

УДК 539.3

А.Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

СМЕШАННЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ В АНАЛИЗЕ УПРУГИХ ТРЕХМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Предложена процедура построения смешанных дискретных моделей для анализа напряженного состояния трехмерных упругих тел, конструкций сложной формы, имеющих неоднородную (композиционную) структуру. Смешанные модели состоят из однородных односеточных трехмерных конечных элементов (КЭ) первого порядка формы куба и двухсеточных конечных элементов (ДвКЭ) неоднородной структуры формы прямоугольного параллелепипеда, т. е. состоят из КЭ различной сеточной структуры. В окрестности крепления тела или сложной формы границы используем мелкое разбиение, состоящее из односеточных КЭ и учитывающее неоднородную структуру и сложную форму тела, в остальной части тела – крупное, представленное ДвКЭ. Мелкое и крупное разбиения склеиваем с помощью связующих КЭ, построенных на основе ДвКЭ. Для построения ДвКЭ используем две вложенные сетки: мелкую и крупную. Область ДвКЭ представляем базовым (мелким) разбиением на КЭ первого порядка, которое учитывает его неоднородную структуру и порождает мелкую сетку. На базовом разбиении определяем в матричной форме функционал полной потенциальной энергии ДвКЭ, который (с помощью аппроксимаций, построенных на крупной сетке) проецируем на крупную сетку. Из условия минимизации полученного функционала по узловым перемещениям крупной сетки находим формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил ДвКЭ. Достоинства ДвКЭ состоят в том, что с помощью базового (мелкого) разбиения учитывается неоднородная структура ДвКЭ, они образуют дискретные модели малой размерности и порождают решения с заданной погрешностью. Погрешность решения варьируется с помощью соотношения шагов мелкой и крупной сеток ДвКЭ. Достоинства смешанных дискретных моделей состоят в том, что они имеют малую размерность, учитывают сложную форму тел, неоднородную структуру и порождают решения с заданной погрешностью. Приведен пример расчета.

Ключевые слова: трехмерные тела неоднородной структуры, композиты, упругость, двухсеточные конечные элементы, метод конечных элементов, смешанные дискретные модели.

A.D. Matveev

Institute of computational modeling of SB RAS,
Krasnoyarsk, Russian Federation

**COMBINED DISCRETE MODELES
IN THE THREE-DIMENSIONAL ELASTIC INHOMOGENEOUS
BODIES ANALYSIS OF COMPLEX SHAPE**

Construction procedure of combined discrete models for the stress state of three-dimensional elastic bodies, complex shape design having an inhomogeneous structure to be analyzed has been suggested. Combined models are composed of first-order homogeneous single grid three dimensional finite elements (FE) of cube shape and inhomogeneous (composite) double grid finite elements (DgFE) of rectangular parallelepiped shape. In the vicinity of the body fixing or complex boundary, single grid FE are used, DgFE are for the rest of the body. Construction procedure of DgFE has been shown. To construct DgFE, two nested grids, both fine and coarse ones are used. Area of the DgFE is a basic (fine) discretization into FE of the first order taking into account its inhomogeneous structure and generating the fine grid. On a basic discretization the total potential energy functional of DgFE (using the approximations constructed on a coarse grid) is given in matrix form projected on a coarse grid. Formulas to calculate the stiffness matrix and the nodal forces vector of DgFE are obtained by minimization condition of the functional obtained by nodal displacement of coarse grid. DgFE characteristics are that the inhomogeneous structure is taken into consideration by using the base fine discretization, discrete models of small dimension are formed and the solutions with a specified error generated. Error of the solution varies with ratio steps of coarse and fine grids of DgFE. Advantages of combined discrete models are that they have a small dimension, take into account a complex shape bodies, inhomogeneous structure and generate solutions with a specified error. The example of calculation has been demonstrated.

Keywords: three-dimensional bodies of inhomogeneous structures, composites, elasticity, double grid finite elements, finite element technique, and combined discrete models.

