

УДК 533.9.01

Н.Г. Тактаров, О.А. РуноваМордовский государственный педагогический институт
им. М. Е. Евсевьева, Саранск, Россия**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ МАГНИТНОЙ
ЖИДКОСТИ, ОКРУЖАЮЩЕЙ ДЛИННОЕ ПОРИСТОЕ ЯДРО**

Построена и исследована математическая модель распространения и неустойчивости волн на поверхности цилиндрического столба магнитной жидкости бесконечной длины, окружающей коаксиально расположенное, бесконечно длинное ядро (из пористого материала) круглого сечения. Найдены условия, при которых возмущения поверхности жидкого столба становятся неустойчивыми и приводят к его распаду на цепочку из соединенных капель. Учитывается наличие поверхностного натяжения. Сила тяжести предполагается отсутствующей. Ось пористого цилиндра совпадает с осью коаксиально расположенного соленоида, создающего однородное магнитное поле. Задача решается в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , в которой жидкий столб покоится. Ось z направлена по оси соленоида. Записаны уравнения движения магнитной жидкости внутри и вне пористой среды, а также уравнения для магнитного поля в пористой среде, жидкости и воздушном зазоре. Сформулированы граничные условия для гидродинамических и магнитных величин на поверхностях раздела сред. Возмущенное (в связи с распространением волны) магнитное поле ищется внутри и вне пористой среды, а также в воздушном зазоре соленоида. Найдено полное решение краевой задачи для гидродинамических и магнитных величин. Проведен численный анализ полученного дисперсионного уравнения, описывающего распространение поверхностных волн. Рассмотрены различные частные случаи. Найдены условия, при которых возмущения поверхности жидкого столба устойчивы (затухающие волны) либо неустойчивы (что приводит к нарастанию возмущений и распаду цилиндра на цепочку капель). Показано, что размер образующихся при распаде капель увеличивается с ростом магнитного поля, т.е. магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на распад жидкого столба.

Ключевые слова: волны, магнитная жидкость, цилиндрическая конфигурация жидкости, магнитное поле, длинное пористое ядро.

N.G. Taktarov, O.A. Runova

Mordovian State Pedagogical Institute,
Saransk, Russian Federation

MODELING OF THE WAVES ON A SURFACE OF A CYLINDRICAL CONFIGURATION OF MAGNETIC FLUID, SURROUNDING A LONG POROUS CORE

A mathematical model of waves propagation and instability on a surface of a cylindrical column of magnetic fluid of an infinite length, surrounding a coaxial infinite long porous core of the round section is constructed and studied. The conditions are found under which the disturbances of the surface of fluid column become unstable and result in its fragmentation into a chain of connected droplets. The presence of a surface tension is taken into account. The gravity is neglected. The axis of the porous cylinder coincides with the axis of a coaxial solenoid, generating an uniform magnetic field. The problem is solved in a cylindrical coordinate system (r, θ, z) , in which the fluid column is at rest. The z -axis is directed along the axis of the solenoid. The equations of the motion of magnetic fluid inside and outside of the porous medium and the equations for the magnetic field are written. The boundary conditions for hydrodynamic and magnetic values on discontinuity surfaces are formulated. The disturbances of magnetic field (according to wave propagation) is searched inside and outside of the porous medium, as well as in the air clearance of the solenoid. The full solution of a boundary value problem for hydrodynamic and magnetic values is found. The numerical analysis of the dispersion equation, describing wave propagation on surface is done. The different special cases are considered. The conditions are found under which the disturbances of the surface of fluid column become stable (wave damping) or become unstable (which result to the disturbances growth and the fragmentation of the cylinder into a chain of droplets). It is shown that the size of droplets appeared in fragmentation process increases with the growth of the magnetic field i.e. magnetic field has a stabilizing influence upon the fragmentation of the fluid column.

Keywords: waves, magnetic fluid, cylindrical configuration of fluid, magnetic field, long porous core.

Введение

Магнитные жидкости в природе не существуют – их синтезируют искусственно, путем коллоидного растворения наночастиц твердого ферромагнетика в обычной немагнитной жидкости [1]. Магнитные жидкости широко используются в различных областях техники и технологии.

Задача о волнах на поверхности струи магнитной жидкости рассмотрена в [2]. Распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании исследовано в [3]. Задача о распространении волн на заряженной поверхности цилиндрического столба электропроводной жидкости, окружающей длинное пористое ядро, решена в [4].

