



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.4.09

УДК 539.3

УТОЧНЕННЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

А.А. Семенов

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 30 марта 2022 г.
Одобрена: 30 октября 2022 г.
Принята к публикации:
12 декабря 2022 г.

Ключевые слова:

оболочки, конструкции, ребра жесткости, дискретный метод, метод Ритца, устойчивость, математическая модель, критические нагрузки, ортотропия, функционал.

АННОТАЦИЯ

Автором предложен уточненный дискретный метод учета ребер жесткости при расчете тонкостенных оболочечных конструкций. Согласно методу, необходимо добавление разных коэффициентов приведения вдоль разных координатных осей. Для ребер, направленных перпендикулярно рассматриваемому направлению, вводится коэффициент приведения, равный отношению ширины ребер этого направления к линейному размеру оболочки в рассматриваемом направлении. Данный метод дополняет разработанную ранее геометрически нелинейную математическую модель, учитывающую поперечные сдвиги и ортотропию материала. Модель записывается в виде функционала полной потенциальной энергии деформации и может использоваться для разного вида оболочек через задание параметров Ляме и радиусов главных кривизн.

Вычислительный алгоритм построен на базе метода Ритца и метода продолжения решения по наилучшему параметру. Программная реализация осуществлена в программном комплексе Maple.

Применимость уточненного дискретного метода показана на примере ортотропных пологих оболочек двойной кривизны, шарнирно-неподвижно закрепленных по контуру и находящихся под действием внешней равномерно распределенной поперечной нагрузки. Параметры материалов были выбраны для стеклопластика Т-10/УПЭ22-27 и 0/90 Woven Roving E-Glass/Vinyl Ester.

Было произведено сравнение значений критических нагрузок потери устойчивости для разных вариантов подкрепления (сетка ребер от 0 до 12 ребер в каждом направлении) и сопоставление значений с обычным дискретным методом, которое показало, что при обычном дискретном методе значения критических нагрузок существенно завышаются, особенно при увеличении числа ребер жесткости. Сравнение результатов тестовой задачи с результатами экспериментов, полученных другими авторами, показало хорошую согласованность уточненного дискретного метода.

© ПНИПУ

© Семенов Алексей Александрович – к.т.н., доц., зав. каф., e-mail: sw.semenov@gmail.com.

Alexey A. Semenov – ScS in Technical Science, Associate Professor, Head of Department, e-mail: sw.semenov@gmail.com.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

REFINED DISCRETE METHOD FOR CALCULATING STIFFENED ORTHOTROPIC SHELLS

A.A. Semenov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 30 March 2022
 Approved: 30 October 2022
 Accepted for publication:
 12 December 2022

Keywords:

shells, structures, stiffeners, discrete method, Ritz method, buckling, mathematical model, critical loads, orthotropy, functional.

ABSTRACT

The author proposes a refined discrete method for taking into account stiffeners in the simulation of thin-walled shell structures. According to the method, it is necessary to add different reduction factors along different coordinate axes. For ribs directed perpendicular to the considered direction, a reduction factor is introduced equal to the ratio of the width of the ribs in this direction to the linear size of the shell in the considered direction. This method supplements the previously developed geometrically nonlinear mathematical model, which takes into account transverse shears and material orthotropy. The model is written as a functional of the total potential strain energy and can be used for different types of shells by specifying the Lamé parameters and the radii of principal curvatures.

The computational algorithm is based on the Ritz method and the method of continuation of the solution with respect to the best parameter. The software implementation was carried out in the Maple software package.

The applicability of the refined discrete method is shown by the example of orthotropic shallow shells of double curvature, simply supported along the contour and under the action of an external uniformly distributed transverse load. Material parameters were selected for T-10/UPE22-27 and 0/90 Woven Roving E-Glass/Vinyl Ester fiberglass.

A comparison was made of the values of critical buckling loads for different stiffening options (a grid of ribs from 0 to 12 ribs in each direction) and a comparison of the values with the conventional discrete method, which showed that with the conventional discrete method, the values of buckling loads are significantly overestimated, especially with an increase in the number stiffening ribs. Comparison of the results of the test problem with the results of experiments obtained by other authors showed good agreement between the refined discrete method.