Введение

Как известно [1], при анализе трехмерных тел неоднородной (компазитной) структуры широко используют микро- и макроподходы. В основе макроподхода лежат гипотезы, накладывающие определенные ограничения на поля перемещений, деформаций и напряжений тела, что порождает неустранимую погрешность в решениях. Кроме того, возникают трудности при реализации макроподхода в случае исследования трехмерных неоднородных, композитных тел сложной формы, особенно с малым коэффициентом заполнения неоднородностью. Это связано с тем, что в окрестности границы крепления тела или границы сложной формы гипотезы не выполняются, т.е. в окрестности данных границ тела реализуется трехмерное напряженное со-

стояние. Микроподход дает возможность точно описывать поведение трехмерных композитных (неоднородных) тел сложной формы с любым коэффициентом заполнения неоднородностью. Однако конечно-элементный анализ таких тел с учетом их структуры сводится к построению базовых дискретных моделей очень высокого порядка, что создает проблемы при реализации метода конечных элементов (МКЭ) [2, 3, 4]. Базовые дискретные модели трехмерных тел, имеющих неоднородную структуру, состоят из однородных односеточных трехмерных КЭ первого порядка формы куба [2, 3]. Базовые разбиения учитывают неоднородные структуры и сложную форму тел и при этом порождают решения со сколь угодно малой погрешностью.

В данной работе предлагается совместное применение одно- и двухсеточного моделирования трехмерных упругих тел неоднородной структуры и сложной формы. Такое моделирование порождает смешанные дискретные модели, которые состоят из КЭ различной сеточной структуры: односеточных и двухсеточных КЭ. Подобласть тела, которая включает границу сложной формы или крепления тела, представляем базовым (мелким) разбиением, которое состоит из однородных односеточных КЭ первого порядка формы куба и учитывает неоднородную структуру и сложную форму тела, а остальную часть тела покрываем крупным разбиением на ДвКЭ неоднородной (композитной) структуры формы прямоугольного параллелепипеда. Мелкое и крупное разбиения склеиваем с помощью связующих ДвКЭ и в результате получаем смешанную дискретную модель, размерность которой меньше размерности базовой.

Для построения ДвКЭ формы прямоугольного параллелепипеда используем две вложенные трехмерные узловые сетки: мелкую и крупную. Мелкая сетка порождена базовым (мелким) разбиением ДвКЭ, которое состоит из однородных односеточных КЭ первого порядка формы куба и учитывает неоднородную структуру данного ДвКЭ. Построение ДвКЭ сводится к исключению параметров МКЭ в узлах мелкой сетки (которые не совпадают с узлами крупной сетки) с помощью аппроксимирующих функций перемещений u, v, w , построенных на крупной сетке, т.е. узловые перемещения мелкой сетки выражаются через узловые перемещения крупной сетки. Общее число узлов крупной сетки многократно меньше общего числа узлов мелкой, поэтому размерность ДвКЭ многократно меньше размерности его ба-

зового разбиения. Существуют два типа ДвКЭ [5]. У ДвКЭ первого типа [5, 6] крупные сетки определяются только на границе его базового разбиения. Крупная сетка ДвКЭ второго типа определяется на всей его области. Изложены процедуры построения ДвКЭ второго типа и связующих ДвКЭ. Недостаток процедуры построения ДвКЭ первого типа состоит в том, что она содержит операцию вычисления обратной матрицы высокой размерности [5, 6].

Приведен пример расчета трехмерного тела сложной формы, имеющего неоднородную структуру.

1. Процедура построения двухсеточных конечных элементов

Изложение данной процедуры проведем для трехмерного ДвКЭ (второго типа) неоднородной структуры формы прямоугольного параллелепипеда размерами $a \times b \times c$, для рис. 1 имеем $a = 12h$, $b = c = 8h$. Считаем, что между компонентами неоднородной структуры ДвКЭ связи идеальны, а функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши [7]. Область ДвКЭ представляем базовым разбиением, состоящим из однородных односеточных КЭ V_j^h первого порядка формы куба со стороной h [2], параметрами МКЭ которых являются значения перемещений u, v, w в узлах КЭ V_j^h , $j = 1, \dots, M$; M – общее число КЭ V_j^h .