1. Математическая модель

Предполагается, что внутри цилиндрического объема магнитной жидкости находится ядро из пористого материала в форме коаксиально расположенного круглого цилиндра. Учитывается наличие поверхностного натяжения. Сила тяжести предполагается отсутствующей. Ось пористого цилиндра совпадает с осью коаксиально расположенного цилиндрического соленоида, создающего однородное магнитное поле с напряженностью \mathbf{H}_0 . Задача решается в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , в которой жидкий столб покоится. Ось z направлена по оси пористого цилиндра. Радиус пористого цилиндра, невозмущенной поверхности жидкости и соленоида обозначим a , a_0 и b соответственно. Величины, относящиеся к пористой среде, свободной жидкости (вне пористой среды) и промежутку между жидкостью и соленоидом (воздух), будем обозначать в необходимых случаях индексами 1, 2 и 3 соответственно. Магнитная проницаемость μ_1 , μ_2 , μ_3 в областях 1, 2, 3 предполагается постоянной. Предполагаем, что $\mu_3 = 1$, а магнитная проницаемость среды в области 1 (пористый материал, насыщенный жидкостью) $\mu_1 = \mu_2 \Gamma + \mu_s (1 - \Gamma)$, где μ_s – проницаемость пористой матрицы; Γ – пористость (отношение объема пор ко всему элементарному объему среды). При постоянной проницаемости магнитная сила равна нулю, однако это не означает, что магнитное поле не влияет на движение жидкости. В самом деле, на поверхностях раздела сред существуют механические напряжения (связанные со скачком магнитного поля), посредством которых и происходит взаимодействие поля со средой.

Уравнения движения магнитной жидкости в пористой среде (при сделанных предположениях) имеют вид [3, 5]

$$\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1 - \frac{\eta}{K} \mathbf{u}_1, \quad \text{div } \mathbf{u}_1 = 0. \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность жидкости; η – вязкость; K – коэффициент проницаемости пористой среды; p_1 – давление; \mathbf{u}_1 – макроскопическая скорость фильтрации, связанная со средней скоростью \mathbf{v}_1 жидкости в порах соотношением $\mathbf{u}_1 = \Gamma \mathbf{v}_1$.

Уравнения движения свободной жидкости, в предположении, что амплитуда волны значительно меньше ее длины, запишем в линейном приближении [6]:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = -\text{grad } p_2, \quad \text{div } \mathbf{u}_2 = 0. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{u}_2 – скорость свободной жидкости. Ограничиваемся случаем волн достаточно большой длины λ , существенно превышающей радиус a_0 жидкого столба, с тем чтобы пренебречь слагаемыми, содержащими $\Delta \mathbf{u}_1$ и $\Delta \mathbf{u}_2$ в уравнениях (1) и (2).

Уравнения для магнитного поля [7]

$$\text{rot } \mathbf{H}_i = 0, \quad \text{div } \mu_i \mathbf{H}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Из уравнений (1)–(3) следует

$$\mathbf{u}_1 = \nabla \varphi_1, \quad \mathbf{u}_2 = \nabla \varphi_2, \quad \mathbf{H}_i = \nabla \psi_i, \quad (4)$$

$$\Delta \varphi_1 = 0, \quad \Delta \varphi_2 = 0, \quad \Delta \psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Далее все величины будем записывать в виде

$$p_1 = p_{10} + p_{1w}, \quad p_2 = p_{20} + p_{2w}, \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{i0} + \mathbf{H}_{iw}, \\ \psi_i = \psi_{i0} + \psi_{iw} = zH_{i0} + \psi_{iw} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Здесь индексами 0 и w обозначены соответственно невозмущенные величины и малые возмущения, связанные с волной; $\mathbf{H}_{10} = \mathbf{H}_{20} = \mathbf{H}_{30} \equiv \mathbf{H}_0$. Возмущения ψ_{iw} также должны удовлетворять уравнениям Лапласа (4).

