



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2022

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.04

УДК 539.43: 531.781.2

## МАЛОЦИКЛОВАЯ УСТАЛОСТЬ ОБРАЗЦОВ БРОНЗОВОГО СПЛАВА С КОЛЬЦЕВОЙ ВЫТОЧКОЙ

Д.Р. Абашев

Московский политехнический университет, Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 22 марта 2022 г.  
Одобрена: 12 октября 2022 г.  
Принята к публикации:  
01 ноября 2022 г.

#### Ключевые слова:

малоцикловая усталость, теория пластичности, метод конечных элементов, корреляция цифровых изображений, накопление повреждений, концентрация напряжений, энергетический критерий усталости.

### АННОТАЦИЯ

Приводятся результаты экспериментов по циклическому нагружению образцов с кольцевой V-образной выточкой и их математического моделирования. Испытания проведены на образцах сплава БрХ08-Ш при циклическом изменении растягивающей нагрузки от 0 до заданного значения. При таком нагружении материал в области выточки подвергается циклическому упругопластическому деформированию, что приводит к разрушению вследствие малоцикловой усталости. При проведении испытаний образцов методом корреляции цифровых изображений проведен замер деформации материала на поверхности выточки, что позволило определить характер изменения её размаха от цикла к циклу. Математическое моделирование экспериментов проведено по методу конечных элементов. Для этого в программный комплекс SIMULIA Abaqus внедрены модели пластического деформирования и накопления повреждений материала. Модель пластичности основана на теории течения при комбинированном упрочнении. Модель накопления повреждений основана на энергетическом критерии усталости. В статье приведены основные уравнения используемых для расчета моделей. Параметры материала определены и верифицированы по результатам базового эксперимента по циклическому растяжению-сжатию гладкого цилиндрического образца при несимметричном жестком нагружении. По результатам расчета построены картограммы напряжений, деформаций и накопленных повреждений. Показано, что при разгрузке образца в области концентрации напряжений, близкой к кольцевой выточке, возникают сжимающие напряжения, значения которых близки к значениям растягивающих напряжений в момент приложения максимальной нагрузки. Результаты математического моделирования сопоставлены с экспериментом. Сравнение результатов проведено по размаху осевой деформации материала на поверхности выточки и количеству циклов до разрушения.

© ПНИПУ

© Абашев Дмитрий Рустамович – к.ф.-м.н., доц., e-mail: [tm@mospolytech.ru](mailto:tm@mospolytech.ru)

Dmitry R. Abashev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, e-mail: [tm@mospolytech.ru](mailto:tm@mospolytech.ru)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# LOW-CYCLE FATIGUE OF V-NOTCHED CYLINDRICAL SAMPLES OF BRONZE ALLOY

**D.R. Abashev**

Moscow Polytechnical University, Moscow, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 22 March 2022  
Approved: 12 October 2022  
Accepted for publication:  
01 November 2022

### Keywords:

low-cycle fatigue, plasticity theory, finite element method, digital image correlation, damage accumulation, stress concentration, mathematical modeling, energy durability criterion.

## ABSTRACT

The article presents the results of experiments on cyclic loading of samples with an annular V-shaped notch and their mathematical modeling. The tests were carried out on specimens of the BrKh08-Sh alloy with a cyclic change in the tensile load from 0 to a given value. Under such loading, the material in the groove area is subjected to cyclic elastoplastic deformation, which leads to failure due to low-cycle fatigue. When testing samples using the digital image correlation method, the deformation of the material on the surface of the undercut was measured, which made it possible to determine the nature of the change in its range from cycle to cycle. Mathematical modeling of experiments is carried out according to the finite element method. For this purpose, models of elastic-plastic deformation and accumulation of material damages are introduced into the SIMULIA Abaqus software package. The plasticity model is based on the theory of flow under combined hardening. The damage accumulation model is based on the energy strength criterion. The article presents the basic equations used to calculate the models. The material parameters are determined and verified based on the results of a basic experiment on cyclic tension-compression of a smooth cylindrical sample under asymmetric rigid loading. Based on the results of the calculation, cartograms of stresses, deformations, and accumulated damages were constructed. It is shown that when the sample is unloaded, in the area of stress concentration close to the annular groove, compressive stresses arise, the values of which are close to the values of tensile stresses at the moment of application of the maximum load. The results of mathematical modeling are compared with the experiment. A comparison of the results was carried out in terms of the range of axial deformation of the material on the surface of the undercut and the number of cycles before failure.

© PNRPU

## Введение

В различных элементах конструкции, имеющих концентраторы напряжений, в процессе эксплуатации могут возникать пластические деформации, что может приводить к малоцикловой усталости материала и дальнейшему разрушению конструкции. Для расчета кинетики напряженно-деформированного состояния и оценки прочности материала при подобных режимах нагружения, помимо учета геометрических особенностей детали, необходимо также применение математических моделей и критериев прочности, описывающих процесс упругопластического деформирования материала и накопления усталостных повреждений. Наиболее распространенными моделями поведения материала, позволяющими описывать такие процессы, в настоящее время являются модели, основанные на теории течения при комбинированном упрочнении [1–29], некоторые из них доступны для проведения прочностных расчетов в коммерческих программных комплексах [14; 30–33], основанных на методе конечных элементов и позволяющих подробно учитывать влияние геометрических концентраторов на напряженно-деформированное состояние детали.

Подобные математические модели позволяют определить напряжение и деформации материала, которые после можно использовать для оценки малоцикловой усталости. Для этого необходимо выбрать подходящий критерий прочности. На практике прочностных расчетов широко используется деформационный критерий

малоцикловой прочности [14; 34–36], число циклов до разрушения определяется по эквивалентному значению размаха пластических деформаций и кривой малоцикловой усталости. Такой подход хорошо зарекомендовал себя при оценке малоцикловой усталости при пропорциональном циклическом деформировании. В случае сложного непропорционального деформирования наиболее предпочтительным является применение энергетического критерия усталости [2–10]. Он позволяет оценивать накопление повреждений материала по всему процессу деформирования.

Для исследования процессов упругопластического деформирования в местах концентрации напряжений проведены испытания двух образцов из сплава БрХ08-Ш с кольцевой V-образной выточкой. Образцы испытаны при отнулевом цикле нагружения с заданным максимальным значением прикладываемой нагрузки. При таком нагружении в концентраторе возникают петли упругопластического гистерезиса, что приводит к малоцикловой усталости материала. При проведении испытаний с помощью системы корреляции видеоизображений Vic-3D [37] проведен замер деформации материала на поверхности выточки, проанализировано изменение её размаха от цикла к циклу. Математическое моделирование испытаний образцов с кольцевой выточкой проведено с помощью варианта модели пластичности [3], внедренного в виде пользовательской подпрограммы в расчетный комплекс SIMULIA Abaqus. Модель пластичности включает в себя энергетический критерий усталости, позволяющий проводить оценку выработанного ресурса.

