



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2022

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.03

УДК 539.3

## ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ С НЕЛИНЕЙНО УПРУГИМИ ОПОРАМИ

Р.А. Каюмов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Россия

<sup>2</sup>Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, Казань, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 22 марта 2022 г.  
Одобрена: 30 августа 2022 г.  
Принята к публикации:  
01 ноября 2022 г.

#### Ключевые слова:

закритический изгиб, нелинейно упругая опора, интегродифференциальное уравнение, податливость стержней, метод коллокаций, численные эксперименты.

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается закритический изгиб стержня, сжатого продольной силой и имеющего в шарнирных опорах нелинейно упругое сопротивление повороту его оси. Для материала стержня принят закон Гука. Прогиб представлен в виде тригонометрического ряда, в котором оставлены только первые три слагаемых. Через этот ряд выражен угол наклона оси стержня. Он выбран в качестве искомой функции, относительно которой получено разрешающее нелинейное интегродифференциальное уравнение. Для его упрощения рассмотрен случай, когда изогнутая ось стержня представляет собой пологую кривую. Выявлено, что обычный подход, в котором задается сжимающая сила, приводит к тривиальному решению с нулевыми значениями для коэффициентов этого ряда. Поэтому в качестве исходного параметра выбран первый коэффициент ряда, через который представлен прогиб. Уравнение, содержащее оставшиеся искомые коэффициенты и нагрузку, решалось методом простых коллокаций, так как использование метода преопределенных коллокаций невозможно ввиду нелинейности получаемой системы уравнений. Проведен анализ результатов расчетов в зависимости от выбора точек коллокаций, который показал малое отличие друг от друга полученных решений (квадратичная невязка между расчетными величинами не превышала одного процента, что говорит о достаточной точности аппроксимации прогиба в форме, предложенной в работе). В отличие от обычного подхода, используемого в численных методах, здесь нет необходимости вводить какой-либо параметр процесса нагружения (как, например, длину дуги в методе дуги) для прохождения предельных точек.

Изложен подход для приближенного вычисления податливости рассматриваемых стержней на сжатие с учетом их закритического изгиба.

Приводятся результаты численных исследований закритического поведения стержней при различных геометрических и механических характеристиках стержней и опор, полученные зависимости между различными параметрами напряженно-деформированного состояния. Их анализ позволил выявить ряд особенностей в поведении рассматриваемых стержней в зависимости от свойств нелинейно упругого сопротивления опор. В частности, обнаружено, что при рассмотренных параметрах рассматриваемой системы усилие сжатия и угол наклона стержня на опоре связаны соотношением, близким к линейному, податливость сжимаемого стержня может увеличиваться в десятки и более раз в зависимости от жесткости пружин, стержень может терять устойчивость хлопком при некоторых значениях параметров нелинейно упругих опор.

© ПНИПУ

© Каюмов Рашит Абдулхакович – д.ф.-м.н., проф., e-mail: [kayumov@rambler.ru](mailto:kayumov@rambler.ru), ID: 0000-0003-0711-9429

Rashit A. Kayumov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: [kayumov@rambler.ru](mailto:kayumov@rambler.ru), ID: 0000-0003-0711-9429



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## POSTBUCKLING BEHAVIOR OF COMPRESSED BARS WITH NONLINEARLY ELASTIC SUPPORTS

R.A. Kayumov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation

<sup>2</sup>Kazan Federal (Volga region) University, Kazan, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 22 March 2022  
Approved: 30 August 2022  
Accepted for publication:  
01 November 2022

#### Keywords:

postbuckling bending, nonlinear elastic support, integro-differential equation, compliance of rods, collocation method, numerical experiments

### ABSTRACT

Supercritical bending of a rod compressed by a longitudinal force and having a non-linearly elastic resistance to rotation of its axis in hinged supports is considered. Hooke's law is adopted for the rod material. The deflection is presented as a trigonometric series, in which only the first three terms are left. Through this row, the angle of inclination of the axis of the rod is expressed. It is chosen as the desired function, with respect to which a resolving nonlinear integro-differential equation is obtained. To simplify it, the case is considered when the bent axis of the rod is a gentle curve. It is revealed that the usual approach, in which the compressive force is given, leads to a trivial solution with zero values for the coefficients of this series. Therefore, the first coefficient of the series, through which the deflection is represented, was chosen as the initial parameter. The equation containing the remaining desired coefficients and load was solved by the simple collocation method, since the use of the predetermined collocation method is impossible due to the nonlinearity of the resulting system of equations. The calculation results were analyzed depending on the choice of collocation points, which showed a small difference between the obtained solutions (the quadratic discrepancy between the calculated values did not exceed one percent, which indicates sufficient accuracy of the deflection approximation in the form proposed in the work). In contrast to the usual approach used in numerical methods, here it is not necessary to enter any parameter of the loading process (such as the length of the arc in the arc method) to pass the limit points.

An approach is presented for an approximate calculation of the compliance of the considered rods in compression, taking into account their supercritical bending.

The results of numerical studies of the supercritical behavior of rods for various geometric and mechanical characteristics of rods and supports are presented, and dependences between various parameters of the stress-strain state are obtained. Their analysis made it possible to reveal a number of features in the behavior of the considered rods depending on the properties of the nonlinear elastic resistance of the supports. In particular, it was found that under the considered parameters of the system under consideration, the compression force and the angle of inclination of the rod on the support are related by a relationship close to linear, the compliance of the compressible rod can increase by tens or more times depending on the stiffness of the springs, the rod can lose stability by snap at some values parameters of nonlinear elastic supports.