Система граничных условий имеет вид [6, 7]:

на границе пористой среды ($r = a$)

$$1) \quad u_{1r} = u_{2r}, \\ 2) \quad \psi_1 = \psi_2, \\ 3) \quad \mu_1 \mathbf{n} \nabla \psi_1 = \mu_2 \mathbf{n} \nabla \psi_2, \quad (6)$$

$$4) \quad p_1 - \frac{\mu_1}{4\pi} H_{1n}^2 + \frac{\mu_1}{8\pi} \mathbf{H}_1^2 = p_2 - \frac{\mu_2}{4\pi} H_{2n}^2 + \frac{\mu_2}{8\pi} \mathbf{H}_2^2;$$

на свободной поверхности жидкости $r = a_0 + \xi(\theta, z, t)$

$$5) u_{2r} = \frac{d\xi}{dt},$$

$$6) \psi_2 = \psi_3,$$

$$7) \mu_2 \mathbf{n} \nabla \psi_2 = \mu_3 \mathbf{n} \nabla \psi_3,$$

$$8) p_2 - \frac{\mu_2}{4\pi} H_{2n}^2 + \frac{\mu_2}{8\pi} \mathbf{H}_2^2 - \left(p_3 - \frac{\mu_3}{4\pi} H_{3n}^2 + \frac{\mu_3}{8\pi} \mathbf{H}_3^2 \right) = 2\alpha C;$$

на поверхности соленоида ($r=b$)

$$9) \psi_{3w} = 0 \text{ (возмущение потенциала } \psi_3 \text{ равно нулю).}$$

Здесь α – коэффициент поверхностного натяжения; C – средняя кривизна поверхности; \mathbf{n} – единичная нормаль к соответствующей поверхности.

Невозмущенные величины также должны удовлетворять граничным условиям (6) (в предположении, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = 0$ и $\xi = 0$).

Для возмущений давления из (1) и (2) с учетом (5) следует

$$p_{1w} = -\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\eta}{K} \varphi_1, \quad p_{2w} = -\rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}. \quad (7)$$

Как известно из дифференциальной геометрии, выражения для \mathbf{n} и C для деформированной цилиндрической поверхности в линейном приближении имеют вид

$$\mathbf{n} = (n_r, n_\theta, n_z) = \left(1, -\frac{1}{a_0} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}, -\frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \quad (8)$$

$$2C = \operatorname{div} \mathbf{n} = \frac{1}{a_0} - \left(\frac{\xi}{a_0^2} + \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right).$$

На поверхности пористой среды $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$.

С учетом вышеизложенного граничные условия (6) в линейном приближении принимают вид

$$1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \quad (r=a), \quad (9)$$

$$2) \psi_{1w} = \psi_{2w} \quad (r=a),$$

$$3) \mu_1 \frac{\partial \psi_{1w}}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial \psi_{2w}}{\partial r} \quad (r=a),$$

$$4) p_{1w} + \frac{\mu_1 H_0}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{1w}}{\partial z} = p_{2w} + \frac{\mu_2 H_0}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{2w}}{\partial z} \quad (r = a),$$

$$5) \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (r = a_0),$$

$$6) \Psi_{2w} = \Psi_{3w} \quad (r = a_0),$$

$$7) \mu_2 \left(H_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_{2w}}{\partial r} \right) = \mu_3 \left(H_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_{3w}}{\partial r} \right) \quad (r = a_0),$$

$$8) p_{2w} + \frac{\mu_2 H_0}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{2w}}{\partial z} - \frac{\mu_3 H_0}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{3w}}{\partial z} = -\alpha \left(\frac{\xi}{a_0^2} + \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad (r = a_0),$$

$$9) \Psi_{3w}(b) = 0.$$

Кроме того, на оси пористого цилиндра ($r = 0$) решения уравнений должны быть конечными.

В граничных условиях (9) вместо p_{1w} , p_{2w} надо подставить их выражения (7).

Математическая модель является, таким образом, краевой задачей, состоящей из уравнений Лапласа (4) в цилиндрических координатах и граничных условий (9).