1. Описание эксперимента

Проведены испытания двух образцов с кольцевой V-образной выточкой из сплава БрХ08-Ш при циклическом изменении нагрузки от 0 до 8 кН с частотой 0,1 Гц. Испытания проведены на универсальной испытательной машине Zwick Z100 при нормальной температуре. При таком режиме нагружения основная часть образца находится в упругом состоянии, в то время как в области выточки происходит упругопластическое деформирование. Диаметр рабочей части образца – 10 мм, глубина выточки – 2,5 мм, радиус выточки – 0,25 мм. Чертеж образца приведен на рис. 1. Химический состав и механические характеристики сплава БрХ08-Ш приведены в табл. 1 и 2.

Перед испытанием на поверхность выточки была нанесена спекл-структура, необходимая для оценки деформации методом корреляции цифровых изображений [35]. В процессе испытаний с помощью системы Vic-3D micro, оснащенной стереомикроскопом Olympus SDF Plaro 1.6XPF, проводилось фотографирование поверхности образца с частотой съемки 20 Гц. Полученные изображения разбивались на элементы, по перемещению которых была проведена оценка деформации поверхности выточки. На рис. 2 показаны фотографии поверхности выточки образца со спекл-структурной и с распределением осевой деформации материала в процессе испытания.

По результатам проведенных испытаний построена зависимость размаха осевой деформации материала на поверхности концентратора от номера цикла, которая показана на рис. 3. Для первых 10 циклов нагружения размах деформации определялся как в процессе нагружения образца и его разгрузки.

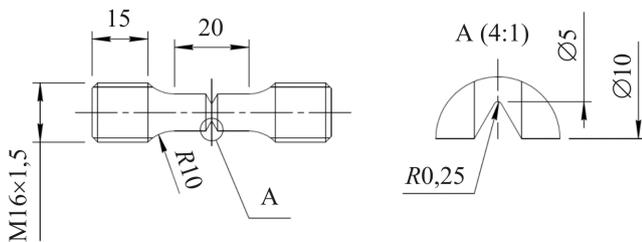


Рис. 1. Образец с V-образной кольцевой выточкой

Fig. 1. V-notched specimen

Таблица 1/Table 1

Химический состав сплава БрХ08-Ш

The chemical composition of the alloy BrKh08-Sh

Cr	Cu	Fe	Si	Zn	Mg	Pb	P
0,4–0,7	Основа	<0,06	<0,05	<0,015	<0,002	<0,005	<0,005

Таблица 2/Table 2

Механические характеристики сплава БрХ08-Ш

Mechanical characteristics of the alloy BrKh08-Sh

Е, ГПа	σ <sub>B</sub> , МПа	σ <sub>0,2</sub> , МПа	δ <sub>5</sub> , %	ψ, %
131	341	270	34	69

По характеру этой зависимости можно сделать вывод, что разрушение материала начинается при 500–600 циклах нагружения, о чём свидетельствует рост размаха деформации. Процесс разрушения является достаточно длительным.

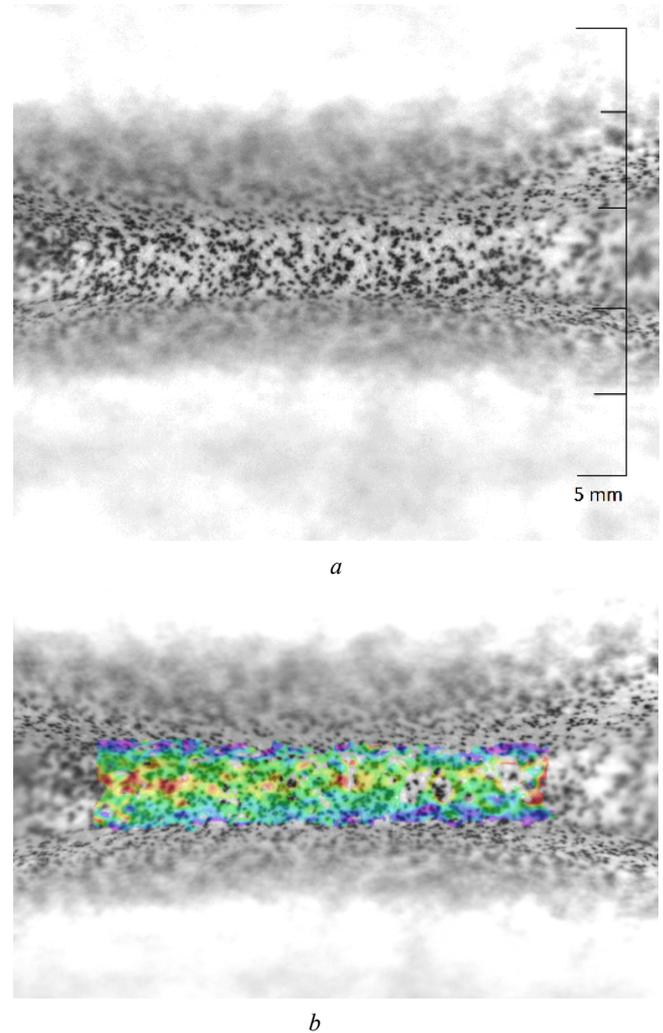


Рис. 2. Поверхность выточки образца со спекл-структурой (a) и с распределением осевой деформации (b)

Fig. 2. The surface of the undercut sample with a speckle structure (a) and with the distribution of axial strain (b)

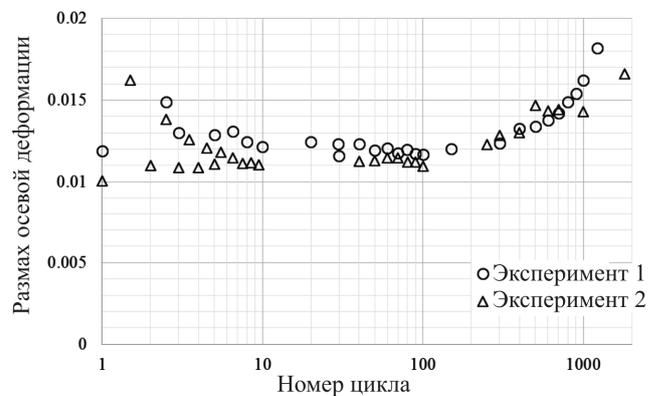


Рис. 3. Размах осевой деформации материала на поверхности выточки

Fig. 3. The range of axial deformation of the material on the surface of the notch

## 2. Модель пластичности

Упругопластическое циклическое деформирование материала БрХ08-Ш может быть смоделировано с помощью следующего варианта математической модели [3], который является развитием модели пластичности В.С. Бондаря [2].

