



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.08

УДК 539.3

## КОЛЕБАНИЯ ПОЛОСЫ С ОТСЛОЕНИЕМ В РАМКАХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АЙФАНТИСА ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А.О. Ватульян<sup>1,2</sup>, О.В. Явруян<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

<sup>2</sup>Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 07 сентября 2022 г.

Одобрена: 30 сентября 2022 г.

Принята к публикации:

01 ноября 2022 г.

#### Ключевые слова:

колебания, установившийся режим, упругий, полоса, отслоение, градиентная теория упругости, линейная теория упругости, асимптотический метод, метод Рунге – Айфантиса, граничные интегральные уравнения, сингулярность.

### АННОТАЦИЯ

Проведено исследование плоской и антиплоской задач об установившихся колебаниях изотропной упругой полосы с отслоением на нижней границе. Исследование направлено на анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) в окрестности вершин трещины и построении функции раскрытия трещины – основных механических показателей при исследовании задач теории трещин. Задачи решены в рамках неклассической градиентной теории упругости (ГТУ), однопараметрической модели Айфантиса. Построены граничные интегральные уравнения (ГИУ) относительно функций раскрытия трещины или их производных. Проведен анализ ГИУ, выделены регулярные и нерегулярные части, полученные ГИУ с сингулярными (с гиперсингулярными, с кубической сингулярностью) интегралами решены на основе методов коллокаций, аппроксимирующих полиномов Чебышева, квадратурных формул для сингулярных интегралов.

Для решения плоской задачи применен упрощенный подход Рунге – Айфантиса, позволяющий разделить исходную краевую задачу на две вспомогательные подзадачи – классическую задачу ЛТУ и упрощенную краевую задачу для отыскания градиентного решения, в которую входит найденное решение классической задачи.

Для каждой из задач построены полуаналитические выражения для функций раскрытия трещины, проведен анализ НДС в окрестности вершин трещины.

Задачи также решены в случае трещины малой относительной длины, проведен анализ ГИУ в зависимости от соотношения малых параметров, получены явные выражения для функций раскрытия трещины.

Проведены численные расчеты. Определены зоны работоспособности асимптотического подхода и осуществлен сравнительный анализ результатов, полученных на основе моделей ГТУ и ЛТУ, в зависимости от значений градиентного параметра и длины расслоения.

© ПНИПУ

© Явруян Оксана Вячеславовна – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: yavruyan@mail.ru

Ватульян Александр Ованесович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: vatulyan@math.rsu.ru, vatulyan@aaanet.ru

Oksana V. Yavruyan – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: yavruyan@mail.ru

Alexander O. Vatulyan – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, e-mail: aovatulyan@sfnedu.ru, vatulyan@aaanet.ru



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## VIBRATIONS OF A STRIP WITH DELAMINATION IN THE FRAMEWORK OF THE ONE-PARAMETER AIFANTIS MODEL OF GRADIENT ELASTICITY THEORY

A.O. Vatulyan<sup>1,2</sup>, O.V. Yavruyan<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

<sup>2</sup> Southern Mathematical Institute of VSC RAS and RNO-A, Vladikavkaz, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 07 September 2022  
Approved: 30 September 2022  
Accepted for publication:  
01 November 2022

#### Keywords:

oscillation, steady state, elastic, strip, delamination, gradient elasticity theory, linear elasticity theory, asymptotic method, Ru-Aifantis method, boundary integral equations, singularity.

### ABSTRACT

The problems on in-plane and anti-planar steady-state vibrations of an isotropic elastic strip with delamination at the lower boundary has been investigated.

The goal of the study is to analyze the stress-strain state in the crack tips areas and to construct a crack opening function being the main mechanical characteristics in the crack theory problems. The problems under study have been solved in the framework of the nonclassical gradient elasticity theory (GET) on the basis of the one-parameter model proposed by Aifantis.

The boundary integral equations (BIE) are obtained with respect to crack opening functions or their derivatives. The analysis of BIEs is carried out, regular and irregular parts are distinguished, the obtained BIEs with singular (e.g., with hypersingular, with cubic singularity) integrals are solved via collocation methods, approximating Chebyshev polynomials, quadrature formulas for singular integrals.

For the in-plane problem solution, the simplified Ru-Aifantis method has been applied. The Ru-Aifantis method allows to divide the initial boundary value problem into two sub-problems – the classical linear elasticity theory (LTE) problem and the simplified boundary value problem for finding the gradient solution which includes the solution found via the classical theory. For each of the problems, semi-analytical expressions for the functions of crack opening have been constructed, and the analysis of the stress-strain state in the area of crack tips has been carried out.

The problems have also been solved in the case of a crack with small relative length, the analysis of BIE depending on small parameters ratio has been carried out, and explicit expressions for the crack opening functions have been obtained.

Numerical calculations have been performed; the applicability conditions for the asymptotic method are determined, and a comparative analysis of the results obtained on the basis of GET and LTE models, depending on the values of the gradient parameter and the delamination length, is realized.

© PNRPU

### Введение

Конструкционные элементы, моделируемые в виде слоистых волноводов, имеют широкое применение во многих областях современной промышленности – для объектов ответственного назначения (ядерные/атомные реакторы, АЭС, ГЭС, космические аппараты и т.д.), гражданское строительство, авиационная и военная промышленности (обшивки корпусов), георазведка, и также в областях, где используются подложки и опорные сооружения.

Основной причиной, способной существенно снизить эксплуатационные способности слоистых конструктивных элементов, является наличие микродефектов, которые могут возникнуть уже на начальном этапе эксплуатации. Именно поэтому задачи, связанные с построением и анализом напряженно-деформированного состояния (НДС) в окрестности концентраторов напряжений, особенно актуальны.

Работа направлена на детальное исследование прямой задачи, основной целью которой является построение уточненных решений в области дефекта.

Прямые динамические задачи теории трещин с позиции линейной теории упругости исследованы достаточно полно, как известно, полученные при этом решения, характеризующие поля напряжений, имеют сингу-

лярный характер. В рамках линейной теории упругости для оценки НДС, т.е. практической интерпретации полученных сингулярных решений, сформулированы критерии прочности, ГОСТ и справочные значения коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в окрестности вершин дефектов. Вместе с тем для уточнения поведения полей напряжений у вершин предложены различные неклассические теории упругости и пластичности [1–16], которые в определяющих соотношениях, характеризующих связь между напряжениями и деформациями, учитывают градиенты деформации первого/второго порядков, которые входят с множителями – градиентными параметрами, соотносимыми с размерными параметрами исследуемой области, например, с длиной дефекта, толщиной покрытия или другими входными параметрами задачи. Данный подход позволяет учитывать масштабные микроэффекты и уточнять поведение в окрестности интересующих подобластей, а также получить новые критерии прочности.

Подробный анализ моделей градиентной теории упругости для динамических и статических задач приведен в работе [1]. Обсуждены основные модели градиентной теории упругости (ГТУ), особенности исследования динамических задач теории упругости, возможности определения параметров градиентной модели. Градиентные модели приводят к увеличению порядка

дифференциального оператора в уравнениях равновесия или уравнениях движения, причем старшие производные входят в соответствующие дифференциальные уравнения с множителями – малыми градиентными параметрами.

Первые модели градиентной теории упругости были предложены в работе Миндлина в 1964 г. и в последующем активно использовались многими исследователями. В предложенной модели функция плотности энергии деформации учитывает градиенты деформации, что позволяет более точно описывать механическое поведение объекта исследования [2]

$$W = C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + A_{ijklmn}\varepsilon_{ij,m}\varepsilon_{kl,n}. \quad (1)$$

Также Миндлином был предложено упрощенное представление кинетической энергии в виде

$$T = \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i + \frac{1}{2}\rho l_s^2\dot{u}_{i,j}\dot{u}_{i,j}, \quad (2)$$

где  $C_{ijkl}$ ,  $A_{ijklmn}$  – тензор упругих модулей линейной теории упругости и тензор градиентных модулей,  $l_s$  – градиентный параметр динамической задачи, характеризующий инерционные свойства модели.

В градиентной модели вводятся моментные напряжения  $m_{ijk} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij,k}$ , полные напряжения определяются в виде  $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijk}$ , где  $\tau_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора напряжений Коши.

