

УДК 539.3

**С.А. Лурье¹, Ю.О. Соляев², Л.Н. Рабинский³,
Ю.Н. Кондратова⁴, М.И. Волов⁴**

¹Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

²Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

³Московский авиационный институт, Москва, Россия

⁴Саратовский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ КОМПОЗИТНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ

В работе получена и исследована постановка задачи плоской деформации в рамках градиентной модели упругости для композитного слоя. На основе синтеза аналитических и численных методов решена плоская задача градиентной теории упругости для бесконечного слоя с целью учета распределения напряжений в плоскости покрытий для сверхтонких структур. Исследована задача о воздействии распределенной поверхностной сжимающей нормальной нагрузки на бесконечный слой, находящийся на жестком основании. Для решения задачи используется интегральное преобразование Фурье, при этом обратное преобразование вычисляется с использованием численной процедуры. В работе показано, что предложенные модели позволяют прогнозировать эффекты локализации напряжений в окрестности межслойных зон в покрытии и учитывать влияние неклассических масштабных факторов – толщины слоев покрытия и градиентных параметров моделей.

Для моделирования привлекается наиболее простой вариант градиентной теории упругости – прикладная модель межфазного слоя, содержащая единственный дополнительный физический параметр, определяющий «градиентность» среды и протяженность межфазных зон в области границ материала. Этот параметр является дополнительной физической константой, характеризующей контакт разнородных материалов. Для численных вычислений в работе используются гипотетические значения градиентного параметра.

Прикладное значение решенной задачи связано с возможностью достоверного моделирования и оптимизации микроструктурного строения ультратонких защитных композитных покрытий, применяемых в авиакосмической отрасли. Также построенное решение может быть использовано для идентификации дополнительных физических параметров градиентной теории упругости на основе сопоставления результатов моделирования и экспериментальных данных по индентированию тонкослойных структур.

Ключевые слова: композитные тонкослойные покрытия, моделирование, градиентная теория упругости, задача плоской деформации, деформации слоя.

¹ S.A. Lurie, ² Y.O. Solyaev, ³ L.N. Rabinsky,
⁴ Y.N. Kondratova, ⁴ M.I. Volov

¹Computing Centre RAS, Moscow, Russian Federation
²Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation
³Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation
⁴Saratov State University, Saratov, Russian Federation

SIMULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THIN COMPOSITE COATINGS BASED ON SOLUTIONS OF THE PLANE PROBLEM OF STRAIN-GRADIENT ELASTICITY FOR A LAYER

We obtain and investigate the formulation of the problem of strain gradient plane model of elasticity for the composite layer. We used a synthesis of analytical and numerical methods to solve plane problem of gradient elasticity for an infinite layer to allow the distribution of stresses in the plane of ultrathin coatings. We investigate the problem of the impact of surface compressive normal loading on an infinite layer. To solve the problem we use a Fourier integral transform, and the inverse transform is computed using a numerical procedure. It is shown that the proposed model can predict the effects of localization interlaminar stresses in the local interphase zones in the coating and consider the influence of non-classical scale factors – the thickness of the coating layers and gradient model parameters.

For simulation it is involved the most simple gradient theory of elasticity – applied model of the interphase layer containing single additional physical parameter determining the "gradient" of the environment and the extent of interfacial zones in the border area of the material. This additional physical constant characterizing the contact of dissimilar materials. For the numerical calculations in this paper we use the hypothetical values of the gradient parameter.

To solve the problem of practical importance due to the possibility of reliable modelling and optimization of the structure of ultra microstructure protective composite coatings used in the aerospace industry. Also constructed solution can be used to identify additional physical parameters of the gradient theory of elasticity based on a comparison of simulation results and experimental data on the indentation thin layer structures.

Keywords: composite thin-film coatings, simulation, strain-gradient elasticity, plane strain deformation of layer.

Введение

В работе рассматривается задача о равновесии композитного бесконечного слоя, находящегося на жестком основании в рамках плоской постановки градиентной теории упругости. Исследование моделей градиентной теории упругости является одним из перспективных направлений развития современной механики [1–9]. Основной особенностью градиентных теорий является учет масштабных эффектов, которые могут быть связаны с материальным параметром или структурным

параметром неоднородного материала. Этот параметр можно связывать и с протяженностью промежуточных межфазных зон в неоднородных материалах. Градиентные теории позволяют учесть нелокальные эффекты, обеспечивая более гладкий контакт различных фаз в окрестности границ за счет учета моментных факторов (бимоментных напряжений). В свою очередь, это приводит к повышению порядка разрешающих уравнений и переформулировке краевых задач в математической модели деформируемых сред. При решении практических задач градиентные модели оказываются эффективными для учета масштабных эффектов в материалах с характерным размером структуры, сопоставимым с протяженностью локальных градиентных полей. Примерами таких сред являются композиты с микро- и нановключениями, тонкослойные композитные покрытия, керамики с ультрадисперсной структурой и т.д. Такие материалы являются перспективными для применения в современной авиакосмической технике и требуют экспериментального и теоретического изучения. Задача, исследуемая в настоящей работе, связана с моделированием прочности элементов авиакосмических конструкций, на которые нанесены защитные композитные тонкослойные покрытия (керамические или металлокерамические).

Один из первых вариантов градиентной линейной теории упругости был предложен Тупиным [8]. В данной модели плотность потенциальной энергии изотропной среды может быть записана в виде

$$2U = C_{ijnm} u_{i,j} u_{n,m} + D_{ijknml} u_{i,jk} u_{n,ml}, \quad (1)$$

где C_{ijnm} – модули упругости изотропного тела, $C_{ijnm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{nm} + \mu (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{jn} \delta_{im})$; λ, μ – коэффициенты Ламе; δ_{ij} – дельта Кронекера ($\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$); D_{ijknml} – тензор модулей упругости, определяющий градиентные свойства среды (в общем случае для теории градиентной деформации градиентные свойства определяются двумя дополнительными параметрами, т.е. все компоненты тензора D_{ijknml} характеризуются двумя модулями); u_i – компоненты вектора перемещений, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ и $u_{i,jk} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}$; принимается правило суммирования по повторяющимся индексам, изменяющимся от 1 до 3.

