



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.12

УДК 539.375

О ВЛИЯНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ НА ПРОЧНОСТЬ КОМПОЗИТА. ЧАСТЬ 1. УПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ

В.Э. Богачева¹, В.В. Глаголев¹, Л.В. Глаголев², А.А. Маркин¹

¹Тулский государственный университет, Тула, Россия

²Конструкторское бюро приборостроения им. академика А.Г. Шипунова, Тула, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 20 сентября 2022 г.

Одобрена: 10 октября 2022 г.

Принята к публикации:

01 ноября 2022 г.

Ключевые слова:

энергетическое произведение, J-интеграл, адгезионный слой, линейный параметр, нормальный разрыв.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются задача деформирования ДКБ-образца, представляющего собой композицию тел, связанных адгезионным слоем конечной толщины. На основе вариационного уравнения равновесия, содержащего толщину слоя в качестве линейного параметра, построено конечно-элементное решение задачи нагружения слоя нормальным разрывом в состоянии плоской деформации. Средние по толщине слоя напряжения связаны с напряжениями по границе слоя уравнениями равновесия. Граничные напряжения слоя формируют граничные условия для сопрягаемых тел. В слое, наряду с напряжениями отрыва, учитываются и ортогональные отрыву напряжения. Определяющие соотношения в слое представляются через средние напряжения. При существенном различии в модулях Юнга адгезива и сопрягаемых тел показана сходимости значения J-интеграла при уменьшении толщины слоя. Для нахождения J-интеграла используется его представление в виде произведения удельной свободной энергии на торце слоя и его толщины. Установлено, что коэффициент Пуассона тел оказывает влияние на величину J-интеграла, а коэффициент Пуассона адгезионного слоя практически не влияет на величину J-интеграла. С использованием теории пластин Миндлина – Рейснера при нулевом коэффициенте Пуассона адгезива получено аналитическое представление J-интеграла. В представление входят энергетические слагаемые, связанные с напряжением отрыва и с осевым напряжением в слое, пропорционально квадрату отношения модулей Юнга адгезионного слоя и сопрягаемых им тел. Из полученного решения следует, что механические свойства адгезионного слоя с малой, по сравнению с телами, толщиной не влияют на значение J-интеграла, если модуль упругости адгезионного слоя значительно меньше модуля упругости сопрягаемых тел. Таким образом использование замены адгезионного слоя слоем нулевой толщины корректно при данных ограничениях.

© ПНИПУ

© Богачева Виктория Эдуардовна – асп., e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, ID: 0000-0002-6303-2160

Глаголев Вадим Вадимович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: vadim@tsu.tula.ru, ID: 0000-0003-0371-7704

Глаголев Леонид Вадимович – к.ф.-м.н., вед. инж., e-mail: len4ic92@gmail.com, ID: 0000-0003-2313-2084

Маркин Алексей Александрович – д.ф.-м.н., проф., e-mail: markin-nikram@yandex.ru, ID: 0000-0003-1456-8281

Viktoriya E. Bogacheva – PhD Student, e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru, ID: 0000-0002-6303-2160

Vadim V. Glagolev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: vadim@tsu.tula.ru, ID: 0000-0003-0371-7704

Leonid V. Glagolev – CSc of Physical and Mathematical Sciences, engineer, e-mail: len4ic92@gmail.com, ID: 0000-0003-2313-2084

Alexey A. Markin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: markin-nikram@yandex.ru,

ID: 0000-0003-1456-8281



ON THE INFLUENCE OF THE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF A THIN ADHESION LAYER ON THE COMPOSITE STRENGTH. PART 1. ELASTIC DEFORMATION

V.E. Bogacheva¹, V.V. Glagolev¹, L.V. Glagolev², A.A. Markin¹

¹Tula State University, Tula, Russian Federation

²Instrument Design Bureau named after Academician A.G. Shipunov, Tula, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 September 2022

Approved: 10 October 2022

Accepted for publication:

01 November 2022

Keywords:

energy product, J-integral, adhesive layer, linear parameter, normal rupture.

ABSTRACT

The problem of deformation of a DCB sample, which is a composition of bodies bound by an adhesive layer of finite thickness, is considered. Based on the variational equilibrium equation containing the layer thickness as a linear parameter, a finite element solution of the problem of loading the layer with a normal discontinuity in the plane strain state is constructed. The stresses averaged over the layer thickness are related to the stresses along the layer boundary by the equilibrium equations. The boundary stresses of the layer form the boundary conditions for the mating bodies. In the layer, along with shear stresses, stresses orthogonal to shear are also taken into account. The constitutive relations in the layer are represented in terms of average stresses. With a significant difference in the Young's moduli of the adhesive and mating bodies, the convergence of the value of the J-integral with a decrease in the layer thickness is shown. To find the J-integral, its representation is used as a product of the specific free energy at the end of the layer and its thickness. It has been established that the Poisson's ratio of the bodies affects the value of the J-integral, and the Poisson's ratio of the adhesive layer has almost no effect on the value of the J-integral. Using the theory of plates Mindlin – Reisner at zero Poisson's ratio of the adhesive, an analytical representation of the J-integral is obtained. The representation includes energy terms related to the pull-off stress and the axial stress in the layer. In this case, the term associated with the axial stress in the layer is proportional to the square of the ratio of the Young's moduli of the adhesive layer and the bodies mating with it. From the solution obtained, it follows that the mechanical properties of the adhesive layer with a small thickness compared to bodies do not affect the value of the J-integral if the elastic modulus of the adhesive layer is significantly less than the elastic modulus of the mating bodies. Thus, the use of replacing the adhesive layer with a layer of zero thickness is correct under these restrictions.