Тензор скоростей деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$  и пластической  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (1)$$

Упругие деформации описываются законом Гука

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} \left[ \dot{\sigma}_{ij} - \nu (3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}) \right], \quad (2)$$

где  $E, \nu$  – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений;  $\sigma_0 = \sigma_{ii} / 3$  – среднее напряжение;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ).

Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} (s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C^2 = 0, \quad (3)$$

здесь  $s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}$  – девиатор активных [1] напряжений;  $s_{ij}$  – девиатор напряжений;  $a_{ij}$  – девиатор смещения поверхности нагружения;  $C$  – размер поверхности нагружения.

Для размера поверхности нагружения принимается следующее эволюционное уравнение:

$$\dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad (4)$$

здесь  $\varepsilon_{u^*}^p$  – накопленная пластическая деформация;

$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \left( \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}}$  – скорость накопленной пластической деформации;  $q_\varepsilon$  – определяющая функция, которая выражается через материальные следующим образом:

$$q_\varepsilon = \begin{cases} \left[ \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u^*}^p} - K_C \left( \frac{C - C_p}{C_p} \right)^{n_C} \right] & \text{при циклическом} \\ & \text{нагружении,} \\ \left[ \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u^*}^p} + M_C \right] & \text{при монотонном} \\ & \text{нагружении;} \end{cases} \quad (5)$$

здесь  $C_p$  – функция циклического изотропного упрочнения,  $K_C, n_C, M_C$  – модули изотропного упрочнения при циклическом и монотонном нагружении.

Смещение поверхности нагружения описывается на основе модели Новожилова – Шабаша [1; 14; 15], под-

разумевающей, что полное смещение есть сумма  $M$  смещений, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение,

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^M a_{ij}^{(m)}. \quad (6)$$

В качестве эволюционного уравнения для микронапряжений первого типа [2] принимается следующее уравнение:

$$\dot{a}_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} g^{(1)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(1)} a_{ij}^{(1)} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad (7)$$

$$g^{(1)} = E_a, \quad (8)$$

$$\dot{E}_a = \begin{cases} -K_E \left( \frac{E_a}{E_{a0}} \right)^{n_E} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p & \text{при циклическом нагружении,} \\ M_E \left( \frac{E_{a0} - E_a}{E_{a0}} \right) \dot{\varepsilon}_{u^*}^p & \text{при монотонном нагружении,} \end{cases} \quad (9)$$

$$g_a^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{E_a} \frac{dE_a}{d\varepsilon_{u^*}^p} & \text{при циклическом нагружении,} \\ 0 & \text{при монотонном нагружении;} \end{cases} \quad (10)$$

здесь  $E_{a0}$  – модуль анизотропного упрочнения I типа,  $K_E, n_E, M_E$  – модули анизотропного упрочнения при циклическом и монотонном нагружении. В начале процесса деформирования  $E_a = E_{a0}$ .

Для микронапряжений второго типа принимается эволюционное уравнение Армстронга – Фредерика – Кадашевича [17]

$$\dot{a}_{ij}^{(2)} = \frac{2}{3} g^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(2)} a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad (11)$$

$$g^{(2)} = \beta^{(2)} \sigma_a^{(2)}, \quad g_a^{(2)} = -\beta^{(2)}, \quad (12)$$

здесь  $\beta^{(2)}, \sigma_a^{(2)}$  – модули анизотропного упрочнения II типа.

Эволюционные уравнения для микронапряжений третьего типа соответствуют простейшему аналогу уравнений Оно – Ванга [18]

$$\dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (13)$$

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)} \sigma_a^{(m)} \\ 0, \text{ если } a_u^{(m)} \geq \sigma_a^{(m)} \cap a_{ij}^{(m)} s_{ij}^* > 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$a_u^{(m)} = \left( \frac{3}{2} a_{ij}^{(m)} a_{ij}^{(m)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

здесь  $\beta^{(m)}, \sigma_a^{(m)}$  – модули анизотропного упрочнения III типа.

Пластические деформации определяются на основе ассоциированного с поверхностью нагружения (3) закона течения следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \lambda = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (15)$$

Уравнение накопления повреждений, базирующееся на работе микронапряжений II типа на поле пластических деформаций, имеет следующий вид:

$$\dot{\omega} = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{W_a}, \quad (16)$$

$$\alpha = \frac{\sigma_a^{(2)}}{\sqrt{\frac{3}{2} a_{ij}^{(2)} a_{ij}^{(2)}}}, \quad (17)$$

здесь  $\omega$  – мера повреждения. Критерием разрушения является достижение повреждением единицы,  $W_a$  – энергия разрушения при пропорциональном нагружении.

Для разделения процессов монотонного и циклического деформирования в пространстве тензора пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$  вводится поверхность памяти, ограничивающая область циклического деформирования. Поверхность определяется положением центра  $\xi_{ij}$  и размером  $C_\varepsilon$ .

Определение смещения и размера поверхности памяти происходит в момент смены направления пластического деформирования. В качестве критерия смены направления принимается следующее условие:

$$\dot{\varepsilon}_{ij(t-0)}^p \dot{\varepsilon}_{ij(t)}^p < 0, \quad (18)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{ij(t)}^p$  – тензор скоростей пластической деформации в текущий момент времени;  $\dot{\varepsilon}_{ij(t-0)}^p$  – тензор скоростей пластической деформации в предшествующий момент времени.

Для вычисления центра и размера поверхности вводятся два тензора пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^{p(1)}$  и  $\varepsilon_{ij}^{p(2)}$ , определяющие границы поверхности. В момент смены направления деформирования вторая граница поверхности памяти  $\varepsilon_{ij}^{p(2)}$  смещается на место первой, первая граница  $\varepsilon_{ij}^{p(1)}$  принимает значение текущей пластической деформации  $\varepsilon_{ij}^p$ , а изменение центра и размера поверхности нагружения описывается на основе следующих соотношений:

$$\xi_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}^{p(1)} + \varepsilon_{ij}^{p(2)}}{2}, \quad (19)$$

$$C_\varepsilon = \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{\varepsilon_{ij}^{p(1)} - \varepsilon_{ij}^{p(2)}}{2} \right) \left( \frac{\varepsilon_{ij}^{p(1)} - \varepsilon_{ij}^{p(2)}}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Условием циклического нагружения является деформирование в пределах поверхности памяти:

$$\left[ \frac{2}{3} (\varepsilon_{ij}^p - \xi_{ij}) (\varepsilon_{ij}^p - \xi_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon. \quad (21)$$

Вне поверхности памяти нагружение является монотонным.