2. Решение краевой задачи

Решение уравнений (4) с граничными условиями (9) ищем в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \varphi_1, \varphi_2, \Psi_{1w}, \Psi_{2w}, \Psi_{3w}, \xi \right\} = \\ & = \left\{ \hat{\varphi}_1(r), \hat{\varphi}_2(r), \hat{\Psi}_{1w}(r), \hat{\Psi}_{2w}(r), \hat{\Psi}_{3w}(r), \hat{\xi} \right\} \exp(-\gamma t + ikz + im\theta). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь, например,

$$\varphi_1(r, \theta, z, t) = \hat{\varphi}_1(r) \exp(-\gamma t + ikz + im\theta),$$

где $\hat{\varphi}_1(r)$ – неизвестная амплитуда; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; $m = 0, 1, 2, \dots$; $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i$; $\omega = |\gamma_i|$ – частота; $\beta = \gamma_r$ – коэффициент, который может быть как положительным (при затухании возмущения), так и отрицательным (при неустойчивости, приводящей к нарастанию возмущения).

Подставляя выражения (10) для φ_i ($i = 1, 2$) и для ψ_{jw} ($j = 1, 2, 3$) в уравнения Лапласа, записанные в цилиндрических координатах, получим систему пяти модифицированных уравнений Бесселя порядка m для амплитуд, решения которых имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_1 &= C_1 I_m(kr) + C_2 K_m(kr), \\ \hat{\varphi}_2 &= C_3 I_m(kr) + C_4 K_m(kr), \\ \hat{\psi}_{1w} &= C_5 I_m(kr) + C_6 K_m(kr), \\ \hat{\psi}_{2w} &= C_7 I_m(kr) + C_8 K_m(kr), \\ \hat{\psi}_{3w} &= C_9 I_m(kr) + C_{10} K_m(kr).\end{aligned}$$

Здесь I_m и K_m – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка m . Следует положить $C_2 = 0$ и $C_6 = 0$, так как $K_m(kr) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$.

Граничные условия (9) принимают для амплитуд вид

$$\begin{aligned}1) & C_1 I'_m(ka) = C_3 I'_m(ka) + C_4 K'_m(ka), \\ 2) & C_5 I_m(ka) = C_7 I_m(ka) + C_8 K_m(ka), \\ 3) & \mu_1 C_5 I_m(ka) = \mu_2 C_7 I'_m(ka) + \mu_2 C_8 K'_m(ka), \\ 4) & -\frac{\rho\gamma}{\Gamma} C_1 I_m(ka) + \frac{\eta}{K} C_1 I_m(ka) - \frac{ik\mu_1 H_0}{4\pi} C_5 I_m(ka) = \\ & = -\rho\gamma [C_3 I_m(ka) + C_4 K_m(ka)] - \frac{ik\mu_2 H_0}{4\pi} [C_7 I_m(ka) + C_8 K_m(ka)], \\ 5) & kC_3 I'_m(ka_0) + kC_4 K'_m(ka_0) = -\gamma \hat{\xi}, \\ 6) & C_7 I_m(ka_0) + C_8 K_m(ka_0) = C_9 I_m(ka_0) + C_{10} K_m(ka_0), \\ 7) & \mu_2 \left\{ ikH_0 \hat{\xi} - C_7 k I'_m(ka_0) - C_8 k K'_m(ka_0) \right\} = \\ & = \mu_3 \left\{ ikH_0 \hat{\xi} - C_9 k I'_m(ka_0) - C_{10} k K'_m(ka_0) \right\}, \\ 8) & \rho\gamma^2 [C_3 I_m(ka_0) + C_4 K_m(ka_0)] + \frac{ik\mu_2 \gamma H_0}{4\pi} [C_7 I_m(ka_0) + C_8 K_m(ka_0)] - \\ & - \frac{ik\mu_3 \gamma H_0}{4\pi} [C_9 I_m(ka_0) + C_{10} K_m(ka_0)] = -\frac{\alpha\gamma \hat{\xi}}{a_0^2} (1 - m^2 - ka_0^2), \\ & C_9 I_m(kb) + C_{10} K_m(kb) = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь i – мнимая единица, штрихами обозначены производные.

