



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.07

УДК 539.3

## ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НА РЕЗУЛЬТИРУЮЩИЕ ПЬЕЗОМОДУЛИ КОМПОЗИТА

А.А. Паньков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 01 декабря 2021 г.  
Одобрена: 30 сентября 2022 г.  
Принята к публикации:  
01 ноября 2022 г.

#### Ключевые слова:

композит, эффективные свойства, пьезоэффект, переориентация волокон, численное моделирование.

### АННОТАЦИЯ

Разработана математическая модель и на ее основе найдены аналитические решения для результирующих «редуцированных» электроупругих характеристик, в частности: деформационных (сдвиговых) пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала (композита) с учетом поправок, обусловленных наличием механических осевых напряжений и электродеформационной переориентации оси симметрии свойств материала при действии электрического поля. В начальной конфигурации осевые растягивающие и / или сжимающие напряжения не приводят к появлению сдвиговых деформаций материала, сдвиги инициируются приложением электрического поля и «усиливаются» осевыми напряжениями начальной конфигурации. Выявлен эффект увеличения результирующих значений деформационных пьезомодулей материала от действия осевых напряжений. Величины приложенных осевых напряжений не превышают значений потери устойчивости материала (элементов структуры и в целом композита), что обуславливает сохранение эффекта увеличения пьезомодулей также при действии переменного электрического поля. Результаты численного моделирования получены для трансверсально-изотропного полимерного композита «силикон/PZT-4» с однонаправленными пьезоэлектрическими волокнами с круглым поперечным сечением как частного (предельного) случая структуры с ориентированными эллипсоидальными включениями с использованием известного «обобщенного сингулярного приближения» на основе метода функций Грина статистической механики композитов для вычисления тензоров эффективных свойств композита в текущей конфигурации. Поправки деформационной анизотропии вычисляются через текущие координаты направляющего вектора для оси симметрии свойств – направления ориентации волокон композита. Установлено, что наиболее значительно эффект увеличения сдвиговых пьезомодулей проявляется для однонаправленного волокнистого композита с низко модульной полимерной матрицей «силикон/PZT-4» при малых значениях объемной доли жестких пьезоэлектрических волокон от действия сжимающего продольного осевого напряжения.

© ПНИПУ

© Паньков Андрей Анатольевич – д.ф.-м.н., проф., e-mail: [a\\_a\\_pankov@mail.ru](mailto:a_a_pankov@mail.ru),  ID: 0000-0001-8477-5206

Andrey A. Pan'kov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: [a\\_a\\_pankov@mail.ru](mailto:a_a_pankov@mail.ru),  ID: 0000-0001-8477-5206



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## EFFECT OF MECHANICAL LOAD ON RESULTANT COMPOSITE PIEZOMODULES

A.A. Pan'kov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 01 December 2021  
 Approved: 30 September 2022  
 Accepted for publication:  
 01 November 2022

*Keywords:*

composite, effective properties,  
 piezoeffect, fiber reorientation,  
 numerical modeling.

## ABSTRACT

A mathematical model has been developed and, on its basis, analytical solutions have been found for the resulting "reduced" electroelastic characteristics, in particular, for deformation (shear) piezomodules and dielectric permeabilities of a transversal-isotropic piezoelectric material (composite), taking into account corrections due to the presence of mechanical axial stresses and electrodeformational reorientation of the axis of symmetry of the material properties under the action of an electric field. In the initial configuration, axial tensile and/or compressive stresses do not result in shear strains of the material, the shifts are initiated by the application of an electric field and are "amplified" by axial stresses of the initial configuration. The effect of increasing the resulting values of deformation piezomodules of the material from the action of axial stresses was revealed. The values of the applied axial stresses do not exceed the values of the loss of stability of the material (elements of the structure and, in general, the composite), which causes the preservation of the effect of increasing piezomodules also under the action of an alternating electric field. The results of numerical modeling are obtained for the transversal-isotropic polymer composite "silicone/PZT-4" with unidirectional piezoelectric fibers with a circular cross section as a partial (limit) case of the structure with oriented ellipsoidal inclusions using the known "generalized singular approximation" based on the method of Green functions of statistical mechanics of composites for calculating tensors of effective properties composite in the current configuration. Deformation anisotropy corrections are calculated through the current coordinates of the guide vector for the symmetry axis of the properties - the orientation direction of the fibers of the composite. It has been found that the most significant effect of increasing shear piezomodules is manifested for a unidirectional fibrous composite with a low-modulus polymer matrix "silicone/PZT-4" at small values of the volume fraction of rigid piezoelectric fibers from the action of compressive longitudinal axial stress.

© PNRPU

**Введение**

Нелинейные эффекты деформирования полимерных композиционных материалов обуславливаются различными факторами, в том числе наличием начального напряженного состояния [1–3] на различных структурных уровнях и / или взаимодействием различных типов нагрузок при комбинированном нагружении [4; 5] материала. Так, в [5] выявлено влияние дополнительных крутильных вибраций различной частоты на диаграммы одноосного квазистатического растяжения углепластиковых трубчатых образцов. Изучение закономерностей и эффектов влияния начального, в том числе остаточного, напряженного состояния элементов структуры композиционного материала на особенности его последующего деформирования с редуцированием эффективных свойств актуально для различных приложений механики композитов [6–13], в частности, ультразвукового неразрушающего контроля напряженного состояния нагруженных конструкций [12], методов геомеханики и сейсмических исследований [13]. Математическое моделирование и решение таких задач основывается на линеаризованных моделях, которые используют описание напряженно-деформированного состояния посредством, в частности, тензоров механических напряжений в начальной и текущей конфигурациях [3; 8; 9; 14; 15–28]. Линеаризованная модель использована в [21], где изучены теоретические аспекты идентификации неоднородного начального напряженного состояния упругих тел по собственным час-

тотным спектрам как решений обратных задач механики стержней и тонких пластин. Дисперсионный анализ распространения упругих волн в композиционных материалах и элементах конструкций с учетом наличия начального напряженного состояния осуществлен в работах [22–28], в частности, исследованы скорости распространения поверхностных волн в однородном слое на предельно напряженном неоднородном полупространстве [22], влияние величины начального бокового давления на поверхности полого составного цилиндра на скорость распространения осесимметричной волны [23], влияние величины начального напряженного состояния ортотропной композитной пластины с двумя близко расположенными параллельными цилиндрическими (туннельными) полостями с прямоугольным поперечным сечением на свободные и вынужденные колебания [24]. Для упругих композитов с идеально периодическими начально-напряженными структурами известны асимптотические решения в [25–28], в частности, когда начальное напряженное состояние слоистой и однонаправленно-волоконистой структур композитов обусловлено их тепловым нагревом [25]. Изучение эффектов влияния начального напряженного состояния на свойства и поведение материала актуально также для пьезоэлектрических [29–34] и / или магнитострикционных [35] материалов [36–38], которые интегрируются в современные «интеллектуальные» конструкции в качестве информационных элементов, датчиков и / или актюаторов систем управления акустическими и / или аэродинамическими

характеристиками поверхностей, геометрической формой, напряженным состоянием, демпфированием вибраций конструкции [33; 39]. Численный анализ динамического поведения пьезоэлектрических структур с учетом начального электромеханического напряженного состояния элементов структуры дан в статье [31]. Эффект увеличения пьезоэлектрических модулей предварительно напряженных пластинчатых пьезоэлектрических элементов исследован в [32–34]. Повышение пьезочувствительности биморфа в составе конструкции, когда биморф закрепляют на обшивке аэродинамического профиля лопасти осуществляется в работе [33] посредством начального сжатия гибкой подложки. Линеаризованный подход обобщен на электроупругий материал в [29; 30], где дано описание линеаризованной модели, учитывающей в явном виде начальные механические напряжения, деформации и напряженность электрического поля. Обобщение на магнитоэлектроупругий материал дано в работе [35], где изучены дисперсионные соотношения для упругих волн в слоистом композите – фононном кристалле, образованном периодическим повторением предварительно напряженных пьезоэлектрических и магнитострикционных слоев.