© PNRPU

### Введение

Впервые задачи устойчивости и анализа больших прогибов стержня при сжатии, как известно, были решены Л.Эйлером (см. например, в [1]). В дальнейшем эти проблемы рассматривались многими учеными в различных усложненных постановках (см., в частности, [2–7]). В том числе в русле рассматриваемой здесь тематики решение задачи о потере устойчивости стержня при наличии опор, которые линейно-упруго сопротивляются повороту оси балки, приведено в работе [6]. И в дальнейшем задаче о закритическом поведении элементов конструкций посвящалось немало работ (см. например, [8–11]). В частности, были решены задачи о больших прогибах прямолинейных стержней и в упругой среде [12; 13]. При этом было обнаружено, что, в отличие от решения Эйлера, при определенных геометрических параметрах стержня после потери устойчивости для дальнейшей деформации стержня в упругой среде требуется уже меньшая сила, чем критическая. Фактически происходит хлопок, как это имеет место в боль-

шинстве случаев при поперечном нагружении арок или предварительно искривленных стержней. Например, различные задачи о хлопке бесконечно длинной панели, в том числе и для случая, когда опоры являются упругими, детально обсуждаются в работе [14], в которой получены аналитические решения для случая равномерной нагрузки. В работе [15] аналогичная задача была рассмотрена при воздействии приложенной по линии нагрузки на цилиндрические панели, а также на предварительно изогнутые пластины, закрепленные в жестких опорах. Был выявлен необычный эффект, который заключается в том, что, в отличие от результатов, полученных в [14], при закритическом нагружении сосредоточенными воздействиями достигается состояние, при котором определенному значению приложенной нагрузки соответствует бесконечное множество форм изгиба панели.

В настоящее время в работе стержневых элементов в сооружениях типа строительных лесов (модули которых чаще всего представляют круглые трубы из стали или алюминия) одной из их отличительных особенно-

стей является нелинейная работа узлов соединения этих стержней, а именно нелинейная зависимость между углом поворота и изгибающим моментом [16–20]. В связи с этим представляет интерес анализ поведения сжатых стержней после потери устойчивости с учетом нелинейной работы узла, а именно выявление зависимости ее податливости усилию сжатия, поскольку при этом элемент полностью не выключается из работы (его жесткость уменьшается, но он продолжает нести часть нагрузки). В работе [9] для вычисления податливости стержней с линейным упругим закреплением на концах после потери устойчивости предложено численное решение системы полученных эллиптических уравнений. В [21] представлен анализ стержня на упругом основании с начальными прогибами и упругими закреплениями на концах с учетом деформаций сжатия, изгиба и сдвига. Предложенный метод позволил авторам описать закритическое поведение стержня, но рассмотрены только линейно упругие закрепления. В работе [22] исследована закритическая работа стержня с опорами, которые нелинейно упруго сопротивляются повороту оси этого стержня. Полученное решение сравнивается с результатами, полученными на конечно-элементных моделях с использованием программы ABAQUS, но в работе рассмотрена только модель узла с уменьшающейся жесткостью при повороте, в то время как жесткости узлов могут возрастать в связи с выработкой зазоров. Задачи, в которых учитываются не стандартные ограничения на перемещения стержня, рассматривались в работах [23–27]. Задачи о потере устойчивости стержней с такого рода ограничениями (в частности, таковыми могут быть промежуточные упругие опоры), вытекающие из реальных технических проблем, рассмотрены, например, в [25–26]. Немало работ посвящено и стержням, имеющим предварительно изогнутую форму (фактически – аркам). Например, аналитическое решение получено в работе [28], которое потом сравнивается с результатами, полученными численным методом (МКЭ). Для решения задач о закритическом поведении конструкций, в том числе и стержней с упругими опорами, используются и другие методы [30–33], а также другие модели стержней (например, в [34] разработан алгоритм, основанный на «модифицированных» функциях устойчивости Тимошенко, для анализа больших прогибов и закритической работы стержней с полужесткими соединениями с учетом отклонения от вертикали, деформаций сдвига, продольных деформаций и упругого закрепления одного конца от поперечного смещения).

В данной работе исследуются большие прогибы стержня под действием сжимающей силы при наличии нелинейно-упругих опор с различными свойствами. Получено интегродифференциальное уравнение относительно угла наклона оси балки. Оно может быть решено, например, методом коллокаций. Это позволяет в отличие от численных методов не вводить какой-либо параметр процесса нагружения (см., например, в [32; 33]). В случае малых углов наклона оси стержня при

некоторых частных вариантах соотношений для упругих опор возможно получение аналитического решения. Анализ численных результатов показал хорошую точность. В этой задаче также выявлен эффект, который не наблюдается для случая обычных опор, а именно при некоторых параметрах в соотношениях нелинейной упругости для этих опор возникает эффект хлопка. При этом могут возникать и случаи наличия как верхней, так и нижней критических нагрузок. Рассмотрена также задача вычисления податливости рассматриваемых стержней на сжатие с учетом их закритического изгиба.

### 1. Исходные соотношения и метод решения

Рассмотрим шарнирно закрепленный стержень, изогнутый сжимающей силой  $P$  (рис. 1). Обозначим через  $s$  длину дуги, отсчитываемую от левой опоры, полную длину балки обозначим через  $L$ , а угол наклона касательной к оси балки – через  $\theta$  (см. рис. 1). Считаем, что на опорах имеется упругое сопротивление повороту оси балки (ниже иногда будем их называть пружинами). Жесткости пружин могут зависеть от их деформации, т.е. от углов наклона стержней  $\theta_1, \theta_2$  в опорах. Нелинейно упругий закон для пружин запишем в виде

$$M_1 = D_1(\theta_1) \cdot \theta_1, \quad M_2 = -D_2(-\theta_2) \cdot \theta_2, \quad (1)$$

здесь  $D_1, D_2$  – жесткости пружин, которые могут быть неодинаковы.

Для анализа зависимости напряженно-деформированного состояния стержня от силы  $P$  рассмотрим задачу в геометрически нелинейной постановке.