© PNRPU

Введение

Исследование сопряжения твердых тел адгезионным слоем предполагает прочностный анализ зоны обрыва связей. Когда толщина слоя значительно меньше толщины соединяемых тел, область обрыва адгезионных связей может быть рассмотрена в виде трещиноподобного дефекта. В этом случае в качестве критерия разрушения можно использовать достижение J-интегралом [1–6] критического значения. Для модели трещины в виде математического разреза адгезионный слой рассматривается в виде слоя нулевой толщины [7–11] с жестким сцеплением сопрягаемых тел. При этом прямое задание механических свойств адгезива исключено, основным расчетным параметром в этом случае является коэффициент интенсивности напряжений. Его нахождение для тел конечных размеров возможно решением 2D-задачи различными методами [12–17], в том числе и методом конечных элементов (МКЭ) [18–21]. В ряде случаев возможно получение аналитических решений [22–25] с использованием в рассмотрении упрощения теории балок или пластин [26–29].

При нахождении J-интеграла возникает вопрос о влиянии учета механических свойств адгезионного слоя на прочность композита. Явное задание механических свойств адгезива возможно только при рассмотрении слоя в рамках материального объема. Прямое модели-

рование задачи МКЭ [30] не является корректным, так как содержит особые точки [31; 32]. Использование когезионных элементов сопряжено с заданием закона неустойчивого по Дракеру деформирования [33]. Для случая нормального разрыва слоя широко используется модель Прандтля [34–36], представляющая слой в виде пружин с определенной жесткостью и заданным размером, работающих на растяжение и сжатие. Нахождение потока упругой энергии в вершину двухконсольной балки (ДКБ-образца) на основе данной модели рассмотрено в работах [23; 25]. При этом вопрос об определении жесткости пружин и задании характерного линейного размера открыт. Рассмотрение слоя в виде сплошной среды с механическими характеристиками адгезива требует адекватной постановки и решения соответствующих задач.

В предлагаемой работе на основе концепции слоя взаимодействия МКЭ решена линейно упругая задача нормального разрыва тонкого адгезионного слоя в ДКБ-образце. Показано, что имеет место существенная зависимость J-интеграла от коэффициента Пуассона сопрягаемых слоев тел и практически отсутствует зависимость J-интеграла от коэффициента Пуассона адгезионного слоя при существенных различиях в модулях Юнга адгезионного слоя и связанных им тел. В случае равенства коэффициента Пуассона слоя нулю получено аналитическое решение задачи в рамках тео-

рии пластин Миндлина – Рейснера. Установлено, что учет свойств адгезионного слоя дополняет J-интеграл слагаемым пропорциональным квадрату отношения модулей Юнга адгезионного слоя и сопрягаемых им тел. Если этим слагаемым пренебречь, то получаем результат, согласующийся с известными решениями [23; 25].

1. Постановка задачи

На рис. 1 показана схема нагружения слоистого композита длиной $\ell + a$, состоящего из трех тел. Тела 1 и 2 с одинаковыми толщинами h и механическими свойствами связаны адгезионным слоем 3 толщиной δ_0 с отличными от сопрягаемых им тел свойствами. Правый торец образца жестко закреплен от горизонтальных перемещений, на левых торцах тел действует симметричная распределенная нагрузка P . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки. Данная схема определяет стандартный для эксперимента ДКБ-образец и используется для нахождения прочностной характеристики – критического потока упругой энергии или J_c -интеграла согласно схеме податливости Ирвина [37].

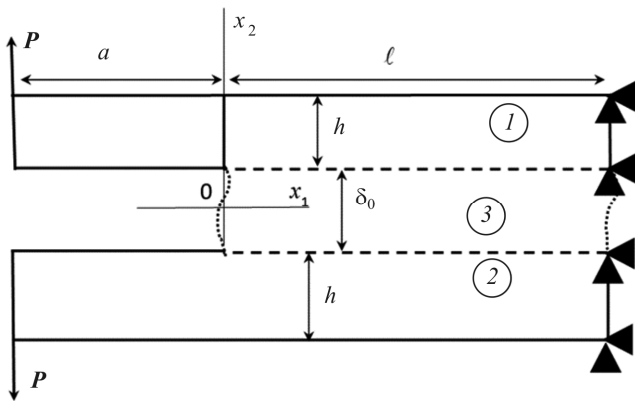


Рис. 1. Модель ДКБ-образца

Fig.1. Model of a DCB sample

Вариационные уравнения равновесия системы двух тел, связанных слоем, в силу симметрии задачи преобразуются в вариационное уравнение для тела (1) [38]:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1)$$

где S_1 – площадь тела 1; \mathbf{u} – векторное поле перемещений тела 1; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензоры средних напряжений и деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \boldsymbol{\sigma}_{11}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \boldsymbol{\sigma}_{22}(x_1, x_2) dx_2,$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{11}(x_1) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1}, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{22}(x_1) = \frac{2u_2^+(x_1)}{\delta_0}, \quad (2)$$

u_s^+ – компоненты вектора перемещений верхней границы слоя; $s = 1, 2$; L_1 – граница приложения внешней нагрузки для тела 1; $\cdot \cdot$ – двойное скалярное умножение; \cdot – скалярное умножение. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1.