Цель настоящей работы состоит в нахождении аналитических решений для результирующих «редуцированных» значений электроупругих характеристик трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала (композита) с учетом поправок, обусловленных наличием механических осевых напряжений и электродеформационной переориентации оси симметрии свойств материала при действии электрического поля. В начальной конфигурации осевые растягивающими и/или сжимающими напряжениями не приводят к появлению сдвиговых деформаций материала, сдвиги инициируются приложением электрического поля и «усиливаются» осевыми напряжениями начальной конфигурации. Величины приложенных осевых напряжений не превышают значений потери устойчивости материала (элементов структуры и в целом композита), что обуславливает возвращение оси симметрии из текущей «повернутой» ориентации в первоначальную при снятии (выключении) электрического поля и сохранение эффекта усиления результирующих деформационных пьезомодулей материала также при действии переменного электрического поля. При численном моделировании электромеханического нагружения полимерного композита «силикон/PZT-4» с эллипсоидальными включениями (волокнами) поправки деформационной анизотропии вычисляются через текущие координаты направляющего вектора для оси симметрии материала, что трактуется как изменение общей ориентации (или преобладающей ориентации для случая стохастического взаимного разориентирования продольных осей) однотипных эллипсоидальных включений, в частности волокон с круглым поперечным сечением. Используются известные численно-аналитические решения обобщенного сингулярного приближения, основанные на методе функций Грина статистической механики композитов,

для вычисления тензоров эффективных свойств материала в текущей конфигурации.

## 1. Математическая модель деформационного редуцирования электроупругих свойств материала

Рассмотрим математическую модель электроупругого поведения трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала (композита) с учетом поправок для материальных характеристик от наведенной электрическим полем «деформационной анизотропии» – изменения ориентации оси симметрии свойств материала, когда  $r_1 r_2$  – плоскость изотропии,  $r_3$  – ось симметрии для начальной конфигурации. Считаем, что механическое нагружение  $\sigma^0$  материала осуществляется осевыми напряжениями  $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0$  вдоль главных осей  $r_{1,2,3}$  (остальные компоненты  $\sigma_{ij}^0 = 0$ ), при которых сдвиговые деформации  $\gamma_{23}^0 = \gamma_{13}^0 = \gamma_{12}^0 = 0$  для начальной конфигурации материала. Сдвиговые деформации  $\gamma_{13}, \gamma_{23}$  возникают лишь под действием напряженности  $\hat{E}$  электрического поля  $\gamma_{13} = 2d_{n13}\hat{E}_n, \gamma_{23} = 2d_{n23}\hat{E}_n$ , что обуславливает переориентацию оси симметрии свойств материала по направляющему вектору

$$\mathbf{l} = \{\gamma_{13}, \gamma_{23}, 1\} \quad (1)$$

с координатами  $l_i$  в осях координат  $r_{1,2,3}$  с учетом малости углов сдвига  $\gamma$  и, как следствие, приближенных равенств  $\cos \gamma \approx 1, \sin \gamma \approx \gamma$ , где  $d_{n13}, d_{n23}$  – деформационные (сдвиговые) пьезомодули материала [36] в начальной конфигурации.

Определяющие соотношения [36] для электроупругого материала запишем в виде

$$\varepsilon'_{ij} = S'_{ijmn}\sigma_{mn}^0 + d'_{nij}\hat{E}_n, \quad \hat{D}'_i = d'_{imn}\sigma_{mn}^0 + \lambda_{in}^{(\sigma)}\hat{E}_n, \quad (2)$$

где «редуцированные» компоненты  $\varepsilon'_{ij}, \hat{D}'_i$  тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  и вектора индукции  $\hat{\mathbf{D}}'$  выражены через компоненты  $\sigma_{mn}^0, \hat{E}_n$  тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^0$  и вектора напряженности  $\hat{E}$  электрического поля. Редуцированные компоненты тензоров эффективных упругих податливостей  $S'_{ijmn}(\boldsymbol{\gamma})$ , деформационных пьезомодулей  $d'_{imn}(\boldsymbol{\gamma})$  и диэлектрических проницаемостей  $\lambda_{in}^{(\sigma)}(\boldsymbol{\gamma})$  материала (2) в начальной системе координат  $r_{1,2,3}$  являются функциями текущих сдвиговых деформаций  $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{13}, \gamma_{23}\}$ , что обусловлено зависимостью от  $\boldsymbol{\gamma}$  значений координат  $l_i$  направляющего вектора  $\mathbf{l}$  (1)

для оси симметрии свойств материала. Компоненты тензоров  $S'_{ijmn}$ ,  $d'_{imn}$  и  $\lambda'_{in}^{(\sigma)}$  (2) в начальной системе координат  $r_{1,2,3}$  представим разложениями по тензорным базисам [42]

$$S'_{ijmn} = s_{12}\delta_{ij}\delta_{mn} + s_{66}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + (s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - 4s_{44})l_i l_j l_m l_n + (s_{13} - s_{12})(l_i l_j \delta_{mn} + \delta_{ij} l_m l_n) + (s_{44} - s_{66})(\delta_{jn} l_i l_m + \delta_{im} l_j l_n + \delta_{jm} l_i l_n + \delta_{in} l_j l_m), \quad (3)$$

$$d'_{imn} = d_{31} l_i \delta_{mn} + (d_{33} - d_{31} - 2d_{15}) l_i l_m l_n + d_{15} (l_m \delta_{in} + l_n \delta_{im}),$$

$$\lambda'_{in}^{(\sigma)} = \lambda_1^{(\sigma)} \delta_{in} + (\lambda_3^{(\sigma)} - \lambda_1^{(\sigma)}) l_i l_n,$$

где  $\delta$  – символ Кронекера, матричные обозначения  $s_{11} = S_{1111}$ ,  $s_{33} = S_{3333}$ , ...,  $d_{31} = d_{311}$ ,  $d_{33} = d_{333}$ ,  $d_{15} = d_{113}$ ,  $\lambda_1^{(\sigma)} = \lambda_{11}^{(\sigma)}$ ,  $\lambda_3^{(\sigma)} = \lambda_{33}^{(\sigma)}$  для компонентов тензоров  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\lambda^{(\sigma)}$  в осях  $r_{1,2,3}$ .

