, \tau, T_r)$  – расчетные значения температуры в точках, в которых размещены термопары, в момент времени  $\tau$ , а  $T_i$  – измеренные значения температуры в этих точках.

Значения параметра оптимизации  $T_r$ , определяющего температуру поверхности заготовки в зоне нагрева, будем искать в интервале, заданном технологией процесса производства:

$$T_2 \in [T', T'']. \quad (5)$$

Задача оптимизации состоит в отыскании значения  $T_r$ , доставляющего минимум функции (4) при ограничениях в виде задачи (1)–(3) и ограничениях на параметр оптимизации (5).

Для поиска минимума функции (4) был выбран метод золотого сечения. Для решения задачи теплопроводности (1)–(3) использован метод конечных элементов с выводом разрешающих соотношений методом Галеркина [4].

Коэффициенты теплоотдачи для свободной конвекции (внешняя поверхность) и вынужденной (внутренняя поверхность) определялись по эмпирическим формулам, предложенным в работе [6].

После того как температура поверхности в зоне нагревания найдена, можно исследовать температурное поле в трубке, соответствующее решению задачи теплопроводности (1)–(3) при условии, что горелка движется с постоянной скоростью  $V_{гор}$ , то есть для граничного условия

$$T(r, z, t) = T_r, \quad (6)$$

где  $r = R_1$ ,  $z \in \left[ L_1 - \frac{L_{пг}}{2}, L_2 + \frac{L_{пг}}{2} \right]$ ;  $L_1, L_2$  – расстояния, определяющие начало и конец области движения горелки на поверхности трубки;  $L_{пг}$  – размер пятна пламени горелки.

## **2. Тестовые задачи**

Для контроля правильности разработанной методики и ее реализации в виде компьютерных программ решен ряд тестовых задач.

Тестовая задача нестационарной теплопроводности решена для стального цилиндра со следующими размерами:  $R_0 = 0,250$  м,  $R_1 = 1,00$  м,  $L = 4,00$  м.

Температура на наружной поверхности равна  $100$  °С, на внутренней –  $60$  °С, начальная температура –  $60$  °С. Решение задачи выполне-

но аналитически [7] и методом конечных элементов. Сетка для решения методом конечных элементов состояла из 15 элементов по толщине цилиндра и 80 элементов – по длине. Шаг по времени равнялся 10 секундам. Результаты решения тестовой задачи теплопроводности приведены на рис. 2. Здесь  $\varepsilon$  – максимальная относительная погрешность. Для момента времени  $\tau = 900$  с максимальная погрешность не превышает 2 %.

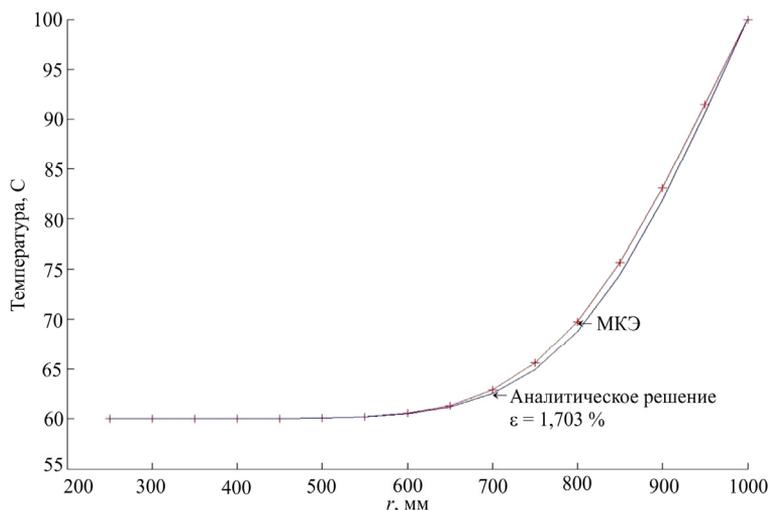


Рис. 2. Решение тестовой задачи. Распределение температуры по сечению цилиндра через 900 с