### 3. Определение материальных параметров

Метод определения материальных параметров основан на представлении результатов базового эксперимента в виде набора зависимостей, аппроксимируемых уравнениями модели пластичности [38].

Параметры сплава БрХ08-III определены по результатам базового эксперимента, состоящего из шести этапов нагружения:

1-й этап – монотонное сжатие до  $\varepsilon^{(1)} = -0,01$  и монотонное растяжение до  $\varepsilon^{(1)} = 0,05$ ;

2-й этап – циклическое нагружение  $\varepsilon_{cp}^{(2)} = 0,05$  ;  $\Delta\varepsilon^{(2)} = 0,012$  ;  $N^{(2)} = 100$  ;

3-й этап – монотонное растяжение до  $\varepsilon^{(3)} = 0,1$  ;

4-й этап – циклическое нагружение  $\varepsilon_{cp}^{(4)} = 0,1$  ;  $\Delta\varepsilon^{(4)} = 0,012$  ;  $N^{(4)} = 100$  ;

5-й этап – монотонное растяжение до  $\varepsilon^{(5)} = 0,15$  ;

6-й этап – циклическое нагружение  $\varepsilon_{cp}^{(6)} = 0,15$  ;  $\Delta\varepsilon^{(6)} = 0,012$  до разрушения.

Энергия разрушения определена на основе кривой малоциклового усталости, связывающей размах пластической деформации при симметричном жестком нагружении с числом циклов до разрушения.

Геометрия и размеры испытанных образцов соответствуют требованиям стандарта ASTM E606. Диаметр рабочей части образца 8 мм, длина 24 мм, радиусы перехода от рабочей к захватной части 32 мм. Деформация в процессе испытания измерялась и контролировалась по навесному экстензометру с измерительной базой 10 мм. На рис. 4 приведена геометрия и размеры испытанных образцов.

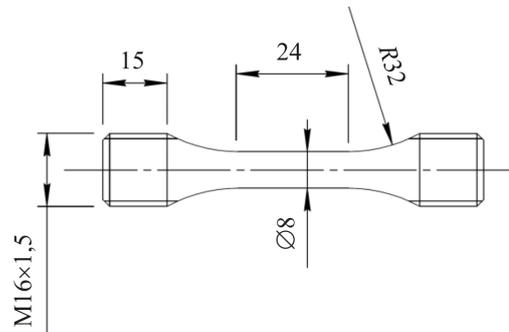


Рис. 4. Образец для испытаний на малоцикловую усталость по ASTM E606

Fig. 4. ASTM E606 Low Cycle Fatigue Test Specimen

Некоторые параметры материала и функция, определяющая размер поверхности нагружения, приведены в табл. 3 и 4.

Таблица 3/Table 3

Материальные параметры сплава БрХ08-Ш при нормальной температуре

Material parameters of BrKh08-Sh alloy at normal temperature

$E$ , МПа	$\nu$	$W_a$ , Дж/см <sup>3</sup>	$E_{a0}$ , МПа	$K_E$ , МПа	$n_E$	$M_E$ , МПа	$K_C$ , МПа	$n_C$	$M_C$ , МПа
131 000	0,3	280	500	3250	0,8	250 000	990	0,9	540

Таблица 3. Продолжение/Table 3. Continued

$\beta^{(2)}$	$\sigma_a^{(2)}$ , МПа	$\beta^{(3)}$	$\sigma_a^{(3)}$ , МПа	$\beta^{(4)}$	$\sigma_a^{(4)}$ , МПа	$\beta^{(5)}$	$\sigma_a^{(5)}$ , МПа	$\beta^{(6)}$	$\sigma_a^{(6)}$ , МПа	$\beta^{(7)}$	$\sigma_a^{(7)}$ , МПа
460	60	8880	14	3450	20	1640	22	1360	17	900	9

Таблица 4/Table 4

Размер поверхности нагружения сплава БрХ08-Ш  
The size of the loading surface of the alloy BrKh08-Sh

$\epsilon_{a*}^p$	0	0,0005	0,0015	0,003	0,01	0,5
$C_p$ , МПа	190	187	186	180	200	221

Таблица 4. Продолжение/Table 4. Continued

$\epsilon_{a*}^p$	1	2	2,5	3	3,5	4
$C_p$ , МПа	217	207	203	202	195	190

На рис. 5 и 6 приведены результаты базового эксперимента, включая диаграммы циклического деформирования, размах и среднее значение напряжений и расчетные зависимости, полученные с помощью определенных параметров. На рис. 7 приводятся расчетная и экспериментальная кривые малоциклового усталости.

#### 4. Математическое моделирование эксперимента

Математическое моделирование эксперимента по нагружению образца с кольцевой V-образной выточкой проведено в программном комплексе SIMULIA Abaqus. Модель пластичности, описывающая поведение материала, реализована в пользовательской подпрограмме UMAT. Для этого проведена линеаризация уравнений модели, по результатам которой получены соотношения, связывающие приращения параметров процесса нагружения с приращениями деформаций, а также матрица Якоби, определяющая изменение каждой из компонент приращения напряжения, вызванное бесконечно малым изменением каждой компоненты тензора приращения деформации.

Моделирование эксперимента проводится в осесимметричной постановке. Конечно-элементная модель образца представляет собой четверть продольного сечения образца с заданными граничными условиями