Таким образом, редуцирование значений компонентов тензоров эффективных упругих податливостей  $S'_{ijmn}$ , деформационных пьезомодулей  $d'_{imn}$  и диэлектрических проницаемостей  $\lambda'_{in}^{(\sigma)}$  материала в начальной системе координат  $r_{1,2,3}$  происходит по линейным зависимостям

$$S'_{ijmn} = S_{ijmn} + \kappa_{pijmn} \hat{E}_p, \quad d'_{imn} = d_{imn} + \chi_{ipmn} \hat{E}_p,$$

$$\lambda'_{ik}^{(\sigma)} = \lambda_{ik}^{(\sigma)} + \varsigma_{pik} \hat{E}_p \quad (4)$$

от величины напряженности  $\hat{\mathbf{E}}$  электрического поля с учетом имеющихся пропорциональных зависимостей координат  $l_i$  (1) направляющего вектора  $\mathbf{l}$  от  $\gamma$ ,  $\gamma$  от  $\hat{\mathbf{E}}$  и пренебрежимой малости величин  $\gamma^2 \approx 0$  для углов сдвига  $\gamma$ , где первые слагаемые  $S_{ijmn}$ ,  $d_{imn}$ ,  $\lambda_{in}^{(\sigma)}$  – компоненты тензоров электроупругих свойств материала (композита) для случая  $\hat{\mathbf{E}} = 0$  (т.е. при  $\mathbf{l} \parallel r_3$ ) могут быть рассчитаны, например, методами статистической механики композитов [37; 38; 40; 41], коэффициенты пропорциональности  $\kappa$ ,  $\chi$ ,  $\varsigma$  – искомые характеристики материала.

В результате подстановки разложений (4) в (2) получим (для рассматриваемого случая нагружения  $\sigma^0$ ,  $\hat{\mathbf{E}}$  материала) уточненные соотношения

$$\varepsilon'_{ij} = S_{ijmn} \sigma_{mn}^0 + d'_{nij} \hat{E}_n, \quad \hat{D}'_i = d_{imn} \sigma_{mn}^0 + \lambda'_{in}^{(\sigma)} \hat{E}_n \quad (5)$$

в линейном приближении, отбрасывая квадратичные слагаемые по переменным  $\hat{E}_i$ , где  $d'_{nij}$ ,  $\lambda'_{in}^{(\sigma)}$  – компоненты тензоров результирующих значений деформационных пьезомодулей  $\mathbf{d}^*$  и диэлектрических проницаемостей  $\lambda^{(\sigma)*}$  имеют вид

$$d'^*_{pij} = d_{pij} + \kappa_{pijmn} \sigma_{mn}^0, \quad \lambda^{(\sigma)*}_{ip} = \lambda_{ip}^{(\sigma)} + \chi_{ipmn} \sigma_{mn}^0 \quad (6)$$

с учетом (2), (4), (5). Коэффициенты пропорциональности  $\kappa_{pijmn}$ ,  $\chi_{ipmn}$  (4), (6) могут быть найдены как производные

$$\kappa_{pijmn} = \frac{\partial S'_{ijmn}}{\partial \hat{E}_p}, \quad \chi_{ipmn} = \frac{\partial d'_{imn}}{\partial \hat{E}_p}, \quad (7)$$

или в результате нахождения вида явных линейных зависимостей величин  $S'_{ijmn}$ ,  $d'_{imn}$  от напряженностей  $\hat{E}_p$  (4) с учетом разложений (3) и пренебрежимой малости величин  $\gamma^2 \approx 0$ . Для этого выражения (3) для компонент  $S'_{ijmn}$ ,  $d'_{imn}$  преобразуем к виду

$$S'_{ijmn} = S_{ijmn} + (s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - 4s_{44}) \Delta_{ijmn} + (s_{13} - s_{12})(\Delta_{ij} \delta_{mn} + \delta_{ij} \Delta_{mn}) + (s_{44} - s_{66})(\delta_{jn} \Delta_{im} + \delta_{im} \Delta_{jn} + \delta_{jm} \Delta_{in} + \delta_{in} \Delta_{jm}), \quad (8)$$

$$d'_{imn} = d_{imn} + d_{31} \Delta_i \delta_{mn} + (d_{33} - d_{31} - 2d_{15}) \Delta_{imn} + d_{15} (\Delta_m \delta_{in} + \Delta_n \delta_{im}),$$

выделив в выражениях (8) для  $S'_{ijmn}$ ,  $d'_{imn}$  начальные величины компонентов  $S_{ijmn}$ ,  $d_{imn}$  и соответствующие им поправки от наведенной электродеформационной анизотропии. В (8) использованы обозначения величин

$$\Delta_i = l_i - \delta_{3i}, \quad \Delta_{ij} = l_i l_j - \delta_{3i} \delta_{3j},$$

$$\Delta_{imn} = l_i l_m l_n - \delta_{3i} \delta_{3m} \delta_{3n}, \quad \Delta_{ijmn} = l_i l_j l_m l_n - \delta_{3i} \delta_{3j} \delta_{3m} \delta_{3n},$$

которые имеют лишь следующие ненулевые значения:

$$\Delta_1 = l_1, \quad \Delta_2 = l_2,$$

$$\Delta_{13} = \Delta_{31} = l_1, \quad \Delta_{23} = \Delta_{32} = l_2,$$

$$\Delta_{133} = \Delta_{313} = \Delta_{331} = l_1, \quad \Delta_{233} = \Delta_{323} = \Delta_{332} = l_2,$$

$$\Delta_{1333} = \Delta_{3133} = \Delta_{3313} = \Delta_{3331} = l_1,$$

$$\Delta_{2333} = \Delta_{3233} = \Delta_{3323} = \Delta_{3332} = l_2$$

и допускают запись в виде

$$\Delta_i = l_1 \delta_{1i} + l_2 \delta_{2i},$$

$$\Delta_{ij} = l_1 (\delta_{1i} \delta_{3j} + \delta_{3i} \delta_{1j}) + l_2 (\delta_{2i} \delta_{3j} + \delta_{3i} \delta_{2j}),$$

$$\Delta_{imn} = l_1 (\delta_{1i} \delta_{3m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{1m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{3m} \delta_{1n}) + l_2 (\delta_{2i} \delta_{3m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{2m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{3m} \delta_{2n}), \quad (9)$$

$$\Delta_{ijmn} = l_1 (\delta_{1i} \delta_{3j} \delta_{3m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{1j} \delta_{3m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{3j} \delta_{1m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{3j} \delta_{3m} \delta_{1n}) + l_2 (\delta_{2i} \delta_{3j} \delta_{3m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{2j} \delta_{3m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{3j} \delta_{2m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{3j} \delta_{3m} \delta_{2n}),$$

где координаты направляющего вектора (1)

$$l_1 = \gamma_{13} = 2d_{n13} \widehat{E}_n, \quad l_2 = \gamma_{23} = 2d_{n23} \widehat{E}_n \quad (10)$$

имеют пропорциональные зависимости от напряженностей  $\widehat{E}_n$  электрического поля.