Имеем систему девяти однородных уравнений (11) для девяти неизвестных: $C_1, C_3, C_4, C_5, C_7, C_8, C_9, C_{10}, \hat{\xi}$. Для упрощения вычислений далее предполагаем, что $a_0/b \ll 1$ (соленоид достаточно большого радиуса). Приравнявая затем определитель системы (11) к нулю, получим дисперсионное уравнение для поверхностных волн, кубическое относительно γ :

$$A_1\gamma^3 + A_2\gamma^2 + A_3\gamma + A_4 = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = & \rho(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2) \left(\frac{1}{\Gamma} - 1 \right) K_m^2(ka_0) K'_m(ka_0) I_m^2(ka) [I'_m(ka)]^2 - \\ & - \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\Gamma} - 1 \right) R_1 R_2 K_m(ka_0) I_m(ka) I'_m(ka) - \rho R_1 R_2 A I_m(ka_0) + \\ & + \rho(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2) A I_m(ka) I'_m(ka) I_m(ka_0) K_m(ka_0) K'_m(ka_0), \\ A_2 = & \frac{\eta}{K} R_1 R_2 Q_4 I_m(ka) - \frac{\eta}{K} (\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2) Q_4 K'_m(ka_0) I_m^2(ka) I'_m(ka) K_m(ka_0), \\ A_3 = & \mu_3(\mu_2 - \mu_1) \frac{\alpha k}{a_0^2} S (1 - m^2 - k^2 a_0^2) K_m(ka_0) K'_m(ka_0) I_m(ka) I'_m(ka) + \\ & + \mu_3(\mu_2 - \mu_1) \frac{H_0^2 k^2}{4\pi} (\mu_3 - \mu_2) S K_m^2(ka_0) I_m(ka) I'_m(ka) - \\ & - (\mu_3 - \mu_2)^2 \frac{H_0^2 k^2}{4\pi} R_2 S K_m(ka_0) I_m(ka_0) + \\ & + \mu_2(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2) \frac{H_0^2 k^2}{4\pi} I_m(ka) K_m(ka_0) I'_m(ka) \times \\ & \times [Q_3 I'_m(ka_0) K_m(ka_0) - I_m(ka_0) I_m(ka) K'_m(ka) K'_m(ka_0)] - \\ & - \frac{\alpha k}{a_0^2} R_1 R_2 S (1 - m^2 - k^2 a_0^2), \\ A_4 = & \frac{\eta}{\rho K} \frac{\alpha k}{a_0^2} Q_2 (1 - m^2 - k^2 a_0^2) I_m(ka) \times \\ & \times [\mu_3(\mu_2 - \mu_1) K_m(ka_0) K'_m(ka_0) I_m(ka) I'_m(ka) - R_1 R_2] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(\mu_3 - \mu_2) \frac{H_0^2 k^2}{4\pi} \frac{\eta}{\rho K} Q_2 K_m(ka_0) I_m(ka) \times \\
 & \times \left[\mu_3 (\mu_2 - \mu_1) K_m(ka_0) I_m(ka) I'_m(ka) - (\mu_3 - \mu_2) R_2 I_m(ka_0) \right], \\
 & A = I'_m(ka) K_m(ka) - \frac{1}{\Gamma} I_m(ka) K'_m(ka), \\
 & Q_1 = I_m(ka) K'_m(ka_0) - I'_m(ka_0) K_m(ka), \\
 & Q_2 = I'_m(ka) K'_m(ka_0) - K'_m(ka) I'_m(ka_0), \\
 & Q_3 = I_m(ka) K'_m(ka) - I'_m(ka) K_m(ka), \\
 & Q_4 = I'_m(ka) K_m(ka_0) - K'_m(ka) I_m(ka_0), \\
 & R_1 = \mu_3 I_m(ka_0) K'_m(ka_0) - \mu_2 I'_m(ka_0) K_m(ka_0), \\
 & R_2 = \mu_2 I_m(ka) K'_m(ka) - \mu_1 I'_m(ka) K_m(ka), \\
 & S = Q_1 I'_m(ka) - \frac{1}{\Gamma} Q_2 I_m(ka).
 \end{aligned}$$

Отметим, что при $\Gamma \rightarrow 1$, $\eta/K \rightarrow 0$ (замена пористой среды жидкостью) первое уравнение (1) переходит в уравнение Эйлера, а из уравнения (12) при $a \rightarrow 0$ следует квадратное относительно γ дисперсионное уравнение, полученное в работе [2], результаты которой согласуются с экспериментом. При $H_0 = 0$ (либо при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$) и отсутствии пористой среды получается классический результат Релея о распаде струи обычной жидкости.

Уравнение (12) – кубическое и может быть приведено к так называемому неполному кубическому уравнению [8] с дискриминантом $Q = (p/3)^3 + (q/2)^2$, где p и q выражаются через коэффициенты уравнения (12). При условии $Q > 0$ существует волновое движение, поскольку уравнение (12) имеет при этом два комплексно сопряженных корня. При $Q \leq 0$ волновых движений нет, так как все три корня уравнения (12) действительные.