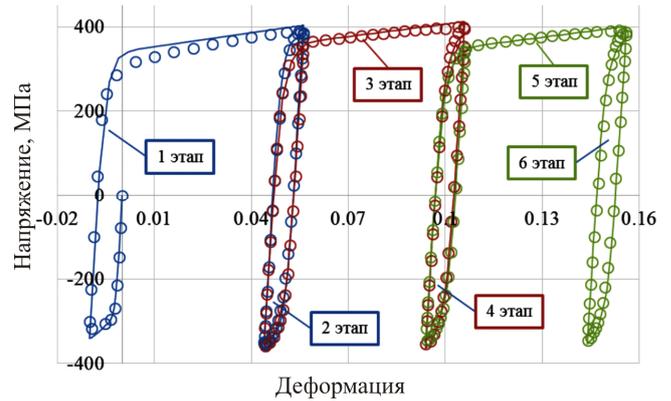


Рис. 5. Диаграммы циклического деформирования

Fig. 5. Diagrams of cyclic deformation

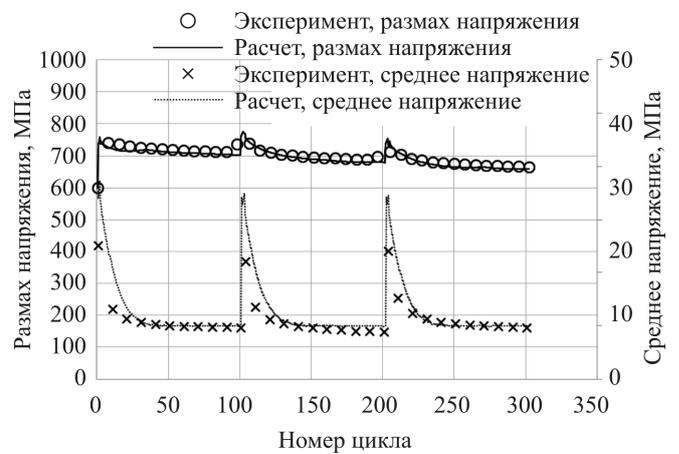


Рис. 6. Зависимости размаха и среднего значения напряжения от номера цикла

Fig. 6. Dependences of the amplitude and average value of the voltage on the cycle number

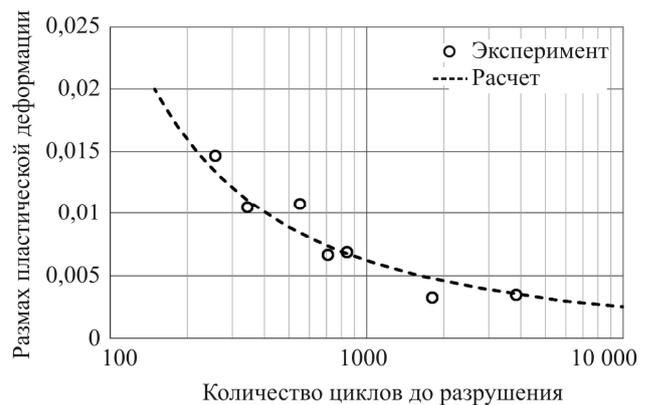


Рис. 7. Кривая малоциклового усталости

Fig. 7. Low-cycle fatigue curve

осевой и продольной симметрии. Размер элемента в области кольцевой выточки 0,01 мм. Нагрузка приложена к опорной точке, перемещение вдоль оси образца которой связано с перемещением торца образца. Расчетная схема дана на рис. 8.



Рис. 8. Расчетная схема

Fig. 8. The scheme of calculation

На рис. 9 приведены расчетные картограммы максимальных по абсолютному значению главных напряжений в материале образца для 200-го цикла нагружения. Стрелочками показаны их направления.

Из приведенных на рис. 9 картограмм видно наличие сжимающих напряжений при разгрузке образца, значения которых близки к значениям растягивающих напряжений в момент приложения максимальной нагрузки. Этот факт подтверждает наличие упругопластического гистерезиса в материале образца, который приводит к разрушению вследствие малоциклового усталости.

Расчетное число циклов до разрушения составило 585 (при проведении эксперимента разрушение материала происходило при 500–600 циклах). На рис. 10 показаны картограммы накопленной пластической деформации и повреждений в момент разрушения.

Для верификации результатов расчета проведено сравнение зависимости размаха деформации от номера цикла нагружения с экспериментальными значениями. Получено удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных. Полученные зависимости размаха деформации приведены на рис. 11, а также показан расчетный момент разрушения материала (число циклов до разрушения – 585). Видно, что при проведении эксперимента в этот момент происходит заметное увеличение размаха деформации материала на поверхности выточки (экспериментальное число циклов до разрушения лежит в диапазоне от 500 до 600). Этот факт свидетельствует о возможности прогнозирования малоциклового усталости деталей и элементов конструкций с помощью рассматриваемого варианта теории пластичности и метода конечных элементов.

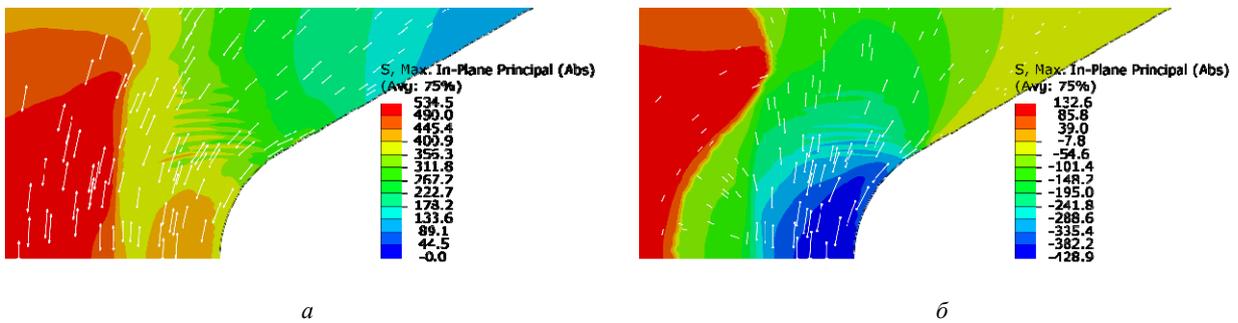


Рис. 9. Напряженное состояние материала в выточке при максимальной нагрузке (a) и при разгрузке (b)

Fig. 9. The stress state of the material in the notch at maximum load (a) and unloading (b)

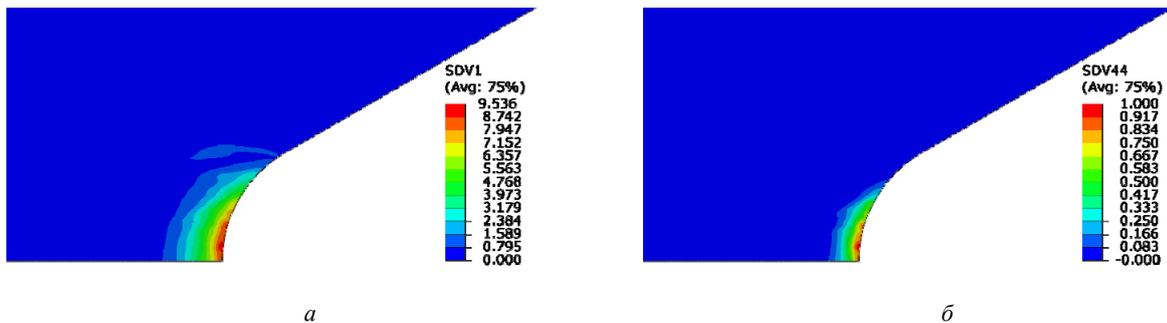


Рис. 10. Распределение накопленной пластической деформации (a) и повреждений (b) в материале в области выточки