Таким образом, после дифференцирования левых и правых частей равенств (8) для  $S'_{ijmn}$ ,  $d'_{imn}$  по переменной  $\widehat{E}_n$  получим искомые решения для коэффициентов пропорциональности  $\kappa_{pijmn}$ ,  $\chi_{ipmn}$  (4)–(7) в виде

$$\begin{aligned} \kappa_{pijmn} &= \frac{\partial S'_{ijmn}}{\partial \widehat{E}_p} = (s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - 4s_{44}) \Delta_{ijmn,p} + \\ &+ (s_{13} - s_{12})(\Delta_{ij,p} \delta_{nm} + \delta_{ij} \Delta_{mn,p}) + \\ &+ (s_{44} - s_{66})(\delta_{jn} \Delta_{im,p} + \delta_{im} \Delta_{jn,p} + \delta_{jm} \Delta_{in,p} + \delta_{in} \Delta_{jm,p}), \\ \chi_{ipmn} &= \frac{\partial d'_{imn}}{\partial \widehat{E}_p} = d_{31} \Delta_{i,p} \delta_{mn} + \\ &+ (d_{33} - d_{31} - 2d_{15}) \Delta_{imn,p} + d_{15} (\Delta_{m,p} \delta_{in} + \Delta_{n,p} \delta_{im}), \end{aligned} \quad (11)$$

где с учетом разложений (9) имеем следующие выражения для производных

$$\begin{aligned} \Delta_{i,p} &= 2d_{p13} \delta_{1i} + 2d_{p23} \delta_{2i}, \\ \Delta_{ij,p} &= 2d_{p13} (\delta_{1i} \delta_{3j} + \delta_{3i} \delta_{1j}) + 2d_{p23} (\delta_{2i} \delta_{3j} + \delta_{3i} \delta_{2j}), \\ \Delta_{imn,p} &= 2d_{p13} (\delta_{1i} \delta_{3m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{1m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{3m} \delta_{1n}) + \\ &+ 2d_{p23} (\delta_{2i} \delta_{3m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{2m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{3m} \delta_{2n}), \\ \Delta_{ijmn,p} &= 2d_{p13} (\delta_{1i} \delta_{3j} \delta_{3m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{1j} \delta_{3m} \delta_{3n} + \\ &+ \delta_{3i} \delta_{3j} \delta_{1m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{3j} \delta_{3m} \delta_{1n}) + \\ &+ 2d_{p23} (\delta_{2i} \delta_{3j} \delta_{3m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{2j} \delta_{3m} \delta_{3n} + \delta_{3i} \delta_{3j} \delta_{2m} \delta_{3n} + \\ &+ \delta_{3i} \delta_{3j} \delta_{3m} \delta_{2n}) \end{aligned} \quad (12)$$

с учетом вида производных

$$\frac{\partial l_1}{\partial \widehat{E}_p} = 2d_{n13} \delta_{np} = 2d_{p13}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial \widehat{E}_p} = 2d_{n23} \delta_{np} = 2d_{p23} \quad (13)$$

для величин  $l_1 = 2d_{n13} \widehat{E}_n$ ,  $l_2 = 2d_{n23} \widehat{E}_n$ ,  $\frac{\partial \widehat{E}_n}{\partial \widehat{E}_p} = \delta_{np}$ . Так

как ненулевыми компонентами тензора  $\sigma^0$  в осях  $r_{1,2,3}$  являются лишь осевые напряжения  $\sigma_{11}^0$ ,  $\sigma_{22}^0$ ,  $\sigma_{33}^0$ , поэтому из формул (6) следуют решения, в частности, для результирующих деформационных пьезомодулей

$$\begin{aligned} d_{113}^* &= d_{113} + \kappa_{11333} \sigma_{33}^0 + \kappa_{11311} \sigma_{11}^0, \\ d_{223}^* &= d_{223} + \kappa_{22333} \sigma_{33}^0 + \kappa_{22322} \sigma_{22}^0 \end{aligned} \quad (14)$$

как линейных функций «продольного»  $\sigma_{33}^0$  и «поперечных»  $\sigma_{11}^0$ ,  $\sigma_{22}^0$  (относительно оси симметрии свойств

материала) напряжений, где коэффициенты пропорциональности  $\kappa_{11333}$ ,  $\kappa_{11311}$  и  $\kappa_{22333}$ ,  $\kappa_{22311}$  находим из решений (11), (12) с учетом (4) пропорциональных зависимостей

$$\begin{aligned} S'_{1333} &= \kappa_{11333} \widehat{E}_1, \quad S'_{1311} = \kappa_{11311} \widehat{E}_1, \quad S'_{2333} = \kappa_{22333} \widehat{E}_2, \\ S'_{2322} &= \kappa_{22322} \widehat{E}_2, \end{aligned}$$

выполняются равенства:  $S_{1333} = S_{1311} = S_{2333} = S_{2322} = 0$ ,  $d_{223} = d_{113}$ ,  $d_{223}^* = d_{113}^*$ ,  $\kappa_{22333} = \kappa_{11333}$ ,  $\kappa_{22322} = \kappa_{11311}$ . Зависимости (14) обуславливают увеличение результирующих деформационных пьезомодулей  $d_{113}^*$ ,  $d_{223}^*$  материала (композита) от действия продольной сжимающей  $\sigma_{33}^0$  и / или поперечных растягивающих  $\sigma_{11}^0$ ,  $\sigma_{22}^0$  нагрузок.

*Композиционный материал.* Для случая, когда рассматриваемый трансверсально-изотропный материал – двухфазный композит, например, с пьезоэлектрическими эллипсоидальными ( $a_{1,2,3}$ ) ориентированными включениями (волокнами) в низко модульной упругой матрице, тогда в полученных решениях (5), (6) обозначения  $\varepsilon^*$ ,  $\widehat{\mathbf{D}}^*$ ,  $\sigma^{0*}$ ,  $\widehat{\mathbf{E}}^*$  соответствуют «макроскопическим», т.е. осредненным по представительной области  $\mathbf{V}$  композита значениям тензоров  $\varepsilon^*$ ,  $\widehat{\mathbf{D}}^*$ ,  $\sigma^{0*}$ ,  $\widehat{\mathbf{E}}^*$ , а величины  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\lambda^{(\sigma)}$  – тензоры  $\mathbf{S}^*$ ,  $\mathbf{d}^*$ ,  $\lambda^{(\sigma)*}$  эффективных трансверсально-изотропных электроупругих свойств композита могут быть рассчитаны, в частности, в обобщенном сингулярном приближении [38; 41; 43] на основе метода функций Грина  $\mathbf{G}(\mathbf{r})$  для однородной трансверсально-изотропной пьезоэлектрической среды [43], где  $a_{1,2,3}$  – главные полуоси включений ( $a_2 = a_1$ ). В представительной области  $\mathbf{V}$  композита эллипсоидальные включения распределены по объему статистически однородно при относительном объемном содержании  $v_1$ . В начальной конфигурации продольная полуось  $a_3$  ориентирована вдоль оси  $r_3$ , параметр формы включений  $q = a_{1,2} / a_3$  равен 1 для сферических включений,  $q > 1$  или  $q < 1$  для «дисковых» или «иглочатых» включений, а для предельных случаев  $q \rightarrow \infty$  или  $q \rightarrow 0$  для слоев или однонаправленных волокон с круглым поперечным сечением соответственно. Подход сводит задачу «эффективного модуля» статистической механики композитов к решению систем интегродифференциальных уравнений, ядра которых – вторые производные функций Грина  $\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r})$ , где  $\nabla$  – оператор дифференцирования по координатам  $\mathbf{r}$ . В этом приближении у вторых производных функций Грина  $\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r})$  учитываются лишь сингулярные составляющие [43]

$$\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \approx \mathbf{G}^s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{G}^s = \begin{vmatrix} U_{ijn}^s & U_{imn}^{s(1)} \\ \Phi_{imn}^s & \Phi_{mn}^{s(1)} \end{vmatrix} \quad (15)$$

с эллипсоидальным ( $a_{1,2,3}$ ) «зерном неоднородности» – областью интегрирования малой окрестности точки сингулярности производных  $\nabla V G(\mathbf{r})$  [41; 43].