Упрощенные модели градиентной теории упругости предполагают уменьшение количества градиентных параметров, в этом направлении можно выделить два основных ответвления градиентной теории упругости – strain gradient theory и stress gradient theory, основу разделения составляет соотношение [3]

$$\sigma_{ij} - l_1^2 \sigma_{ij,mm} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - l_2^2 \varepsilon_{kl,mm}), \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{kl}$  – компоненты тензора напряжений и деформаций,  $l_1, l_2$  – градиентные параметры. Полагая в (3)  $l_2 = 0$ , переходим к моделям stress gradient theory, предложенных Эрингеном (нелокальная теория упругости):

$$\sigma_{ij} - l_1^2 \sigma_{ij,mm} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}.$$

Полагая  $l_1 = 0$  в выражении (1.3), получаем соотношение, вытекающее из теории Миндлина, – strain gradient theory, такая однопараметрическая модель была предложена Айфантисом для статических и динамических задач и получила большую популярность во многих работах отечественных и зарубежных авторов:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - l_2^2 \varepsilon_{kl,mm}).$$

Уравнения движения для анизотропной упругой среды имеют вид

$$C_{ijkl}(u_{k,jl} - l_2^2 u_{k,jlmm}) = \rho(\ddot{u}_i - l_s^2 \ddot{u}_{i,mm}). \quad (4)$$

В работе, не нарушая общности рассуждений, будем рассматривать упрощенную модель Айфантиса, в которой положено ( $l_2 = l_s = l$ ), случай ( $l_2 = l_s \neq l_1$ ) рассмотрен в [4].

Статические задачи для тел с трещинами в рамках моделей градиентной теории упругости представлены в работах [5–9; 17–20]. Исследованы статические задачи о трещинах моды I, II, III в однородных или неоднородных функционально-градиентных средах. Получены граничные интегральные уравнения относительно скачков полей смещений на берегах трещины, рассчитаны коэффициенты интенсивности напряжений у вершин трещины, осуществлено сравнение с классическим случаем.

Динамические задачи теории трещин в рамках градиентной теории упругости исследованы значительно меньше. Как правило, основное внимание исследователей направлено на решение динамических задач для балок, труб, пластин.

В работе исследованы динамические задачи теории трещин в рамках упрощенной однопараметрической градиентной модели Айфантиса для полосы.

## 1. Основные методы исследования задач в рамках ГТУ

**Метод граничных интегральных уравнений.** При решении задач теории трещин в рамках модели градиентной теории упругости стандартной схемой исследования является сведение исходной задачи к системе граничных интегральных уравнений (ГИУ) по контуру трещины. В случае использования моделей линейной теории упругости ГИУ относительно компонент тензора деформации на берегах трещины содержат сингулярные интегралы [21]. В случае применения моделей ГТУ имеем ГИУ с кубической сингулярностью, что в корне меняет характер решения ГИУ и степень сингулярности компонент тензора напряжений [22]. В результате применения моделей ГТУ, где учитываются градиенты деформации первого порядка, сингулярность в представлении полей деформации и напряжений Коши в ГТУ уходит, и соответствующие поля становятся регулярными, однако полные напряжения у вершин дефекта остаются сингулярными, меняя степень сингулярности.

Дальнейшее численное исследование систем ГИУ возможно с использованием метода коллокаций, граничных элементов, квадратурных формул для сингулярных интегралов или аппроксимирующих полиномов Чебышева. Данная схема эффективно работает для задач в антиплоской постановке, однако расчеты сильно усложняются для задач в плоской постановке.

**Метод Рунге – Айфантиса.** Второй подход, эффективно используемый при решении задач в ГТУ, основывается на схеме, предложенной в работе Айфантиса с соавторами [23]. Упрощенная схема решения задач

ГТУ – метод Ру – Айфантиса – позволяет поэтапно получить аналитическое решение задачи, учитывая особенности классического решения линейной теории упругости. Отметим, что метод Ру – Айфантиса в динамических задачах может быть применен только в случае однопараметрической модели Айфантиса, т.е. при предположении  $l_2 = l_s = l$  в (4).

Опишем основные этапы метода Ру – Айфантиса.

1. Перепишем уравнение (4) в виде

$$C_{ijkl}(u_k - l^2 u_{k,mm})_{,jl} = \rho(\ddot{u}_i - l^2 \ddot{u}_{i,mm}). \quad (5)$$

Введем обозначение

$$u_k^c = u_k - l^2 u_{k,mm}. \quad (6)$$

2. В результате исходная система дифференциальных уравнений четвертого порядка (4) переписывается в виде комбинации двух подзадач:

2а) первая задача соответствует классической задаче линейной теории упругости:

$$C_{ijkl} u_{k,lj}^c = \rho \ddot{u}_i^c; \quad (7)$$

2б) вторая задача отвечает градиентному решению задачи, где  $u_k^c$  – решение, полученное из задачи (35)

$$u_k - l^2 u_{k,mm} = u_k^c. \quad (8)$$

Подобный подход позволяет решать эффективно сложную задачу в рамках градиентной модели, не повышая порядок уравнений. Таким образом, удается разбить решение исходной задачи на поэтапное решение двух простых проблем – краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка.

В результате такого подхода получаются несингулярные решения в окрестностях вершин для полей напряжений, что позволяет сформулировать новые критерии разрушения. Стоит также отметить следующее преимущество этого подхода – в отличие от стандартных моделей градиентной теории упругости, в которые входят несколько дополнительных градиентных параметров, в модели Ру – Айфантиса вводится всего лишь один дополнительный параметр, и не требуется введения моментных напряжений.

Развитие данной схемы для случая динамических задач ГТУ представлено в работе [4], выведены граничные условия и рассмотрена модельная задача для прямоугольника.

В работе [24] рассмотрены различные модельные задачи статики в плоской постановке для составной балки, полосы с круговой трещиной и полосы с внешними трещинами, задачи решены на базе подхода Ру – Айфантиса, решения классической ЛТУ получены конечно-элементными методами, которые в последующем учитываются для получения градиентных решений соответствующих задач.

В работах С.А. Лурье, В.В. Васильева [25; 26] предложена эффективная обобщенная модель для исследо-

вания задач теории упругости, которая схожа со схемой Ру – Айфантиса. Обобщенная теория развита для одномерных, двумерных и трёхмерных задач, сформулированы основные уравнения, учитывающие градиенты напряжений и записывающиеся в терминах обобщенных напряжений, деформаций и перемещений. Также основным преимуществом предлагаемой теории является возможность экспериментального определения параметра обобщенной модели (аналог градиентного параметра) и верификация полученных теоретических результатов с результатами экспериментов.

**Метода выделения погранслоиных решений.** Третий подход к решению задач теории упругости в рамках моделей ГТУ основан на принципе, предложенном Айфантисом, и сводится к построению решения в виде суммы решения классической задачи теории упругости и градиентного решения, представляющего собой погранслоиные решения. Поскольку в уравнениях (4) параметр градиентной модели стоит перед старшей производной дифференциального оператора, то погранслоиные решения могут быть построены на основе метода ВКБ (Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна) [27–29].

## 2. Исследование модельной задачи на основе метода ГИУ

В работе проведено масштабное исследование динамической задачи о колебаниях упругого однородного слоя с отслоением на нижней границе в рамках модели Айфантиса ГТУ. Такого рода объекты, ослабленные на границе с основанием или границе раздела сред, возникают очень часто, в процессе сварки или склейки слоя к основанию. Применения неклассических теорий к задаче продиктовано желанием получить уточненное напряженно-деформированное состояние и функции раскрытия трещины в окрестностях вершин трещины, а также провести анализ влияния малых параметров – параметра градиентной модели и длины дефекта на деформацию берегов дефекта.