На рис. 1 показано базовое (мелкое) разбиение ДвКЭ на КЭ V_j^h . Базовое разбиение ДвКЭ учитывает его неоднородную (композиционную) структуру и порождает мелкую равномерную узловую сетку V_h^m размерностью $m_1 \times m_2 \times m_3$ с шагом h по осям Ox , Oy , Oz . Для рис. 1 имеем $m_1 = 13$, $m_2 = m_3 = 9$. На мелкой сетке V_h^m определяем крупную трехмерную узловую сетку V_H^n размерности $n_1 \times n_2 \times n_3$ с шагами: H_1 по оси Ox , H_2 по оси Oy и H_3 по оси Oz . Сетка V_H^n вложена в мелкую сетку V_h^m , при этом имеем: $H_1 = k_1 h$, $H_2 = k_2 h$, $H_3 = k_3 h$, где k_1, k_2, k_3 – целые, не менее 2. На рис. 1 узлы крупной сетки отмечены точками, $H_1 = 3h$, $H_2 = H_3 = 2h$, $n_1 = n_2 = n_3 = 5$, $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = 2$. Полную потенциальную энергию Π_e ДвКЭ представим в матричном виде [8]:

$$\Pi_e = \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_j^T [K_j] \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T \mathbf{P}_j \right), \quad (1)$$

где $[K_j]$ – матрица жесткости; $\mathbf{P}_j, \mathbf{q}_j$ – векторы узловых сил и неизвестных элемента V_j^h ; Т – транспонирование.

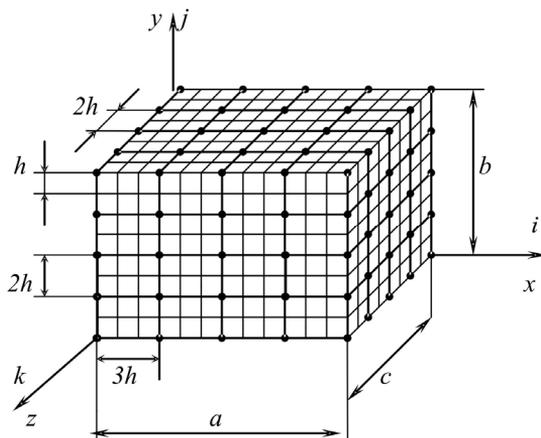


Рис. 1. Мелкая и крупная сетки ДвКЭ

С помощью полиномов Лагранжа [8] на крупной сетке V_H^n определяем аппроксимирующие функции для перемещений u, v, w ДвКЭ, которые соответственно обозначим через u_H, v_H, w_H и представим в форме

$$u_H = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_H = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_H = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} w_{ijk}, \quad (2)$$

где $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$ – искомые значения функций u_H, v_H, w_H в узле (i, j, k) сетки V_H^n ; i, j, k – координаты целочисленной системы координат ijk , введенной для узлов крупной сетки (см. рис. 1); $N_{ijk} = N_{ijk}(x, y, z)$ – базисная функция узла (i, j, k) сетки V_H^n , $i=1, \dots, n_1, j=1, \dots, n_2, k=1, \dots, n_3$, $N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z)$,

$$L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^{n_1} \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}, \quad L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^{n_2} \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}, \quad L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^{n_3} \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha}, \quad (3)$$

(x_i, y_j, z_k) – координаты узла (i, j, k) сетки V_H^n в системе координат $Oxyz$.