## 2. Результаты численного моделирования

В качестве тестовой задачи на рис. 1 приведены результаты сравнения рассчитанных в обобщенном сингулярном приближении [38; 43] значений эффективного объемного пьезомодуля  $d_v^*$  однонаправленного волокнистого композита «эпоксид/PZT-4» с известными решениями (■) [44], (●) [45] для композита с периодической гексагональной укладкой цилиндрических пьезокерамических волокон PZT-4 в эпоксидной матрице с модулем Юнга  $E_{(2)} = 3$  ГПа, коэффициентом Пуассона  $\nu_{(2)} = 0,4$ , относительной диэлектрической проницаемостью  $\lambda_{(2)} / \lambda_0 = 5$ . Здесь  $d_{(1)v}$  – объемный пьезомодуль для 1-й фазы (PZT-4) с учетом выражения  $d_v = d_{333} + 2d_{311}$ . Решение для  $d_v^*$  [44] получено на основе стержневой модели [45] – с использованием быстрых переменных и асимптотических разложений в ряды.

Рассмотрим численный анализ (13), (14) влияния продольной сжимающей  $\sigma_{33}^{0*}$  нагрузки на результирующий деформационный пьезомодуль  $d_{113}^*$  композита

«силикон/PZT-4» с однонаправленными трансверсально-изотропными пьезоэлектрическими волокнами (PZT-4) [36] в изотропной упругой матрице (силикон) с модулем Юнга  $E_{(2)} = 0,1$  ГПа, коэффициентом Пуассона  $\nu_{(2)} = 0,3$ , относительной диэлектрической проницаемостью  $\lambda_{(2)} / \lambda_0 = 3$ . Для такого композита с низко-модульной упругой матрицей и при нагрузке  $\sigma_{33}^{0*} < 0$  эффект увеличения величины  $d_{113}^*$  проявляется наиболее ярко. Результаты вычисления деформационного пьезомодуля  $d_{113}^*$  для композита «силикон/PZT-4» даны на рис. 2. Решение (○) соответствует традиционному сингулярному приближению [37; 40; 41], при котором тензоры электроупругих свойств  $C_e$ ,  $e_e$ ,  $\lambda_e$  среды сравнения приравнены к осредненным по Фойгту или «правилу смеси» значениям, например, тензор упругих свойств  $C_e = \langle C \rangle = \nu_1 C_1 + (1 - \nu_1) C_2$ , где  $\langle \dots \rangle$  – оператор осреднения по представительной области  $V$  композита. Решения (◇, □) соответствуют «вилке Хашина – Розена» для однонаправленного волокнистого композита, когда среда сравнения имеет свойства 1-й (◇) или 2-й (□) фазы композита соответственно. Пунктирные графики на рис. 2 построены для случаев, когда характеристики среды сравнения  $C_e$ ,  $e_e$ ,  $\lambda_e$  заданы по правилу смеси, например,  $C_e = \nu_1 C_1 + (1 - \nu_1) C_2$  с использованием приведенных степенных значений  $\nu_1 = \nu_1^2$  (–),  $\nu_1^3$  (–) объемной

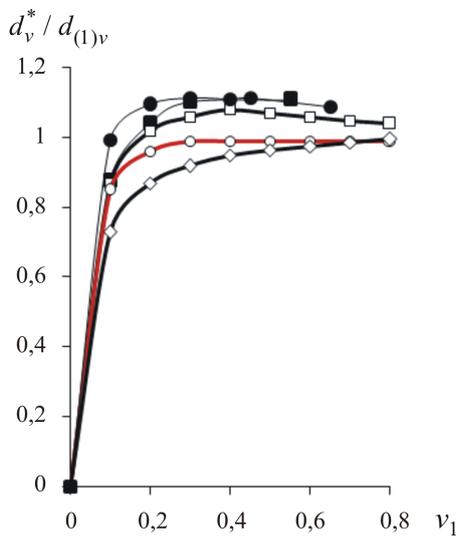


Рис. 1. Эффективный объемный пьезомодуль  $d_v^*$  волокнистого пьезокомпозита со «средой сравнения» по Фойгту (○), по 1-й фазе (◇), по 2-й фазе (□)

Fig. 1. Effective volumetric piezomodulus  $d_v^*$  of fibrous piezocomposite with "comparison medium" by Foigt (○), by 1st phase (◇), by 2nd phase (□)

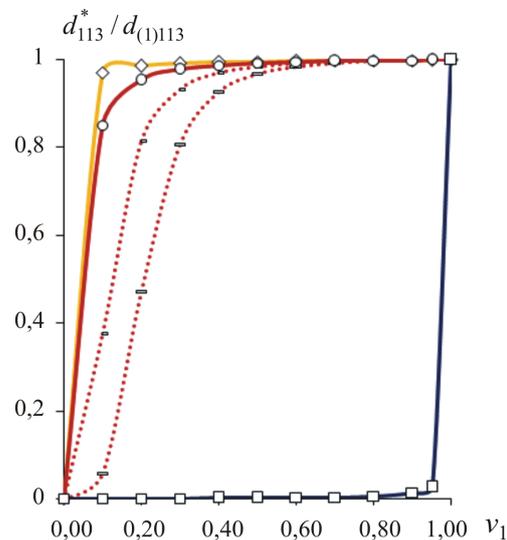


Рис. 2. Зависимости относительного эффективного деформационного пьезомодуля  $d_{113}^*$  композита «силикон/PZT-4» от объемной доли  $\nu_1$  пьезоэлектрической 1-й фазы ( $d_{(1)113}$ ) двухфазного композита со «средой сравнения» по Фойгту (○), по 1-й фазе (◇), по 2-й фазе (□)

Fig. 2. Dependence of relative effective deformation piezomodulus  $d_{113}^*$  of "silikon/PZT-4" composite on volume fraction  $\nu_1$  of piezoelectric 1st phase ( $d_{(1)113}$ ) of two-phase composite with "comparison medium" by Foigt (○), by 1st phase (◇), by 2nd phase (□)