3. Анализ модели

Конкретные числовые расчеты с дисперсионным уравнением (12) проводились для следующих значений параметров: $\rho = 1 \text{ г/см}^3$; $\alpha = 20 \text{ г/с}^2$; $\eta = 0,01 \text{ г/см} \cdot \text{с}$; $\Gamma = 0,8$; $K = 0,02 \text{ см}^2$; $0 < k < 1,8 \text{ см}^{-1}$; $0 \leq H_0 \leq 40 \text{ Э}$ (эрстед); $\mu_1 = 1,8$; $\mu_2 = 2$; $\mu_3 = 1$; $\mu_4 = 1$.

Для симметричных возмущений ($m = 0$) и фиксированных значений $a = 0,5 \text{ см}$, $a_0 = 1,1 \text{ см}$, $0 \leq H_0 \leq 40 \text{ Э}$ интервал $0 < k < 1,8 \text{ см}^{-1}$ делится критической точкой k_c ($\lambda_c = 2\pi/k_c$), которая находится из условия $Q = 0$, на два интервала. В интервале $0 < k < k_c$ волны отсутствуют: происходит нарастание возмущений ($\beta < 0$). Амплитуда возмущения растет с наибольшей скоростью при $k = k_m$, при котором $|\beta|$ достигает максимума. Размер образующихся при распаде жидкого столба капель $\lambda_m \approx 2\pi/k_m$ [2]. При $k \rightarrow k_c$ движение жидкости замедляется, т.е. $\omega \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$. В интервале $k_c < k < 1,8 \text{ см}^{-1}$ существуют затухающие ($\beta > 0$) волны.

Ниже, в таблице, приведены значения k_c , k_m , $\tilde{\beta}_m = \tilde{\beta}(k_m)$ в зависимости от H_0 для $a = 0,5 \text{ см}$, $a_0 = 1,1 \text{ см}$, $m = 0$ и перечисленных выше значений остальных параметров. Здесь $\tilde{\beta}(k) = \beta(k)(\alpha/\rho a_0^3)^{-1/2}$.

| $H_0, \text{ Э}$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $k_c, \text{ см}^{-1}$ | 0,910 | 0,888 | 0,827 | 0,734 | 0,624 | 0,514 | 0,420 | 0,346 | 0,290 |
| $k_m, \text{ см}^{-1}$ | 0,638 | 0,613 | 0,572 | 0,502 | 0,429 | 0,342 | 0,282 | 0,235 | 0,195 |
| $\tilde{\beta}_m$ | -1,288 | -1,239 | -1,136 | -0,970 | -0,800 | -0,643 | -0,517 | -0,434 | -0,361 |

На рис. 1 приведены графики зависимостей безразмерных величин $\tilde{\omega}(k) = \omega(k)(\alpha/\rho a_0^3)^{-1/2}$ и $\tilde{\beta}(k)$ при $m = 0$ для различных значений невозмущенного магнитного поля H_0 .

При $m = 1$ частота больше, а затухание возмущений сильнее, чем при $m = 0$, при одинаковых значениях прочих параметров. При $m \geq 2$ движение является аperiодическим, с сильным затуханием всех возмущений.

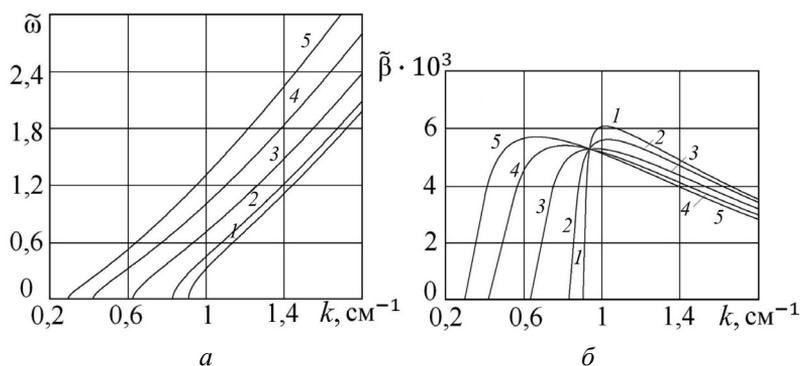


Рис. 1. Зависимости безразмерной частоты $\tilde{\omega}$ (а) и коэффициента затухания $\tilde{\beta}$ (б) от волнового числа k : $H_0 = 0, 10, 20, 30, 40$ Э (1–5); $m=0$; $a=0,5$ см; $a_0 = 1,1$ см