Тройке целых чисел i, j, k узла (i, j, k) крупной сетки V_H^n определим целое число β и введем следующие обозначения: $N_\beta = N_{ijk}$, $q_\beta^u = u_{ijk}$, $q_\beta^v = v_{ijk}$, $q_\beta^w = w_{ijk}$, где $\beta = 1, \dots, n_0$; $n_0 = n_1 n_2 n_3$. Тогда выражения (2) примут вид

$$u_H = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_\beta q_\beta^u, \quad v_H = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_\beta q_\beta^v, \quad w_H = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_\beta q_\beta^w. \quad (4)$$

Обозначим через $\mathbf{q}_H = \{q_1^u, \dots, q_{n_0}^u, q_1^v, \dots, q_{n_0}^v, q_1^w, \dots, q_{n_0}^w\}^T$ вектор узловых параметров МКЭ крупной сетки V_H^n , т. е. вектор узловых неизвестных ДвКЭ. Используя (4), компоненты вектора \mathbf{q}_j узловых неизвестных КЭ V_j^h выражаем через компоненты вектора \mathbf{q}_H , в результате получим равенство

$$\mathbf{q}_j = [A_j] \mathbf{q}_H, \quad (5)$$

где $[A_j]$ – прямоугольная матрица, $j = 1, \dots, M$.

Подставляя (5) в выражение (1), из условия $\partial \Pi_e / \partial \mathbf{q}_H = 0$ получаем уравнение $[K_H] \mathbf{q}_H = \mathbf{F}_H$,

$$[K_H] = \sum_{j=1}^M [A_j]^T [K_j] [A_j], \quad \mathbf{F}_H = \sum_{j=1}^M [A_j]^T \mathbf{P}_j. \quad (6)$$

где $[K_H], \mathbf{F}_H$ – матрица жесткости и вектор узловых сил трехмерного ДвКЭ (второго типа) формы прямоугольной призмы, который обозначим через V_e^q , e – порядковый номер.

Замечание 1. Решение, построенное для крупной сетки ДвКЭ, с помощью формулы (5) проецируется на мелкую сетку базового разбиения ДвКЭ, что дает возможность вычислять напряжения в любом КЭ базового разбиения ДвКЭ, следовательно, определять напряжения в любом компоненте неоднородной структуры ДвКЭ.

Достоинства двухсеточных конечных элементов

- С помощью базового (мелкого) разбиения ДвКЭ учитывается его неоднородная и микронеоднородная структура.
- ДвКЭ порождают двухсеточные дискретные модели, общее число узловых неизвестных которых меньше общего числа неизвестных базовых моделей.
- ДвКЭ порождают решения, которые отличаются от решений, отвечающих базовым моделям, на заданную величину.
- С помощью варьирования соотношений шагов мелкой и крупной вложенных сеток ДвКЭ регулируется погрешность решений, построенных для двухсеточных дискретных моделей.
- Напряжения могут быть определены в любом компоненте неоднородной, микронеоднородной структуры ДвКЭ.
- Процедура построения ДвКЭ базируется на известных алгоритмах МКЭ и поэтому удобно реализуется на ЭВМ. Реализация МКЭ для двухсеточных дискретных моделей требует меньше ресурсов ЭВМ и временных затрат, чем для базовых моделей.

Расчеты показывают [5], что ДвКЭ типа V_e^q (см. рис. 1) эффективны при анализе трехмерных тел, которые армированы ортогональными регулярными решетками волокон и область которых представляется ДвКЭ формы прямоугольного параллелепипеда.

2. Процедура построения связующих двухсеточных конечных элементов

При совместном применении одно- и двухсеточного моделирования тела неоднородной структуры подобласть V_1 тела, которая включает границу крепления и границу сложной формы, представляем мелким разбиением, которое состоит из однородных односеточных КЭ первого порядка, а остальную часть тела (область V_0) – покрываем крупным разбиением на ДвКЭ неоднородной структуры, $V = V_1 + V_0$; V – область тела. Мелкое разбиение области V_1 учитывает неоднородную структуру и сложную форму тела. В результате получаем смешанную дискретную модель тела, состоящую из КЭ различной структуры. В смешанной дискретной модели тела связь мелкого разбиения области V_1 с крупным разбиением области V_0 осуществляется с помощью

связующих ДвКЭ, которые обозначим через V_α^s (α – порядковый номер КЭ V_α^s).