Fig. 10. Distribution of accumulated plastic strain (a) and damage (b) in material in the notch region

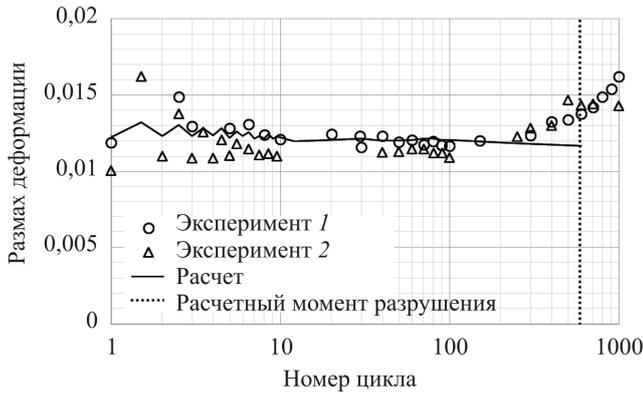


Рис. 11. Сравнение расчетного и экспериментального размахов осевой деформации на поверхности выточки

Fig. 11. Comparison of the calculated and experimental ranges of axial deformation on the surface of the undercut

## Заключение

Проанализированы результаты экспериментальных и расчетных исследований кинетики напряженно-де-

формированного состояния материала в области концентрации напряжений при циклическом нагружении образцов с кольцевой выточкой из сплава БрХ08-Ш. С помощью системы оценки деформации, основанной на методе корреляции цифровых изображений, проведено измерение деформированного состояния материала. Моделирование экспериментов проводится методом конечных элементов с применением модели пластичности материала. Параметры материала, замыкающие теорию пластичности, определены по результатам базового эксперимента по несимметричному жесткому циклическому деформированию гладкого образца.

Показано, что применение модели пластичности при расчетах кинетики напряженно-деформированного состояния деталей, имеющих концентраторы напряжений, при воздействии циклических нагрузок дает удовлетворительный результат расчета, а энергетический критерий, основанный на работе микронапряжений второго типа на поле пластических деформаций, позволяет проводить достоверно оценку малоциклового усталости материала.

## Библиографический список

- Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 224 с.
- Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.
- Abashev D.R., Bondar V.S. Modified Theory of Plasticity for Monotonic and Cyclic Deformation Processes // *Mechanics of Solids*. – 2021. – Vol. 56, no. 1. – P. 4–12. DOI: 10.3103/S0025654421010027
- Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Y. Theories of Plasticity under Complex Loading along Flat Trajectories of Deformations // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2021. – № 3. – С. 35–46. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.04
- Bondar V.S., Abashev D.R. Construction of the Theory of Plasticity Irrelative of the Loading Surface and Associated Flow Law // *Strength of Materials*. – 2021. – Vol. 53, no. 4. – P. 550–558. DOI: 10.1007/S11223-021-00316-9
- Abashev D., Bondar V. Refinement of plasticity theory for modeling monotonic and cyclic loading processes // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. – 2020. – Vol. 15, no. 2. – P. 225–239, DOI: dx.doi.org/10.2140/jomms.2020.15.225.
- Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
- Оценка ресурсных характеристик поликристаллических конструкционных сплавов при циклическом термомеханическом нагружении / И.А. Волков, Л.А. Игумнов, Д.Н. Шишулин, А.А. Белов // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2021. – Т. 83, № 4. – С. 481–504. DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-4-481-504
- A continual model of a damaged medium used for analyzing fatigue life of polycrystalline structural alloys under thermal-mechanical loading / I.A. Volkov, L.A. Igumnov, F. dell'Isola, S.Yu. Litvinchuk, V.A. Eremeyev // *Continuum Mech. Thermodyn*. – 2020. – Vol 32. – P. 229–245. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00795-x>
- Капустин С.А., Чурилов Ю.А., Горохов В.А. Моделирование нелинейного деформирования и разрушения конструкций в условиях многофакторных воздействий на основе МКЭ. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. – 347 с.
- Темис Ю.М., Худякова А.Д. Модель неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении // *Математическое моделирование и численные методы*. – 2017. – № 3, № 3. – С. 22–41, DOI: <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-3-2035>
- Прикладная теория пластичности / Ф.М. Митенков [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 284 с.
- Нелинейная механика материалов / Ж. Бессон [и др.]. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397 с.
- Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // *Int. J. of Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.03.009>.
- Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // *Int. J. Plast.* – 2012. – Vol. 35. – P. 44–66.
- Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratcheting // *Int. J. of Plasticity*. – 2009. – Vol. 25. – P. 1560–1587. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.10.004.
- Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect // *CEGB Report*. – 1966. – No. RD/B/N/ 731.
- Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior // *International Journal of Plasticity*. – 1993. – Vol. 9. – P. 375–390.
- Kacem Sai, Cailletaud G. Multi-mechanism models for the description of ratcheting: effect of the scale transition rule and the coupling between hardening variables // *International Journal of Plasticity*, Elsevier. – 2007. – 23. – P. 1589–1617. DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.01.011
- Veronique Aubin, Quaegebeur P., Degallaix S. Load History in Fatigue: Effect of Strain Amplitude and Loading Path //

Journal of ASTM International. – 2004. – Vol. 1, № 10. DOI: 10.1520/JAI19066

21. Zhu Y., Kang G., Yu C. A finite cyclic elastoplastic constitutive model to improve the description of cyclic stress-strain hysteresis loops // *Int. J. Plast.* – 2017. – Vol. 95. – P. 191–215, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.04.009>.

22. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models // *Int. J. Plasticity.* – 2008. – Vol. 24. – P. 1863–1889. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.04.008.

23. Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control // *Int. J. Plasticity.* – 2013. – Vol. 43. – P. 1–19. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.10.009.

24. Taleb L., Cailletaud G., Saï K. Experimental and numerical analysis about the cyclic behavior of the 304L and 316L stainless steels at 350 °C // *Int. J. Plasticity.* – 2014. – Vol. 61. – P. 32–48. DOI: 10.1016/j.ijplas.2014.05.006.