Рассмотрим однородную область V , ограниченную поверхностью S . В отсутствие внешних сил лагранжиан, соответствующий деформированию рассматриваемого упругого тела, имеет вид $L = -\int_V U dV$. Найдем вариацию этого лагранжиана, используя интегрирование по частям. Учитывая (1), получим

$$\delta L = \oint \left[(C_{ijkm} u_{i,j} - D_{ijnmkp} u_{i,jnp}) \delta u_k + D_{ijkpnm} u_{i,jk} \delta u_{p,n} \right] n_m dS - \int (C_{ijkm} u_{i,jm} - D_{ijnmkp} u_{i,jnpm}) \delta u_k dV. \quad (2)$$

В выражении (2) δu_k , $\delta u_{p,n}$ являются вариациями вектора перемещений и вариациями градиента вектора перемещений соответственно; \mathbf{n} – есть вектор внешней нормали к поверхности S . Равновесному состоянию рассматриваемой среды соответствует условие равенства нулю вариации лагранжиана (2), $\delta L = 0$. Учитывая (2), получим следующее уравнение Эйлера, являющееся уравнением равновесия рассматриваемой среды:

$$C_{ijkm} u_{i,jm} - D_{ijnmkp} u_{i,jnpm} = 0.$$

Уравнение обладает повышенным порядком по сравнению с классической теорией упругости. Для неоднородных сред с кусочно-постоянными свойствами уравнения Эйлера записываются отдельно для каждой из подобластей со своими тензорами модулей упругости C_{ijnm} , D_{ijknml} . На поверхностях контакта подобластей I и II должны выполняться условия непрерывности, которые в данном случае имеют вид $u_i^I = u_i^{II}$ и $u_{i,k}^I = u_{i,k}^{II}$. Для того чтобы выполнить условие $\delta L = 0$, в выражении для вариации лагранжиана (2) должны быть равны нулю статические множители, стоящие при δu_k и $\delta u_{p,n}$ на границе контакта подобластей:

$$C_{ijkm}^I u_{i,j}^I - D_{ijnmkp}^I u_{i,jnp}^I = C_{ijkm}^{II} u_{i,j}^{II} - D_{ijnmkp}^{II} u_{i,jnp}^{II}, \\ D_{ijkpnm}^I u_{i,jk}^I = D_{ijkpnm}^{II} u_{i,jk}^{II}.$$

1. Формулировка прикладной модели межфазного слоя

В работе будем использовать однопараметрический вариант градиентной теории упругости – прикладную модель межфазного слоя, построенный как простейший вариант градиентной теории деформа-

ций [10–11]. Для получения математической постановки модели рассмотрим лагранжиан модели типа модели Миндлина–Тупина:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \left[C_{ijnm} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C_{ijknml} \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m} \right] dV. \quad (3)$$

Введем гипотезы о пропорциональности когезионных модулей в (3):

$$C_{ijknml} = \frac{1}{C} C_{ijrk} C_{nmrl}.$$

Таким образом, все многообразие когезионных свойств тел в рамках предлагаемой модели моделируется с помощью одного масштабного параметра $C = \mu/l^2$. l – характерная длина, определяющая протяженность градиентных эффектов. В целом, модель определяет механические свойства сред с сохраняющимися полями дислокаций через четыре параметра среды: μ, λ, l .

Лагранжиан формулируемой теории приобретает вид

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \left[C_{ijnm} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + \frac{1}{C} C_{ijrk} C_{nmrl} \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m} \right] dV. \quad (4)$$

Вариационное уравнение, определяющее математическую постановку модели, записывается в виде

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint \left[C_{ijrk} \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial x_j \partial x_k} \left(R_r - \frac{1}{C} C_{nmrl} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m} \right) + P_i^V \right] \delta R_i dV + \\ & + \oint \left[P_i^F - C_{ijrk} n_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(R_r - \frac{1}{C} C_{nmrl} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m} \right) \right] \delta R_i dF - \\ & - \oint \left[\frac{1}{C} C_{rqnm} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_q \partial x_m} \right] \delta \left(C_{rpj} n_p \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right) dF = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогичным образом может быть получена формулировка градиентной модели деформации, учитывающей адгезионные эффекты [12, 13].

2. Постановка задачи о плоской деформации слоя в рамках градиентной теории упругости

Рассмотрим задачу о равновесии слоя, подверженного действию распределенной нормальной силы (рис. 1).

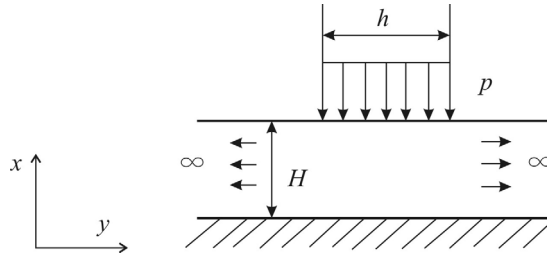


Рис. 1. К задаче о равновесии бесконечного слоя

Лагранжиан модели градиентной теории упругости в плоской постановке (плоская деформация) следует из общей формулировки модели (5) и имеет вид

$$\begin{aligned}
 L = & A - \frac{1}{2} \iint \left(E \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y} \right)^2 + G \left(\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial x} \right)^2 - 4 \frac{\partial R_1}{\partial x} \frac{\partial R_2}{\partial y} \right) + \right. \\
 & + \frac{G^2}{C} \left(\left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 R_2}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 R_1}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 R_2}{\partial x \partial y} \right) + \\
 & \left. + \frac{E^2}{C} \left(\left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 R_2}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 R_2}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 R_1}{\partial x \partial y} \right) \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Вариационную постановку модели можно получить с помощью вариационного принципа Лагранжа, используя технику интегрирования по частям. Учтем, что модель следует записывать для бесконечного слоя (см. рис. 1), и поэтому из постановки будут исключены граничные условия на гранях, параллельных оси Ox . Получаем следующую постановку плоской задачи градиентной теории упругости.