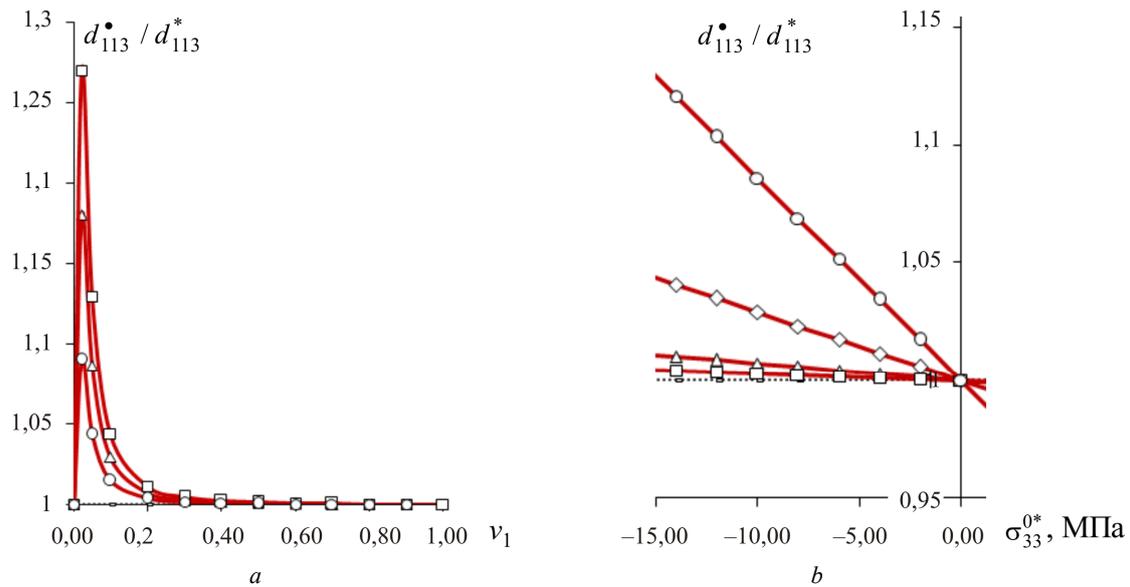


Рис. 3. Зависимости относительного результирующего деформационного пьезомодуля  $d_{113}^*$  композита «силикон/PZT-4» от объемной доли  $v_1$  пьезоэлектрических волокон при нагрузке  $\sigma_{33}^{0*} = 0$  (○),  $-5$  (◇),  $-10$  (△),  $-15$  (□) [МПа] (a) и от нагрузки  $\sigma_{33}^{0*}$  при  $v_1 = 0,05$  (○),  $0,1$  (◇),  $0,2$  (△),  $0,3$  (□), без учета переориентации волокон (пунктирная линия) (b)

Fig. 3 Dependences of the relative resulting deformation piezomodule  $d_{113}^*$  of a composite "silicone/PZT-4" from a volume fraction  $v_1$  of piezoelectric fibers at loading  $\sigma_{33}^{0*} = 0$  (○),  $-5$  (◇),  $-10$  (△),  $-15$  (□) [MPa] (a) and from loading  $\sigma_{33}^{0*}$  at  $v_1 = 0,05$  (○),  $0,1$  (◇),  $0,2$  (△),  $0,3$  (□), without reorientation of fibers (dotted line) (b)

доли  $v_1$  волокон [46]. Выявлен эффект увеличения результирующих модулей  $d_{113}^*$ ,  $d_{223}^*$  (13), (14) композита «силикон/PZT-4» от действия продольной сжимающей  $\sigma_{33}^{0*}$  и поперечных растягивающих  $\sigma_{11}^{0*}$ ,  $\sigma_{22}^{0*}$  нагрузок. В частности, для относительной величины  $d_{113}^* / d_{113}^*$  результирующего модуля  $d_{113}^*$  на рис. 3 построены графики немонотонных зависимостей  $d_{113}^* / d_{113}^*$  от объемной доли  $v_1$  пьезоэлектрических волокон (рис. 3, a) и линейных зависимостей  $d_{113}^* / d_{113}^*$  от продольного сжимающего напряжения  $\sigma_{33}^{0*}$  (рис. 3, b).

## Заключение

Разработана математическая модель и на ее основе найдены аналитические решения (5), (6), (11), (12) для результирующих «редуцированных» значений электроупругих характеристик, в частности: деформационных (сдвиговых) пьезомодулей  $\mathbf{d}^*$  и диэлектрических проницаемостей  $\lambda^{(\sigma)*}$  трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала (композита) с учетом поправок (6), обусловленных наличием механических осевых напряжений  $\sigma^0$  и электродеформационной переориентации оси симметрии свойств материала по направляющему вектору  $\mathbf{l}$  (1) при действии электрического поля. Резуль-

тирующие значения тензоров  $\mathbf{d}^*$ ,  $\lambda^{(\sigma)*}$  линейно зависят от действующих напряжений  $\sigma^*$  (6) с коэффициентами пропорциональности  $\kappa$ ,  $\chi$  (11), (12). Выявлен эффект увеличения результирующих значений компонент  $d_{113}^*$ ,  $d_{223}^*$  (14) деформационных пьезомодулей  $\mathbf{d}^*$  (6) материала от действия осевых напряжений  $\sigma^0$ . Величины приложенных осевых напряжений  $\sigma^0$  не превышают значений потери устойчивости материала (элементов структуры и в целом композита), что обуславливает сохранение эффекта увеличения величин  $d_{113}^*$ ,  $d_{223}^*$  также при действии переменного электрического поля. Результаты численного моделирования (см. рис. 1–3) получены для трансверсально-изотропного полимерного композита с однонаправленными пьезоэлектрическими волокнами с использованием известного обобщенного сингулярного приближения [38; 43] на основе метода функций Грина (15) [43]. Установлено, что наиболее значительно эффект увеличения величины  $d_{113}^* / d_{113}^*$  от сжимающего напряжения  $\sigma_{33}^{0*}$  проявляется для однонаправленного волокнистого композита с низко модульной полимерной матрицей, например, «силикон/PZT-4» при малых значениях  $v_1 < 0,2$  объемной доли жестких пьезоэлектрических волокон (рис. 3, a).