### 2.1. Постановка модельной задачи

Рассмотрим установившиеся антиплоские (*Задача А*) и плоские (*Задача В*) колебания изотропной упругой полосы толщины  $h$ , закрепленной на нижней границе. На границе жесткого сцепления имеется отслоение длины  $2a$ . Колебания слоя вызваны нагрузкой, приложенной к части верхней границы слоя. Направим оси координат так, чтобы ось  $x_1$  совпала с нижней гранью полосы, ось  $x_3$  направим перпендикулярно вверх, а ось  $x_2$  совпадает с осью трещины, начало координат совместим со средней точкой отслоения. Рассматривается постановка, в которой верхняя часть отслоения не контактирует с основанием в процессе колебаний и свободна от напряжений. С учетом установившегося режима колебаний, когда приложенная нагрузка представима в виде  $\sigma_{r3}(x_1, x_3 = h, t) = p_r \delta(x_1 - L) e^{-i\omega t}$ , после отделения

временного множителя краевая задача в общем виде записывается как

$$(1-l^2\Delta)((\lambda+\mu)u_{j,r}+\mu u_{r,j}+\rho\omega^2u_r)=0, \quad j,r=1,2,3; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x_3=h, \quad \sigma_{r3} &= p_r\delta(x_1-L), \\ x_3=h, \quad m_{33r}(x_1,h) &= 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x_3=0, \quad u_r &= 0, \quad x_1 \notin [-a, a], \\ x_3=0, \quad m_{33r}(x_1,0) &= 0; \\ x_3=0, \quad x_r \in [-a, a], \quad \sigma_{r3} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Определяющие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rj} &= (1-l^2\Delta)(\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{rj}+2\mu\varepsilon_{rj}), \\ m_{krj} &= l^2(\lambda\varepsilon_{m,k}\delta_{rj}+2\mu\varepsilon_{rj,k}), \\ \varepsilon_{rj} &= \frac{1}{2}(u_{r,j}+u_{j,r}). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь для *Задачи А*  $r=2, j=1,3$ , для *Задачи В*  $r, j=1,3$ .

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых используется принцип предельного поглощения [30].

## 2.2. Асимптотика решения в вершине отслоения

Подробный асимптотический анализ решения для стационарной задачи в окрестности вершины отслоения проведен в работе [9] аналогично задаче для клина [31]. Аналогично определяется асимптотика компоненты поля смещения в вершине отслоения и для динамической задачи в полярной системе координат  $(r, \varphi)$ , начало которой совпадает с правой вершиной отслоения, и имеет вид

$$u_2 = Br^{3/2} + o(r^{3/2}), r \rightarrow 0. \quad (13)$$

Исходя из (13), можно сформулировать асимптотические оценки для механических полей. Например, в ГТУ напряжения Коши становятся регулярными и имеют асимптотику вида  $\tau_{2i} = Cr^{1/2} + o(r^{1/2})$ , в отличие от классической линейной теории упругости, в которой напряжения Коши имеют корневую особенность у вершин отслоения  $\tau_{2i}^{\text{класс}} = Dr^{-1/2} + o(r^{-1/2})$ .

Резюмируя, можно заключить, что в предложенной Айфантисом модели компоненты тензора деформации не имеют корневой особенности в вершине дефекта, регулярными также становятся компоненты тензора напряжений Коши. Асимптотические оценки будут учтены в последующих выкладках при построении вида разыскиваемых решений.

## 2.3. Формулировка граничных интегральных уравнений

Рассмотрим вспомогательную задачу, заменив классические условия на нижней границе в (10) на условие вида

$$x_3=0, \quad u_i = X_i, \quad i=1,2,3;$$

здесь введены функции  $X_i$ , характеризующие смещения нижней границы полосы, которые отличны от нуля лишь в месте отслоения ( $X_i \neq 0, x_1 \in [-a, a]$ ).

Для *Задачи В* будем разыскивать решение через волновые потенциалы, представив в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \Phi_1 + \Psi_3, \\ u_3 &= \Phi_3 - \Psi_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} (1-l^2\Delta)(\Delta+k_1^2)\varphi &= 0, \\ (1-l^2\Delta)(\Delta+k_3^2)\psi &= 0, \\ k_1^2 &= \rho\omega^2/(\lambda+2\mu), \quad k_3^2 = \rho\omega^2/\mu, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_3^2. \end{aligned} \quad (15)$$

После применения преобразования Фурье по координате  $x_1$  к *Задачам А* и *В*, обозначив трансформанту преобразования как

$$\tilde{u}_j(x_3, \alpha_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_j(x_1, x_3) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1, \quad j=1,2,3,$$

уравнения движения преобразуются к дифференциальным уравнениям четвертого порядка ( $D = \frac{\partial}{\partial x_3}$ ) вида

$$(1-l^2(D^2-\alpha_1^2))(D^2-\alpha_1^2+k^2)\tilde{u} = 0. \quad (16)$$

Для *Задачи А*  $k^2 = k_2^2 = \rho\omega^2/\mu, \tilde{u} = \tilde{u}_2$ .

Для *Задачи В*  $k^2 = k_1^2, \tilde{u} = \tilde{\varphi}$  или  $k^2 = k_3^2, \tilde{u} = \tilde{\psi}$ .

Решение (16) представимо в виде

$$\tilde{u}(\alpha_1, x_3) = \sum_{m=1}^4 A_m(\alpha_1) e^{\lambda_m(\alpha_1)x_3}, \quad (17)$$

где  $\lambda = (\sqrt{\alpha_1^2+1/l^2}, -\sqrt{\alpha_1^2+1/l^2}, \sqrt{\alpha_1^2-k^2}, -\sqrt{\alpha_1^2-k^2})$ .

Неизвестные функции  $A_m$  определяются из граничных условий (10) и представляются в виде

$$A_m = \frac{1}{\Delta_0} (\tilde{X} \cdot a_x + \tilde{p} \cdot a_p). \quad (18)$$

При этом для *Задачи А*  $A_m$  определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) четвертого порядка, для *Задачи В* – из решения СЛАУ восьмого порядка.

Для *Задачи А* (для *Задачи В* не приводится в силу громоздкости) выражение для  $\Delta_0$  имеет вид

$$\Delta_0 = -4l^2(\alpha_1^2 + 1/l^2)^{3/2}(\alpha_1^2 - k_2^2)^{1/2}(1 + l^2 k_2^2)^2 \quad (19)$$

$$sh((\alpha_1^2 + 1/l^2)h)ch((\alpha_1^2 - k_2^2)^{1/2}h).$$

Уравнение  $\Delta_0 = 0$  характеризует дисперсионное множество, отметим, что точки дисперсионного множества разбиваются на два подмножества, одно из которых соответствует классическому случаю  $ch((\alpha_1^2 - k_2^2)^{1/2}h) = 0$ , а второе зависит от градиентного параметра и определяется из уравнения  $sh((\alpha_1^2 + 1/l^2)h) = 0$ .

Далее, применив обратное преобразование Фурье, получаем интегральное представление соответствующих полей смещений в полосе

$$u(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^4 \int_{\sigma} A_m(\alpha_1) e^{\lambda_m(\alpha_1)x_3} e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1. \quad (20)$$

Контур интегрирования  $\sigma$  выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения [30].

Неизвестные компоненты функции раскрытия трещины  $X_i$  могут быть найдены из условий (11), осуществив предельный переход в каждой из **Задач А, В** к точке на трещине и, применив интегрирование по частям, в результате получаем системы ГИУ с разностными ядрами относительно функции  $\Phi_{0m}(\tau) = \chi'_m(\tau)$  [18; 22]

$$\int_{-a}^a K_{jm}(\tau - x_1) \Phi_{0m}(\tau) d\tau = F_j(x_1), \quad x_1 \in [-a, a],$$

$$K_{jm}(\tau - x_1) = -i \int_{\sigma} \frac{R_{jm}(\alpha_1)}{\alpha_1} e^{i\alpha_1(\tau - x_1)} d\alpha_1, \quad (21)$$

$$R_j(\alpha_1) = \frac{d_{jX}(0, \alpha_1)}{\Delta_0},$$

$$F_j(x_1) = \frac{p_j}{\mu} \int_{\sigma} \frac{d_{jP}(0, \alpha_1)}{\Delta_0} e^{-i\alpha_1(L+x_1)} d\alpha_1,$$

где  $m = 2, j = 1, 3$  для **Задачи А**,  $m, j = 1, 3$  для **Задачи В**.