На рис. 2 приведены графики зависимостей $\tilde{\omega}(k)$ и $\tilde{\beta}(k)$ при $m=0$ и фиксированных значениях $H_0 = 20$ Э, $a = 0,5$ см для разных значений a_0 . Они показывают влияние радиуса a_0 на безразмерную частоту и декремент возмущений различных длин волн.

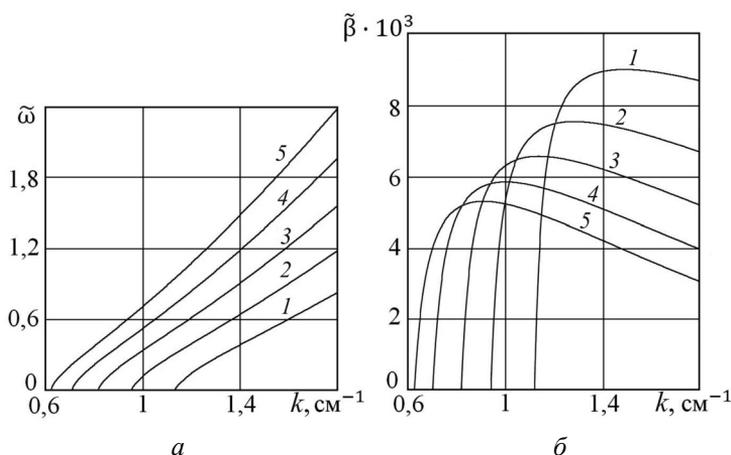


Рис. 2. Зависимости безразмерной частоты $\tilde{\omega}$ (а) и коэффициента затухания $\tilde{\beta}$ (б) от волнового числа k : $a_0 = 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1$ см (1–5); $a = 0,5$ см; $m=0$; $H_0 = 20$ Э

На рис. 3 приведен график зависимости $\tilde{\beta}(k)$ при $m=0$ и фиксированных значениях $H_0 = 20$ Э, $a_0 = 1,1$ см для разных значений a . Показано, что при $m=0$, $a_0 = 1,1$ см, $H_0 = 20$ Э и изменении a от 0,5 до 0,9 см безразмерная частота слабо зависит от радиуса пористого цилинд-

ра, то есть при изменении величины a график зависимости $\tilde{\omega}(k)$ практически не изменяется и имеет вид, аналогичный приведенному на рис. 1.

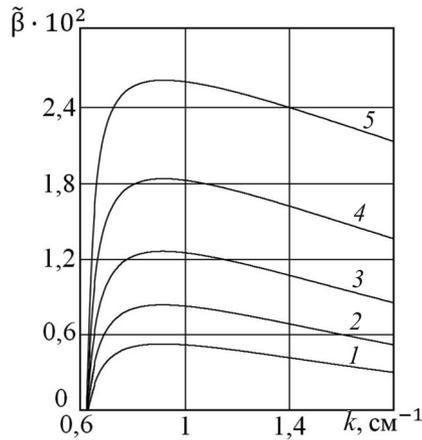


Рис. 3. Зависимость безразмерного коэффициента затухания $\tilde{\beta}$ от волнового числа k : $a = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$ см (1–5); $a_0 = 1,1$ см; $m = 0$; $H_0 = 20$ Э

Заключение

Исследовано распространение и неустойчивость волн на поверхности цилиндрического столба магнитной жидкости, окружающей ядро из пористого материала в приложенном магнитном поле, направленном вдоль оси жидкого столба. Рассмотрена область длинных волн ($0 < k < 1,8$ см⁻¹), которая при симметричных возмущениях ($m = 0$) и достаточно слабых полях ($0 \leq H_0 \leq 40$ Э) делится критической точкой k_c на два интервала. В интервале $0 < k < k_c$ происходит аperiодическое движение ($\beta < 0$) с нарастающей амплитудой, приводящее к распаду жидкого столба на цепочку из соединенных между собой капель, длина которых $\lambda_m = 2\pi/k_m$. Показано, что длина капель увеличивается с ростом магнитного поля H_0 . Таким образом, магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на распад жидкого столба, препятствуя его разрушению.