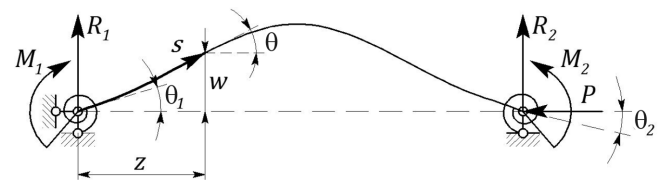


Рис. 1. Схема упругого стержня, изогнутого сжимающей продольной силой и имеющего в шарнирных опорах нелинейно упругое сопротивление повороту его оси

Fig. 1. Scheme of an elastic rod bent by a compressive longitudinal force and having a non-linearly elastic resistance to rotation of its axis in hinged supports

Как следует из рис. 1, имеют место следующие соотношения:

$$\frac{dz}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dw}{ds} = \sin \theta. \quad (2)$$

Рассмотрим левую часть балки, отсеченную на расстоянии  $z$  от левой опоры (рис. 2). Запишем выражение для изгибающего момента  $M_x$  :

$$M_x = -Pw + M_1 + R_1 z. \quad (3)$$

При этом для вычисления  $M_x$  необходимо знать функции  $w(s), z(s)$ , которые можно найти из соотно-

шений (2), если известен угол наклона изогнутой оси стержня:

$$z = \int_0^s \cos \theta ds, \quad w = \int_0^s \sin \theta ds. \quad (4)$$

Для элементов балки примем закон Гука, а именно считаем, что кривизна оси стержня прямо пропорциональна изгибающему моменту:

$$M_x = EJ \frac{d\theta}{ds}, \quad (5)$$

где  $E$  – модуль Юнга материала,  $J$  – момент инерции сечения. Тогда уравнение изгиба элемента балки примет вид:

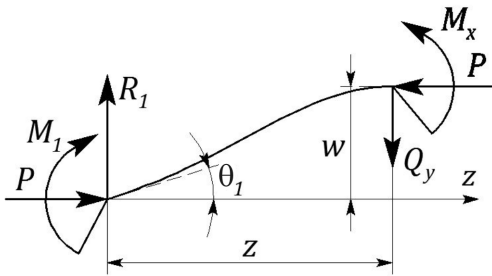


Рис. 2. Часть балки, отсеченная на расстоянии  $z$  от левой опоры

Fig. 1. Part of the beam, cut off at a distance  $z$  from the left support

$$EJ \frac{d\theta}{ds} = M_1 - Pw + R_1 z. \quad (6)$$

Реакция  $R_1$  может быть выражена через  $M_1, M_2$  из уравнений равновесия следующим образом:

$$R_1 = (M_2 - M_1) / z(L). \quad (7)$$

После подстановки выражений (1), (4), (7) в (6) получаем следующее нелинейное интегродифференциальное уравнение относительно  $\theta(s)$ :

$$EJ \frac{d\theta}{ds} = D_1(\theta_1)\theta_1 - \int_0^s \sin \theta ds - (D_2(-\theta_2)\theta_2 + D_1(\theta_1)\theta_1) \frac{z}{z(L)}. \quad (8)$$

В этой работе оно решалось методом простых коллокаций (использование метода преопределенных коллокаций здесь невозможно, поскольку система нелинейная).

Поскольку рассматриваются прогибы, которые не симметричны относительно центрального сечения стержня, то аппроксимирующая функция для  $w(s)$  даже в простейшем случае должна иметь не менее трех искомым величин. Можно ее принять, например, в следующем виде (она выбрана так, чтобы удовлетворялись условия равенства прогибов нулю на опорах):

$$w = \frac{l}{\pi} \left( C_1 \sin \frac{\pi s}{L} + \frac{1}{2} C_2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi s}{L} \right) + \frac{1}{2} C_3 \sin \frac{2\pi s}{L} + \dots \right). \quad (9)$$

Тогда для угла наклона  $\theta(s)$  получим соотношение:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \\ &= C_1 \cos \frac{\pi s}{L} + C_2 \sin \frac{2\pi s}{L} + C_3 \cos \frac{2\pi s}{L} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Далее ограничимся первыми тремя членами в рядах (9), (10). Разрешая уравнение (10) относительно  $\sin \theta$ , получим:

$$\sin \theta = \frac{\left( C_1 \cos \frac{\pi s}{L} + C_2 \sin \frac{2\pi s}{L} + C_3 \cos \frac{2\pi s}{L} \right)}{\sqrt{1 + \left( C_1 \cos \frac{\pi s}{L} + C_2 \sin \frac{2\pi s}{L} + C_3 \cos \frac{2\pi s}{L} \right)^2}}. \quad (11)$$

Из выражения (10) можно выразить  $\theta$  через искомые константы  $C_1, C_2, C_3$ :

$$\theta = \operatorname{Arctg} \left( C_1 \cos \frac{\pi s}{L} + C_2 \sin \frac{2\pi s}{L} + C_3 \cos \frac{2\pi s}{L} \right). \quad (12)$$

Таким образом, из (8), (11), (12) вытекает уравнение, содержащее константы  $P, C_1, C_2, C_3$ . Должны выполняться и граничные условия (1). При анализе такого рода нелинейных уравнений численными методами обычно вводится параметр продолжения процесса. В нашем случае этого не требуется, поскольку решение проводится методом коллокаций. В результате получим систему нелинейных алгебраических уравнений. Однако в общем случае нелинейность этой системы требует применения или разработки специальных алгоритмов ее решения. Поэтому далее для упрощения будем считать, что прогибы не очень велики, а именно примем, что в результате изгиба полученная ось балки является полой. Это позволяет использовать следующие приближенные выражения для координаты  $z$  и тангенса угла наклона оси балки:

$$\begin{aligned} z &\approx s, \quad \frac{dw}{ds} = \theta, \\ \operatorname{tg} \theta &\cong \sin \theta \cong \theta = C_1 \cos \frac{\pi s}{L} + C_2 \sin \frac{2\pi s}{L} + C_3 \cos \frac{2\pi s}{L}. \end{aligned} \quad (13)$$

При малых углах  $\theta$  и при  $D_1 = D_2 = C_1 = C_2 = 0$  из уравнения (8) вытекает классическое выражение для критической нагрузки  $P_{crit}$  в виде:

$$P_0 = P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}.$$

Кроме того, при постоянных значениях  $D_1, D_2$  можно получить приближенное решение для  $P_{crit}$  (точное решение приведено, например, в [6]).