Анализ ГИУ (21) показал, что после выделения главных и регулярных частей подынтегральных выражений ядер имеем систему ГИУ вида

$$\int_{-a}^a \left( \frac{L_{1jm}}{\tau - x_1} - \frac{2L_{3jm}}{(\tau - x_1)^3} + N_{0jm}(\tau, x_1) \right) \Phi_{0m}(\tau) d\tau = F_{0j}(x_1), \quad (22)$$

$$x_1 \in [-a, a]$$

$$N_{0jm}(\tau, x_1) = -i \int_{\sigma} \left( R_{jm}(\alpha_1) - L_{1jm} |\alpha_1| - L_{3jm} |\alpha_1|^3 \right) \alpha_1^{-1} e^{i\alpha_1(\tau - x_1)} d\alpha_1,$$

где соответствующие интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши, регулярные части ядер  $N_{0j}$  представлены несобственными интегралами и могут быть вычислены с использованием численных схем интегрирования.

## 2.4. Исследование и анализ ГИУ для Задачи А

Рассмотрим подробнее ГИУ для **Задачи А**. Введем безразмерные переменные и функции

$$\tau = at, \quad x_1 = ax, \quad t, x \in [-1, 1],$$

$$l_0 = a/h, \quad \kappa = kh, \quad s = l/h,$$

$$\Phi_{02}(at) = \Phi(t), \quad N_{022}(at, ax) = N(t, x), \quad F_{02}(ax) = F_1(x),$$

получим ГИУ вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{2s_1}{(t-x)^3} + \frac{s_2}{t-x} + l_0 N(t, x) \right) \Phi(t) dt = \frac{F_1(x)}{\pi}, \quad (23)$$

$$x \in [-1, 1]$$

$$s_2 = -1 + \frac{s^2 \kappa^2}{2}, \quad s_1 = s/l_0.$$

Сингулярные интегралы в (23) понимаются в смысле главного значения по Коши [32]. С учетом асимптотического решения в вершинах отслоения из п. 2.2 решение ГИУ (23) разыскиваем в виде

$$\Phi(t) = \sqrt{1-t^2} g(t), \quad t \in [-1, 1], \quad g(t) \in C[-1, 1].$$

Дискретизация ГИУ (23) возможна на базе метода коллокации на основе двух подходов – первая схема численного исследования опирается на квадратурные формулы для нерегулярных интегралов [32; 33], вторая схема связана с использованием полиномов Чебышева первого и второго рода и соответствующих спектральных соотношений, в результате которой решение ГИУ сводится к решению СЛАУ относительно коэффициентов разложения функции  $g(t)$  в ряд по полиномам Чебышева [22].

## 2.5. Анализ ГИУ Задачи А в зависимости от соотношения малых параметров

В граничном интегральном уравнении (23) присутствуют два малых параметра, от соотношения которых зависит характер решения ГИУ. Проведем анализ ГИУ при  $l_0 \rightarrow 0$ . Предельное значение правой части ГИУ при  $l_0 \rightarrow 0$  обозначим через  $F_c$ . Выделив главные части ГИУ с учетом малости параметров  $l_0, l$ , исследуем далее ГИУ вида

$$\frac{2s_1^2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{(t-x)^3} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{t-x} dt = \frac{F_c}{\pi}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (24)$$

Перейдем от ГИУ (24) к дифференциальному уравнению относительно интеграла Коши

$$H[\Phi](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{t-x} dt$$

с учетом того, что

$$H''[\Phi](x) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{(t-x)^3} dt.$$

ГИУ (24) переписывается в виде интегродифференциального уравнения ( $F_0 = \frac{F_c}{\pi}$ )

$$s_1^2 H'' - H = F_0. \quad (25)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (25) имеет вид

$$H[\Phi](x) = -F_0 + A_1 ch\left(\frac{x}{s_1}\right) + A_2 sh\left(\frac{x}{s_1}\right),$$

$$c = 1/s_1 = l_0/s.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{t-x} dt = g(x), \quad (26)$$

$$g(x) = -F_0 + A_1 ch\left(\frac{x}{s_1}\right) + A_2 sh\left(\frac{x}{s_1}\right).$$

Решение (26) в классе интегрируемых функций  $L^p[-1,1]$  имеет вид [34]

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt +$$

$$+ \frac{x}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{tg(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt. \quad (27)$$

Для отыскания ограниченного решения в (27) положим

$$\int_{-1}^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{tg(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0.$$

Отсюда можно найти коэффициенты  $A_1, A_2$  в виде

$$A_1 = \frac{F_0}{2J_0(1/s_1)}, \quad A_2 = 0.$$

Таким образом, решение сингулярного интегрального уравнения (26) имеет аналитическое полуявное интегральное представление вида

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt, \quad (28)$$

$$g(t) = -F_0 + \frac{F_0}{2J_0(1/s_1)} ch\left(\frac{t}{s_1}\right)$$

или, упрощая и учитывая  $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x-t)\sqrt{1-t^2}} dt = 0$ , получим

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \frac{F_0}{2J_0(1/s_1)} \int_{-1}^1 \frac{ch(t/s_1)}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt. \quad (29)$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть  $s_1^2 = \left(\frac{s}{l_0}\right)^2 < 1$ , т.е. градиентный параметр

меньше длины отслоения. Рассмотрим решение интегродифференциального уравнения (27), которое с учетом спектральных соотношений и известных формул для интегралов

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt = 0,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt = -\pi x, \quad \int_{-1}^1 \frac{2t^2-1}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt = -2\pi x,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{\pm t/s_1}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi J_0(1/s_1), \quad \int_{-1}^1 \frac{te^{\pm t/s_1}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pm \pi J_1(1/s_1) \quad (30)$$

запишется в виде

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \left[ A_1 \int_{-1}^1 \frac{e^{t/s_1}}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt + A_2 \int_{-1}^1 \frac{e^{-t/s_1}}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt \right] +$$

$$+ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \left[ -F_0 + J_0(1/s_1)(A_1 + A_2) \right] + \frac{J_1(1/s_1)}{\sqrt{1-x^2}} [A_1 - A_2].$$

В рамках рассматриваемого частного случая будем искать не ограниченное решение (27), а решение, соответствующее асимптотическому классическому решению, учитывая его характерное поведение в вершинах отслоения  $\Phi(x) = Bx/\sqrt{1-x^2}$ , таким образом, выберем коэффициенты  $A_1, A_2$  так, чтобы

$$\int_{-1}^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{tg(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0,$$

т.е. из решения однородной системы

$$\begin{cases} A_1 \int_{-1}^1 \frac{e^{t/s_1}}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt + A_2 \int_{-1}^1 \frac{e^{-t/s_1}}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt = 0, \\ A_1 - A_2 = 0 \end{cases}$$

которое имеет только тривиальное решение  $A_1 = A_2 = 0$ . Таким образом, получаем аналитическое решение (27) вида

$$\Phi(x) = -\frac{F_0 x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1,1]. \quad (31)$$

Полученное решение (31) относится к случаю малых значений градиентного параметра  $s$  и, как следовало ожидать, соответствует классическому решению линейной теории упругости в случае отслоения малого относительного размера.

2. Пусть  $s_1^2 = \left(\frac{s}{l_0}\right)^2 > 1$ , т.е. градиентный параметр больше длины отслоения, тогда  $J_0(1/s_1) \approx 1$  и из (29), с учетом (30) получаем

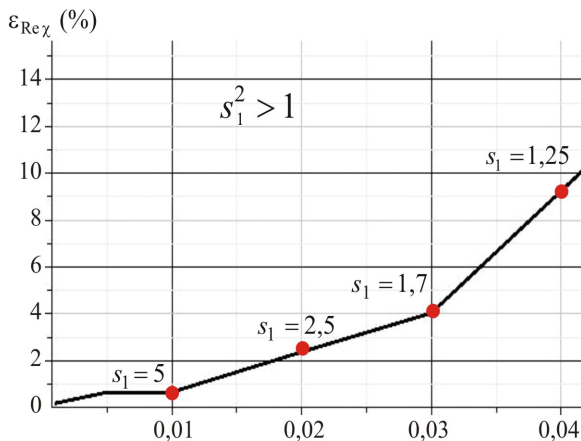
$$\begin{aligned} \Phi(x) &\approx \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \frac{F_0}{2} \int_{-1}^1 \frac{ch(t/s_1)}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \frac{F_0}{2} \int_{-1}^1 \frac{1+s_1^{-2}t^2/2}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt = \quad (32) \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \frac{F_0}{2} \left[ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt + \frac{1}{2s_1^2} \int_{-1}^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} dt \right] = \\ &= \frac{F_0}{4s_1^2} x\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Полученные выражения (29), (31), (32) в случае отслоения малого относительного размера позволяют получить явные выражения для расчета функции раскрытия трещины и существенно упростить их определение, сократив время счета.