Рассмотрим процедуру построения ДвКЭ V_α^s . Пусть разбиение области V_1 состоит из однородных односеточных КЭ V_j^h первого порядка формы куба со стороной h , т. е. область V_1 представляем КЭ базовой модели тела. Связующий ДвКЭ V_α^s строим на основе ДвКЭ V_e^q , т. е. ДвКЭ V_α^s имеет такие же мелкую и крупную сетки, как и ДвКЭ V_e^q . Пусть связующий ДвКЭ V_α^s по границе S_α , которая лежит в плоскости yOz (рис. 2), соприкасается с областью V_1 . На рис. 2 при $x \geq 12h$ показано разбиение тела на ДвКЭ V_α^s и V_e^q . Отметим, что на границе S_α сетка разбиения области V_1 содержит узлы крупной сетки V_H^n ДвКЭ V_α^s . Полную потенциальную энергию Π_α^s ДвКЭ V_α^s представим в виде

$$\Pi_\alpha^s = \frac{1}{2} (\mathbf{\Delta}_h^\alpha)^T [K_h^\alpha] \mathbf{\Delta}_h^\alpha - (\mathbf{\Delta}_h^\alpha)^T \mathbf{P}_h^\alpha, \quad (7)$$

где $[K_h^\alpha]$ – матрица жесткости базового разбиения V_h^m ДвКЭ V_α^s ; \mathbf{P}_h^α – вектор узловых сил и $\mathbf{\Delta}_h^\alpha$ – вектор узловых неизвестных разбиения V_h^m . Вектор $\mathbf{\Delta}_h^\alpha$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{\Delta}_h^\alpha = \{ \mathbf{\Delta}_1^\alpha, \mathbf{q}_H, \mathbf{\Delta}_q^\alpha \}^T, \quad (8)$$

где $\mathbf{\Delta}_1^\alpha$ – вектор значений перемещений тех узлов мелкой сетки V_h^m ДвКЭ V_α^s , которые лежат на границе S_α и не совпадают с узлами крупной сетки V_H^n ; $\mathbf{\Delta}_q^\alpha$ – вектор значений перемещений остальных узлов сетки V_h^m , не совпадающих с узлами крупной сетки V_H^n ; \mathbf{q}_H – вектор узловых неизвестных крупной сетки.

Используя (4), между векторами $\mathbf{\Delta}_q^\alpha$ и \mathbf{q}_H установим связь:

$$\mathbf{\Delta}_q^\alpha = [D_\alpha] \mathbf{q}_H, \quad (9)$$

где $[D_\alpha]$ – прямоугольная матрица.

структуру), которая состоит из однородных односеточных КЭ V_j^h первого порядка формы куба со стороной h . Пусть $\|\mathbf{U}-\mathbf{U}_0\| \leq \delta_1$, где \mathbf{U} – точное решение. Пусть $\|\mathbf{U}_0-\mathbf{U}_h\| \leq \delta$, где \mathbf{U}_h – вектор функций перемещений смешанной дискретной модели данного тела, т. е. состоящей из однородных односеточных КЭ V_j^h и двухсеточных КЭ V_e^q и V_α^s неоднородной структуры формы прямоугольного параллелепипеда. Тогда имеем $\|\mathbf{U}-\mathbf{U}_h\| \leq \delta_0$, где $\delta_0 = \delta_1 + \delta$. Погрешность δ_1 определяется параметрами базового разбиения тела. Факторы, влияющие на эту погрешность, изучены в теории МКЭ [9, 10]. Расчеты показывают, что погрешность δ зависит от характерных геометрических размеров подобласти тела, которая представлена односеточными КЭ первого порядка, и от соотношения шагов мелкой и крупной вложенных сеток ДвКЭ V_e^q .

Достоинства смешанных дискретных моделей

- Размерности смешанных дискретных моделей трехмерных тел меньше размерностей базовых моделей.
- Смешанные дискретные модели учитывают неоднородную структуру и сложную форму трехмерных тел.
- Напряжения могут быть определены в любом компоненте неоднородной структуры смешанной дискретной модели трехмерного тела.
- Смешанные дискретные модели трехмерных тел порождают решения, отличающиеся от решений базовых дискретных моделей, на заданную величину.
- Реализация МКЭ для смешанных дискретных моделей трехмерных тел требует меньше ресурсов ЭВМ и временных затрат, чем для базовых моделей.

3. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим в декартовой системе координат $Oxyz$ модельную задачу упругости для трехмерного упругого тела неоднородной структуры, которое имеет сложную форму (см. рис. 2). При $x=0$ тело закреплено, т.е. имеем $u=v=w=0$. Граница крепления на рис. 2 показана штриховкой. Тело армировано ортогональной решеткой волокон с поперечным сечением $2h \times 2h$ внутри области и $2h \times h$, $h \times h$ на границе. Расстояние между волокнами по оси Ox равно $10h$, по осям Oy , Oz – $6h$,

т.е. волокна с поперечным сечением $h \times h$ являются ребрами ДвКЭ V_α^s и V_e^q . Максимальное число волокон, параллельных оси Ox , равно 4, параллельных осям Oy , Oz , – 7. Базовая модель тела, состоящая из однородных односеточных КЭ V_j^h первого порядка формы куба со стороной h [2], учитывает его неоднородную структуру, сложную форму и порождает мелкую сетку V^h . Для узлов сетки V^h введена целочисленная система координат ijk ; для рис. 2 имеем $n_1 = 73$, $n_2 = n_3 = 25$. Тело нагружено силами $P_y = 1,25$ кг, которые приложены в узлах сетки V^h с целочисленными координатами $(i, 25, k)$, где $i = 25, 37, 49, 61$; $k = 1, 9, 17$. Модуль Юнга волокон равен 10^5 кг/см², связующего материала – 10^4 кг/см², коэффициент Пуассона для всей области тела равен 0,3; $h = 0,5$ см. Левый торец тела имеет вырезы: вертикальный – размерами $8h \times 24h \times 14h$ и горизонтальный – размерами $5h \times 16h \times 5h$, которые порождают границу сложной формы. В связи с этим при построении смешанной дискретной модели для данного тела в области V_1 (см. рис. 2), т. е. при $0 \leq x \leq 12h$, используем мелкое (базовое) разбиение, состоящее из однородных односеточных КЭ V_j^h первого порядка формы куба со стороной h . Остальная часть тела, т.е. при $12h \leq x \leq 72h$, представлена крупным разбиением на ДвКЭ V_e^q и связующие ДвКЭ V_α^s , размерами $12h \times 8h \times 8h$ (см. рис. 1), $e = 1, \dots, 30$, $\alpha = 1, \dots, 9$. На рис. 2 показано разбиение тела на ДвКЭ V_e^q и V_α^s .

Результаты расчетов представлены в табл. 1, 2. Анализ результатов показывает, что максимальное значение перемещений v_h смешанной дискретной модели тела отличается от перемещений v_0 базовой модели на 1,8 % (в табл. 1 максимальные значения перемещений v_h , v_0 выделены жирным шрифтом).

Эквивалентные напряжения σ_h смешанной дискретной модели тела и σ_0 – базовой модели вычисляем в центре тяжести КЭ V_j^h по четвертой теории прочности. Максимальное значение напряжения σ_h отличается от напряжения σ_0 на 0,1 % (в табл. 2 максимальные значения напряжений σ_0 , σ_h выделены жирным шрифтом).

Таблица 1

Узловые перемещения ($j = 25$; $v_0, v_h \times 10^{-4}$ см)

$k \setminus i$	13	25	37	49	61	73	v_0, v_h
1	10,055	23,618	37,157	51,212	65,113	77,194	v_0
	10,088	23,037	36,263	49,993	63,584	75,734	v_h
9	9,238	21,397	34,511	48,277	62,040	74,914	v_0
	9,199	21,021	33,857	47,320	60,792	73,547	v_h
17	8,177	19,919	33,350	46,893	60,562	72,642	v_0
	8,156	19,537	32,616	45,885	59,263	71,410	v_h