Для тестирования методики и программы решения задачи оптимизации использована модельная задача со следующими условными данными: тонкостенный цилиндр длиной  $l = 1$  м, с внутренним радиусом  $0,008$  м и внешним –  $0,01$  м подвергается нагреванию с помощью газовой горелки. Пятно пламени горелки размером  $0,01$  м расположено на середине длины цилиндра. Внешняя и внутренняя поверхности цилиндра теплоизолированы, с боковых поверхностей происходит теплоотдача в воздух. Примем температуру горелки равной  $1600^\circ\text{C}$  и найдем температуру в двух точках, расположенных на расстояниях  $l_1 = 0,35$  м и  $l_2 = 0,4$  м через время  $\tau = 1800$  с, решая задачу теплопроводности (1)–(3). Полученные значения температуры равны соответственно  $T_1 = 27,6^\circ\text{C}$  и  $T_2 = 213,0^\circ\text{C}$ . Затем, полагая температуру нагревания неизвестной, с помощью решения задачи оптимизации (1)–(5), по известным значе-

ниям температур  $T_1$  и  $T_2$  находим температуру поверхности в зоне нагревания горелкой. Для подтверждения единственности решения задачи оптимизация проводилась из нескольких различных начальных приближений.

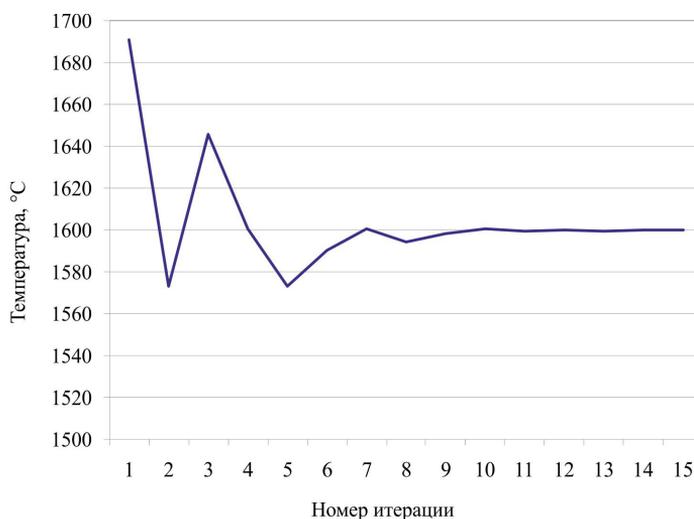


Рис. 3. Изменение средней температуры интервала метода золотого сечения в зависимости от номера итерации

На графике рис. 3 приведены результаты итерационной процедуры метода золотого сечения для начального интервала температур  $[1000\text{ }^{\circ}\text{C}, 2000\text{ }^{\circ}\text{C}]$  с заданной точностью  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Полученное значение температуры поверхности в зоне нагрева –  $1600,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Погрешность решения составила  $0,01\%$ .

### 3. Результаты решения задачи

В ходе эксперимента кварцевая заготовка оптического волокна длиной  $L_3 = 0,7\text{ м}$  нагревалась с помощью горелки, расположенной на расстоянии  $0,6\text{ м}$  от левого края. Температура поверхности заготовки измерялась двумя термопарами, расположенными на расстоянии  $0,05$  и  $0,1\text{ м}$  от зоны нагрева, после получасового нагревания кварцевой трубки. Измеренные значения температуры составили  $200,3$  и  $28,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Для определения по этим данным температуры поверхности заготовки в зоне нагрева газовой горелкой решалась задача оптимизации (4) при ограничениях (1)–(3), (5). Полученная в результате оптимизации температура в зоне нагрева равна  $1637\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Единственность реше-

ния задачи оптимизации была подтверждена путем «спуска» из нескольких различных начальных значений.

На рис. 4 приведено температурное поле опытного образца кварцевой трубки вблизи места контакта пламени неподвижной горелки с трубкой при найденных условиях нагрева через 0,5 часа после начала нагревания, а на рис. 5 показан график распределения температуры на поверхности образца при тех же условиях.

В реальном процессе производства заготовка нагревается при помощи газовой горелки, равномерно движущейся вдоль оси трубки.

Результаты решения задачи теплопроводности при подвижной горелке приведены на рис. 6, 7. Для скорости горелки 0,002 м/с при решении задачи теплопроводности с шагом по времени 5 с показаны распределение температуры по сечению цилиндра и график распределения температуры на поверхности образца через 150 с после начала нагревания.

Для момента времени  $t = 350$  с, когда горелка, дойдя до правого конца рабочей зоны, движется в обратную сторону, получены результаты, приведенные на рис. 8, 9.