Результаты численных экспериментов для случая **Задачи А** приведены на рис. 1 и 2. На рис. 1 изображены графики вещественной (в нижней полуплоскости) и мнимой (в верхней полуплоскости) частей функции раскрытия, рассчитанные из решения (23) (на основе метода коллокаций, с учетом спектральных соотношения для полиномов Чебышева [22]) для разных значений градиентного параметра на основании формулы

$$\chi(x) = l_0 \int_{-1}^x \Phi(t) dt, \quad x \in [-1, 1].$$

На рис. 2 приведены результаты, определяющие рабочие диапазоны формул (31) и (32) в зависимости от длины трещины (по горизонтальной оси). Из графиков



следует общий вывод: упрощенные формулы (31) и (32) можно использовать с погрешностью менее 10 % для отслоений, длина которых составляет до 20 % от толщины полосы.

Для выбора расчетной формулы стоит на входе определить соотношение входных параметров  $s_1$ : в случае, если  $s_1^2 > 1$ , то используем формулу (32), в случае, когда  $s_1^2 < 1$ , рассчитываем по формуле (31). На рис. 2 приведены графики относительной погрешности расчета вещественной части функции раскрытия трещины (мнимая имеет аналогичный характер), рассчитанной по общей схеме [22] и по упрощенной схеме п. 3.5 (31) или (32).

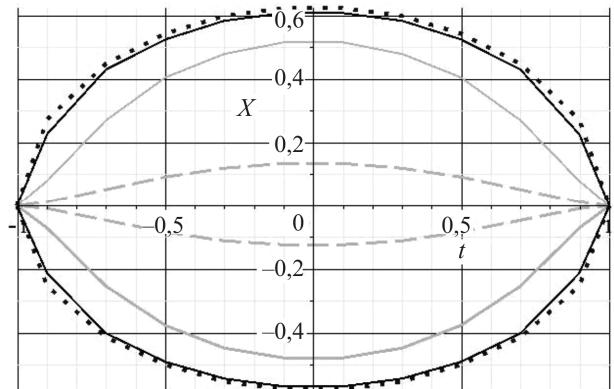


Рис. 1. Вещественная (верхний) и мнимая (нижний) части функции раскрытия трещины при  $\kappa = 6, l_0 = 0,07, L = 0,0, s = 0,001$  – сплошная черная,  $s = 0,01$  – сплошная серая,  $s = 0,03$  – штриховая, классическое решение ЛТУ  $s = 0,0$  – точки

Fig.1 The real (top) and imaginary (bottom) parts of the crack opening function at  $\kappa = 6, l_0 = 0.07, L = 0.0, s = 0.001$  – solid black,  $s = 0.01$  – solid gray,  $s = 0.03$  – dashed, classical LTU solution  $s = 0.0$  – points

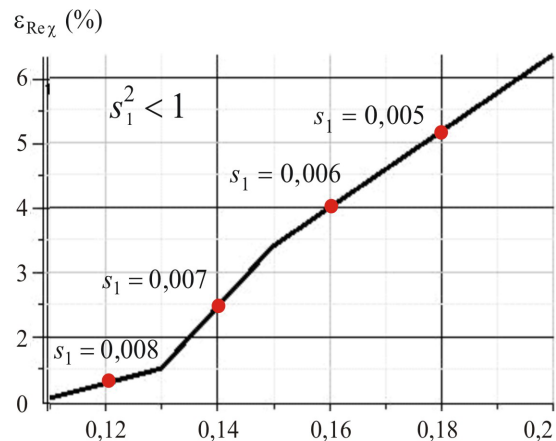


Рис. 2. Графики вещественной части относительной погрешности вычисления функции раскрытия трещины по упрощенной схеме для различных значений полудлины трещины, при  $\kappa h = 6, s = 0,05$  (левый),  $s = 0,001$  (правый)

Fig. 2. Plots of the real part of the relative error of crack opening function calculating according to the simplified scheme for different values of the crack half-length, at  $h = 6, s = 0.05$  (left),  $s = 0.001$  (right)



На левом рисунке представлены результаты для разных значений длины отслоения  $l_0 \in [0,001, 0,04]$  при фиксированном значении градиентного параметра  $s = 0,05$ , что соответствует случаю  $s_1^2 > 1$  и (32). Как видно из графика, для отслоений, полудлина которых не превышает 5 % от толщины полосы ( $l_0 < 0,05$ ), погрешность расчета составляет не более 10 %.

На правом рисунке рассмотрен случай, когда  $s_1^2 < 1$ ,  $s = 0,001$ , при этом длина отслоения меняется в диапазоне  $l_0 \in [0,05; 0,2]$ , использовалась формула (31). Как видно из графиков, для отслоений, полудлина которых составляет от 5 до 20 % толщины полосы, относительная погрешность расчета функции раскрытия не превышает 6 %.

### 3. Решение задачи в рамках ГТУ по схеме Ру – Айфантиса

Отметим, что несмотря на универсальность схемы, в основе которой лежит МГИУ, в случае **Задачи В** провести расчеты по предлагаемой схеме представляется достаточно сложным в плане вычислений задачи ввиду того, что приходится работать с матрицами большого размера. Также стоит учесть, что по вышеизложенной схеме регулярными становятся лишь поля деформации, однако поля полных напряжений по-прежнему содержат корневую особенность, меняя лишь степень сингулярности [22]. Исходя из этого, для исследования **Задачи В** была использована упрощенная схема Ру – Айфантиса, описанная в п. 2.

#### 3.1. Решение классической задачи ЛТУ

Рассмотрим решение исходной **Задачи В** в рамках ЛТУ  $u_i^c$ :

$$(\lambda + \mu)u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad i, j = 1, 3, \quad (33)$$

$$x_3 = h, \quad \sigma_{i3} = p_i \delta(x_1 - L), \quad (34)$$

$$x_3 = 0, \quad u_i = 0, \quad x_1 \notin [-a, a],$$

$$x_3 = 0, \quad x_i \in [-a, a], \quad \sigma_{i3} = 0.$$

Аналогично п. 2 рассматриваем вспомогательную задачу, введя функции раскрытия трещины. Решение ищем через волновые потенциалы (14), применив преобразование Фурье по координате  $x_1$ , получим систему дифференциальных уравнение второго порядка относительно трансформант волновых потенциалов, решение которой не представляется сложным, в результате получаем представление для трансформант полей смещений

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\alpha_1, x_3) &= -i\alpha_1 C_1 e^{\lambda_1 x_3} - i\alpha_1 C_2 e^{-\lambda_1 x_3} + C_3 \lambda_2 e^{\lambda_2 x_3} - C_4 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_3}, \\ \tilde{u}_3(\alpha_1, x_3) &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x_3} - C_2 \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_3} + i\alpha_1 C_3 e^{\lambda_2 x_3} + i\alpha_1 C_4 e^{-\lambda_2 x_3}, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $\lambda_1 = \sqrt{\alpha_1^2 - k_1^2}$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{\alpha_1^2 - k_3^2}$ , функции  $C_i$  определяются из граничных условий (34).