© PNRPU

Введение

Изучение процесса деформирования оболочечных конструкций имеет существенное значение для различных областей промышленности, в том числе авиастроения, судостроения, ракетостроения и других [1–10]. В строительстве такие конструкции зачастую применяются, например, для покрытия большепролетных сооружений.

Основное требование к оболочкам-покрытиям строительных сооружений – обеспечение безопасной и долговременной работоспособности конструкции при заданных уровнях нагрузок. При этом важным моментом является и уменьшение материалоемкости оболочечных конструкций. Оболочки покрытия строительных конструкций изготавливаются из различных материалов: железобетон, сталь, композиционные материалы, некоторые из них можно рассматривать, как ортотропные материалы.

Проведение комплексных исследований процесса деформирования оболочек по наиболее точным математическим моделям дает возможность аргументированно назначать коэффициент запаса прочности, что способствует их безопасной работе, а также уменьшению материалоемкости конструкции и снижению её себестоимости.

Важным при расчете тонкостенных оболочек является учет наличия подкрепления ребрами жесткости [11–15], так как это позволяет существенно повысить значение критической нагрузки, перераспределить опасные напряжения и тем самым повысить работоспособность конструкции.

Большая часть исследований устойчивости подкрепленных оболочек была проведена для замкнутых изотропных цилиндрических оболочек [16; 17], так как такие конструкции применяются на практике наиболее часто. Кроме того, в силу симметрии их можно рассматривать в упрощенной постановке. Однако в дальнейшем, с появлением новых перспективных композитных материалов, область применения оболочечных конструкций существенно расширилась. И с развитием вычислительной техники появилась возможность исследовать подкрепленные оболочки различной геометрии и разными свойствами материала.

Одной из первых работ в области исследования устойчивости эксцентрично подкрепленных замкнутых цилиндрических оболочек была работа А. Van der Neut [18] (1947), в которой автор указал на важность эксцентриситета ребер жесткости при потере устойчивости при осевом сжатии. Также в ней был сделан важный вывод, что для таких конструкций нагрузка потери устойчивости при расположении ребер жесткости с внешней стороны может быть в два или три раза больше, чем при расположении подкрепления с внутренней стороны.

Также среди работ того периода следует отметить работы Baruch и Singer [19]; Block, Card, и Mikulas [20] и Singer и др. [21].

Kidane и др. [22] определили нагрузку общей потери устойчивости при разных вариантах подкрепляющей решетки ребер для цилиндрической оболочки с шарнирно-неподвижным закреплением контура и жесткой заделкой.

Конструкции, подкрепленные ребрами жесткости, исследовать существенно сложнее, чем конструкции постоянной толщины. В связи с этим существуют несколько подходов к введению ребер жесткости. Так, в работах [22; 23] выделяют дискретный подход, который можно найти, например, в работах [14; 24–33], а также подход с размазыванием жесткости [4; 23; 34–38] и др.

Обзоры литературы по подкрепленным оболочкам и применению методов размазывания жесткости можно найти в значимых работах [15; 23; 29; 35; 39; 40].

Основные идеи расчета ребристых оболочек были высказаны в конце 40-х гг. XX в. А.И. Лурье [41] и В.З. Власовым [42]. Как и А.И. Лурье, так и В.З. Власов считали, что ребра взаимодействуют с обшивкой по линии и представляют собой одномерные стержневые элементы, работающие только на растяжение-сжатие и изгиб. В.З. Власов рассматривал взаимодействие ребер и обшивки как контактную задачу. А.И. Лурье рассматривал обшивку и ребра как единую систему, и из условия минимума функционала полной энергии деформации системы получал уравнения равновесия ребристой оболочки. Третий подход к ребристой оболочке основан на «размазывании» жесткости ребер по всей оболочке, и рассмотрении ее как конструктивно-ортотропной.

В.В. Карповым была разработана геометрически нелинейная модель оболочек ступенчато-переменной толщины, имеющих ребра, накладки и вырезы, в которой учитывалось дискретное расположение ребер и вырезов, их ширина, учет взаимодействия ребер и обшивки по полосе, жесткое соединение ребер при пересечении, сдвиговая и крутильная жесткость ребер, поперечные сдвиги, т.е. все наиболее важные факторы, влияющие на напряженно-деформированное состояние и устойчивость оболочек, которыми раньше пренебрегали из-за сложности их учета. Им была доказана эквивалентность подходов В.З. Власова и А.И. Лурье к расчету ребристых оболочек.