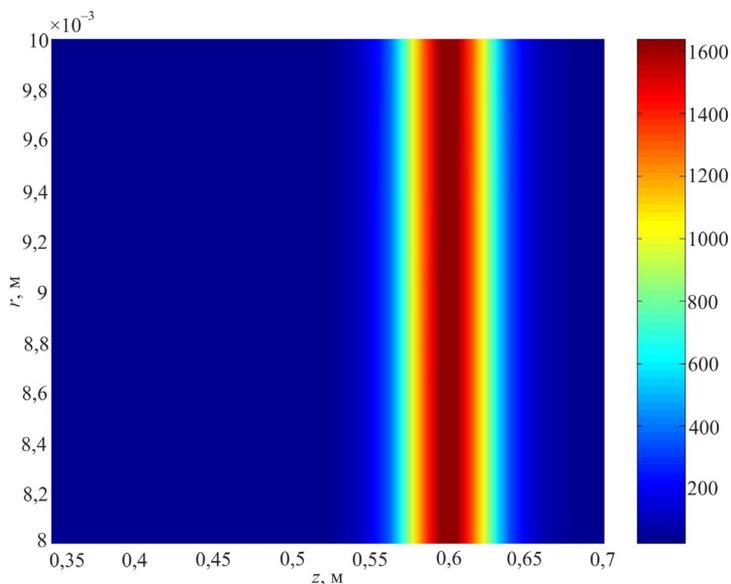


Рис. 4. Распределение температуры вблизи зоны нагревания при  $T_{\Gamma} = 1637^{\circ}\text{C}$  через 1800 с при неподвижной горелке

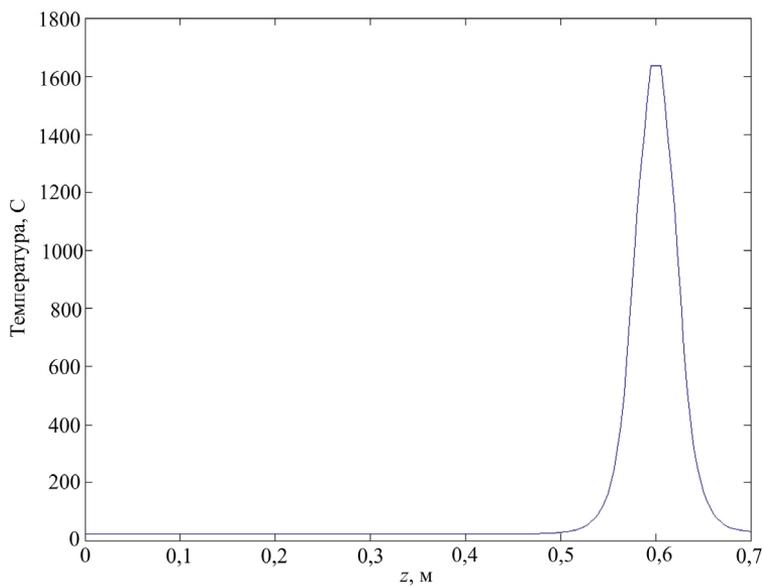


Рис. 5. Распределение температуры при  $T_{\Gamma} = 1637^{\circ}\text{C}$  по длине трубки на внешней поверхности при неподвижной горелке через 1800 с

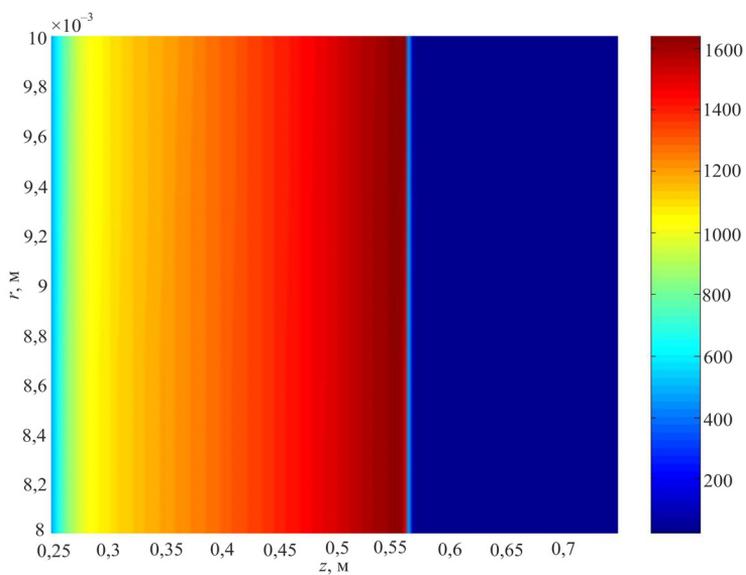


Рис. 6. Распределение температуры при начальном положении горелки на расстоянии 0,25 м от левого края через 150 с при движущейся горелке