Таблица 2

Эквивалентные напряжения (σ_0, σ_h кг/см²)

y	$z \setminus x$	0,5h	1,5h	3,5h	4,5h	6,5h	16,5h	σ
0,5h	0,5h	10,978	16,071	14,423	13,589	12,108	6,413	σ_0
		10,958	16,054	14,426	13,602	12,141	6,652	σ_h
	1,5h	5,543	1,952	1,725	1,561	1,280	0,668	σ_0
		5,541	1,949	1,721	1,557	1,276	0,690	σ_h
	3,5h	3,872	2,355	1,998	1,793	1,348	0,548	σ_0
		3,867	2,351	1,990	1,784	1,338	0,651	σ_h
	4,5h	4,811	2,445	2,012	1,903	1,878	0,481	σ_0
		4,812	2,442	2,003	1,890	1,855	0,568	σ_h

Базовая модель тела содержит 114282 узловых неизвестных, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна 1956. Смешанная дискретная модель тела имеет 24834 неизвестных, ширина ленты СУ МКЭ равна 3567 и занимает в 2,5 раза меньше объема памяти ЭВМ, чем лента базовой модели. Время реализации МКЭ для смешанной дискретной модели тела в 2,3 раза меньше, чем для базовой модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00053).

Библиографический список

1. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

3. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М: Мир, 1984. – 430 с.
4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М: Мир, 1976. – 464 с.
5. Матвеев А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов // Деп. в ВИНТИ № 2990-В00. Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, 2000. – 30 с.
6. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // ПМТФ. – 2004. – № 3. – С. 161–171.
7. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.
8. Норри Д., де-Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
9. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М: Мир, 1977. – 351 с.
10. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 591 с.

References

1. Fudzi T., Dzako M. *Mechanika razrushenija kompozisionykh materialov* [Fracture mechanics of composite materials]. Moscow: Mir, 1982. 232 p.
2. Zenkevych O. *Metod konechnykh elementov v tehnike* [The finite element method in engineering]. Moscow: Mir, 1975. 541 p.
3. Gallagher R. *Metod konechnykh elementov. Osnovy* [The finite element method. Fundamentals]. Moscow: Mir, 1984. 430 p.
4. Oden J. *Konechnye elementy nelineynoy mekhaniki splochnykh sred* [Finite elements of nonlinear continua]. Moscow: Mir, 1976. 464 p.
5. Matveev A.D. *Nekotorye podkhody proektirovaniya uprugikh mnogosetochnykh konechnykh elementov* [Some approaches of designing elastic multigrid finite elements]. *VINITI Proceedings № 2990-B00. Institut vychislitel'nogo modelirovaniya Sibirskogo otdelenija Rossijskoy akademii nauk*, Krasnoyarsk, 2000, 30 p.
6. Matveev A.D. *Mnogosetochnoe modelirovanie kompozitov neregularnoi struktury s malym koefitsientom nopolnenia* [Multigrid modeling of

composites of irregular structure with a small filling ratio]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2004, no. 3, pp. 161-171.

7. Samul V.I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1982. 264 p.

8. Norrie D., de Vries J. *Vedenie v metod konechnykh elementov* [An Introduction to Finite Element Analysis]. Moscow: Mir, 1981. 304 p.

9. Strang G., Fix G.J. *Teoriya metoda konechnykh elementov* [An analysis of the finite element method]. Moscow: Mir, 1977. 351 p.

10. Rektorys K. *Variacionnye metody v matematicheskoy fizike i tekhnike* [Variational methods in mathematics physics and engineering]. Moscow: Mir, 1985. 591 p.

Об авторе

Матвеев Александр Данилович (Красноярск, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института вычислительного моделирования СО РАН (660036, г. Красноярск – 36, Академгородок, 50/44, e-mail: mtv@icm.krasn.ru).

About the author

Matveev Aleksandr Danilovich (Krasnoyarsk, Russian Federation) – Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Researcher, Federal State Institution of Science ICM SB RAS (50/44, Akademgorodok, 660036, Krasnoyarsk, Russian Federation, e-mail: mtv@icm.krasn.ru).

Получено 7.02.2013