Далее применим обратное преобразование Фурье, составим выражения для напряжений, осуществим предельный переход при  $x_3 = 0$  и, учитывая условие отсутствия напряжений на трещине, получим систему ГИУ относительно функций раскрытия

$$\int_{-a}^a \chi_m(\tau) k_{mj}(\tau - x_1) d\tau = f_j(x_1), \quad x_1 \in [-a, a], \quad m, j = 1, 3. \quad (36)$$

После выделения главных и регулярных частей ядер системы ГИУ, после введения безразмерных переменных, аналогично п. 2.2 получим систему вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{l_{mj}}{(t-x)^2} + l_0^2 n_{mj}(t, x) \right) \chi_m(t) dt = l_0 f_j(x), \quad (37)$$

$$x \in [-1, 1], \quad m, j = 1, 3,$$

$$l_{11} = -\frac{2k_3^2}{r}, \quad l_{13} = -\frac{2ik_1^2}{r},$$

$$l_{31} = -i \frac{\nu(k_3^2 + k_1^2) + k_1^2 - k_3^2}{r}, \quad l_{33} = -\frac{2k_1^2}{r}, \quad r = k_3^2 + k_1^2,$$

$$f_m = 2 \int_{\sigma} \frac{f_{m0}(\alpha_1)}{\Delta_c} \cos(\alpha_1(L + l_0 x)) d\alpha_1,$$

$$f_{10} = 4i\alpha_1 \lambda_1 (\alpha_1^2 - \lambda_2^2) (2\lambda_1 \lambda_2 sh(\lambda_1 h) - sh(\lambda_2 h) (\alpha_1^2 + \lambda_2^2)),$$

$$f_{30} = 4\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \alpha_1^2) (2\alpha_1^2 ch(\lambda_1 h) - ch(\lambda_1 h) (\lambda_2^2 + \alpha_1^2)),$$

$$\Delta_c = \det(A_c),$$

где  $n_{mj}(t, x)$  – регулярные части ядер системы ГИУ,

которые не приводятся в силу громоздкости,  $\nu = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$

– коэффициент Пуассона.

Дискретизация системы ГИУ (37) возможна на основе метода коллокаций и метода граничных элементов (ГЭ) с выделением характерной корневой структуры у вершин отслоения  $\chi_m(t) = \sqrt{1-t^2} g_m(t)$ ,  $m = 1, 3$ . Дискретизация также возможна на базе асимптотического анализа задачи для отслоений малой относительной длины.

#### 3.2. Асимптотический анализ задачи для отслоений малого относительного размера

Асимптотический подход основан на априорном предположении о малости относительно размера дефекта. Асимптотический подход был ранее опробован на прямых и обратных задачах для слоя с внутренней криволинейной/прямолинейной трещиной [21; 22].

Асимптотический анализ ядер и правых частей ГИУ (4.5) сводится к исследованию системы интегральных уравнений с гиперсингулярными ядрами и постоянными правыми частями вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{l_{mj}}{(t-x)^2} \chi_m(t) dt = l_0 f_j^c, \quad x \in [-1, 1], \quad m, j = 1, 3, \quad (38)$$

$$f_j(x) \xrightarrow{l_0 \rightarrow 0} f_j^c,$$

которая имеет решение в классе ограниченных функций вида

$$\chi_m(t) = -0.5 l_0 \sqrt{1-t^2} W_{0m}(t), \quad i = 1, 3, \quad (39)$$

$$W_{01} = \frac{f_3^c l_{13} - f_1^c l_{33}}{l_{11} l_{33} - l_{13} l_{31}}, \quad W_{03} = \frac{f_1^c l_{31} - f_3^c l_{11}}{l_{11} l_{33} - l_{13} l_{31}},$$

Благодаря асимптотическому подходу удается избежать громоздких и затратных по времени вычислений и получить полувывные представления функций раскрытия трещины, а также упростить выражения для полей смещений.

На рис. 3 приведены графики относительной погрешности расчета функции раскрытия трещины, рассчитанные по МГЭ и по упрощенной схеме (39), в зависимости от относительного размера отслоения.

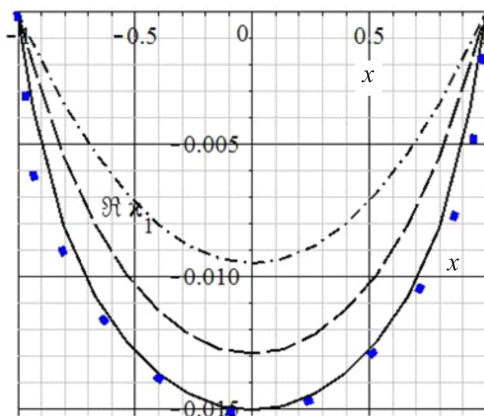
### 3.3. Градиентное решение по методу Ру – Айфантиса

После решения классической задачи теории упругости можно получить упрощенное градиентное решение задачи из решения (8) с соответствующими граничными условиями.

Поскольку нас в большей степени интересует напряженно-деформированное состояние в окрестности концентратора напряжений, т.е. в вершине отслоения, то мы, не нарушая общности рассуждений, рассмотрим градиентное решение при  $x_3 = 0$ , удовлетворяющее краевой задаче

$$\chi_i^{gr} - s_1^2 (\chi_i^{gr})'' = \chi_i^c, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\chi_i^{gr}(1) = \chi_i^{gr}(-1) = 0, \quad s_1 = (s/l_0), \quad (40)$$



где  $\chi_k^c$  – решение классической задачи ЛТУ, полученное в п. 3.1 или 3.2.

Решение (40) не представляется сложным и имеет вид

$$\chi_i^{gr}(x) = s_1 \int_{-1}^x \chi_i^c(t) sh((t+x)/s_1) dt - s_1 \int_{-1}^1 \chi_i^c(t) sh((t+1)/s_1) dt \frac{sh((1+x)/s_1)}{sh(2/s_1)}. \quad (41)$$

На рис. 4 приведены соответствующие графики функции раскрытия трещины при различных значениях градиентного параметра. Как видно из графиков, с увеличением параметра  $s$  происходит уточнение значений функции раскрытия, в частности, наблюдается особое поведение при подходе к вершинам трещины под определенным углом, отличным от прямого угла, как происходит в случае ЛТУ.

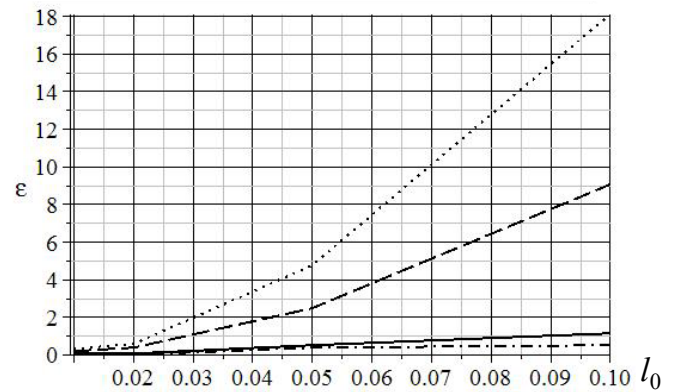


Рис. 3. Графики относительной погрешности расчета компонент функции раскрытия для плоской задачи,  $\epsilon_{Re(\chi_1)}$  – сплошная,  $\epsilon_{Re(\chi_3)}$  – точки,  $\epsilon_{Im(\chi_1)}$  – штриховая,  $\epsilon_{Im(\chi_3)}$  – штрихпунктирная

Fig. 3. Plots of the relative error of the relative error of crack opening function components for the plane problem,  $\epsilon_{Re(\chi_1)}$  – solid,  $\epsilon_{Re(\chi_3)}$  – dots,  $\epsilon_{Im(\chi_1)}$  – dashed,  $\epsilon_{Im(\chi_3)}$  – dash-dotted

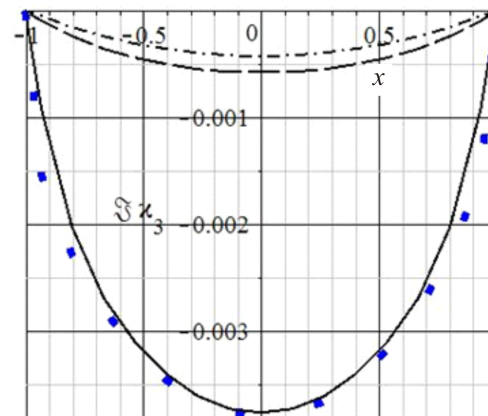


Рис. 4. Графики компонент функции раскрытия трещины (слева – вещественная часть  $\chi_1^{gr}$ , справа – мнимая часть  $\chi_3^{gr}$ ) при  $l_0 = 0.02$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_3 = 2$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $L = 0.0$ ,  $s = 0, 0$  – квадратики (ЛТУ),  $s = 0, 002$  – сплошная,  $s = 0, 005$  – штриховая,  $s = 0, 01$  – штрихпунктирная