Закритическое поведение стержня при использовании упрощающих соотношений (13) будет описываться следующим уравнением:

$$\begin{aligned}
 EJ(-C_1 \sin \frac{\pi s}{L} + 2C_2 \cos \frac{2\pi s}{L} - 2C_3 \sin \frac{2\pi s}{L}) \frac{\pi}{L} = \\
 = D_1(C_1 + C_3) \cdot (C_1 + C_3) - \\
 -P \int_0^s (C_1 \cos \frac{\pi s}{L} + C_2 \frac{2\pi s}{L} + C_3 \cos \frac{2\pi s}{L}) ds - \\
 -(D_2(C_1 - C_3)(C_3 - C_1) + D_1(C_1 + C_3) \cdot (C_1 + C_3)) \frac{s}{L}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Однако даже при упрощающем предположении (13) в общем случае физически нелинейных соотношений (1) приходится обращаться, например, к методу последовательных приближений или методу простых итераций. Для этого в (14) используются величины  $D_1, D_2$ , которые вычисляются с помощью значений  $P, C_1, C_2, C_3$ , полученных на предыдущем шаге итерации.

Для того чтобы проследить закритическое поведение стержня, необходимо выбрать ряд значений одного из искомым констант. Обычный подход, в котором задается нагрузка  $P$ , а затем из уравнения равновесия (14) определяются искомые постоянные, здесь не применим, так как он дает тривиальное решение, а именно нулевые значения для  $C_1, C_2, C_3$ . Поэтому в этой работе в качестве ведущего параметра использована константа  $C_1$ . При разных ее величинах получается система нелинейных уравнений относительно  $P, C_2, C_3$ .

Точки коллокации выбирались разными, затем решение для  $P, C_2, C_3$  осреднялось. Далее вычислялась средняя квадратичная невязка между расчетными величинами. Численные эксперименты показали, что этот подход при использовании соотношений (13) дает достаточно хорошие результаты – эта невязка не превышала 1 %.

Для вычисления податливости сжатого стержня с учетом его закритического поведения и наличия нелинейно упругих опор нужно учесть, во-первых, изменение его длины (укорочение  $\Delta L$  от сжатия), во-вторых, необходимо уметь определять перемещение подвижного торца в результате закритического изгиба. Это дает следующее выражение для перемещения правого торца  $u_z(L)$ :

$$u_z(L) \approx -\frac{P \cdot L}{E \cdot A} + L - \int_0^L \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta)} ds. \tag{15}$$

Здесь через  $A$  обозначена площадь сечения стержня.

Податливость будем обозначать через  $S$ . Тогда относительное перемещение нагруженного торца можно представить в виде

$$\frac{|u_z(L)|}{L} = S \frac{P}{A}. \tag{16}$$

Из (15) и (16) вытекает выражение для  $S$ :

$$S \approx \frac{1}{E} + \frac{A}{PL} \left( \int_0^L \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta)} ds - L \right). \tag{17}$$

Как видно из (17), податливость  $S$  будет зависеть от силы сжатия  $P$ .

## 2. Численные эксперименты

Ниже приведены результаты численных экспериментов в случае использования некоторых конкретных геометрических и механических характеристик. Анализировались зависимости между различными параметрами напряженно-деформированного состояния. Соотношения (1) записывались в виде следующих функций:

$$\begin{aligned}
 D_1(\theta_1) &= c_{10}(1 + c_{11}\theta_1)^{m_1}, \quad c_{10} > 0, \quad c_{11} > 0; \\
 D_2(\theta_2) &= c_{20}(1 + c_{21}|\theta_2|)^{m_2}, \quad c_{20} > 0, \quad c_{21} > 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

При  $m_i > 0$  жесткость пружины будет увеличиваться, а при  $m_i < 0$  – уменьшаться. Отметим, что в случае применения соотношений (18) при  $|m_i|=1$  при использовании метода коллокаций из (14) вытекает система нелинейных алгебраических уравнений, которая может быть решена с помощью процедур, встроенных в современные компьютерные системы.

В численных экспериментах рассматривался реальный трубчатый стальной стержень, применяющийся для сооружения модульных строительных лесов, которые используются и в качестве несущего каркаса временных зданий и сооружений при проведении культурно-массовых мероприятий. Одной из отличительных особенностей этих систем является нелинейная работа узлов соединения ригеля со стойкой, а именно нелинейная зависимость между углом поворота и изгибающим моментом [6; 7; 22]. На рис. 3–7 представлены результаты расчетов для случаев, когда в шарнирах жесткости пружин не одинаковы (в отличие от работы [35], в которой рассматривалась только симметричная задача). Геометрические и механические характеристики были приняты следующими:

$$\begin{aligned}
 L &= 200 \text{ см}; E_0 = 20000 \text{ кН/см}^2; J = 13,5 \text{ см}^4; A = 5,53 \text{ см}^2; \\
 P_0 &= 66,57 \text{ кН} \\
 c_{10} &= 5000 \text{ кН см}; c_{20} = 10\,000 \text{ кН см}; c_{11} = 14; c_{21} = 7; \\
 m_1 &= m_2 = \pm 1; (\theta_1)_{\max} = 0,28.
 \end{aligned}$$

Здесь  $P_0$  – критическая сила для шарнирно опертого стержня без упругих пружин. При различных значениях коэффициента  $C_1$  вычислялись  $P, C_2, C_3$  и все остальные необходимые параметры.

Как видно из рис. 3, в случае уменьшения жесткости пружин при увеличении углов наклона оси балки  $\theta_1$  (т.е. при  $m_i = -1$ ) нагрузка  $P$  уменьшается, следовательно, критическая нагрузка является также и предельной, а при  $m_i = 1$  сила  $P$  постоянно растет.