25. On the applicability of multi-surface, two-surface and non-linear kinematic hardening models in multiaxial fatigue / M.A. Meggiolaro [et al.] // *Frattura ed Integrità Strutturale.* – 2015. – Vol. 33. – P. 357–367; DOI: 10.3221/IGF-ESIS.33.39

26. Influence of mean stress and stress amplitude on uniaxial and biaxial ratcheting of ST52 steel and its prediction by the AbdelKarim–Ohno model / R. Halama [et al.] // *International Journal of Fatigue.* – 2016. – Vol. 91–2. – P. 313–321. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.04.033>

27. Mróz Z., Maciejewski J. Constitutive modeling of cyclic deformation of metals // *Acta Mechanica.* – 2018. – Vol. 229. – P. 475–496. DOI: 10.1007/s00707-017-1982-5.

28. Dao-Hang Li, De-Guang Shang. Thermo-mechanical fatigue damage behavior for Ni-based superalloy under multiaxial loading // *MATEC Web of Conferences.* – 2018. – P. 165. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201816519002>.

29. Multi-Axial Fatigue-Life Prediction via a Strain-Energy Method / Onome Scott-Emuakpor, Tommy George, Charles Cross and M.-H. Herman Shen // *AIAA JOURNAL.* – 2010. – Vol. 48, No. 1. DOI: 10.2514/1.39296

30. Simulation of the Fatigue Behaviour of a Power Plant Steel with a Damage Variable / Jiawa Lu, Wei Sun, Adib Becker, Abdullah Aziz Saad // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2015. – Vol. 100. – P. 145–157. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.imeresci.2015.06.019>

31. A computational approach for the lifetime prediction of cardiovascular balloon-expandable stents. *International Journal of Fatigue* / Ferdinando Auricchio, Andrei Constantinescu, Michele Conti, Giulia Scalet // Elsevier. – 2015. – Vol. 75. – P. 69–79. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2015.02.002.

32. Benhaddou M., Abbadi M., Ghammouri M. Low Cycle Fatigue Study of AISI 316L Cardiovascular Stent for Two Different Designs // *Journal of Biomimetics, Biomaterials and Biomedical Engineering, Trans Tech Publications.* – 2018. – Vol. 37. – P. 55–73. DOI: 10.4028/www.scientific.net/JBBBE.37.55.

33. Creep-fatigue endurance of a superheater tube plate under nonisothermal loading and multidwell condition / Nak-Kyun Cho, Run-Zi Wang, Zhiyuan Ma, Haofeng Chen, Fu-Zhen Xuan // *International Journal of Mechanical Sciences, Elsevier.* – 2019. – Vol. 161–162. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105048>.

34. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. – М.: Машиностроение, 1981. – 272 с.

35. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагрузениях. – М.: Изд-во Моск. УН-та, 1965. – 263 с.

36. Гусенков А.П. Прочность при изотермическом и неизотермическом малоцикловом нагружении. – М.: Наука, 1979. – 296 с.

37. Измерение деформации тонкого паянного шва с помощью средств обработки изображений пакета LabView и бесконтактной измерительной системы Vic-2D / Д.Р. Абашев, В.Э. Апетьян, В.М. Астрединов, С.А. Владимиров, С.И. Трефилов // *Космонавтика и ракетостроение.* 2013. – № 72. – С. 101–106.

38. Абашев Д.Р. Метод определения материальных функций модели пластичности // *Космонавтика и ракетостроение.* 2020. – № 117. – С. 66–79.

## References

1. Kadashevich Ju.I., Novozhilov V.V. Mikronapryazheniya v konstrukcionnykh materialah [Backstresses in structural materials], L. Mashinostroenie, 1990. 224 p.

2. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory, New York: Begell House, 2013, 194 p.

3. D.R. Abashev, and V.S. Bondar. Modified Theory of Plasticity for Monotonic and Cyclic Deformation Processes, *Mechanics of Solids.* Vol. 56 (2021) – No. 1, pp. 4–12. DOI: 10.3103/S0025654421010027

4. Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Y. Theories of Plasticity under Complex Loading along Flat Trajectories of Deformations // *PNRPU Mechanics Bulletin.* 2021. № 3. С. 35–46. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.04

5. V.S. Bondar and D.R. Abashev. Construction of the Theory of Plasticity Irrelative of the Loading Surface and Associated Flow Law, *Strength of Materials.* Vol. 53 (2021). – No. 4, pp. 550–558. DOI: 10.1007/S11223-021-00316-9

6. Abashev D., Bondar V., Refinement of plasticity theory for modeling monotonic and cyclic loading processes, *Journal of Mechanics of Materials and Structures,* 2020, v. 15, No. 2, pp. 225–239, DOI: <dx.doi.org/10.2140/jomms.2020.15.225>.

7. Volkov I.A., Korotkih Ju.G. Uravneniya sostojanija vjaskouprugoplasticheskikh sred s povrezhdenijami [Equations of

state for viscoelastic-plastic media with damage]. Moscow, FIZMATLIT, 2008, 424 p.

8. Volkov I.A., Igumnov L.A., Shishulin D.N., Belov A.A. Otsenka resursnykh kharakteristik polikristallicheskich konstrukcionnykh splavov pri tsiklicheskom termomekhanicheskom nagruzhenii [Estimation of resource characteristics of polycrystalline structural alloys under cyclic thermomechanical loading], *Problemy prochnosti i plastichnosti.* 2021, Vol. 83, № 4, P. 481–504. DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-4-481-504

9. Volkov I.A., Igumnov L.A., dell’Isola F., Litvinchuk S. Yu. and Eremeyev V.A. A continual model of a damaged medium used for analyzing fatigue life of polycrystalline structural alloys under thermal-mechanical loading, *Continuum Mech. Thermodyn.* Vol 32 (2020), pp. 229–245. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00795-x>

10. Kapustin S.A., Churilov Yu.A., Gorokhov V.A. Modelirovanie nelineynogo deformirovaniya i razrusheniya konstruksiy v usloviyakh mnogofaktornykh vozdeystvii na osnove MKE [Modeling of nonlinear deformation and destruction of structures under conditions of multifactorial impacts based on FEM], N. Novgorod: Izd-vo NNGU, 2015. 347 p.

11. Temis Ju.M., Hudyakova A.D. Model' neizotermicheskogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya konstrukcionnykh materialov pri slozhnom nagruzhenii [Model of Non-Isothermal Elastic-Plastic

Deformation of Structural Materials under Complex Loading], *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*, 2017. № 3. № 3. pp. 22–41, DOI: <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-3-2035>.

12. *Prikladnaya teoriya plastichnosti [Applied theory of plasticity]*/ Mitenkov F.M. [i dr.], M.: FIZMATLIT, 2015, 284 p.