Граничные касательные напряжения и напряжения отрыва в слое формируют граничные условия для сопрягаемой слоем среды, являются связанными уравнениями равновесия со средними напряжениями слоя [38]:

$$\sigma_{12}^+ = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{12} - 0.5\delta_0 \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{11}}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^+ = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{22} - 0.5\delta_0 \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{12}}{\partial x_1}, \quad (3)$$

и неявно присутствуют в уравнении (1). Отметим, что средние касательные напряжения в слое в рамках рассматриваемой схемы нагружения равны нулю, и изменение средних осевых напряжений фактически определяет соответствующее граничное условие.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций. При упругом деформировании слоя связь средних напряжений и деформаций определяется законом Гука:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \delta_{ij} \right), \quad (4)$$

где E_3 , ν_3 – модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезионного слоя; $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – объемная деформация слоя; δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Определяющие соотношения тел будем рассматривать в форме закона Гука:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \frac{E_l}{1 + \nu_l} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_l}{1 - 2\nu_l} \boldsymbol{\varepsilon} \delta_{ij} \right), \quad (5)$$

где E_l , ν_l – модуль упругости и коэффициент Пуассона; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – объемная деформация.

Уравнение (1) совместно со связями (2), (4), (5) и граничными условиями:

$$\sigma_{11} = 0; \sigma_{12} = -P \quad x_1 = -a; x_2 \in [\delta_0/2; \delta_0/2 + h], \quad (6)$$

$$\sigma_{11} = 0; \sigma_{12} = 0 \quad x_1 = [-a; \ell]; x_2 = \delta_0/2 + h, \quad (7)$$

$$u_1 = 0; u_2 = 0 \quad x_1 = \ell; x_2 \in [\delta_0/2; \delta_0/2 + h], \quad (8)$$

$$\sigma_{11} = 0; \sigma_{12} = 0 \quad x_1 = [-a; 0]; x_2 = \delta_0/2, \quad (9)$$

является замкнутым, однозначно определяет поле перемещений тела, его напряженное состояние и по (2), (4) – напряженное состояние адгезионного слоя. Задача может быть решена численным методом. В работе используем метод конечных элементов с квадратичным распределением поля перемещений по элементу [30].

В статье [5] при обратимом деформировании образца получено представление критического значения J-интеграла (J_c-интеграла) через энергетическое произведение (ЭП) – произведение критического значения удельной (отнесенной к единице массы) свободной энергии ψ_c и толщины слоя:

$$J_c = \delta_0 \rho_0 \psi_c, \quad (10)$$

где ρ_0 – плотность; $\rho_0 \psi_c = 0,5(\bar{\sigma}_{11} \bar{\epsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22} \bar{\epsilon}_{22})$.

Таким образом рассматриваемая постановка задачи позволяет найти значение J_c-интеграла при фиксированном значении толщины слоя.

2. Варианты решения поставленной задачи

Согласно данным работы [39], рассмотрим образец со следующими геометрическими и механическими характеристиками: $a = 0,055$ м, $h = 0,0127$ м, $b = 0,025$ м, $\ell = 0,245$ м, $E_1 = 200$ ГПа, $\nu_1 = 0,3$, $E_3 = 4,9$ ГПа, $\nu_3 = 0,35$, $J_c = 200$ Н/м, где b – толщина образца. В качестве адгезива для данного образца рассматривается смола Araldite AV138 с механическими и прочностными данными, заявленными производителем. В работе [39] приведено экспериментальное значение внешней нагрузки разрушения адгезива, которое составило $P_{cr} = 1,1$ кН.

Рассмотрим результаты расчета МКЭ J_c-интеграла для критической нагрузки P_{cr} при различных значениях коэффициента Пуассона тела и линейного параметра δ_0 в состоянии плоской деформации. Используем треугольный шестиузловой конечный элемент с длиной грани, равной линейному параметру, в зоне обрыва связей с адгезивом. В таблицу поместим расчеты для $\nu_3 = 0$ и $\nu_3 = 0,35$. Полученные значения для $\nu_3 = 0,35$ заключим в скобки.