Целью данной работы является формирование соотношений уточненного дискретного метода и его апробация посредством сравнения результатов расчета с другими методами и результатами экспериментов.

1. Теория и методы

1.1. Основные соотношения

В качестве координатной поверхности оболочки постоянной толщины h будем рассматривать ее срединную поверхность. Эта поверхность занимает область D при изменении ее координат x, y в пределах $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$. Для различного вида оболочек используются различные системы координат.

Параметры Ляме A, B представляют собой коэффициенты, на которые нужно умножить дифференциалы криволинейных координат, чтобы получить дифференциалы длин дуг координатных линий. В таком слу-

чае для перехода от глобальной декартовой системы координат (X, Y, Z) к локальной криволинейной системе (x, y, z) нужно принять:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2},$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}. \quad (1)$$

Для удобства параметры Ляме и главные радиусы кривизны рассматриваемых видов оболочек приводятся в табл. 1.

Таблица 1/Table 1

Значения параметров Ляме и главных радиусов кривизны для некоторых видов оболочек

Values of the Lamé parameters and principal radii of curvature for some types of shells

Вид конструкции	Параметр			
	A	B	R_1	R_2
Пологая двоякой кривизны	1	1	const	const
Цилиндрическая	1	R_2	∞	const
Коническая	1	$x \cdot \sin \theta$	∞	$x \cdot \operatorname{tg} \theta$
Сферическая	R	$R \cdot \sin x$	R	R
Тороидальная	R	$d_1 + R \cdot \sin x$	R	$\frac{d_1 + R \cdot \sin x}{\sin x}$

Для модели Тимошенко (Миндлина – Рейснера) перемещения в слое, находящимся на расстоянии z от срединной поверхности, примут вид [43]

$$U^z = U + z\Psi_x, \quad V^z = V + z\Psi_y, \quad W^z = W, \quad (2)$$

где U, V, W – перемещения точек срединной поверхности вдоль осей x, y, z соответственно; Ψ_x, Ψ_y – углы поворота нормали в плоскостях xOz, yOz .

Геометрические соотношения в срединной поверхности оболочки с учетом геометрической нелинейности принимают вид [43]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2,$$

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U\right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V\right),$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – деформации удлинения вдоль координат x, y срединной поверхности; $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – деформации

сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz . Соотношения (3) отличаются от соответствующих соотношений, представленных в работе В.В. Новожилова [43] только тем, что в них добавлены нелинейные члены.

Геометрические соотношения для слоя, отстоящего на расстояние z от срединной поверхности, выражаются следующим образом:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1; \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2; \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12}, \quad (4)$$

$$\gamma_{xz} = k f(z) [\Psi_x - \theta_1], \quad \gamma_{yz} = k f(z) [\Psi_y - \theta_2].$$

Функции изменения кривизн χ_1, χ_2 и кручения χ_{12} для принятой модели принимают вид:

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y; \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x, \quad (5)$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y \right) \right].$$

Функция $f(z)$ описывает распределение компонент напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине оболочки [44]; k – числовой коэффициент, который соответствует выбранной функции $f(z)$. Для обшивки имеем [44]

$$f(z) = 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right), \quad k = \frac{5}{6}.$$

Для подкрепленных оболочек учет поперечного сдвига существенно влияет на расчет напряженно-деформированного состояния и устойчивости. Для гладких оболочек это влияние несущественно. Также учет поперечных сдвигов необходим при исследовании ортотропных оболочек.

Геометрия оболочечной конструкции задается через параметры Ляме и значения радиусов главных кривизн оболочки.

Для связи деформаций и напряжений используются физические соотношения, которые строятся на основе обобщенного закона Гука. Выразив напряжения через деформации, получим физические соотношения для тонкостенной ортотропной оболочки при линейно-упругом деформировании. Считаем, что направления ортотропии 1 и 2 совпадают с направлениями координат x и y :

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right],$$

$$\sigma_y = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = G_{12} \left[\gamma_{xy} + 2z\chi_{12} \right],$$

$$\tau_{xz} = G_{13} k f(z) (\Psi_x - \theta_1),$$

$$\tau_{yz} = G_{23} k f(z) (\Psi_y - \theta_2).$$

Для подкрепленных ребрами жесткости оболочек удобно отдельно записывать части модели, имеющие отношение к обшивке, и отдельно части, имеющие отношение к ребрам жесткости.