Fig. 4. Plots of the crack opening function components (left – real part of  $\chi_1^{gr}$ , right – imaginary part of  $\chi_3^{gr}$ ), at  $l_0 = 0.02$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_3 = 2$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $L = 0.0$ ,  $s = 0, 0$  – squares (LTE),  $s = 0, 002$  – solid,  $s = 0, 005$  – dashed,  $s = 0, 01$  – dash-dotted

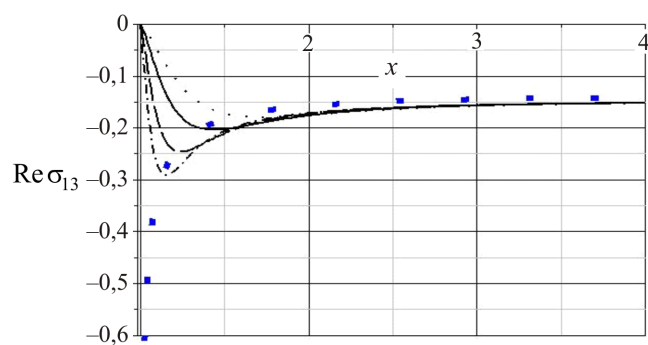


Рис. 5. График вещественной части компоненты касательного напряжения в окрестности правой вершины отслоения  $p_0 = 1$ ,  $L = 0$ ,  $l_0 = 0,02$  при  $s = 0$  – квадратики (ЛТУ),  $s = 0,0013$  – штрихпунктирная,  $s = 0,002$  – штриховая,  $s = 0,003$  – сплошная,  $s = 0,005$  – точки

Fig. 5. The real part plots of the tangential stress component in the area of crack's right tip at  $p_0 = 1$ ,  $L = 0$ ,  $l_0 = 0.02$ , at  $s = 0$  – squares (LTE),  $s = 0,0013$  – dash-dotted,  $s = 0,002$  – dashed,  $s = 0,003$  – solid,  $s = 0,005$  – dots

Следуя принципу поиска решений в рамках ГТУ [24; 26] на основе метода Ру – Айфантиса, напряжения в окрестности границы отслоения также можно разыски-

вать по упрощенной схеме, на основе найденных полей смещений из решения классической задачи теории упругости.

На рис. 5 приведены результаты расчета для вещественной части касательного напряжения при  $l_0 = 0,02$  при различных значениях параметра ГТУ. Как видно из рисунка, в окрестности вершины у графиков напряжений, полученных по ГТУ, наблюдается локальный максимум, который может быть использован при формулировке новых критериев прочности.

## Выводы

Таким образом, осуществлено исследование задачи о колебаниях полосы с отслоением на базе однопараметрической модели Айфантиса ГТУ. Исследование проведено на основе различных подходов к построению градиентных решений. Проведено исследование зависимости градиентного решения от соотношения малых характерных параметров задачи, в рамках которых получены полуаналитические решения исследуемой задачи. Осуществлен численный анализ плоской и антиплоской задач с позиции градиентной и классической линейной теории упругости.

## Библиографический список

1. Об уточнении напряжённого состояния в прикладных задачах упругости за счёт градиентных эффектов / Е.В. Ломакин, С.А. Лурье, Л.Н. Рабинский, Ю.О. Соляев // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 489, № 6. – С. 585–591. DOI: 10.31857/S0869-56524896585-591
2. Askes H., Aifantis E.C. Gradient elasticity in static and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – Vol. 48. – P. 1962–1990. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006.
3. Askes H., Aifantis E.C. Gradient elasticity and flexural wave dispersion in carbon nanotubes // Physical review. – 2009. – Vol. 80, Art. number 195412. DOI: 10.1103/PhysRevB.80.195412
4. Askes H., Bennett T., Aifantis E.C. A new formulation and  $C^0$ -implementation of dynamically consistent gradient elasticity // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 2007. – Vol. 72, no. 1. – P. 111–126. DOI: 10.1002/nme.2017
5. Exadaktylos G. Gradient elasticity with surface energy: mode-I crack // International Journal of Solids and Structures. – 1997. – Vol. 35. – P. 421–456.
6. Vardoulakis I., Exadaktylos G., Aifantis E.C Gradient elasticity with surface energy: mode-III crack problem // International Journal of Solids and Structures. – 1994. – Vol. 33, No. 33. – P. 4531–4559. DOI: 10.1016/0020-7683(95)00277-4.
7. Erdogan F., Gupta G.D. On the numerical solution of singular integral equations // Q. Appl. Math. – 1972. – Vol. 30. – P. 525–534.
8. Konda N., Erdogan F. The mixed mode crack problem in a nonhomogeneous elastic medium // Engineering fracture mechanics. – 1994. – Vol. 47, no. 4. – P. 533–545.
9. The mode III full-field solution in elastic materials with strain gradient effects / L. Zhang, Y. Huang, J.Y. Chen, K.C. Hwang // International Journal of Fracture. – 1998. – Vol. 92, no. 4. – P. 325–348. DOI: 10.1023/A: 1007552621307.

10. Karimipour I., Fotuhi A.R. Anti-plane analysis of an infinite plane with multiple cracks based on strain gradient theory // Acta Mech. – 2017. – Vol. 228. – P. 1793–1817. DOI: 10.1007/s00707-016-1793-0.
11. Wang X.A Circular inhomogeneity incorporating surface/interface strain gradient elasticity // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2018. – Vol. 23, no. 4. – P. 573–587. DOI: 10.1177/1081286516680865
12. Gradient theory for crack problems in quasicrystals / J. Sladek, V. Sladek, M. Repka, S. Schmauder // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2019. – Vol. 77. Art. number 103813. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2019.103813.
13. Fracture mechanics analysis of size-dependent piezoelectric solids / J. Sladek, V. Sladek, P. Stanak, Ch. Zhang, Ch.-L. Tan // International Journal of Solids and Structures. – 2017. – Vol. 113–114. – P. 1–9. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.08.011.
14. Shlyannikov V., Tumanov A., Khamidullin R. Strain-gradient effect on the crack tip dislocations density // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2020. – Vol. 14, no. 54. – P. 192–201. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.54.14.
15. Martínez-Pañeda E., Fleck N.A. Mode I crack tip fields: Strain gradient plasticity theory versus J2 flow theory // European Journal of Mechanics – A/Solids. – No. 75. – P. 381–388. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2019.02.009.
16. Хамидуллин Р.М., Федотова Д.В. Анализ полей напряжений в вершине трещины и параметры сопротивления разрушению в условиях градиентной пластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 4. – С. 136–148. DOI: 10.15593/pern.mech/2021.4.13
17. Georgiadis H.G. The mode III crack problem in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity: static and dynamic analysis // Journal of Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 70. – P. 517–530.

18. Fannjiang A.C., Chan Y.-S., Paulino G.H. Strain gradient elasticity for antiplane shear cracks: A hypersingular integrodifferential equation approach // *Society for Industrial and Applied Mathematics*. – 2006. – Vol. 62, no. 3. – P. 1066–1091.

19. Paulino G.H., Fannjiang A.C., Chan Y.-S. Gradient elasticity theory for mode III fracture in functionally graded materials – Part I: crack perpendicular to the material gradation // *Journal of Applied Mechanics*. – 2003. – Vol. 70. – P. 531–542.

20. Change of constitutive relations due to interaction between strain-gradient effect and material gradation / Y.-S. Chan, G.H. Paulino, A.C. Fannjiang, Y.-S. Chan // *Journal of Applied Mechanics*. – 2006. – Vol. 73. – P. 871–875.

21. Ватульян А.О., Явруян О.В. Асимптотический метод решения задачи идентификации криволинейной трещины в упругом слое // *Дефектоскопия*. – 2020. – № 10. – С. 39–48. – DOI: 10.31857/S0130308220100048.

22. Ватульян А.О., Явруян О.В. Колебания слоя с расслоением в рамках градиентной теории упругости // *Дефектоскопия*. – 2021. – № 10. – С. 3–15. – DOI: 10.31857/S0130308221100018.

23. Ru C.Q., Aifantis E.C. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity // *Acta Mechanica*. – 1993. – Vol. 101. – P. 59–68.