Значения J_c-интеграла
Values of J_c integral

$\nu_3 = 0(0,35)$	J _c (Н/м)			
	$\delta_0 = 10^{-3}$ м	$\delta_0 = 10^{-4}$ м	$\delta_0 = 10^{-5}$ м	$\delta_0 = 10^{-6}$ м
0,1	258 (250)	236 (233)	233 (230)	237 (236)
0,2	250 (243)	229 (226)	226 (230)	230 (229)
0,3	238 (231)	217 (215)	214 (212)	218 (217)

Из результатов расчета видно, что, начиная с размера толщины слоя $\delta_0 = 10^{-4}$ м, величина J_c-интеграла практически не меняет своего значения. При этом коэффициент Пуассона тела 1 оказывает влияние на

величину ЭП, а коэффициент Пуассона слоя практически не влияет. Однако коэффициент Пуассона слоя оказывает при этом существенное влияние на распределение напряжений в слое. Отметим, что вклад произведения осевого напряжения на осевую деформацию в удельную свободную энергию слоя (10) составил менее 0,1 %.

На рис. 2 показано распределение напряжений в слое при $\nu_1 = 0,35$ и $\nu_3 = 0(0,35)$ по длине слоя, найденное при значении толщины слоя $\delta_0 = 10^{-5}$ м. График 1 определяет напряжение $\bar{\sigma}_{22}$, график 2 определяет напряжение $\bar{\sigma}_{11}$ при $\nu_3 = 0,35$. Графики 3 и 4 определяют соответствующие напряжения для $\nu_3 = 0$. При этом имеет место $\bar{\sigma}_{22} \approx \bar{\sigma}_{33}$. Напряжения отнесены к значению $\bar{\sigma}_{22}$ на торце слоя для случая $\nu_3 = 0$. Координата $\hat{x}_1 = x_1/\delta_0$ вдоль оси образца отнесена к толщине слоя δ_0 . Средние напряжения $\hat{\sigma}_{ii} = \bar{\sigma}_{ii}/\bar{\sigma}_{22}$ отнесены к напряжению $\bar{\sigma}_{22}$ на торце слоя в случае $\nu_3 = 0,35$. Аналогичные результаты получены в работе [40] при анализе приближенного решения исследуемой задачи.

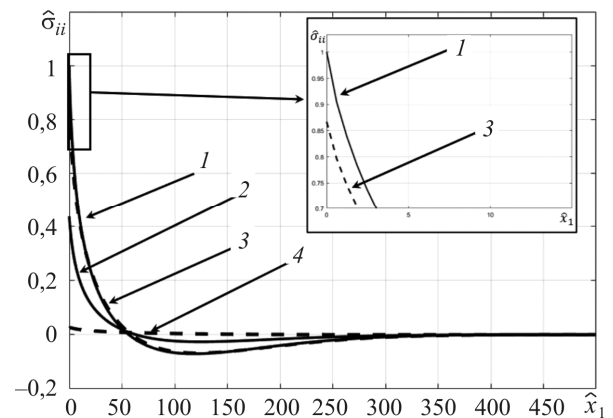


Рис. 2. Распределение напряжений в слое

Fig. 2. Distribution of stresses in the layer

Из рис. 2 видно, что для нулевого значения коэффициента Пуассона в слое $\nu_3 = 0$ осевое напряжение в слое $\bar{\sigma}_{11}$ на порядок меньше значения $\bar{\sigma}_{22}$.

Так как при обратимом деформировании, согласно таблице, критериальная характеристика в виде J-интеграла практически не меняет своего значения при комбинациях $\bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{11}$, связанных коэффициентом Пуассона слоя, то определяющие соотношения адгезионного слоя (4) рассмотрим для случая $\nu_3 = 0$:

$$\bar{\sigma}_{22} = E_3 \bar{\epsilon}_{22}; \quad \bar{\sigma}_{11} = E_3 \bar{\epsilon}_{11}. \quad (11)$$

Для учета влияния модуля упругости, входящего в (11) и получения аналитического значения J-интеграла, рассмотрим упрощение задачи, представив поле перемещений тела в виде распределения Миндлина [26]:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (12)$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1), \quad (13)$$

Из (1) с учетом (12), (13), приравняв слагаемые при равных вариациях, приходим к двум системам дифференциальных уравнений для участка $x_1 \in [-a; 0]$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0, \quad (14)$$

для участка $x_1 \in (0; \ell]$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}, \quad (15)$$

с условиями сопряжения:

$$\begin{aligned} u_1^+|_{x_1=0} &= u_1^+|_{x_1=+0}, \quad u_2^+|_{x_1=0} = u_2^+|_{x_1=+0}, \\ \varphi^+|_{x=0} &= \varphi^+|_{x=+0}, \quad (16) \\ M_{11}|_{x_1=0} &= M_{11}|_{x_1=+0}, \quad Q_{12}|_{x_1=0} = Q_{12}|_{x_1=+0}, \\ Q_{11}|_{x_1=0} &= Q_{11}|_{x_1=+0}, \quad (17) \end{aligned}$$

и естественным граничным условиям:

$$Q_{12}|_{x_1=-a} = -Q_2, \quad Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad M_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad (18)$$

а на правом торце рассматриваем граничные условия:

$$u_1^+|_{x_1=\ell} = 0, \quad \varphi|_{x_1=\ell} = 0, \quad u_2|_{x_1=\ell} = 0, \quad (19)$$

где $Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2$, $Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2$,

$$M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2.$$

С учетом (12), (13) определяющие соотношения (5) запишем в рамках теории пластин Миндлина – Рейснера [26–28] в виде:

$$\sigma_{11} = D \left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right), \quad (20)$$

$$\sigma_{12} = L \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (21)$$

где $L = k \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$, $k = \frac{5}{6}$, $D = \frac{E_1}{(1-\nu_1^2)}$.