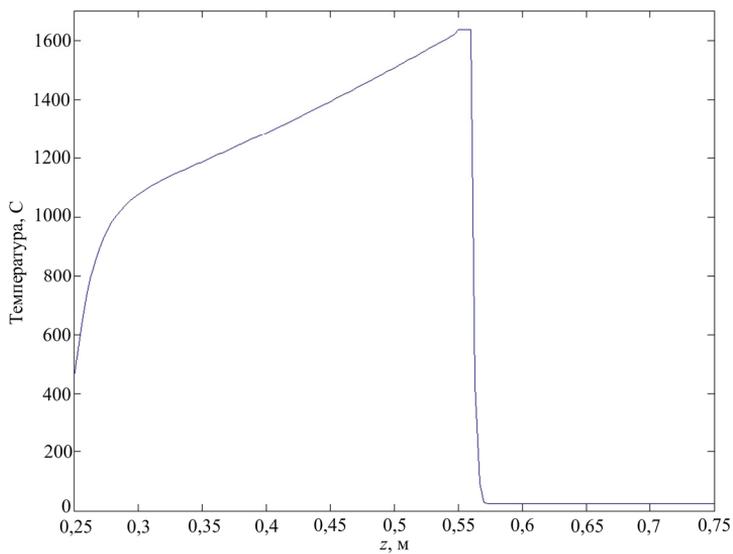


Рис. 7. График распределения температуры по длине заготовки на внешней поверхности при начальном положении горелки на расстоянии 0,25 м от левого края через 150 с

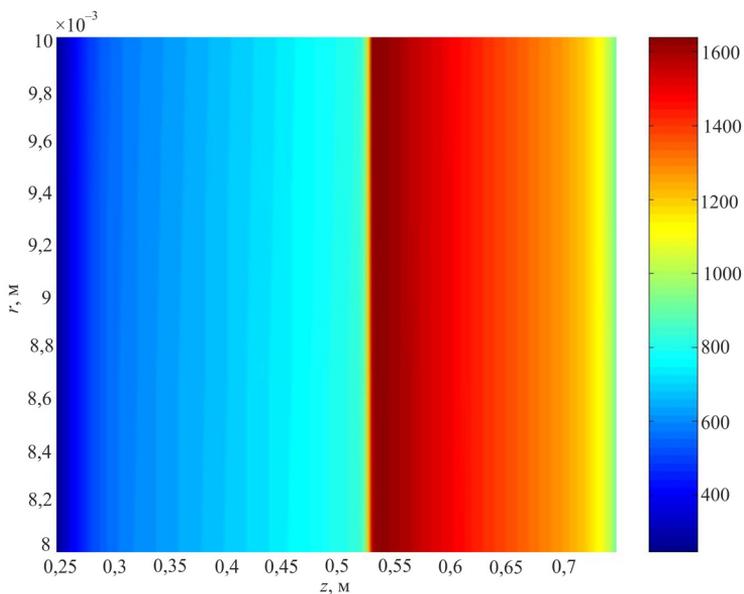


Рис. 8. Распределение температуры при начальном положении горелки на расстоянии 0,25 м от левого края через 350 с при движущейся горелке

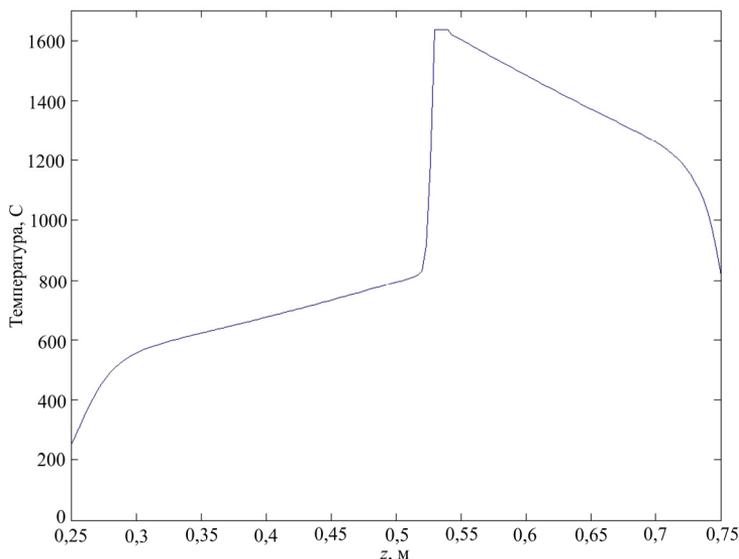


Рис. 9. График распределения температуры по длине заготовки при начальном положении горелки на расстоянии 0,25 м от левого края через 350 с на внешней поверхности заготовки