Далее был проведен ряд численных экспериментов при других значениях геометрических и механических характеристик рассматриваемой системы. Он позволил

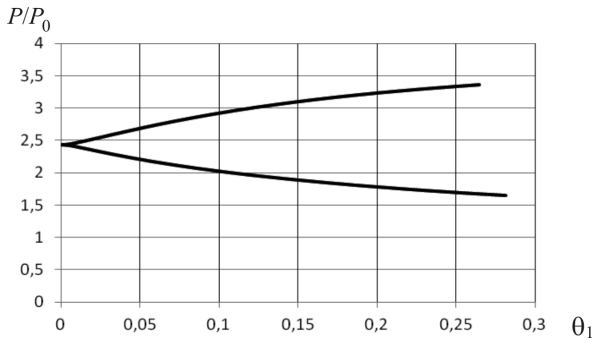


Рис. 3. Зависимости относительной силы сжатия  $P/P_0$  от угла поворота  $\theta_1$  оси балки на левой опоре (нижняя линия для случая  $m_1 = m_2 = -1$ , верхняя – для случая  $m_1 = m_2 = 1$ )

Fig. 3. Dependences of the relative compression force on the angle of rotation  $\theta_1$  beam axis on the left support (lower line for the case  $m_1 = m_2 = -1$ , upper line for the case  $m_1 = m_2 = 1$ )

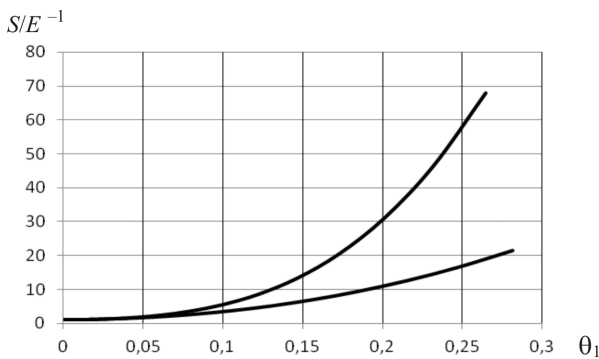


Рис. 4. Зависимость относительной податливости  $S/E^{-1}$  стержня от угла наклона оси балки  $\theta_1$  на левой опоре (нижняя линия для случая  $m_1 = m_2 = -1$ , верхняя – для случая  $m_1 = m_2 = 1$ )

Fig. 4. Dependence of the relative compliance  $S/E^{-1}$  of the rod on the angle of inclination of the beam axis  $\theta_1$  on the left support (lower line for the case  $m_1 = m_2 = -1$ , upper line for the case  $m_1 = m_2 = 1$ )

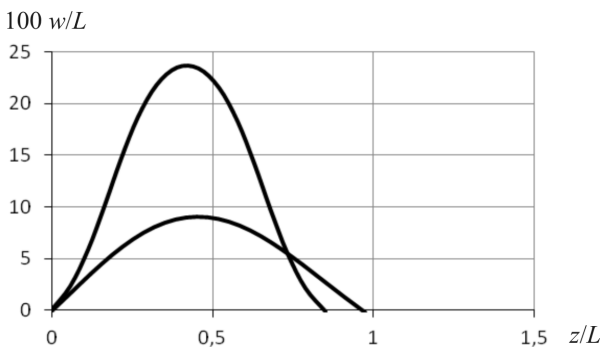


Рис. 5. Картина изгиба стержня при максимальных углах наклона  $(\theta_1)_{\max}$  оси стержня на левой опоре (нижняя линия для случая  $m_1 = m_2 = -1$ , верхняя – для случая  $m_1 = m_2 = 1$ ). По ординате отложено значение относительного прогиба  $100 w/L$

Fig. 5. The pattern of the rod bending at the maximum angles of inclination of the rod axis on the left support (lower line for the case  $m_1 = m_2 = -1$ , upper line for the case  $m_1 = m_2 = 1$ ). The value of the relative deflection is plotted along the ordinate

выявить следующий неожиданный эффект, подобный тому, который был обнаружен и в задаче о закритическом изгибе стержня на линейно упругом основании [12]. Оказалось, что при некоторой комбинации геометрических и механических характеристик стержня и опор может появиться потеря устойчивости хлопком. Из рис. 6 следует, что имеют место верхняя и нижняя критические нагрузки. Аналогичная зависимость между нагрузками и перемещениями характерна для арок при поперечных воздействиях.

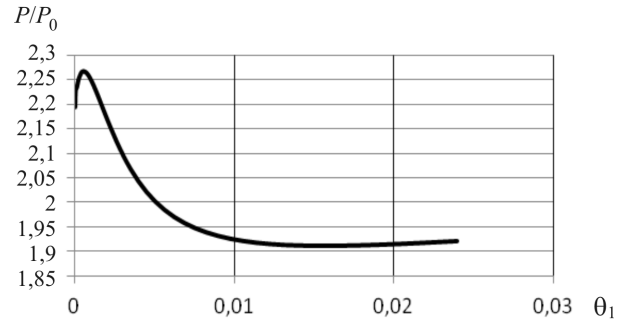


Рис. 6. Зависимость относительного усилия сжатия  $P/P_0$  от угла наклона в левой опоре

Fig. 6. Dependence of the relative compression force  $P/P_0$  on the angle of inclination in the left support

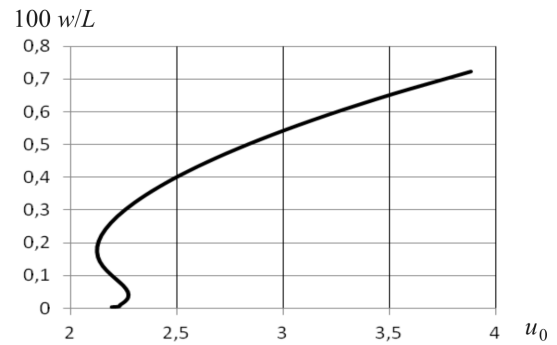


Рис. 7. Зависимость относительного прогиба  $100 w/L$  в центральном сечении от относительного перемещения  $u_0 = |u_z(L)|/(P_0 L/EA)$  правого торца

Fig. 7. Dependence of the relative deflection  $100 w/L$  in the central section on the relative displacement  $u_0 = |u_z(L)|/(P_0 L/EA)$  of the right end