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} & \frac{E^2}{C} \frac{\partial^4 R_1}{\partial x^4} + \frac{G^2}{C} \frac{\partial^4 R_1}{\partial y^4} + \frac{E^2 + G^2}{C} \frac{\partial^4 R_1}{\partial x^2 \partial y^2} - E \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} - \\ & - G \frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} + \frac{E^2 - G^2}{C} \left(\frac{\partial^4 R_2}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 R_2}{\partial x \partial y^3} \right) - (E - G) \frac{\partial^2 R_2}{\partial x \partial y} = 0. \\ & \frac{E^2}{C} \frac{\partial^4 R_2}{\partial y^4} + \frac{G^2}{C} \frac{\partial^4 R_2}{\partial x^4} + \frac{E^2 + G^2}{C} \frac{\partial^4 R_2}{\partial x^2 \partial y^2} - E \frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} - \\ & - G \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} + \frac{E^2 - G^2}{C} \left(\frac{\partial^4 R_1}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 R_1}{\partial x \partial y^3} \right) - (E - G) \frac{\partial^2 R_1}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия $x = \text{const}$:

$$\begin{cases} \frac{E^2}{C} \left(\frac{\partial^3 R_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 R_2}{\partial y^3} \right) + \frac{E^2 + G^2}{C} \frac{\partial^3 R_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{E^2 - G^2}{C} \frac{\partial^3 R_2}{\partial x^2 \partial y} - E \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial R_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{G^2}{C} \left(\frac{\partial^3 R_2}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 R_1}{\partial y^3} \right) + \frac{E^2 + G^2}{C} \frac{\partial^3 R_2}{\partial x \partial y^2} + \frac{E^2 - G^2}{C} \frac{\partial^3 R_1}{\partial x^2 \partial y} - G \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{E^2}{C} \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R_2}{\partial x \partial y} \right) = 0, \quad \frac{G^2}{C} \left(\frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial x \partial y} \right) = 0. \end{cases}$$

Полученные уравнения равновесия соответствуют известному общему операторному представлению уравнений равновесия для моделей градиентной теории упругости, которое записывается в виде произведения оператора Ламе и оператора Гельмгольца:

$$LH(\mathbf{R}) = 0,$$

Здесь $L(\mathbf{R}) = \mu \nabla^2 \mathbf{R} + (\mu + \lambda) \nabla \text{div} \mathbf{R}$; $H(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - L(\mathbf{R})/C$; \mathbf{R} – вектор перемещений.

3. Решение задачи о равновесии бесконечного слоя

Для решения задачи о равновесии бесконечного слоя применим интегральное преобразование Фурье:

$$R_1(x, y), R_2(x, y) \rightarrow F_1(x, \omega), F_2(x, \omega),$$

$$F_1(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_1(x, y) e^{-i\omega y} dy,$$

$$F_2(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_2(x, y) e^{-i\omega y} dy.$$

В результате преобразования уравнения равновесия приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} L_{11}F_1 + L_{12}F_2 &= 0, \\ L_{21}F_1 + L_{22}F_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения операторов:

$$\begin{cases} L_{11} = \frac{E^2}{C} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \left(\frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 + E \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \left(G + \frac{G^2}{C} \omega^2 \right), \\ L_{12} = i\omega \left[\frac{E^2 - G^2}{C} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \left(\frac{E^2 - G^2}{C} \omega^2 + E - G \right) \frac{\partial}{\partial x} \right], \\ L_{21} = i\omega \left[\frac{E^2 - G^2}{C} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \left(\frac{E^2 - G^2}{C} \omega^2 + E - G \right) \frac{\partial}{\partial x} \right], \\ L_{22} = \frac{G^2}{C} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \left(\frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 + G \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \left(E + \frac{E^2}{C} \omega^2 \right). \end{cases}$$

Преобразуем граничные условия модели:

$$\begin{cases} \frac{E^2}{C} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} - \frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} - E \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{E^2}{C} i\omega^3 F_2 + \frac{E^2 - G^2}{C} i\omega \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - \\ - (E - 2G) i\omega F_2 + K\alpha\Phi - \frac{(E^*)^2}{C} \alpha \left(-i\omega^3 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) = 0, \\ \frac{G^2}{C} \frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3} - \frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 \frac{\partial F_2}{\partial x} - G \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{G^2}{C} i\omega^3 F_1 + \\ + \frac{E^2 - G^2}{C} i\omega \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - Gi\omega F_1 - \frac{(E^*)^2}{C} \alpha i\omega \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{G^2}{C} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - \frac{G^2}{C} i\omega \frac{\partial F_1}{\partial x} - B \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{E^2}{C} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{E^2}{C} i\omega \frac{\partial F_2}{\partial x} - A \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{(E^*)^2}{C} \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

В случае наличия жесткого (в заделке) закрепления следует задавать следующие кинематические граничные условия:

$$R_1 = \frac{\partial R_1}{\partial x} = R_2 = \frac{\partial R_2}{\partial x} = 0.$$

Для решения полученной системы уравнений (6) сведем его к уравнению восьмого порядка. Для этого введем потенциал $\varphi(x, \omega)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} F_2 &= -L_{11}\varphi, \\ F_1 &= L_{12}\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (8) в (7) получим, что первое уравнение равновесия удовлетворяется автоматически, а второе уравнение системы сводится к уравнению восьмого порядка относительно введенного потенциала:

$$\begin{aligned} L_{11}L_{12}\varphi + L_{12}(-L_{11}\varphi) &= (L_{11}L_{12} - L_{12}L_{11})\varphi = 0, \\ L_{21}L_{12}\varphi + L_{22}(-L_{11}\varphi) &= L_{21}L_{12}\varphi - L_{22}L_{11}\varphi = \\ &= (L_{21}L_{12} - L_{22}L_{11})\varphi = (L_{12}^2 - L_{22}L_{11})\varphi = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученное уравнение восьмого порядка имеет вид