Запишем выражения обобщенных сил и моментов:

$$Q_{11}(x_1) = D \left(h \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^2}{2} \varphi' \right),$$

$$Q_{12}(x_1) = Lh \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right),$$

$$M_{11}(x_1) = D \left(\frac{h^2}{2} \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^3}{3} \varphi' \right). \quad (22)$$

В результате задача (13)–(21) становится замкнутой относительно трех неизвестных функций: $u_1^+(x_1)$, $u_2^+(x_1)$, $\varphi(x_1)$.

Из системы уравнений (14) осуществим перенос граничных условий (18) в точку $x_1 = 0$:

$$Q_{12}|_{x_1=0} = -Q_2, \quad Q_{11}|_{x_1=0} = 0, \quad M_{11}|_{x_1=0} = -Q_2 a. \quad (23)$$

Полагая $\frac{\delta_0}{h} \ll 1$, запишем решение (15) для участка $x_1 \in [0; \ell]$ при $\ell \rightarrow \infty$ в виде:

$$\begin{aligned} u_1^+ &= \frac{h}{2} \varphi; \quad u_2^+ = A e^{\lambda_1 x_1} + B e^{\lambda_2 x_1}; \\ \varphi &= A \left(\lambda_1 - \frac{C}{\lambda_1} \right) e^{\lambda_1 x_1} + B \left(\lambda_2 - \frac{C}{\lambda_2} \right) e^{\lambda_2 x_1}, \quad (24) \end{aligned}$$

где $C = \frac{24}{5h\delta_0} \frac{E_3(1+\nu_1)}{E_1}$; $\lambda_1 = -2\sqrt{\frac{6E_3(1+\nu_1)}{5h\delta_0 E_1}}$;
 $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{5(1-\nu_1)}{h^2}}$; $A = \frac{Q_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{12a(1-\nu_1^2)}{E_1 h^3 \lambda_2} - \lambda_1^2 \frac{\delta_0}{2E_3} \right)$;
 $B = -\frac{Q_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{12a(1-\nu_1^2)}{E_1 h^3 \lambda_1} - \lambda_2^2 \frac{\delta_0}{2E_3} \right)$.

Из (24) найдем вертикальное перемещение в вершине слоя:

$$u_2^+|_{x_1=0} = A + B = \frac{Q_2 \sqrt{6(1+\nu_1)}}{\sqrt{E_1 E_3}} \sqrt{\frac{\delta_0}{h}} \left(\frac{a}{h} \sqrt{(1-\nu_1)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Из (2), (11) и последнего выражения находим значение напряжения отрыва в вершине слоя:

$$\bar{\sigma}_{22}|_{x_1=0} = \frac{Q_2 2\sqrt{6(1+\nu_1)}}{\sqrt{\delta_0 h}} \sqrt{\frac{E_3}{E_1}} \left(\frac{a}{h} \sqrt{(1-\nu_1)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right). \quad (25)$$

Из (2) найдем осевую деформацию в вершине слоя:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{11}|_{x_1=0} &= \frac{du_1^+}{dx_1} \Big|_{x_1=0} = \\ &= \frac{12Q_2}{5\sqrt{\delta_0 h E_1}} \sqrt{\frac{E_3}{E_1}} \left(\frac{a}{h} \sqrt{(1-\nu_1)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \left(\sqrt{6(1+\nu_1)^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Из полученного выражения и (11) определяем осевое напряжение слоя:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{12Q_2}{5\sqrt{\delta_0}h} \left(\frac{E_3}{E_1} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{h} \sqrt{(1-\nu_1)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \left(\sqrt{6} (1+\nu_1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \quad (26)$$

Для представления (10) с учетом (25), (26) находим:

$$J = J_1 + J_2 = \frac{Q_2^2 (1-\nu_1^2)}{hE_1} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu_1)}} \left(\frac{h}{a} \right) \right)^2 \times \left[\frac{72}{25} \frac{\left(\sqrt{6} (1+\nu_1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)^2}{(1+\nu_1)} \left(\frac{E_3}{E_1} \right)^2 + 12 \right], \quad (27)$$

где $J_1 = \frac{\bar{\sigma}_{11}^2}{2E_3} \delta_0 = \frac{72}{25} \frac{Q_2^2 (1-\nu_1^2)}{hE_1 (1+\nu_1)} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu_1)}} \left(\frac{h}{a} \right) \right)^2 \times \left[\left(\sqrt{6} (1+\nu_1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \left(\frac{E_3}{E_1} \right) \right]^2$;

$$J_2 = \frac{\bar{\sigma}_{22}^2}{2E_3} \delta_0 = \frac{12Q_2^2 (1-\nu_1^2)}{hE_1} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu_1)}} \left(\frac{h}{a} \right) \right)^2.$$

Отношение J_1/J_2 для рассматриваемых характеристик композита составляет $7,7 \cdot 10^{-4}$. В этом случае основной вклад в выражение (27) определяет компонента J_2 . Данный результат соответствует решению задачи МКЭ. Таким образом, для композитов с отношением модулей упругости $\frac{E_3}{E_1} \ll 1$ получаем:

$$J = J_2. \quad (28)$$

Выражение (28) совпадает с результатом работы [23] для модели адгезива в виде связей Прандтля. Результат (28) показывает, что при линейно упругом поведении композита с тонким адгезионным слоем в слу-

чае нормального разрыва значение J-интеграла определяется только механическими свойствами сопрягаемых слоев тел.