Рассмотрим вначале выражения для усилий и моментов, которые возникают в обшивке, – они находятся путем интегрирования напряжений (6) по переменной z в пределах от $-h/2$ до $h/2$.

У обшивки площадь поперечного сечения, приходящаяся на единицу длины сечения, будет одинаковой в направлении осей x и y , и равна $\int_{-h/2}^{h/2} dz = h$; статический момент сечения, приходящийся на единицу длины сечения, будет равен $\int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0$; момент инерции сечения, приходящийся на единицу длины сечения, будет равен $\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}$. Поэтому составляющие усилий и моментов, действующие в обшивке (индекс «0»), будут иметь вид

$$N_x^0 = G_1^0 h (\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y), \quad N_y^0 = G_2^0 h (\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x),$$

$$M_x^0 = G_1^0 \frac{h^3}{12} (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2), \quad M_y^0 = G_2^0 \frac{h^3}{12} (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1),$$

$$N_{xy}^0 = N_{yx}^0 = G_{12}^0 h \gamma_{xy}, \quad M_{xy}^0 = M_{yx}^0 = 2G_{12}^0 \frac{h^3}{12} \chi_{12},$$

$$Q_x^0 = k G_{13}^0 h (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^0 = k G_{23}^0 h (\Psi_y - \theta_2),$$

где

$$G_1^0 = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad G_2^0 = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}.$$

В качестве основы для математической модели деформирования оболочечной конструкции будем брать функционал полной потенциальной энергии деформации (функционал Лагранжа). Модели, построенные с использованием функционала, также рассматривались авторами [14; 16; 23; 24; 27; 28; 30] и др.

Для задач статики представим функционал как разность потенциальной энергии системы и работы внешних сил

$$E_s = E_s^0 + E_p^R = E_p^0 + E_p^R - A, \quad (7)$$

где E_s^0 – составляющая функционала статики, имеющая отношение к обшивке; E_p^R – потенциальная энергия системы, имеющая отношение к ребрам жесткости; E_p^0 – потенциальная энергия системы, имеющая отношение к обшивке; A – работа внешних сил.

Часть функционала, имеющая отношение к обшивке, будет

$$E_s^0 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[N_x^0 \epsilon_x + N_y^0 \epsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^0 + N_{yx}^0) \gamma_{xy} + M_x^0 \chi_1 + M_y^0 \chi_2 + (M_{xy}^0 + M_{yx}^0) \chi_{12} + Q_x^0 (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^0 (\Psi_y - \theta_2) - 2(P_x U + P_y V + qW) \right] AB dx dy, \quad (8)$$

а E_p^R формируется в зависимости от способа задания ребер жесткости, и в общем виде будет [45]

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[N_x^R \epsilon_x + N_y^R \epsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^R + N_{yx}^R) \gamma_{xy} + M_x^R \chi_1 + M_y^R \chi_2 + (M_{xy}^R + M_{yx}^R) \chi_{12} + Q_x^R (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^R (\Psi_y - \theta_2) \right] AB dx dy, \quad (9)$$

Как правило, если внешняя нагрузка приложена по нормали к поверхности оболочки, то $P_x = P_{xsv}$, $P_y = P_{ysv}$ (компоненты нагрузки от собственного веса), а ее поперечная компонента может быть задана в виде

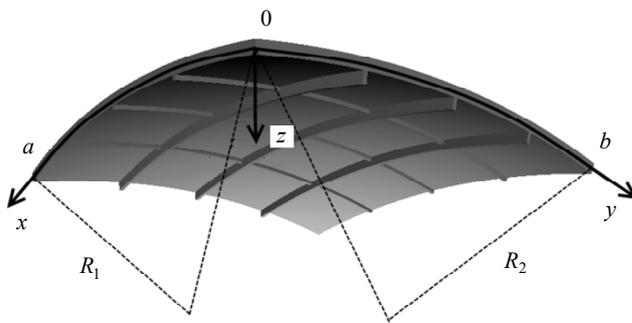
$$q = q_0(a_{11} + a_{21}x + a_{31}x^2)(a_{12} + a_{22}y + a_{32}y^2) + q_{sv}, \quad (10)$$

где q_0 – величина приложенной нагрузки, МПа; q_{sv} – поперечная компонента нагрузки от собственного веса оболочки, МПа.