$$(L_{12}^2 - L_{22}L_{11})\varphi = 0.$$

Далее запишем данное операторное уравнение в координатной форме. Получаем

$$\begin{aligned} &-\frac{G^2}{C} \frac{E^2}{C} \frac{\partial^8 \varphi}{\partial x^8} + \\ &+ \left[\frac{E^2 - G^2}{C} i\omega \frac{E^2 - G^2}{C} i\omega + \frac{G^2}{C} \left(\frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 + E \right) + \left(\frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 + G \right) \frac{E^2}{C} \right] \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6} + \\ &+ \left[-\frac{E^2 - G^2}{C} i\omega \left(\frac{E^2 - G^2}{C} i\omega^3 + (E - G)i\omega \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{E^2 - G^2}{C} i\omega^3 + (E - G)i\omega \right) \frac{E^2 - G^2}{C} i\omega - \frac{G^2}{C} \left(\frac{G^2}{C} \omega^4 + G\omega^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 + G \right) \left(\frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 + E \right) - \left(\frac{E^2}{C} \omega^4 + E\omega^2 \right) \frac{E^2}{C} \right] \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \\ &+ \left[\left(\frac{E^2 - G^2}{C} i\omega^3 + (E - G)i\omega \right) \left(\frac{E^2 - G^2}{C} i\omega^3 + (E - G)i\omega \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 + G \right) \left(\frac{G^2}{C} \omega^4 + G\omega^2 \right) + \left(\frac{E^2}{C} \omega^4 + E\omega^2 \right) \left(\frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 + E \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \\ &\quad - \left(\frac{E^2}{C} \omega^4 + E\omega^2 \right) \left(\frac{G^2}{C} \omega^4 + G\omega^2 \right) \varphi = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Характеристическое уравнение выражения (9) содержит 4 корня второй кратности. Общий вид решения для потенциала может быть представлен в следующей форме:

$$\varphi(x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{C+G\omega^2}{G}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{C+G\omega^2}{G}}x} + C_3 e^{\sqrt{\frac{C+G\omega^2}{E}}x} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{C+G\omega^2}{E}}x} + C_5 e^{-\omega x} + C_6 x e^{-\omega x} + C_7 e^{\omega x} + C_8 x e^{\omega x}.$$

Это решение содержит в себе классическую часть – решение би-гармонического уравнения плоской задачи теории упругости (слагаемые с коэффициентами $C_5 \dots C_8$). Запишем далее в операторной форме систему граничных условий. После преобразования Фурье имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[-\frac{E^2}{C} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial x} \right] F_1 + \\ & + \left[\frac{E^2}{C} i\omega^3 - \frac{E^2 - G^2}{C} (i\omega) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (E - 2G)(i\omega) \right] F_2 = 0, \\ & \left[-\frac{G^2}{C} i\omega^3 - \frac{E^2 - G^2}{C} (i\omega) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G(i\omega) \right] F_1 + \\ & + \left[-\frac{G^2}{C} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 \frac{\partial}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial x} \right] F_2 = 0, \\ & \left[-\frac{G^2}{C} (i\omega) \frac{\partial}{\partial x} \right] F_1 + \left[\frac{G^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B \frac{\partial}{\partial x} \right] F_2 = 0, \\ & \left[\frac{E^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - A \frac{\partial}{\partial x} \right] F_1 + \left[\frac{E^2}{C} (i\omega) \frac{\partial}{\partial x} \right] F_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Подставим в данной системе выражения для трансформант функций перемещений через введенный потенциал. Получаем

$$\left\{ \begin{aligned} & L_{31}L_{12}\Phi - L_{32}L_{11}\Phi = 0, \\ & L_{41}L_{12}\Phi - L_{42}L_{11}\Phi = 0, \\ & L_{51}L_{12}\Phi - L_{52}L_{11}\Phi = 0, \\ & L_{61}L_{12}\Phi - L_{62}L_{11}\Phi = 0. \end{aligned} \right.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{31} = -\frac{E^2}{C} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 + E \right) \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{32} = \frac{E^2}{C} i\omega^3 - \frac{E^2 - G^2}{C} (i\omega) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (E - 2G)(i\omega), \\ L_{41} = -\frac{E^2 - G^2}{C} (i\omega) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G(i\omega) - \frac{G^2}{C} i\omega^3, \\ L_{42} = -\frac{G^2}{C} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{E^2 + G^2}{C} \omega^2 + G \right) \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{51} = -\frac{G^2}{C} (i\omega) \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{52} = \frac{G^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{61} = \frac{E^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - A \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{62} = \frac{E^2}{C} (i\omega) \frac{\partial}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Подстановка общего вида решения для введенного функционала в полученную систему граничных условий (с учетом дополнительных граничных условий в заделке) позволяет найти все неизвестные коэффициенты $C_1 \dots C_8$. По потенциалу могут быть найдены трансформанты перемещений F_1 и F_2 . Далее требуется взять обратное преобразование Фурье для определения функций перемещений, возникающих в слое:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x, \omega) e^{-i\omega x} d\omega; \quad v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x, \omega) e^{-i\omega x} d\omega.$$

При проведении численного моделирования это интегрирование проводилось численно, так как аналитическое решение для оригиналов не удастся получить в короткой и удобной для вычислений форме. При этом проводился анализ сходимости процедуры численного вычисления обратного преобразования Фурье. Показана сходимость численной процедуры как при измельчении шага интегрирования, так и при увеличении интервала интегрирования (несобственный интеграл приближенно вычислялся на ограниченном интервале, с учетом условий затухания решения).