Следуя работам [9; 14] приведем выражение J-интеграла для ДКБ-образца, найденное из решения 2D-задачи:

$$J = \frac{12Q_2^2 (1-\nu_1^2)}{hE_1} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 + 0,673 \left(\frac{h}{a} \right) \right)^2. \quad (29)$$

Для рассматриваемого образца при критической нагрузке в случае $\nu_1 = 0,3$ формула (28) приводит к следующему результату: $J_c = 197$ Н/м, а формула (29) дает значение: $J_c = 208$ Н/м. Сравнение с результатами таблицы показывает, что решение МКЭ для относительно тонкого слоя с учетом осевых напряжений приводит практически к одинаковому результату (с точностью до 5 %) с известными 2D-решениями. В этом плане решение задачи (1)–(9) по нахождению J-интеграла при малых толщинах слоя для $\frac{E_3}{E_1} \ll 1$ может быть использовано для определения коэффициента интенсивности напряжений согласно связи: $K_I = \sqrt{\frac{E_1 J}{(1-\nu_1^2)}}$.

Заключение

Установлено, что механические свойства адгезионного слоя влияют на распределение напряжений в адгезионном слое, но не влияют на значение J-интеграла при $\frac{E_3}{E_1} \ll 1$. Замена адгезионного слоя слоем нулевой толщины позволяет корректно прогнозировать прочность адгезионных слоев в рамках модели хрупкого разрушения.

Во второй части статьи предполагается решить задачу в рамках идеально упругопластической модели с учетом всех компонент тензора напряжений в адгезионном слое.

Библиографический список

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
2. Cherepanov G.P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics // J. Appl. Math. Mech. – 2012. – Vol. 76, № 5. – P. 519–536. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014
3. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // ASME J. Appl. Mech. – 1968. – Vol. 35. – P. 379–386. DOI: 10.1115/1.3601206
4. Kolednik O., Schöngrundner R. Fischer, F.D. A new view on J-integrals in elastic-plastic materials // International Journal of Fracture. – 2014. – Vol. 187, № 1. – P. 77–107. DOI: 10.1007/s10704-013-9920-6
5. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // International Journal of Fracture. – 2020. – Vol. 224, № 2. – P. 277–284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0
6. Fraisse P., Schmit F. Use of J-integral as fracture parameter in simplified analysis of bonded joints // International Journal of Fracture. – 1993. – Vol. 63, № 1. – P. 59–73. DOI: 10.1007/BF00053316
7. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Отслоение покрытий под действием термоупругих напряжений (Балочное приближение) // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – Т. 54, № 4. – С. 66–83.
8. Кулиев В.Д., Борисова Н.Л. К проблеме разрушения многослойных композитных материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – Т. 26, № 4. – С. 63–71.
9. Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials // J. Mech. Phys. Solids. – 2004. – Vol. 52, № 1. – P. 193–214. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00070-X