24. Askes H., Morata I., Aifantis E.C. Finite element analysis with staggered gradient elasticity // *Computers and Structures*. – 2008. – Vol. 86, no. 11–12. – P. 4531–4559. DOI: 10.1016/j.compstruc.2007.11.002.

25. Васильев В.В., Лурье С.А. Обобщенная теория упругости // *МТТ* – 2015. – № 4. – С.16–27.

## References

1. Lomakin E.V., Lurie S.A., Rabinskiy L.N., Solyaev Y.O. Refined stress analysis in applied elasticity problems accounting for gradient effects. *Doklady Physics*, 2019, Vol. 64, No.12, pp.482–486.

2. Askes, H., Aifantis, E.C. Gradient elasticity in static and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, Vol. 48, pp.1962–1990.

3. Askes, H., Aifantis, E.C. Gradient elasticity and flexural wave dispersion in carbon nanotubes. *Physical review*, 2009, Vol. 80, Art. number 195412.

4. Askes, H., Bennett, T., Aifantis, E.C. A new formulation and  $C^0$ -implementation of dynamically consistent gradient elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2007, Vol. 72, No.1, pp. 111–126.

5. Exadaktylos, G. Gradient elasticity with surface energy: mode-I crack. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, Vol. 35, pp. 421–456.

6. Vardoulakis, I., Exadaktylos, G., Aifantis, E.C. Gradient elasticity with surface energy: mode-III crack problem. *International Journal of Solids and Structures*, 1994, Vol. 33, No.33, pp. 4531–4559.

7. Erdogan, F., Gupta, G.D. On the numerical solution of singular integral equations. *Q. Appl. Math.*, 1972, Vol. 30, pp. 525–534.

8. Konda, N., Erdogan, F. The mixed mode crack problem in a nonhomogeneous elastic medium. *Engineering fracture mechanics*, 1994, Vol. 47, No.4, pp. 533–545.

9. Zhang, L., Huang, Y., Chen, J.Y., Hwang, K.C. The mode III full-field solution in elastic materials with strain gradient effects. *International Journal of Fracture*, 1998, Vol. 92, No.4, pp. 325–348.

10. Karimipour, I., Fotuhi, A.R. Anti-plane analysis of an infinite plane with multiple cracks based on strain gradient theory. *Acta Mech.*, 2017, Vol. 228, pp. 1793–1817.

26. Васильев В.В., Лурье С.А. Нелокальные решения сингулярных задач математической физики и механики // *ПММ* – 2018. – Т. 82, № 4. – С.459–471.

27. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to numerical analysis. – Springer, 2002. – 746 p. DOI: 10.1007/978-0-387-21738-3.

28. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977. – 384 с.

29. Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с покрытием на основе градиентной модели термоупругости // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2021. – № 4. – С. 60–70. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.07.

30. Ворович И.И., Бабешко В.В. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1989. – 320 с.

31. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

32. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М.: Наука, 1985. – 253с.

33. Саакян А.В. Решение задачи для краевой трещины с гиперсингулярным определяющим уравнением методом механических квадратур. // *Известия НАН РА. Механика*. – 2020. – Т.73, № 2. – С. 44–57. DOI: 10.33018/73.2.4.

34. Мухомелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

11. Wang, X.A. Circular inhomogeneity incorporating surface/interface strain gradient elasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2018, vol. 23, No.4, pp. 573–587.

12. Sladek, J., Sladek, V., Repka, M., Schmauder, S. Gradient theory for crack problems in quasicrystals. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2019, Vol. 77, Art. number 103813.

13. Sladek, J., Sladek, V., Stanak, P., Zhang, Ch., Tan Ch.-L. Fracture mechanics analysis of size-dependent piezoelectric solids. *International Journal of Solids and Structures*. 2017, Vol. 113–114, pp. 1–9.

14. Shlyannikov, V., Tumanov, A., Khamidullin, R., Strain-gradient effect on the crack tip dislocations density. *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2020, Vol. 14, No.54, pp. 192–201.

15. Martínez-Pañeda, E., Fleck, N.A. Mode I crack tip fields: Strain gradient plasticity theory versus J2 flow theory. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, No.75, pp. 381–388.

16. Khamidullin R.M., Fedotova D.V. Analiz polej naprjazhenij v vershine treshhiny i parametry soprotivlenija razrusheniju v uslovijah gradientnoj plastichnosti [Analysis of stress fields at the crack tip and fracture resistance parameters under conditions of gradient plasticity]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, No.4, pp. 136–148.

17. Georgiadis H.G. The mode III crack problem in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity: static and dynamic analysis. *Journal of Applied Mechanics*, 2003, Vol. 70, pp. 517–530.

18. Fannjiang A.C., Chan Y.-S., Paulino G.H. Strain gradient elasticity for antiplane shear cracks: A hypersingular integrodifferential equation approach. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2006, Vol. 62, No.3, pp. 1066–1091.

19. Paulino, G.H., Fannjiang, A.C., Chan, Y.-S. Gradient elasticity theory for mode III fracture in functionally graded mate-

rials – Part I: crack perpendicular to the material gradation. *Journal of Applied Mechanics*, 2003, Vol. 70, pp. 531–542.

20. Chan, Y.-S., Paulino, G.H., Fannjiang, A.C., Chan, Y.-S. Change of constitutive relations due to interaction between strain-gradient effect and material gradation. *Journal of Applied Mechanics*, 2006, Vol. 73, pp. 871–875.

21. Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. An asymptotic method for solving the problem of identifying a curvilinear crack in an elastic layer. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2020, Vol. 56, No.10, pp. 810–819.

22. Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Oscillations of a layer with delamination in the context of the gradient theory of elasticity. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2021, No.10, pp. 3–15.

23. Ru C.Q., Aifantis, E.C. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity. *Acta Mechanica*, 1993, Vol. 101, pp. 59–68.

24. Askes, H., Morata, I., Aifantis, E.C. Finite element analysis with staggered gradient elasticity. *Computers and Structures*, 2008, Vol. 86, No.11–12, pp. 4531–4559.

25. Vasil'ev V.V., Lurie S.A. Generalized theory of elasticity. *Mechanics of Solids*, 2015, Vol. 50, No.4, pp. 379–388.

26. Vasiliev V.V., Lurie S.A. Nonlocal solutions to singular problems of mathematical physics and mechanics. *Mechanics of Solids*, 2018, Vol. 53, No.S (2), pp. 5–144.

27. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to numerical analysis. *Springer*, 2002, 746 p.

28. Maslov V.P. Kompleksnyj metod VKB v nelinejnyh uravnenijah [Complex VKB method in nonlinear equations]. M.: Nauka, 1977, 384 p.

29. Vatulyan A.O., Nesterov S.A., Yurov V.O. Issledovanie naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija pologo cilindra s pokrytiem na osnove gradientnoj modeli termouprugosti [Investigation of the stress-strain state of a hollow cylinder with a coating based on the gradient model of thermoelasticity]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, No.4, pp. 60–70.

30. Vorovich I.I., Babeshko V.V. Dinamicheskie smeshannie zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey [Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka, 1989, 320 p.

31. Parton V.Z., Perlin P.I. Metody matematicheskoj teorii uprugosti [Methods of mathematical theory of elasticity]. M.: Nauka, 1981, 688 p.

32. Belocerkovskij S.M., Lifanov I.K. Chislennye metody v singularnyh integral'nyh uravnenijah i ih primenenie v ajerodinamike, teorii uprugosti, jelektrodinamike [Numerical methods in singular integral equations and their applications in aerodynamics, theory of elasticity, electrostatics]. M.: Nauka, 1985, 253 p.

33. Saakjan A.V. Reshenie zadachi dlja kraevoj treshhiny s gipersinguljarnym opredelajushhim uravneniem metodom mehanicheskikh kvadratur [Problem solution for an edge crack with hypersingular defining equation by mechanical quadrature method.], *Proceedings of the National Academy of Sciences of RA. Mechanics*, 2020, Vol. 73, № 2, pp. 44–57.

34. Mushelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]. M.: Nauka, 1966. 708 p.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, Южный федеральный университет.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Financing.** The research was supported by RSF No. 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, Southern Federal University.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.