Возникающие в слое деформации определялись из классических соотношений Коши, которые остаются справедливыми и для градиентной модели [10]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (10)$$

Представление для полных напряжений в плоской задаче градиентной модели может быть получено из формул Грина, примененных к плотности потенциальной энергии деформаций. Эти напряжения по своей записи совпадают с представлением напряжений для классической задачи теории упругости в плоской постановке:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\vartheta_1 + e) + \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad \sigma_y = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\vartheta_1 + e) + \frac{\partial v}{\partial y} \right], \\ \tau_{xy} &= \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right], \quad \sigma_z = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta_1 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} e \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\vartheta_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-2\nu}{2\mu} (\sigma_x + \sigma_y) - 2\nu e.$$

4. Моделирование двухслойного композитного покрытия

С точки зрения приложений и практического применения результатов моделирования представляется интересным рассмотрение задачи для двухслойного покрытия. В этом случае имеем два потенциала перемещений в каждом из рассматриваемых слоев, общий вид которых следующий:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= A_1 e^{\sqrt{\frac{C_1+G_1\omega^2}{G_1}}x} + A_2 e^{-\sqrt{\frac{C_1+G_1\omega^2}{G_1}}x} + A_3 e^{\sqrt{\frac{C_1+G_1\omega^2}{E_1}}x} + A_4 e^{-\sqrt{\frac{C_1+G_1\omega^2}{E_1}}x} + \\ &+ A_5 e^{-\omega x} + A_6 x e^{-\omega x} + A_7 e^{\omega x} + A_8 x e^{\omega x}. \\ \varphi_2(x) &= B_1 e^{\sqrt{\frac{C_2+G_2\omega^2}{G_2}}x} + B_2 e^{-\sqrt{\frac{C_2+G_2\omega^2}{G_2}}x} + B_3 e^{\sqrt{\frac{C_2+G_2\omega^2}{E_2}}x} + B_4 e^{-\sqrt{\frac{C_2+G_2\omega^2}{E_2}}x} + \\ &+ B_5 e^{-\omega x} + B_6 x e^{-\omega x} + B_7 e^{\omega x} + B_8 x e^{\omega x}. \end{aligned}$$

Граничные условия модели при заданной распределенной силе (через функции Хэвисайда) имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{ll} La_1[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]_{x=0} = \frac{\sqrt{2}\pi \sin(w)}{w}, & La_2[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]_{x=0} = 0, \\ La_3[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]_{x=0} = 0, & La_4[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]_{x=0} = 0, \\ Lb_1[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]_{x=h+H} = 0, & Lb_2[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]_{x=h+H} = 0, \\ Lb_3[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]_{x=h+H} = 0, & Lb_4[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]_{x=h+H} = 0. \end{array} \right.$$

Контактные условия

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{11}(x) = \varphi_{21}(x) \Big|_{x=h}, \quad \varphi_{12}(x) = \varphi_{22}(x) \Big|_{x=h}, \quad \varphi_{11}'(x) = \varphi_{21}'(x) \Big|_{x=h}, \quad \varphi_{12}'(x) = \varphi_{22}'(x) \Big|_{x=h}, \\ \frac{E_1^2}{C_1^2} \varphi_{11}''(x) = \frac{E_2^2}{C_2^2} \varphi_{21}''(x) \Big|_{x=h}, \quad \frac{E_1^2}{C_1^2} \varphi_{12}''(x) = \frac{E_2^2}{C_2^2} \varphi_{22}''(x) \Big|_{x=h}, \\ E_1 \varphi_{11}'(x) - \frac{E_1^2}{C_1^2} \varphi_{11}'''(x) = E_2 \varphi_{21}'(x) - \frac{E_2^2}{C_2^2} \varphi_{21}'''(x), \\ E_1 \varphi_{12}'(x) - \frac{E_1^2}{C_1^2} \varphi_{12}'''(x) = E_2 \varphi_{22}'(x) - \frac{E_2^2}{C_2^2} \varphi_{22}'''(x). \end{array} \right.$$

В приведенной постановке использованы обозначения

$$\left\{ \begin{array}{l} La_1 = \left[-\frac{E_1^2}{C_1} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{E_1^2 + G_1^2}{C_1} \omega^2 + E_1 \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] F_1 + \\ + \left[-\frac{E_1^2 - G_1^2}{C_1} i\omega \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{E_1^2}{C_1} i\omega^3 + (E_1 - 2G_1) i\omega \right) \right] F_2, \\ La_2 = \left[-\frac{E_1^2 - G_1^2}{C_1} i\omega \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(G_1 i\omega - \frac{G_1^2}{C_1} i\omega^3 \right) \right] F_1 + \\ + \left[-\frac{G_1^2}{C_1} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{E_1^2 + G_1^2}{C_1} \omega^2 + G_1 \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] F_2, \\ La_3 = \left(-\frac{G_1^2}{C_1} i\omega \frac{\partial}{\partial x} \right) F_1 + \left(\frac{G_1^2}{C_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B \frac{\partial}{\partial x} \right) F_2, \\ La_4 = \left(\frac{E_1^2}{C_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - A \frac{\partial}{\partial x} \right) F_1 + \left(\frac{E_1^2}{C_1} i\omega \frac{\partial}{\partial x} \right) F_2. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 Lb_1 = \left[-\frac{E_2^2}{C_2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{E_2^2 + G_2^2}{C_2} \omega^2 + E_2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] F_1 + \\
 + \left[-\frac{E_2^2 - G_2^2}{C_2} i\omega \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{E_2^2}{C_2} i\omega^3 + (E_2 - 2G_2)i\omega \right) \right] F_2, \\
 Lb_2 = \left[-\frac{E_2^2 - G_2^2}{C_2} i\omega \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(G_2 i\omega - \frac{G_2^2}{C_2} i\omega^3 \right) \right] F_1 + \\
 + \left[-\frac{G_2^2}{C_2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{E_2^2 + G_2^2}{C_2} \omega^2 + G_2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] F_2, \\
 Lb_3 = \left(-\frac{G_2^2}{C_2} i\omega \frac{\partial}{\partial x} \right) F_1 + \left(\frac{G_2^2}{C_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - B \frac{\partial}{\partial x} \right) F_2, \\
 Lb_4 = \left(\frac{E_2^2}{C_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - A \frac{\partial}{\partial x} \right) F_1 + \left(\frac{E_2^2}{C_2} i\omega \frac{\partial}{\partial x} \right) F_2.
 \end{array} \right.$$

Граничные и контактные условия образуют линейную систему из 16 уравнений с 16 переменными; решая систему, находим постоянные $A_{i(i=1 \div 8)}$, $B_{i(i=1 \div 8)}$ и путем численного обратного интегрального преобразования Фурье находим перемещения в слоях, и далее по формулам (10) и (11) находим деформации и напряжения.