10. Williams J.G. On the calculation of energy release rates for cracked laminates // *International Journal of Fracture*. – 1988. – Vol. 36, № 2. – P. 101–119. DOI: 10.1007/BF00017790
11. Астапов Н.С., Корнев В.М., Кургузов В.Д. Модель расщепления разномодульного биматериала с трещиной // *Физическая мезомеханика*. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 49–57.
12. Ustinov K.B., Massabó R., Lisovento D.S. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Engineering Failure Analysis*. 2020. – Vol. 110. – P. 104410. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2020.104410
13. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers // *International Journal of Fracture*. – 1990. – Vol. 43, № 1. – P. 1–18. DOI: 10.1007/BF00018123
14. Andrews M.G., Massabó R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2007. – Vol. 74. – P. 2700–2720. DOI: 10.1016/J.ENGFRACMECH.2007.01.013
15. Ustinov K.B., Idrisov D.M. On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: Exact analytical solutions for some particular cases // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 2021. – Vol. 101, № 4. – e202000239. DOI: 10.1002/zamm.202000239
16. Fichter W.B. The stress intensity factor for the double cantilever beam // *International Journal of Fracture*. – 1983. – Vol. 22. – P. 133–143. DOI: 10.1007/BF00942719.
17. Foote R.M.L., Buchwald V.T. An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // *International Journal of Fracture*. – 1985. – Vol. 29. – P. 125–134. DOI: 10.1007/BF00034313
18. He M.-Y., Evans A.G. Finite-element analysis of beam specimens used to measure the delamination resistance of composites // *Journal of Composites Technology & Research*. – 1992. – Vol. 14, № 4. – P. 235–240. DOI: 10.1520/CTR10104J
19. Chan S.K., Tuba I.S., Wilson W.K. On the finite element method in linear fracture mechanics // *Engineering Fracture Mechanics*. – 1970. – Vol. 2, № 1. – P. 1–17. DOI: 10.1016/0013-7944(70)90026-3
20. Parks D.M. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors // *International Journal of Fracture*. – 1974. – Vol. 10. – P. 487–502. DOI: 10.1007/BF00155252
21. Fang X., Charalambides P.G. The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2015. – Vol. 149. – P. 1–17. doi: 10.1016/j.engfracmech.2015.09.039
22. Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2017. – Vol. 169. – P. 309–320. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.10.013
23. Bruno D., Greco F., Lonetti P. Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2005. – Vol. 12, № 4. – P. 285–304. DOI: 10.1080/15376490590953563
24. Fang X., Charalambides P.G. A J-integral approach in characterizing the mechanics of a horizontal crack embedded in a cantilever beam under an end transverse force // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2017. – Vol. 169. – P. 35–53. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.11.010
25. Kanninen M.F. Augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest // *International Journal of Fracture*. – 1973. – Vol. 9, № 1. – P. 83–92. DOI: 10.1007/BF00035958
26. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38. DOI: 10.1007/978-1-4613-8865-4_29
27. Reissner E. Reflections on the Theory of Elastic Plates // *Appl. Mech. Rev.* – 1985. – Vol. 38, № 11. – P. 1453–1464. DOI: 10.1115/1.3143699
28. Reissner E. On Bending of Elastic Plates // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1947. – Vol. 5, № 1. – P. 55–68. DOI: 10.1090/qam/20440
29. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.
30. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – Москва: Мир, 1976. – 464 с.
31. Hildebrand M. Non-linear analysis and optimization of adhesively bonded single lap joints between fibre-reinforced plastics and metals // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 1994. – Vol. 14, № 4. – P. 261–267. DOI: 10.1016/0143-7496(94)90039-6
32. He X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2011. – Vol. 31, № 4. – P. 248–264. DOI: 10.1016/J.IJADHADH.2011.01.006
33. Elices M., Guinea G., The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2002. – Vol. 69, № 2. – P. 137–163. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00083-2
34. Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids // *International Journal of Fracture*. – 2011. – Vol. 171, № 2. – P. 105–109. DOI: 10.1007/s10704-011-9637-3
35. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // *Изв. АН СССР. МТТ*. – 1968. – № 6. – С. 87–99.
36. Салганик Р.Л., Мищенко А.А., Федотов А.А. Модель трещины Прандтля и ее применение для решения задачи механики контактного взаимодействия // К 75-летию со дня рождения профессора Владимира Марковича Ентова. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. – 180 с.
37. Irwin G.R., Kies J.A. Critical energy rate analysis of fracture strength // *Welding Journal. Research Supplement*. – 1954. – Vol. 33. – P. 193–198.
38. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. – 2019. – Vol. 158. – P. 141–149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
39. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints / R.M. Lopes, R.D.S.G. Campilho, F.J.G. da Silva, T.M.S. Faneco // *Journal of Adhesion and Adhesives*. – 2016. – Vol. 67. – P. 103–111. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032
40. Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита / В.Э. Богачева, В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2021. – № 3. – С. 22–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.03