## Библиографический список

1. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. – Oxford: Pergamon Press, 1982. – 630 p. = Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
2. Гузь А.Н. Об определении приведенных упругих постоянных композитных слоистых материалов с начальными напряжениями // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 3. – С. 216–219.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2 т. – Киев. Наукова думка, 1986. – Т. 1. Общие вопросы. Киев: Наук. думка. – 376 с. – Т. 2. Закономерности распространения. – Киев: Наук. думка. – 536 с.
4. Экспериментальные исследования свойств материалов при сложных термомеханических воздействиях / В.Э. Вильдеман, М.П. Третьяков, Т.В. Третьякова, Р.В. Бульбович, С.В. Словигов, А.В. Бабушкин, А.В. Ильиных, Д.С. Лобанов, А.В. Ипатова; под ред. В.Э. Вильдемана. – М.: Наука. Физматлит, 2012. – 204 с.
5. Вильдеман В.Э., Староверов О.А. Влияние дополнительных вибрационных воздействий на процессы деформирования и разрушения композиционных трубчатых образцов / Сборник трудов 32-й Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС – 2020). – М., 2020. – 2021. – С. 32–36.
6. Алехин В.В., Аннин Б.Д., Колпаков А.Г. Синтез слоистых материалов и конструкций. – Новосибирск. Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1988. – 128 с.
7. Akbarov S.D., Guliev M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestretched compound circular cylinder made of incompressible materials // International Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 45, no. 10. – P. 1141–1151.
8. Akbarov S.D. Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, no. 12. – P. 1305–1324.
9. Akbarov S.D. Stability loss and buckling delamination: Three-dimensional linearized approach for elastic and viscoelastic composites. – Springer, 2013. – 448 p.
10. Гулиев М.С., Сейфулаев А.И., Абдуллаева Д.Н. Исследование распространения упругих волн в составном цилиндре с начальным кручением // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2018. – № 5. – С. 404–413.
11. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Свойства преднапряженных изотропных материалов при учете упругих модулей высших порядков // Наука Юга России. – 2017. – № 2. – С. 3–12.
12. Гузь А.Н. Об ультразвуковом неразрушающем методе определения напряжений в элементах конструкций и в приповерхностных слоях материалов: фокус на украинские исследования (обзор) // Прикладная механика. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 3–30.
13. Kuliev G.G., Jabbarov M.D. To elastic waves propagation in strained nonlinear anisotropic media // Proceedings the sciences of Earth of academy sciences Azerbaijan. – 1998. – № 2. – P. 103–112.
14. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Springer, New York, 1999. – 555 p.
15. Akbarov S.D. Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: Linearized three-dimensional approach. – Springer, 2016. – 1004 p.
16. Hoger A. On the determination of residual stress in an elastic body // Journal of Elasticity. – 1986. – Vol. 16. – P. 303–324.
17. Robertson R.L. Determining residual stress from boundary. Measurements: a linearized approach // Journal of Elasticity. – 1998. – Vol. 52. – P. 63–73.
18. Bažant Z.P. A correlation study of formulations of incremental deformation and stability of continuous bodies // Journal of Applied Mechanics. – 1971. – Vol. 38. – P. 919–928.
19. Huang C., Wang L., Wang K. Residual stress identification in thin plates based on modal data and sensitivity analysis // International Journal of Solids and Structures. – 2022. – Vol. 236–237. – P. 111350.
20. Tovstik P.E. Vibration and stability of the prestressed plate lying on the elastic base // Applied Mathematics and Mechanics. – 2009. – Vol. 6. – P. 106–120.
21. Nedin R., Dudarev V., Vatulyan A. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress // Engineering Structures. – 2017. – Vol. 151. – P. 391–405.
22. Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space / S. Gupta, D.K. Majhi, S. Kundu, S.K. Vishwakarma // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – Vol. 218, no. 9. – P. 5655–5664.
23. Hu W.T., Chen W.Y. Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model // Journal of Central South University. – 2014. – Vol. 21, no. 2. – P. 753–760.
24. Yesil U.B. Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities // Comput. Mater. Continua. – 2017. – Vol. 53, no. 1. – P. 1–22.
25. Kolpakov A.G. Effect of inflation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite // Mechanics of materials. – 2005. – Vol. 37, no. 8. – P. 840–854.
26. Kolpakov A.G. On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Computers & Structures. – 1992. – Vol. 44, no. 1–2. – P. 97–101.
27. Kolpakov A.G. Averaged characteristics of stressed laminated media // Journal of Engineering Physics. – 1995. – Vol. 68, no. 5. – P. 605–613.
28. Колпаков А.Г. Усредненные модели упругих композиционных материалов и элементов конструкций: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04. – Новосибирск, 2002. – 291 с.
29. Kuang Z.-B. Theory of Electroelasticity, Springer: Heidelberg. – New York, 2014. – 438 p.
30. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Vibrations of inhomogeneous piezoelectric bodies in conditions of residual stress-strain state // Applied Mathematical Modelling. – 2018. – Vol. 63. – P. 219–242.
31. Dasdemir A. Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core // International Applied Mechanics. – 2018. – Vol. 54, no. 4. – P. 480–493.
32. Patent US N 5632841. Thin layer composite unimorph ferroelectric driver and sensor / Richard F. Hellbaum, Robert G. Bryant, Robert L. Fox. – Date of Patent: May 27, 1997.
33. Патент RU № 2723567. Лопасть воздушного винта с управляемой геометрией профиля / Паньков А.А., Аношкин А.Н., Писарев П.В., опубл.: 16.06.2020 Бюл. № 17, заявка № 2019137042 от 18.11.2019 г.
34. Патент RU № 2778161. Способ увеличения пьезочувствительности биморфа изгибного типа / Паньков А.А., опубл.: 15.08.2022 Бюл. № 23, заявка № 2022101875 от 27.01.2022 г.
35. Guo X., Wei P. Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses // Ultrasonics. – 2016. – Vol. 66. – P. 72–85.

36. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика. Т.1: Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. – М.: Мир, 1966. – С. 204–326.

37. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

38. Паньков А.А. Статистическая механика пьезокомпози- тов. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 480 с.

39. Using an electromechanical analogy to describe the damp- ing characteristics of an MFC actuator / A.A. Pan'kov, A.N. Anoshkin, P.V. Pisarev, S.R. Bayandin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 1093 (2021) 012023. – P. 1–6.

40. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 208 с.

41. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеод- нородных сред. – М.: Наука, 1976. – 399 с.

## References

1. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1982, 630 p.

2. Guz' A.N. Ob opredelenii privedennykh uprugih postoy- annykh kompozitnykh sloistykh materialov s nachal'nymi napryazheniyami [On the definition of the given elastic permanent composite laminates with initial stresses]. *Doklady AN USSSR. Ser. A*, 1975, no.3, pp. 216–219.

3. Guz' A.N. Uprugie volny v telah s nachal'nymi napryazheniyami [Elastic waves in bodies with initial voltages]. Kiev. Naukova dumka, 1986. V 2-h t. T.1 Obshchie voprosy [General issues]. Kiev: Nauk. dumka, 376 p. T.2. Zakonomernosti rasprostraneniya [Patterns of distribution]. Kiev: Nauk. dumka, 536 p.

4. Eksperimental'nye issledovaniya svoystv materialov pri slozhnykh termomekhanicheskikh vozdeystviyakh [Experimental studies of the properties of materials under complex thermomechanical influences]. V.E. Vil'deman, M.P. Tret'yakov, T.V. Tret'yakova, R.V. Bul'bovich, S.V. Slovikov, A.V. Babushkin, A.V. Il'nyh, D.S. Lobanov, A.V. Ipatova. Pod red. V.E. Vil'demana. M.: Nauka. Fizmatlit, 2012, 204 p.

5. Vil'deman V.E., Staroverov O.A. Vliyaniye dopolnitel'nykh vibratsionnykh vozdeystviy na processy deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh trubchatykh obrazcov [Influence of Additional Vibration Effects on Deformation and Destruction of Composite Tubular Samples]. *Sbornik trudov 32-j mezhdunarodnoj innovatsionnoj konferentsii molodykh uchennykh i studentov po problemam mashinovedeniya (MIKMUS – 2020)* Moskva, 02–04 dekabrya 2020 g., 2021, pp.32–36.

6. Alekhin V.V., Annin B.D., Kolpakov A.G. Sintez sloistykh materialov i konstruktsiy [Synthesis of layered materials and structures]. Novosibirsk. In-t gidrodinamiki SO AN SSSR, 1988, 128 p.

7. Akbarov S.D., Guliev M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestretched compound circular cylinder made of incompressible materials. *International Applied Mechanics*, 2009, vol. 45, no. 10, pp. 1141–1151.

8. Akbarov S.D. Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses. *International Applied Mechanics*, 2007, vol. 43, no. 12, pp. 1305–1324.

9. Akbarov S.D. Stability loss and buckling delamination: Three-dimensional linearized approach for elastic and viscoelastic composites, Springer, 2013, 448 p.

10. Guliev M.S., Seifulaev A.I., Abdullaeva D.N. Issledovanie rasprostraneniya uprugih voln v sostavnom cilindre s nachal'nym

42. Победря Б.Е., Горбачёв В.И. О статических задачах упругих композитов // Вестник МГУ. Сер. 1: Матем. и механ. – 1977. – № 5. – С. 101–110.

43. Паньков А.А. Коэффициенты электромагнитной связи композита с пьезоактивными фазами // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 93–99.

44. Белоконь А.В., Бондарев П.М. Эффективные физико-механические характеристики 1–3 пьезокомпози- та для низкочастотных прикладных проблем // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т. 8, № 3. – С. 291–308.

45. Гетман И.П., Мольков В.А. Об эффективных характеристиках пьезоактивных композитов с цилиндрическими включениями // Прикладная математика и механика. – 1992. – Т. 35, № 3. – С. 501–509.