### **Заключение**

Предложенная методика определения условий температурного нагружения, включающая проведение эксперимента и последующее решение задачи оптимизации, позволила с высокой точностью определить температуру в зоне нагревания заготовки газовой горелкой в процессе производства оптического волокна. На основании найденных условий нагрева исследованы температурные поля, возникающие при нагревании заготовки оптического волокна пламенем движущейся газовой горелки.

Максимально точное определение условий теплового нагружения ведет к повышению точности решения всех последующих задач, возникающих при исследовании и оптимизации технологических процессов производства оптических волокон.

### **Библиографический список**

1. Trufanov A.N., Smetannikov O.Y., Trufanov N.A. Numerical analysis of residual stresses in preform of stress applying part for PANDA-type polarization maintaining optical fibers // Optical Fiber Technology. – 2010. – Vol. 16. – No. 3. – P. 156–161.

2. Бояршинова И.Н. Применение методов оптимизации для определения характеристик термомеханического поведения стеклующихся полимеров // Вестник ПНИПУ. Механика. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2012. – № 1. – С. 7–15.

3. Дробинин М.М., Бояршинова И.Н. Об одной методике оптимального управления процессом охлаждения изделий из стеклующихся полимеров с целью снижения остаточных напряжений // Вестник ПНИПУ. Прикладная математика и механика. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2012. – № 10. – С. 52–62.

4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

5. Нацокин В.В. Техническая термодинамика и теплопередача. – М.: Высшая школа, 1980. – 469 с.

6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.

7. Физические величины: справочник / А.П. Бабичев [и др.]; под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991, – 1232 с.

### References

1. Trufanov A.N., Smetannikov O.Y., Trufanov N.A. Numerical analysis of residual stresses in preform of stress applying part for PANDA-type polarization maintaining optical fibers. *Optical Fiber Technology*, 2010, vol. 16, no. 3, p. 156-161.

2. Boyarshinova I.N. Primenenie metodov optimizatsii dlya opredeleniya kharakteristik termomekhanicheskogo povedeniya steklujushhikh-sya polimerov [The use optimization techniques to definition of the thermomechanical behavior characteristics of vitrifying polymers]. *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mehanika*, 2012, no. 1, pp. 7-15.

3. Drobinin M.M., Boyarshinova I.N. Ob odnoj metodike optimal'nogo upravlenija processom ohlazhdenija izdelij iz steklujushhihsja polimerov s cel'ju snizhenija ostatochnyh naprjazhenij [About one of the methodologies of vitrifying polymers cooling process optimization which aims residual stresses decrease]. *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Prikladnaja matematika i mehanika*, 2012, no. 10, pp. 52-62.

4. Segerlind L. Primenenie metoda konechnykh elementov [Applied finite element analysis]. Moscow: Mir, 1979, 393 p.

5. Nashhokin V.V. Tehnicheskaja termodinamika i teploperedacha [Engineering Thermodynamics and Heat Transfer]. Moscow: Vysshaja shkola, 1980, 469 p.

6. Lykov A.V. Teorija teploprovodnosti [The theory of of thermal conductivity]. Moscow: Vysshaja shkola, 1967, 599 p.

7. Babichev A.P. [et al.] Fizicheskie velichiny. Spravochnik [Physical quantities. Handbook]. Ed. by I.S. Grigor'eva, E.Z. Mejlihova. Moscow: Jenergoatomizdat, 1991. 1232 p.

### **Об авторе**

**Бояршинова Ирина Николаевна** (Пермь, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: vmm@pstu.ru).

### **About the authors**

**Boyarshinova Irina Nicolaevna** (Perm, Russian Federation) – Ph. D in technical sciences, Associate professor of the Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Politechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: vmm@pstu.ru).

Получено 15.02.2013