5. Результаты численных вычислений

Задача о равновесии слоя, находящегося на жестком основании под действием нормальной силы, решалась на основе алгоритма, изложенного в предыдущем пункте с использованием системы символьных вычислений Mathematica. Для тестовых вычислений были взяты следующие параметры модели: модуль упругости $E = 1$, модуль сдвига $G = 0,35$, градиентный параметр и толщина слоя задавались переменными. Ширина площадки действия силы задавалась единичной. На рис. 2 представлен характер распределения перемещений в направлении осей X и Y по толщине слоя.

Получаемое численное решение соответствует физическому смыслу задачи: наибольшие перемещения возникают в области приложения нагрузки, решение затухает на бесконечности, и в заделке перемещения отсутствуют. Деформации и напряжения, возникающие в слое, представлены на рис. 3 и 4.

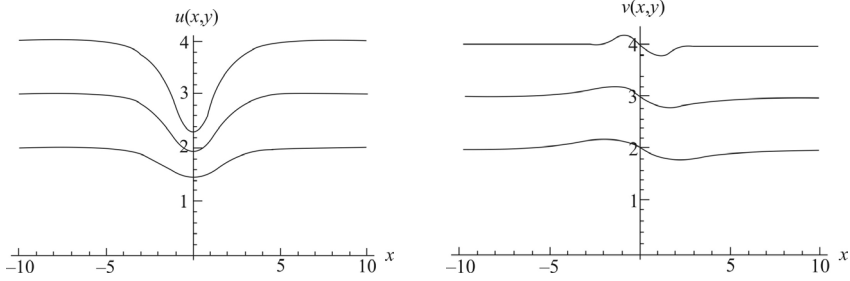


Рис. 2. Распределение перемещений по толщине слоя при действии нормальной силы

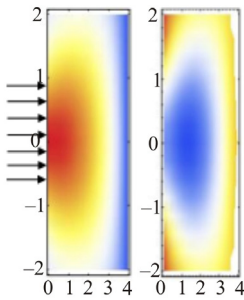


Рис. 3. Компоненты тензора деформаций 11 и 22, возникающие в слое под действием нормальной силы в градиентной модели

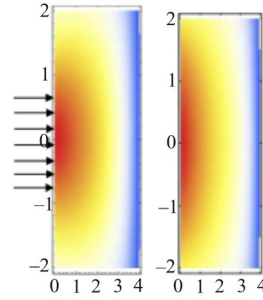


Рис. 4. Компоненты тензора напряжений 11 и 22, возникающие в слое под действием нормальной силы в градиентной модели

6. Зависимость НДС от толщины слоя и градиентного параметра

В рамках градиентной модели представляется важным исследование зависимости НДС покрытий различной толщины. Модель учитывает масштабный градиентный параметр $l(C)$, характеризующий протяженность когезионных взаимодействий. Учет градиентных эффектов особенно интересен в области границ контакта. Для тестовых значений механических параметров задачи было исследовано изменение перемещений, напряжений и деформаций при изменении толщины покрытия в 5 раз. На рис. 5 показан характер изменения перемещений, деформаций и напряжений на верхней границе покрытия при увеличении толщины слоя (или при уменьшении градиентного). Видно, что максимальные нормальные перемещения увеличиваются для покрытий большей толщины. При этом для тонких покрытий уровень напряжений возрастает в 3 раза.

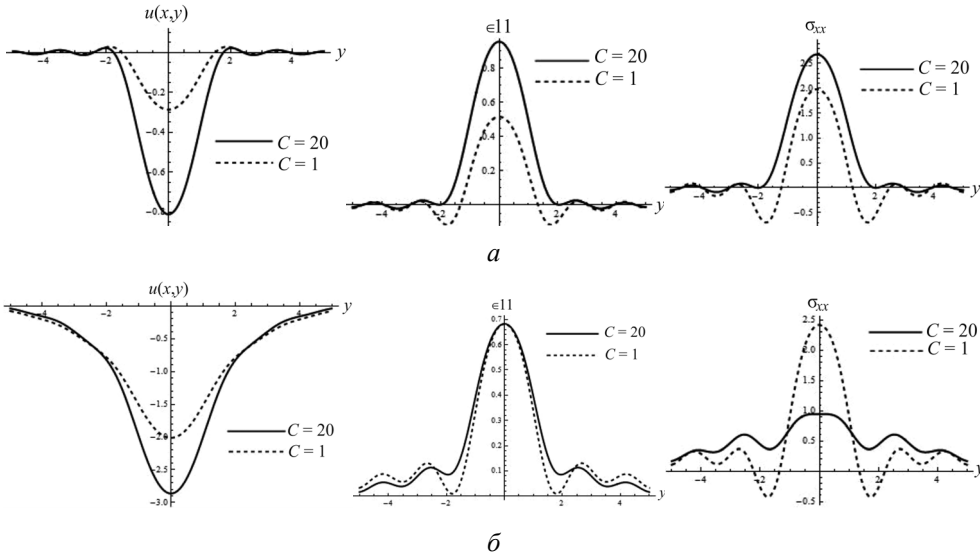


Рис. 5. Характер изменения нормальных перемещений, деформаций и напряжений на верхней границе покрытия при увеличении толщины слоя: $a - h = 1$ мкм; $б - h = 5$ мкм