46. Сараев Л.А. К теории упругости микронеоднородных сред, учитывающей стохастические изменения связности составляющих компонентов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 2. – С. 132–143.

krucheniem [Study of the propagation of elastic waves in a composite cylinder with initial torsion]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy*, 2018, no. 5, pp. 404–413.

11. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Svoystva prednapryazhennykh izotropnykh materialov pri uchete uprugih modulej vysshikh poryadkov [Properties of prestressed isotropic materials when taking into account elastic modules of higher orders]. *Nauka Yuga Rossii*, 2017, no.2, pp. 3–12.

12. Guz' A.N. Ob ultrazvukovom nerazrushayushchem metode opredeleniya napryazheniy v elementah konstruktsiy i v pripoverhnostnykh sloyakh materialov: fokus na ukrainskie issledovaniya (obzor) [On the ultrasonic non-destructive method of determining stresses in structural elements and near-surface layers of materials: focus on Ukrainian research (review)]. *Prikladnaya mekhanika*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 3–30.

13. Kuliev G.G., Jabbarov M.D. To elastic waves propagation in strained nonlinear anisotropic media. *Proceedings the sciences of Earth of academy sciences Azerbaijan*, 1998, no. 2, pp. 103–112.

14. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies, Springer, New York, 1999, 555 p.

15. Akbarov S.D. Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: Linearized three-dimensional approach, Springer, 2016, 1004 p.

16. Hoger A. On the determination of residual stress in an elastic body. *Journal of Elasticity*, 1986, vol. 16, pp. 303–324.

17. Robertson R.L. Determining residual stress from boundary. Measurements: a linearized approach. *Journal of Elasticity*, 1998, vol. 52, pp. 63–73.

18. Bažant Z.P. A correlation study of formulations of incremental deformation and stability of continuous bodies. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, vol. 38, pp. 919–928.

19. Huang C., Wang L., Wang K. Residual stress identification in thin plates based on modal data and sensitivity analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, vol. 236–237, 111350.

20. Tovstik P.E. Vibration and stability of the prestressed plate lying on the elastic base. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 6, pp. 106–120.

21. Nedin R., Dudarev V., Vatulyan A. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress. *Engineering Structures*, 2017, vol. 151, pp. 391–405.

22. Gupta S., Majhi D.K., Kundu S., Vishwakarma S.K. Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space.

*Applied Mathematics and Computation*, 2012, vol. 218, no. 9, pp. 5655–5664.

23. Hu W.T., Chen W.Y. Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model. *Journal of Central South University*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 753–760.

24. Yesil U.B. Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities. *Comput. Mater. Continua*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 1–22.

25. Kolpakov A.G. Effect of inflation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite. *Mechanics of materials*, 2005, vol. 37, no. 8, pp. 840–854.

26. Kolpakov A.G. On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses. *Computers & Structures*, 1992, vol. 44, no. 1–2, pp. 97–101.

27. Kolpakov A.G. Averaged characteristics of stressed laminated media. *Journal of Engineering Physics*, 1995, vol. 68, no. 5, pp. 605–613.

28. Kolpakov A.G. Usrednennyye modeli uprugih kompozitsionnykh materialov i elementov konstruktsij [Averaged models of elastic composite materials and structural elements]: dis. ... doktor fiziko-matematicheskikh nauk: 01.02.04, Novosibirsk, 2002, 291 p.

29. Kuang Z.-B. Theory of Electroelasticity, Springer: Heidelberg, New York, 2014, 438 p.

30. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Vibrations of inhomogeneous piezoelectric bodies in conditions of residual stress-strain state. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol. 63, pp. 219–242.

31. Dasdemir A. Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core. *International Applied Mechanics*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 480–493.

32. Patent US N 5632841. Thin layer composite unimorph ferroelectric driver and sensor / Richard F. Hellbaum, Robert G. Bryant, Robert L. Fox. Date of Patent: May 27, 1997.

33. Patent RU N 2723567. Lopast' vozdušnogo vinta s upravlyae moy geometriey profilya [Propeller blade with controlled profile geometry]. Pan'kov A.A., Anoshkin A.N., Pisarev P.V., opubl.: 16.06.2020 Byul. № 17.

34. Patent RU N 2778161. Sposob uvelicheniya p'e-zochuvstvitel'nosti bimorfa izgibnogo tipa [Approach for increasing the piezosensitivity of bending-type bimorph]. Pan'kov A.A., opubl.: 15.08.2022 Byul. № 23.

35. Guo X., Wei P. Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses. *Ultrasonics*, 2016, vol. 66, pp. 72–85.

36. Berlinkur D., Kerran D., ZHaffe G. P'ezoelektricheskie i

p'ezomagnitnye materialy i ih primeneniye v preobrazovatelyah [Piezoelectric and piezomagnetic materials and their use in transducers]. *Fizicheskaya akustika*. T.1: Metody i pribory ul'trazvukovykh issledovaniy. CHast' A., Moscow: Mir, 1966, pp. 204–326.

37. Horoshun L.P., Maslov B.P., Leshchenko P.V. Prognozirovaniye effektivnykh svoystv p'ezoaktivnykh kompozitsionnykh materialov [Prediction of effective properties of piezoactive composite materials]. Kiev: Nauk. dumka, 1989, 208 p.

38. Pan'kov A.A. Statisticheskaya mekhanika p'ezokompozitov [Statistical mechanics of piezocomposites]. Perm': Izd-vo Perm. gos. tekhn. un-ta, 2009, 480 p.

39. Pan'kov A.A., Anoshkin A.N., Pisarev P.V., Bayandin S.R. Using an electromechanical analogy to describe the damping characteristics of an MFC actuator. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1093 (2021) 012023, pp.1–6.

40. Volkov S.D., Stavrov V.P. Statisticheskaya mekhanika kompozitsionnykh materialov [Statistical mechanics of composite materials]. Minsk: Izd-vo Belarus. gos. un-ta, 1978, 208 p.

41. Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodny'x sred [Theory of elasticity of microneodonorous media]. Moscow: Nauka, 1976, 399 p.

42. Pobedrya B.E., Gorbachyov V.I. O staticheskikh zadachah uprugih kompozitov [On the static problems of elastic composites]. *Vestnik MGU. Ser. 1. «Matem. i mekhan.»*, 1977, no.5, pp. 101–110.

43. Pan'kov A.A. Koeffitsienty elektromagnitnoy svyazi kompozita s p'ezoaktivnymi fazami [Electromagnetic coupling coefficients of the composite with piezoactive phases]. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2011, vol. 14, no.2, pp. 93–99.

44. Belokon' A.V., Bondarev P.M. Effektivnyye fiziko-mekhanicheskie harakteristiki 1–3 p'ezokompozita dlya nizkochastotnykh prikladnykh problem [Effective physical and mechanical characteristics of 1–3 piezocomposites for low-frequency applied problems]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, 2002, vol. 8, no.3, pp. 291–308.

45. Getman I.P., Mol'kov V.A. Ob effektivnykh harakteristikah p'ezoaktivnykh kompozitov s cilindricheskimi vkl'yucheniymi [On the effective characteristics of piezoactive composites with cylindrical inclusions]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1992, vol. 35, no.3, pp. 501–509.

46. Saraev L.A. On the theory of elasticity of microinhomogeneous media with account for stochastic changes in the connectivity of constituent components. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no.2, pp. 132–143.

**Финансирование.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края в рамках научного проекта № 20-41-596010.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Financing.** The reported study was funded by RFBR and Perm Territory, project number 20-41-596010.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.