При $k \rightarrow k_c$ ($\lambda \rightarrow \lambda_c = 2\pi/k_c$) движение жидкости замедляется, т.е. $\omega \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, что связано с взаимной нейтрализацией капиллярных и магнитных сил, действующих на поверхности жидкости.

В интервале $k_c < k < 1,8 \text{ см}^{-1}$ существует затухающее волновое движение с безразмерной частотой $\tilde{\omega}(k)$, монотонно возрастающей с ростом волнового числа k . Зависимость $\tilde{\beta}(k)$ имеет более сложный характер и не является монотонной.

Авторы благодарят Э.Н. Егереву за помощь в работе.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.132.21.1353.

Библиографический список

1. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. – М.: Мир, 1989. – 356 с.
2. Тактаров Н.Г. Распад струи магнитной жидкости // Магнитная гидродинамика. – 1975. – № 2. – С. 35–38.
3. Столяров И.В., Тактаров Н.Г. Распространение волн в слое жидкости на пористом основании // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1987. – № 5. – С. 183–186.
4. Миронова С.М., Тактаров Н.Г. Распространение волн на заряженной поверхности цилиндрического столба жидкости, окружающей длинное пористое ядро // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2012. – № 4. – С. 104–110.
5. Тактаров Н.Г., Иванов А.Б. К исследованию фильтрации магнитных жидкостей // Магнитная гидродинамика. – 1990. – № 3. – С. 138–139.
6. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 536 с.
7. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431 с.

References

1. Rosensweig R. Ferrohydrodynamika [Ferrohydrodynamics]. Moscow: Mir, 1989. 356 p.
2. Taktarov N.G. Raspad strui magnitnoj zhidkosti (Breakup of magnetic fluid jet). *Magnitnaya gidrodinamika*, 1975, no. 2, pp. 35-38.
3. Stolyarov I.V., Taktarov N.G. Rasprostranenie voln v sloe zhidkosti na poristom osnovanii [Wave propagation in the liquid layer on a porous

basis]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mexanika zhidkosti i gaza*, 1987, no. 5, pp. 183-186.

4. Mironova S.M., Taktarov N.G. Rasprostranenie voln na zaryazhennoj poverxnosti cilindricheskogo stolba zhidkosti, okruzhayushhej dlinnoe poristoe yadro [Wave propagation on a charged surface of a cylindrical liquid column surrounding a long porous core]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mexanika zhidkosti i gaza*, 2012, no. 4, pp. 104-110.

5. Taktarov N.G., Ivanov A.B. K issledovaniyu fil'tracii magnitnykh zhidkostej [To the research of the filtration of magnetic fluid]. *Magnitnaya gidrodinamika*, 1990, no 3, pp. 138-139.

6. Sedov L.I. Mexanika sploshnoj sredy [Dynamics of continuum media]. Moscow: Nauka, 1976, vol. 1, 536 p.

7. Tamm I.E. Osnovy teorii e'lektrichestva [A basic course of the electricity]. Moscow: Nauka, 1976. 616 p.

8. Kurosh A.G. Kurs vysshej algebrы [The course of Higher Algebra]. Moscow: Nauka, 1975. 431 p.

Об авторах

Тактаров Николай Григорьевич (Саранск, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики Мордовского государственного педагогического института им. М.Е. Евсевьева (430007, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Студенческая, 11А, e-mail: colonnt@mail.ru).

Рунова Ольга Александровна (Саранск, Россия) – аспирант кафедры математики Мордовского государственного педагогического института им. М.Е. Евсевьева (430007, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Студенческая, 11А, e-mail: runova.olga@list.ru).

About the authors

Taktarov Nikolay Grigoryevich (Saransk, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Mordovian State Pedagogical Institute (11A, Studencheskaya St., 430007, Saransk, Russian Federation, e-mail: colonnt@mail.ru).

Runova Olga Alexandrovna (Saransk, Russian Federation) – postgraduate student, Mordovian State Pedagogical Institute (11A, Studencheskaya St., 430007, Saransk, Russian Federation, e-mail: runova.olga@list.ru).

Получено 7.02.2013