1.2. Уточненный дискретный метод учета ребер жесткости

Рассмотрим вначале соотношения обычного дискретного метода. Дискретный слой подкрепляющих оболочку ребер можно задать функцией $H(x, y)$, характеризующей высоту и места расположения ребер по оболочке [46]

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \quad (11)$$



где h^i, h^j – высота ребер; индексы i и j указывают номер ребра, расположенного параллельно оси x и y соответственно; n, m – количество ребер; $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$, то есть общая часть пересечения ребер; $\bar{\delta}(x - x_j)$ и $\bar{\delta}(y - y_i)$ – единичные столбчатые функции, которые представляют собой разности двух единичных функций $\bar{\delta}(x - x_j) = U(x - a_j) - U(x - b_j)$; $\bar{\delta}(y - y_i) = U(y - c_i) - U(y - d_i)$, где $a_j = x_j - r_j / (2A)$, $b_j = x_j + r_j / (2A)$, $c_i = y_i - r_i / (2B)$, $d_i = y_i + r_i / (2B)$ (ширина ребер r_i, r_j задается в метрах для любых оболочек вращения).

При таком задании расположения ребер, контакт обшивки и ребер происходит по полосе. Ребра при пересечении являются жестко закрепленными между собой. Следовательно, толщина всей конструкции равна $h + H$, где h – толщина обшивки (рис. 1).

Для силовых факторов, действующих в ребрах, жесткостные характеристики находятся интегрированием по z в пределах от $h/2$ до $h/2 + H$. Таким образом, имеем [46]

$$\begin{aligned} \int_{h/2}^{h/2+H} dz &= \bar{F} = \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \\ \int_{h/2}^{h/2+H} z dz &= \bar{S} = \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \\ \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz &= \bar{J} = \sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i). \end{aligned} \quad (12)$$

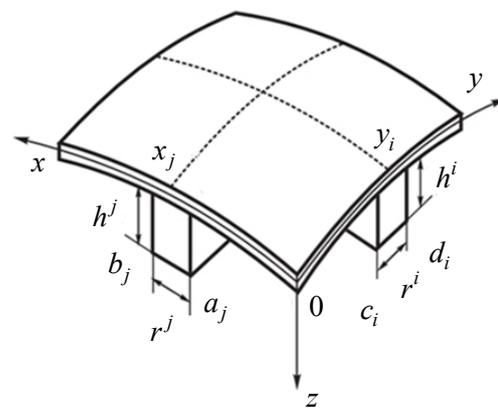


Рис. 1. Схематичное изображение подкрепленной оболочки и способа задания ребер жесткости

Fig. 1. Schematic representation of a stiffened shell and a method for specifying stiffeners

Здесь

$$F^i = h^i, \quad F^j = h^j, \quad F^{ij} = h^{ij},$$

$$S^i = \frac{h^i(h+h^i)}{2}, \quad S^j = \frac{h^j(h+h^j)}{2}, \quad S^{ij} = \frac{h^{ij}(h+h^{ij})}{2}, \quad (13)$$

$$J^i = 0,25h^2h^i + 0,5h(h^i)^2 + \frac{1}{3}(h^i)^3,$$

$$J^j = 0,25h^2h^j + 0,5h(h^j)^2 + \frac{1}{3}(h^j)^3,$$

$$J^{ij} = 0,25h^2h^{ij} + 0,5h(h^{ij})^2 + \frac{1}{3}(h^{ij})^3.$$

Следовательно, усилия и моменты, действующие в ребрах, примут вид

$$N_x^R = G_1^R [\bar{F}(\epsilon_x + \mu_{21}\epsilon_y) + \bar{S}(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)],$$

$$N_y^R = G_2^R [\bar{F}(\epsilon_y + \mu_{12}\epsilon_x) + \bar{S}(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)],$$

$$N_{xy}^R = G_{12}^R [\bar{F}\gamma_{xy} + 2\bar{S}\chi_{12}],$$

$$N_{yx}^R = G_{12}^R [\bar{F}\gamma_{xy} + 2\bar{S}\chi_{12}], \quad (14)$$

$$M_x^R = G_1^R [\bar{S}(\epsilon_x + \mu_{21}\epsilon_y) + \bar{J}(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)],$$

$$M_y^R = G_2^R [\bar{S}(\epsilon_y + \mu_{12}\epsilon_x) + \bar{J}(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)],$$

$$M_{xy}^R = G_{12}^R [\bar{S}\gamma_{xy} + 2\bar{J}\chi_{12}], \quad M_{yx}^R = G_{12}^R [\bar{S}\gamma_{xy} + 2\bar{J}\chi_{12}],$$

$$Q_x^R = G_{13}^R k\bar{F}(\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^R = G_{23}^R k\bar{F}(\Psi_y - \theta_2).$$