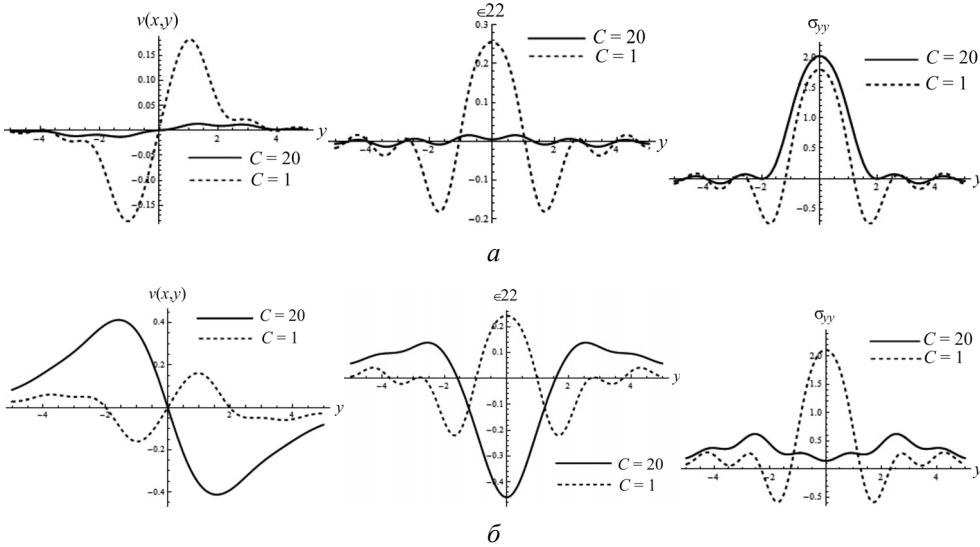


Рис. 6. Характер изменения перемещений, деформаций и напряжений в плоскости на верхней границе покрытия при увеличении толщины слоя: $a - h = 1$ мкм; $б - h = 5$ мкм

На рис. 6 показано, что при изменении масштабных параметров перемещения, деформации и напряжения в покрытии, в плоскости слоя, могут изменять знак. Таким образом, учет градиентных эффектов

может кардинальным образом менять картину напряженно-деформированного состояния тонкослойных структур.

7. Моделирование двухслойного покрытия

Для численного моделирования двухслойного покрытия было принято, что свойства подложки в десять раз отличаются от свойства верхнего слоя покрытия: $E_1/E_2 = 0,1$, $G_1/G_2 = 0,1$. Перемещения, возникающие в двухслойном покрытии под действием распределенной силы на площадке шириной $\{-1,1\}$, представлены на рис. 7.

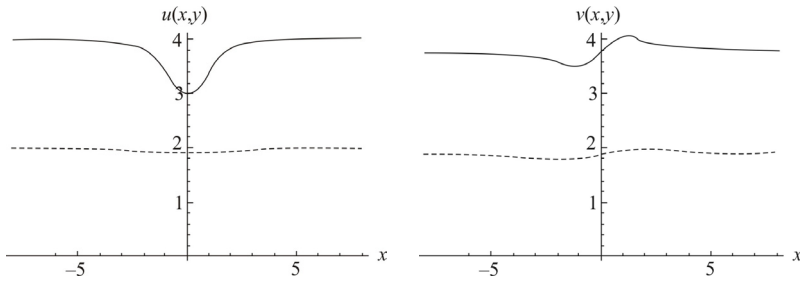


Рис. 7. Перемещения в подложке (пунктир) и в верхнем слое (сплошная линия) покрытия, возникающие под действием распределенной силы

На рис. 8 представлены соответствующие напряжения и деформации, возникающие в двухслойной задаче.

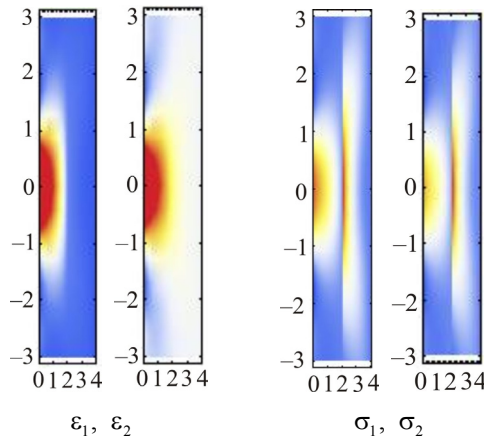


Рис. 8. Деформации и напряжения, возникающие в двухслойном покрытии под действием силы

Из рис. 8 видно, что основная концентрация деформаций и напряжений происходит в более мягком поверхностном слое, однако на

границе двух материалов возникает дополнительная концентрация напряжений, связанная с различием коэффициентов Пуассона материалов и влиянием градиентных эффектов.

Заключение

В работе исследована плоская задача градиентной теории упругости. Построено численное решение задачи о равновесии бесконечно-го композитного слоя, находящегося на жестком основании, при действии распределенной нормальной силы. Решение задачи проводилось с использованием интегрального преобразования Фурье, однако для вычисления обратного преобразования потребовалась реализация алгоритма численных вычислений. Исследована зависимость напряженно-деформированного состояния композитного слоя в зависимости от толщины слоев и градиентного параметра модели. Прикладное значение решенной задачи связано с возможностью достоверного моделирования и оптимизации микроструктурного строения ультратонких защитных композитных покрытий, применяемых в различных отраслях промышленности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №12-01-00273-а, №12-01-31220/12 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 г.», ГК № 14.740.11.0995, соглашение №8221 и соглашение №14.В37.21.2060.

Библиографический список

1. Aifantis E.C. On the role of gradient in the localization of deformation and fracture // *Int. J. Engng. Sci.* – 1992. – Vol. 30. – P.1279–1299.
2. Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales // *J. Mech. Behav. Mater.* – 1994. – Vol. 5. – P. 335–353.
3. Fleck N.A., Hutchinson J.W. A reformulation of strain gradient plasticity // *J. Mech. Phys.* – 2001. – Vol. 9. – P. 2245–2271.
4. Aifantis K.E., Willis J.R. The role of interfaces in enhancing the yield strength of composites and polycrystals // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2005. – Vol. 53. – P. 1047–1070.
5. Gusev A.A., Lurie S.A. Strain-Gradient Elasticity for Bridging Continuum and Atomistic Estimates of Stiffness of Binary Lennard-Jones Crystals // *Adv. Eng. Mat.* – 2010. – Vol. 12. – Iss. 6. – P. 529–533.

6. Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости // МТТ. – 2010. – № 4. – С. 182–192.

7. Тупин Р.А. Теории упругости, учитывающие моментные напряжения: пер. В.А. Пальмова // Механика. – 1965. – Т. 91. – № 3. – С. 113–140.

8. Основы теории межфазного слоя / И.Ф. Образцов, С.А. Лурье, П.А. Белов, Д.Б. Волков-Богородский [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – № 4. – С. 596–612.

9. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Nanomechanical Modeling of the Nanostructures and Dispersed Composites // Int. J. Comp Mater Sc. – 2003. – Vol. 28. – Iss. (3–4). – P. 529–539.

10. Lurie S., Belov P. Cohesion field: Barenblatt's hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations // Int. J. of Fracture. – 2008. – Vol. 50. – P. 181–194.

11. Лурье С.А., Белов П.А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием» // Современные проблемы механики гетерогенных сред: сб. тр. конф. – М, 2005. – С. 235–268.

12. Лурье С.А., Тучкова Н.П. Континуальные модели адгезии для деформируемых твердых тел и сред с наноструктурами // Композиты и наноструктуры. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 25–43.

13. Лурье С.А., Белов П.А., Соляев Ю.О. Адгезионные взаимодействия в механике сплошных сред // Вестник ПГТУ. Математическое моделирование систем и процессов. – 2008. – № 16. – С. 75–85.

References

1. Aifantis E.C. On the role of gradient in the localization of deformation and fracture. *Int. J. Engn. Sci.* 1992, vol. 30, pp. 1279-1299.

2. Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales. *J. Mech. Behav. Mater.* 1994, vol. 5, pp. 335-353.

3. Fleck N.A., Hutchinson J.W. A reformulation of strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys.* 2001, vol. 9, pp. 2245-2271.

4. Aifantis K.E., Willis J.R. The role of interfaces in enhancing the yield strength of composites and polycrystals *J. Mech. Phys. Solids.* 2005, vol. 53, pp. 1047-1070.

5. Gusev A.A., Lurie S.A. Strain-Gradient Elasticity for Bridging Continuum and Atomistic Estimates of Stiffness of Binary Lennard-Jones Crystals. *Adv. Eng. Mat.* 2010, vol. 12, iss. 6, pp. 529-533.

6. Lurie S., Volkov-Bogorodsky D., Leontiev A., Aifantis E. Eshelby's inclusion problem in the gradient theory of elasticity. Applications to composite materials. *Int. J. Engin. Sci.* 2011, vol. 49, pp. 1517-1525.

7. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 1962, vol. 11.

8. Obrazcov I.F., Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodskiy Y.G., Kochemasova E.I., Dudchenko A.A., Potupchik E.M., Shumova N.P. Osnovy teoriy mezhfaznogo sloya [Fundamentals of the theory of interfacial layer]. *Mechanica compositionnykh materialov i konstrukciy*, 2004, no. 4, pp. 596-612.

9. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Nanomechanical Modeling of the Nanostructures and Dispersed Composites. *Int. J. Comp. Mater. Sci.*, 2003, vol. 28, iss. (3-4), pp. 529-539.

10. Lurie S., Belov P. Cohesion field: Barenblatt's hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations. *Int. J. of Fracture*, 2008, vol. 50, pp. 181-194.

11. Lurie S., Kalamkarov A. General Theory of Defects in Continuous Media. *International Journal of Solids & Structures*. 2005, vol. 43, iss. 1, pp. 91-111.

12. Lurie S., Kalamkarov A. General theory of continuous media with conserved dislocations. *J. of Solids and Structures*. 2007, vol. 44, pp. 7468-7485.

13. Lurie S.A., Belov P.A., Solyaev Y.O. Adgesionnye vzaimodeistviy v mechanice sploshnykh sred [Adhesion interactions in continuum mechanics]. *Vestnik PGU. Matematicheskoe modelirovanie sistem i processov*. 2008, vol. 16, pp. 75-85.

Об авторах

Лурье Сергей Альбертович (Москва, Россия) – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией Института прикладной механики РАН, ведущий научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН (119333, г. Москва, Вавилова, 40, e-mail: slurie@ccas.ru).

Соляев Юрий Олегович (Москва, Россия) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института прикладной механики РАН (119333, г. Москва, Вавилова, 40, e-mail: solyaev@bk.ru).

Рабинский Лев Наумович (Москва, Россия) – доктор физико-математических наук, декан факультета прикладной механики Московского авиационного института (НИУ) (125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, e-mail: f9_dec@mai.ru).

Кондратова Юлия Николаевна (Саратов, Россия) – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (410012, г. Саратов ул. Астраханская, 83, e-mail: KondratovaUN@info.sgu.ru).

Волов Михаил Игоревич (Саратов, Россия) – аспирант Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (410012, г. Саратов ул. Астраханская, 83, e-mail: year21@rambler.ru).

About the authors

Lurie Sergey Albertovich (Moscow, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Laboratory IAM RAS, Leader Researcher Computing Centre RAS (40, Vavilova, 119333, Moscow, Russian Federation, e-mail: slurie@ccas.ru).

Solyaev Yuri Olegovich (Moscow, Russian Federation) – Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, Researcher IAM RAS (40, Vavilova, 119333, Moscow, Russian Federation, e-mail: solyaev@bk.ru).

Rabinskiy Lev Naumivich (Moscow, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Dean of Department “Applied Mechanics” Moscow Aviation Institute (4, Volokolamskoe sh., 125993, Moscow, Russian Federation, e-mail: f9_dec@mai.ru).

Kondratova Yulia Nikolaevna (Saratov, Russian Federation) – Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, Ass. Professor Saratov State University (83, Astrakhanskaya, 410012, Saratov, Russian Federation, e-mail: KondratovaUN@info.sgu.ru).

Volov Michail Igorevich (Saratov, Russian Federation) – post graduate student, Saratov State University (Astrakhanskaya, 83, 410012, Saratov, Russian Federation, e-mail: year21@rambler.ru).

Получено 15.02.2013