References

- Cherepanov G.P. Mekhanika hrupkogo razrusheniya [Mechanics of brittle failure]. Moscow, Nauka, 1974, 640 p.
- Cherepanov G.P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics, *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 519–536. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014
- Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *ASME J. Appl. Mech.*, 1968, vol. 35, pp. 379–386. DOI: 10.1115/1.3601206
- Kolednik O., Schöngründner R. Fischer, F.D. A new view on J-integrals in elastic-plastic materials, *International Journal of Fracture*, 2014, vol. 187, no. 1, pp. 77–107. DOI: 10.1007/s10704-013-9920-6
- Berto, F., Glagolev, V.V., Markin, A.A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite, *International Journal of Fracture*, 2020, vol. 224, no. 2, pp. 277–284. DOI: 10.1007/s10704-020-00464-0
- Fraisse, P., Schmit, F. Use of J-integral as fracture parameter in simplified analysis of bonded joints, *International Journal of Fracture*, 1993, vol. 63, no. 1, pp. 59–73. DOI: 10.1007/BF00053316
- Gol'dshteyn R.V., Osipenko N.M. Otsloenie pokrytij pod dejstviem termouprugih napryazhenij (Balochnoe priblizhenie) [Peeling of coatings under the action of thermoelastic stresses (Beam approximation)], *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya*, 2007, vol. 54, no. 4, pp. 66–83.
- Kuliev V.D., Borisova N.L. K probleme razrusheniya mnogoslojnyh kompozitnyh materialov [To the problem of destruction of multilayer composite materials], *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*, 2015, vol. 26, no. 4, pp. 63–71.
- Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 2004, vol. 52, no. 1, pp. 193–214. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00070-X
- Williams J.G. On the calculation of energy release rates for cracked laminates, *International Journal of Fracture*, 1988, vol. 36, no. 2, pp. 101–119. DOI: 10.1007/BF00017790
- Astapov N.S., Kornev V.M., Kurguzov V.D. Model' rassloeniia raznomodul'nogo bimateriala s treshchinoi [Separation model multimodulus bimaterial with crack]. *Fizicheskaja mezomekhanika – Physical Mesomechanics*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 49–57.
- Ustinov K.B., Massabó R., Lisovenko D.S. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution, *Engineering Failure Analysis*, 2020, 110, 104410. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2020.104410
- Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers, *International Journal of Fracture*, 1990, vol. 43, no. 1, pp. 1–18. DOI: 10.1007/BF00018123
- Andrews M.G., Massabó R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers, *Engineering Fracture Mechanics*, 2007, vol. 74, pp. 2700–2720 DOI: 10.1016/J.ENGFRACMECH.2007.01.013
- Ustinov K.B., Idrisov D.M. On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: Exact analytical solutions for some particular cases, *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2021, vol. 101, no. 4, e202000239. DOI: 10.1002/zamm.202000239
- Fichter W.B. The stress intensity factor for the double cantilever beam, *International Journal of Fracture*, 1983, vol. 22, pp. 133–143. DOI: 10.1007/BF00942719.
- Foot R.M.L., Buchwald V.T., An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam, *International Journal of Fracture*, 1985, vol. 29, pp. 125–134, DOI: 10.1007/BF00034313
- He M-Y, Evans A.G. Finite-element analysis of beam specimens used to measure the delamination resistance of composites, *Journal of Composites Technology & Research*, 1992, vol. 14, no. 4, pp. 235–240. DOI: 10.1520/CTR10104J
- Chan S.K., Tuba I.S., Wilson W.K. On the finite element method in linear fracture mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 1970, vol. 2, no. 1, pp. 1–17. DOI: 10.1016/0013-7944(70)90026-3
- Parks D.M. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors, *International Journal of Fracture*, 1974, vol. 10, pp. 487–502. DOI: 10.1007/BF00155252
- Fang X., Charalambides P.G. The fracture mechanics of cantilever beams with an embedded sharp crack under end force loading, *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, vol. 149, pp. 1–17. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.09.039
- Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory, *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, vol. 169, pp. 309–320. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.10.013
- Bruno D., Greco F., Lonetti P. Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2005, vol. 12, no. 4, pp. 285–304. DOI: 10.1080/15376490590953563
- Fang X., Charalambides P.G. A J-integral approach in characterizing the mechanics of a horizontal crack embedded in a cantilever beam under an end transverse force, *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, vol. 169, pp. 35–53. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.11.010
- Kanninen M.F. Augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest, *International Journal of Fracture*, 1973, vol. 9, no. 1, pp. 83–92. DOI: 10.1007/BF00035958
- Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1951, vol. 18, pp. 31–38. DOI: 10.1007/978-1-4613-8865-4_29
- Reissner E. Reflections on the Theory of Elastic Plates, *Appl. Mech. Rev.*, 1985, vol. 38, no. 11, pp. 1453–1464. DOI: 10.1115/1.3143699
- Reissner E. On Bending of Elastic Plates, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1947, vol. 5, no. 1, pp. 55–68. DOI: 10.1090/qam/20440
- Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. Plastiny i obolochki [Plates and shells]. Moscow, Fizmatgiz, 1963, 636 p.
- Oden Dzh. Konechnye elementy v nelinejnoj mekhanike sploshnyh sred [Finite elements in nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Mir, 1976, 464 p.
- Hildebrand M. Non-linear analysis and optimization of adhesively bonded single lap joints between fibre-reinforced plastics and metals, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 1994, vol. 14, no. 4, pp. 261–267. DOI: 10.1016/0143-7496(94)90039-6
- He X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 2011, vol. 31, no. 4, pp. 248–264. DOI: 10.1016/J.IJADHADH.2011.01.006

33. Elices M., Guinea G., The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges, *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, vol. 69, no. 2, pp. 137–163. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00083-2
34. Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids, *International Journal of Fracture*, 2011, vol. 171, no. 2, pp. 105–109. DOI: 10.1007/s10704-011-9637-3
35. Entov V.M., Salganik R.L. K modeli hrupkogo razrusheniya Prandtlya [To the Prandtl model of brittle fracture]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1968, no. 6, pp. 87–99.
36. Salganik R.L., Mishchenko A.A., Fedotov A.A. Model' treshchiny Prandtlya i ee primenenie dlya resheniya zadachi mekhaniki kontaktnogo vzaimodejstviya [Prandtl crack model and its application for solving the problem of contact interaction mechanics]. *Izhevsk, Institut komp'yuternyh issledovanij*, 2012, 180 p.
37. Irwin G.R., Kies J.A. Critical energy rate analysis of fracture strength, *Welding Journal. Research Supplement*, 1954, vol. 33, pp. 193–198.
38. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter, *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 158, pp. 141–149. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
39. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints, *Journal of Adhesion and Adhesives*, 2016, vol. 67, pp. 103–111. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032
40. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Stress state and condition for crack initiation in the adhesion layer of the composite, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 3, pp. 22–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.03

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00003 (<https://rscf.ru/project/22-71-00003>) в Тульском государственном университете.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Financing. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-71-00003 (<https://rscf.ru/project/22-71-00003>) at Tula State University.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.