Рассмотренную здесь модель ребристой оболочки можно уточнить.

Автором предлагается вводить коэффициент приведения в жесткостных характеристиках при дискретном подкреплении оболочек ребрами жесткости.

Жесткость подкрепления состоит из жесткости ребер рассматриваемого направления и жесткости ребер ортогонального ему направления.

Рассмотрим усилия, действующие в направлении оси x в ребрах

$$N_x^R = G_1^R [\bar{F}_x(\epsilon_x + \mu_{21}\epsilon_y) + \bar{S}_x(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)]. \quad (15)$$

Это усилие можно представить в виде

$$N_x^R = N_x^{LR} + N_x^{BR}. \quad (16)$$

Здесь «LR» обозначает, что рассматриваются продольные ребра, т.е. ребра, параллельные оси x . Запишем эту компоненту усилия, дополнив выражение коэффициентом K_{11} .

$$N_x^{LR} = \sum_{i=1}^n G_1^R (F^i(\epsilon_x + \mu_{21}\epsilon_y) + S^i(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)) \bar{\delta}(y - y_i) K_{11}. \quad (17)$$

Наличие дискретности ребер, параллельных оси x , задается единичной столбчатой функцией $\bar{\delta}(y - y_i)$, и эти ребра расположены вдоль всей оболочки, то есть от $x = 0$ до $x = a$, поэтому сомножитель $K_{11} = a/a$ (фактически, этот сомножитель показывает отношение размера участка конструкции, занимаемого ребром вдоль оси x , к общей протяженности конструкции вдоль оси x).

Индекс «BR» обозначает, что рассматриваются ребра, перпендикулярные оси x

$$N_x^{BR} = \sum_{j=1}^m \left[G_1^R (F^j(\epsilon_x + \mu_{21}\epsilon_y) + S^j(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)) - \sum_{i=1}^n G_1^R (F^{ij}(\epsilon_x + \mu_{21}\epsilon_y) + S^{ij}(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \bar{\delta}(x - x_j) K_{12}. \quad (18)$$

Дискретность ребер, перпендикулярных оси x , задается единичной столбчатой функцией $\bar{\delta}(x - x_j)$. Поперечные ребра шириной r_j/A расположены не сплошь вдоль оси x , а дискретно, и к тому же N_x^{BR} при $x = a_j, x = b_j$ равно 0 [46]. Поэтому сомножитель $K_{12} = r_j/(aA)$.

Второй сомножитель в выражении N_x^{BR} соответствует общей части пересечения ребер (эта часть уже присутствовала в выражении N_x^{LR} , поэтому ее нужно вычесть). Окончательно для N_x^R получим

$$N_x^R = G_1^R \left[\sum_{i=1}^n (F^i(\epsilon_x + \mu_{21}\epsilon_y) + S^i(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)) \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m (F^j(\epsilon_x + \mu_{21}\epsilon_y) + S^j(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)) \bar{\delta}(x - x_j) \frac{r_j}{aA} - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (F^{ij}(\epsilon_x + \mu_{21}\epsilon_y) + S^{ij}(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)) \bar{\delta}(y - y_i) \bar{\delta}(x - x_j) \frac{r_j}{aA} \right] \quad (19)$$

или в более компактной форме

$$N_x^R = G_1^R (\bar{F}_x(\epsilon_x + \mu_{21}\epsilon_y) + \bar{S}_x(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)), \quad (20)$$

где

$$\bar{F}_x = \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + r_a \left[\sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \quad (21)$$

$$\bar{S}_x = \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + r_a \left[\sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right].$$