Нужно подчеркнуть, что такая немонотонная связь усилия сжатия от угла наклона оси стержня в левой опоре, которая изображена на рис. 6, имеет место только при некоторых комбинациях нелинейно упругих жесткостей пружин в шарнирных опорах. В частности, результаты, изображенные на рис. 6, были получены при следующих значениях механических и геометрических характеристик стержня и опор:

$$L = 600 \text{ см}; E = 20\,000 \text{ кН/см}^2; J = 13,5 \text{ см}^4; A = 5,53 \text{ см}^2; \\ c_{10} = 5000 \text{ кН/см}^2; c_{11} = 1000; c_{20} = 500 \text{ кН/см}^2; \\ c_{21} = 4000; m_1 = -1, m_2 = 0,5, (\theta_1)_{\max} = 0,024.$$

Отметим еще один эффект, который имеет место в процессе деформирования стержня с рассмотренными

здесь нелинейно упругими опорами. При принятых комбинациях геометрических и механических характеристик опор и стержня может иметь место своеобразный «негативизм» в его поведении. А именно, как видно из рис. 7, увеличение прогиба в центре стержня сначала, как и должно быть, сопровождается увеличением перемещения торца. Однако при дальнейшем изгибании после превышения некоторого критического значения прогиба правый торец начинает перемещаться в обратном направлении, т.е. стремится вернуться в исходное положение, а пролет начинает увеличиваться. Затем наступает следующее критическое значение прогиба, после которого вновь связь прогиба и перемещения торца принимает логически ожидаемый вид (с увеличением прогиба уменьшается пролет).

## Заключение

В данной работе в геометрически и физически нелинейной постановке рассмотрена задача о закритическом изгибе стержней, нагруженных сжимающей силой. Принималось, что в шарнирных опорах имеется нелинейно упругое сопротивление повороту оси балки. Задача сведена к анализу нелинейного интегродифференциального уравнения относительно угла наклона стержня. Предложен приближенный метод его решения при небольших углах наклона оси стержня.

## Библиографический список

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.
3. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
4. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. – Киев: Вища школа, 1980. – 167 с.
5. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 359 с.
6. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 808 с.
7. Паймушин В.Н. Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и прямолинейных стержней // Известия РАН. ПММ. – 2007. – Т. 71, вып. 5. – С. 855–893.
8. Гарипов А.И. Численное исследование закритической работы стержней кольцевого поперечного сечения при внецентренном сжатии // Вестник гражданских инженеров. – 2020. – № 5 (82). – С. 87–93. DOI: 10.23968/1999-5571-2020-17-5-87-93
9. Pignataro M., Rizzi N., Luongo A. Stability, bifurcation, and postcritical behaviour of elastic structures. – Amsterdam: Elsevier Science, 1991. – 358 p.
10. Большие прогибы вязкоупругих панелей / Р.А. Каюмов [и др.] // Известия вузов. Математика. – 2019. – № 11. – С. 80–86.
11. Тимергалиев С.Н. Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Известия вузов. Математика. – 2017. – № 4. – С. 59–75.
12. Каюмов Р.А. Закритическое поведение сжатых стержней в упругой среде // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2017. – № 5. – С. 122–129. DOI: 10.3103/S0025654417050120
13. Астапов Н.С., Корнев В.М. Закритическое поведение идеального стержня на упругом основании // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1993. – С. 130–142.
14. Корнишин М.С., Муштари Х.М. Устойчивость бесконечно длинной пологой цилиндрической панели под действием нормального равномерного давления // Известия Казанского филиала Академии наук СССР. Серия физ.-мат. и техн. наук. – 1995. – № 7. – С. 36–50.
15. Каюмов Р.А., Тазюков Б.Ф. Устойчивость изогнутой тонкой упругой пластины, нагруженной поперечной силой // Известия вузов. Авиационная техника. – 2001. – № 4. – С. 12–15.
16. Beale R., André J. Design Solutions and Innovations in Temporary Structures. – Târgoviște: IGI Global, 2017. – 503 p.
17. Stability study on structural systems assembled by system scaffolds / J.L. Peng, C.M. Ho, S.L. Chan, W.F. Chen // Journal of Constructional Steel Research. – 2017. – Vol. 137. – P. 135–151. DOI: 10.1016/J.JCSR.2017.06.004
18. Experimental investigations of buckling behaviour of steel scaffolds / C. Mercier, A. Khelil, F. Al Mahmoud, J.L. Blin-Lacroix, A. Pamies // Structures // Structures. – 2021. – Vol. 33. – P. 433–450. DOI: 10.1016/J.ISTRUC.2021.04.045.
19. Experimental and theoretical studies on the stability of steel tube–coupler scaffolds with different connection joints / H. Liu, L. Jia, S. Wen, Q. Liu, G. Wang, Z. Chen // Engineering Structures. – 2016. – Vol. 106. – P. 80–95. DOI: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2015.10.015

20. Vega-Posada C., Areiza-Hurtado M., Aristizabal-Ochoa J.D. Large deflection and post-buckling behavior of slender beam-columns with non-linear end-restraints // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2011. – Vol. 46. – P. 79–95. DOI: 10.1016/J.IJNONLINMEC.2010.07.006

21. Areiza-Hurtado M., Aristizabal-Ochoa J.D. Second-order analysis of a beam-column on elastic foundation partially restrained axially with initial deflections and semirigid connections // *Structures*. – 2019. – Vol. 20. – P. 134–146. DOI: 10.1016/J.ISTRUC.2019.03.010

22. Giraldo-Londoño O., Monsalve-Giraldo J.S., Aristizabal-Ochoa J.D. Large-deflection and postbuckling of beam-columns with non-linear semi-rigid connections including shear and axial effects // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2015. – Vol. 77. – P. 85–95. DOI: 10.1016/J.IJNONLINMEC.2015.07.009

23. Тарасов В.Н. Об упругой линии сжимаемого продольной силой стержня, расположенного между двумя жесткими стенками // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика*. – 2018. – Вып. 1 (26). – С. 29–45.

24. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня при наличии препятствий выпучиванию // *Вестник томского государственного университета*. – 2015. – № 4 (36). – С. 71–84. DOI: 10.17223/19988621/36/9.

25. Устойчивость участка трубопровода с упругой опорой / В.В. Болотин, В.П. Радин, В.П. Чирков, А.В. Щугорев // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. – 2009. – № 1. – С. 174–184.

26. Ефимова А.И., Судаков С.П. Продольная устойчивость винтов с промежуточной линейно-упругой опорой // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. – 2009. – № 2–2. – С. 73–78.

## References

1. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruемого tverdogo tela* [Mechanics of a Deformable Solid Body]. Moscow, Nauka, 1988, 712 p.

2. Volmir A.S. *Ustoichivost' uprugikh sistem* [Stability of elastic systems]. Moscow, Fizmatgiz, 1963, 880 p.

3. Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoichivost' uprugikh sistem* [Fundamentals of Calculating the Stability of Elastic Systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1978, 312 p.

4. Guz A.N., Babich I. Yu. *Trekhmernaya teoriya ustoichivosti sterzhnei, plastin i obolochek* [Three-dimensional Theory of Stability of Rods, Plates and Shells]. Kiev, Vishcha school, 1980, 167 p.

5. Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. *Ustoichivost' obolochek* [Shell Stability]. Moscow, Nauka, 1978, 359 p.

6. Timoshenko S.P. *Ustoichivost' sterzhnei, plastin i obolochek* [Stability of rods, plates and shells]. Moscow, Nauka, 1971, 808 p.

7. Paimushin V.N. *Problemy geometricheskoi nelineinosti i ustoichivosti v mekhanike tonkikh obolochek i priamolineinykh sterzhnei* [Problems of Geometric Nonlinearity and Stability in the Mechanics of Thin Shells and Straight Rods]. *Izvestiya RAN. PMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, vol. 71, Issue 5, pp. 855-893.

8. Garipov A.I. *Chislennoe issledovanie zakriticheskoi raboty sterzhnei kol'tseвого poperechnogo secheniya pri vnentsentrennom szhatii* [Numerical study of the supercritical work of rods of an annular cross section under eccentric compression]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 5 (82), pp. 87-93. doi: 10.23968/1999-5571-2020-17-5-87-93.

9. Pignataro M., Rizzi N., Luongo A. *Stability, bifurcation, and postcritical behavior of elastic structures*.- Amsterdam, Elsevier Science, 1991, 358 p.

27. Мирошник Р.А. О численном решении задач устойчивости прямых стержней с промежуточными упругими опорами // *Ученые записки ЦАГИ*. – 1988. – Т. 19, № 1. – С. 67–77.

28. Pi Y.-L., Bradford M.A., Tin-Loi F. *Nonlinear analysis and buckling of elastically supported circular shallow arches* // *International Journal of Solids and Structures*. – 2007. – Vol. 44. – P. 2401–2425.

29. Dewobroto W., Chendrawan W. *Ultimate Load Capacity Analysis of Steel Scaffoldings Using Direct-Analysis Method* // *Practice Periodical on Structural Design and Construction*. – 2018. – Vol. 23, № 4. DOI: 10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000392.

30. Prabhakaran U., Beale R.G., Godley M.H.R. *Analysis of scaffolds with connections containing looseness* // *Comput. Struct*. – 2011. – Vol. 89, № 21–22. – P. 1944–1955.

31. Zheng Y., Guo Z. *Investigation of joint behavior of disk-lock and cuplock steel tubular scaffold* // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2021. – Vol. 177. DOI: 10.1016/J.JCSR.2020.106415.

32. Riks E. *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems* // *Solid Struct*. – 1979. – Vol. 15. – P. 529–551.

33. Crisfield M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. – Wiley, 1991. – Vol. 1. – P. 362 p.

34. Aristizabal-Ochoa J.D. *Large deflection and postbuckling behavior of Timoshenko beam-columns with semi-rigid connections including shear and axial effects* // *Engineering Structures*. – 2007. – Vol. 29, no. 6. – P. 991–1003. DOI: 10.1016/j.engstruct.2006.07.012

35. Каюмов Р.А., Хайдаров Л.И., Гимазетдинов А.Р. *Податливость сжатых стержней с упругой опорой с учетом их закритического поведения* // *Известия КГАСУ*. – 2021. – № 3 (57). – С. 5–12. DOI: 10.52409/20731523\_2021\_3\_5

10. Kayumov R.A., Tazyukov B.F., Mukhamedova I.Z., Shakirzyanov F.R. *Bol'shie progiby viazkouprugikh panelei* [Large deflections of viscoelastic panels]. *Izvestiya vuzov. Matematika - Russian Mathematics*, 2019, no. 11, pp. 80-86.

11. Timergaliev S.N. *A Metod integral'nykh uravnenii v nelineinykh kraevykh zadachakh dlia pologikh obolochek tipa Timoshenko so svobodnymi kraiami* [Method of Integral Equations in Nonlinear Boundary-Value Problems for Flat Shells of the Timoshenko Type with Free Edges]. *Izvestiya vuzov. Matematika - Russian Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 59-75.

12. Kayumov R.A. *Zakriticheskoe povedenie szhatykh sterzhnei v uprugoi srede* [Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela -Mechanics of Solids*. 2017, vol. 52, no 5, pp. 575-580. doi: 10.3103/S0025654417050120.

13. Astapov N.S., Kornev V.M. *Zakriticheskoe povedenie ideal'nogo sterzhnia na uprugom osnovanii* [Supercritical behavior of an ideal rod on an elastic foundation]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, pp. 130-142.

14. Kornishin M.S. and Mushtari Kh.M. *Ustoichivost' beskonечно dlinnoi pologoi tsilindricheskoi paneli pod deistviem normal'nogo ravnomernogo davleniya* [Stability of an infinitely long sloping cylindrical panel under the action of normal uniform pressure]. *Izvestiya Kazanskogo filiala Akademii nauk SSSR. Seriya fiz.-mat. i tekhn. nauk. - Proceedings of the Kazan Branch of the Academy of Sciences of the USSR. Series of Phys.-Math. and tech. Sciences*, 1995, no. 7, pp. 36-50.