13. *Nelinejnaya mekhanika materialov [Nonlinear mechanics of materials]* / Besson Zh. [i dr.], Sankt-Peterburg: Izd-vo Politekh. un-ta, 2010, 397 s.

14. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories, *Int. J. of Plasticity.*, 2008, Vol. 24., P. 1642–1692, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.03.009>.

15. J.-L. Chaboche, P. Kanouté, and F. Azzouz Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions, *Int. J. Plast.* 35 (2012), 44–66.

16. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratcheting, *Int. J. of Plasticity.*, 2009. – Vol. 25, P. 1560–1587, DOI: [10.1016/j.ijplas.2008.10.004](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.10.004).

17. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, CEBG Report No. RD/B/N/ 731., 1966.

18. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior, *International Journal of Plasticity.*, 1993. – Vol. 9. – P. 375–390.

19. Kacem Sai, Georges Cailletaud Multi-mechanism models for the description of ratcheting: effect of the scale transition rule and the coupling between hardening variables. *International Journal of Plasticity*, Elsevier, 2007, 23, pp.1589–1617. DOI: [10.1016/j.ijplas.2007.01.011](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.01.011)

20. Veronique Aubin, Philippe Quaegebeur and Suzanne Degallaix Load History in Fatigue: Effect of Strain Amplitude and Loading Path, *Journal of ASTM International*, Vol. 1, No. 10 (2004). DOI: [10.1520/JAI19066](https://doi.org/10.1520/JAI19066)

21. Y. Zhu, G. Kang, and C. Yu A finite cyclic elastoplastic constitutive model to improve the description of cyclic stress-strain hysteresis loops, *Int. J. Plast.* 95 (2017), 191–215, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.04.009>.

22. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models, *Int. J. Plasticity*, 2008. – Vol. 24 – pp.1863–1889, DOI: [10.1016/j.ijplas.2008.04.008](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.04.008).

23. Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control, *Int. J. Plasticity*, 2013. – Vol. 43. – pp. 1–19, DOI: [10.1016/j.ijplas.2012.10.009](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.10.009).

24. Taleb L., Cailletaud G., Saï K. Experimental and numerical analysis about the cyclic behavior of the 304L and 316L stainless steels at 350 °C, *Int. J. Plasticity*, 2014. – Vol. 61. – pp. 32–48, DOI: [10.1016/j.ijplas.2014.05.006](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.05.006).

25. M.A. Meggiolaro et alii, On the applicability of multi-surface, two-surface and non-linear kinematic hardening models in multiaxial fatigue, *Frattura ed Integrità Strutturale*, Vol. 33 (2015) pp. 357–367; DOI: [10.3221/IGF-ESIS.33.39](https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.33.39)

26. Halama R et al. Influence of mean stress and stress amplitude on uniaxial and biaxial ratcheting of ST52 steel and its prediction by the AbdelKarim–Ohno model., *International Journal*

of Fatigue, Vol. 91–2 (2016) pp.313–321, DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.04.033>

27. Z. Mróz and J. Maciejewski Constitutive modeling of cyclic deformation of metals, *Acta Mechanica*, Vol. 229 (2018) pp. 475–496. DOI: [10.1007/s00707-017-1982-5](https://doi.org/10.1007/s00707-017-1982-5).

28. Dao-Hang Li, De-Guang Shang. Thermo-mechanical fatigue damage behavior for Ni-based superalloy under multiaxial loading, 2018, MATEC Web of Conferences 165. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201816519002>.

29. Onome Scott-Emuakpor, Tommy George, Charles Cross and M.-H. Herman Shen. Multi-Axial Fatigue-Life Prediction via a Strain-Energy Method, *AIAA JOURNAL*, 2010, Vol. 48, No. 1. DOI: [10.2514/1.39296](https://doi.org/10.2514/1.39296)

30. Jiawa Lu, Wei Sun, Adib Becker, Abdullah Aziz Saad Simulation of the Fatigue Behaviour of a Power Plant Steel with a Damage Variable, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 100 (2015), pp. 145–157. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmesci.2015.06.019>

31. Ferdinando Auricchio, Andrei Constantinescu, Michele Conti, Giulia Scalet. A computational approach for the lifetime prediction of cardiovascular balloon-expandable stents. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, 2015, 75, pp.69–79. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2015.02.002](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2015.02.002).

32. M. Benhaddou, M. Abbadi, M. Ghammouri. Low Cycle Fatigue Study of AISI 316L Cardiovascular Stent for Two Different Designs. *Journal of Biomimetics, Biomaterials and Biomedical Engineering*, Trans Tech Publications, 2018, Vol. 37, pp 55–73. doi: [10.4028/www.scientific.net/JBBBE.37.55](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/JBBBE.37.55).

33. Nak-Kyun Cho, Run-Zi Wang, Zhiyuan Ma, Haofeng Chen, Fu-Zhen Xuan. Creep-fatigue endurance of a superheater tube plate under nonisothermal loading and multidwell condition, *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, 2019, vol 161–162, <https://doi.org/10.1016/j.ijmesci.2019.105048>.

34. Makhutov N.A. Deformatsionnye kriterii razrusheniya i raschet elementov konstruksiy na prochnost' [Deformation Criteria of Fracture and Calculation of Structural Elements for Strength], M.: Mashinostroenie, 1981, 272 p.

35. Moskvitin V.V. Plastichnost' pri peremennykh nagruzheniyakh. [Plasticity under variable loading] – M.: Izd-vo Mosk. Un-ta, 1965, 263 s.

36. Gusenkov A.P. Prochnost' pri izotermicheskom i neizotermicheskom malotsiklovom nagruzhenii [Durability under isothermal and non-isothermal low-cycle loading], M.: Nauka, 1979, 296 p.

37. Abashev D.R., Apet'yan V.E., Astredinov V.M., Vladimirov S.A., Trefilov S.I. Izmerenie deformatsii tonkogo payanogo shva s pomoshch'yu sredstv obrabotki izobrazheniy paketa LabView i beskontaktnoy izmeritel'noy sistemy Vic-2D [Deformation measurement of a thin brazed seam using the LabView image processing tools and the Vich-2D non-contact measuring system]// *Kosmonavtika i raketostroenie*. 2013, № 72, P. 101–106.

38. Abashev D.R. Metod opredeleniya material'nykh funktsiy modeli plastichnosti [Method for identification the material functions of the plasticity model], *Kosmonavtika i raketostroenie*. 2020, № 117, P. 66–79.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Financing.** The study was not sponsored.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.