15. Kayumov R.A. and Tazyukov B.F. *Ustoichivost' izognutoi tonkoi uprugoi plastiny, nagruzhennoi poperechnoi siloi*



[Stability of a Curved Thin Elastic Plate Loaded with a Transverse Force]. *Izvestiia VUZov. Aviatsionnaia tekhnika - Russian Aeronautics*, 2001, no. 4, pp. 12-15.

16. Beale R., André J. Design Solutions and Innovations in Temporary Structures. Târgoviște, IGI Global, 2017, 503 p.

17. Peng J.L., Ho C.M., Chan S.L., Chen W.F. Stability study on structural systems assembled by system scaffolds. *Journal of Constructional Steel Research*, 2017, vol. 137, pp. 135-151. doi: 10.1016/J.JCSR.2017.06.004

18. Mercier C., Khelil A., Al Mahmoud F., Blin-Lacroix J.L., Pamies A. Experimental investigations of buckling behavior of steel scaffolds. *Structures*, 2021, vol. 33, pp. 433-450. doi: 10.1016/J.ISTRUC.2021.04.045

19. Liu H., Jia L., Wen S., Liu Q., Wang G., Chen Z. Experimental and theoretical studies on the stability of steel tube-coupler scaffolds with different connection joints. *Engineering Structures*, 2016, vol. 106, pp. 80-95. doi: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2015.10.015

20. Vega-Posada C., Areiza-Hurtado M., Aristizabal-Ochoa J.D. Large deflection and post-buckling behavior of slender beam-columns with non-linear end-restraints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, pp. 79-95. doi: 10.1016/J.IJNONLINMEC.2010.07.006

21. Areiza-Hurtado M., Aristizabal-Ochoa J.D. Second-order analysis of a beam-column on elastic foundation partially restrained axially with initial deflections and semirigid connections. *Structures*, 2019, vol. 20, pp. 134-146. doi: 10.1016/J.ISTRUC.2019.03.010

22. Giraldo-Londoño O., Monsalve-Giraldo J.S., Aristizabal-Ochoa J.D. Large-deflection and postbuckling of beam-columns with non-linear semi-rigid connections including shear and axial effects. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2015, vol. 77, pp. 85–95. doi: 10.1016/J.IJNONLINMEC.2015.07.009

23. Tarasov V.N. Ob uprugoi linii szhimaemogo prodol'noi siloi sterzhnia, raspolozhennogo mezhdum dvumia zhestkimi stenkami [On the elastic line of the rod compressible by longitudinal force located between two rigid walls]. *Vestnik Syktyvskarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Informatika - Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 1 (26), pp. 29–45.

24. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' sterzhnya pri nalichii prep'yatstviy vypuchivaniyu [Stability of a column in the presence of obstacles to buckling]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta: Matematika i mekhanika - Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, release 4 (36), pp. 71–84. doi: 10.17223/19988621/36/9

25. Bolotin V.V., Radin V.P., Chirkov V.P., Shchugorev A.V. Ustoichivost' uchastka truboprovoda s uprugoi oporoi [Stability of a Pipeline Section with an Elastic Support]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela - Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 1, pp. 149-157.

26. Efimova A.I., Sudakov S.P. Prodol'naya ustoychivost' vintov s promezhutochnoi lineino-uprugoi oporoi [Longitudinal stability of propellers with intermediate linear-elastic support]. *Izvestiia Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki [News of the Tula State University. Technical science]*, 2009, no. 2-2, pp. 73-78.

27. Miroshnik R.A. O chislennom reshenii zadach ustoychivosti priamykh sterzhnei s promezhutochnymi uprugimi oporami [On the numerical solution of stability problems for straight rods with intermediate elastic supports]. *Uchenye zapiski TsAGI - Scientific notes of TsAGI*, 1988, vol. 19, no 1, pp 67-77.

28. Y. -L. Pi M.A. Bradford F. Tin-Loi. Nonlinear analysis and buckling of elastically supported circular shallow arches. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, pp. 2401–2425

29. Dewobroto W., Chendrawan W. Ultimate Load Capacity Analysis of Steel Scaffoldings Using Direct-Analysis Method. *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, 2018, vol. 23, no. 4. doi: 10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000392

30. Prabhakaran U., Beale R.G., Godley M.H.R. Analysis of scaffolds with connections containing looseness. *Comput. Struct.*, 2011, vol. 89, no. 21 – 22, pp. 1944–1955.

31. Zheng Y., Guo Z. Investigation of joint behavior of disk-lock and cuplock steel tubular scaffold. *Journal of Constructional Steel Research*, 2021, vol. 177. doi: 10.1016/J.JCSR.2020.106415

32. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Solid Struct.*, 1979, vol. 15 pp. 529-551.

33. Crisfield M.A. Non-linear finite element analysis of solids and structures. Wiley, vol. 1, 1991, 362 p.

34. Aristizabal-Ochoa J.D. Large deflection and postbuckling behavior of Timoshenko beam-columns with semi-rigid connections including shear and axial effects. *Engineering Structures*. 2007, vol. 29, no. 6, pp. 991–1003. doi: 10.1016/j.engstruct.2006.07.012

35. Kayumov R.A., Khaidarov L.I., and Gimazetdinov A.R. Podatlivost' szhatykh sterzhnei s uprugoi oporoi s uchetom ikh zakriticheskogo povedeniia [Compliance of Compressed Rods with Elastic Support Taking into Account Their Supercritical Behavior]. *Izvestiia KGASU - News of the KSUAE*, 2021, no. 3 (57), pp. 5-12. doi: 10.52409/20731523\_2021\_3\_5

**Финансирование.** Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Financing.** The work was carried out at the expense of the Strategic Academic Leadership Program of Kazan (Volga Region) Federal University ("PRIORITY-2030").

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.