Все вместе усилия и моменты, действующие в ребрах, можно записать в виде

$$\begin{aligned} N_x^R &= G_1^R (\bar{F}_x (\epsilon_x + \mu_{21} \epsilon_y) + \bar{S}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2)), \\ M_x^R &= G_1^R [\bar{S}_x (\epsilon_x + \mu_{21} \epsilon_y) + \bar{J}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2)], \\ N_y^R &= G_2^R [\bar{F}_y (\epsilon_y + \mu_{12} \epsilon_x) + \bar{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1)], \\ M_y^R &= G_2^R [\bar{S}_y (\epsilon_y + \mu_{12} \epsilon_x) + \bar{J}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1)], \\ N_{xy}^R &= G_{12}^R [\bar{F}_{xy} \gamma_{xy} + 2\bar{S}_{xy} \chi_{12}], M_{xy}^R = G_{12}^R [\bar{S}_{xy} \gamma_{xy} + \bar{J}_{xy} \chi_{12}], \\ Q_x^R &= G_{13}^R k \bar{F}_x (\Psi_x - \theta_1), Q_y^R = G_{23}^R k \bar{F}_y (\Psi_y - \theta_2). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{F}_x &= \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + r_a \left[\sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \\ \bar{F}_y &= \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) + r_b \left[\sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \\ \bar{S}_x &= \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + r_a \left[\sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \\ \bar{S}_y &= \sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) + r_b \left[\sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \\ \bar{J}_x &= \sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) + r_a \left[\sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \\ \bar{J}_y &= \sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) + r_b \left[\sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{xy} &= \frac{1}{2} (\bar{F}_x + \bar{F}_y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F^i (1 + r_b) \bar{\delta}(y - y_i) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m F^j (1 + r_a) \bar{\delta}(x - x_j) - \\ &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} r_{ab} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{xy} &= \frac{1}{2} (\bar{S}_x + \bar{S}_y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S^i (1 + r_b) \bar{\delta}(y - y_i) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m S^j (1 + r_a) \bar{\delta}(x - x_j) - \\ &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S^{ij} r_{ab} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{xy} &= \frac{1}{2} (\bar{J}_x + \bar{J}_y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J^i (1 + r_b) \bar{\delta}(y - y_i) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m J^j (1 + r_a) \bar{\delta}(x - x_j) - \\ &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J^{ij} r_{ab} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \end{aligned}$$

где

$$r_a = \frac{r_j}{(a - a_1)A}, \quad r_b = \frac{r_i}{bB}, \quad r_{ab} = \frac{r_a + r_b}{2}. \quad (24)$$

1.3. Численные методы

В данной работе для исследования оболочечных конструкций предлагается использовать алгоритм, основанный на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру.

Согласно этому алгоритму, к функционалу применяется метод Ритца для сведения вариационной задачи к системе нелинейных алгебраических уравнений. Для этого искомые функций представляются в виде

$$\begin{aligned} U &= U(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl} X_1^k Y_1^l, \\ V &= V(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl} X_2^k Y_2^l, \\ W &= W(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl} X_3^k Y_3^l, \\ \Psi_x &= \Psi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} PS_{kl} X_4^k Y_4^l, \\ \Psi_y &= \Psi_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} PN_{kl} X_5^k Y_5^l, \end{aligned} \quad (25)$$

где $U_{kl} - PN_{kl}$ – неизвестные числовые параметры. Подставив функции (25) в функционал (7), находим

производные по неизвестным числовым параметрам $U_{kl} - PN_{kl}$. Таким образом, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений.

Для решения этой системы применяется метод продолжения решения по наилучшему параметру. Верификация данного алгоритма подробно рассматривается в работе [47].

Все расчеты проводятся в безразмерных параметрах, однако все формулы и результаты приводятся в размерном виде. Подробно используемые безразмерные параметры и их обоснование приведены в работе [48].

2. Расчеты

2.1. Пологие оболочки двойкой кривизны

Применимость описанного выше способа ввода ребер жесткости покажем на примере расчета пологих оболочек двойкой кривизны (табл. 2), выполненных из ортотропных материалов (табл. 3). Оболочки квадратные в плане, шарнирно-неподвижно закреплены по контуру и находятся под действием равномерно-распределенной поперечной нагрузки q , направленной по нормали к поверхности.

Оболочки подкреплены ортогональной сеткой ребер, распределенных по конструкции равномерно. Ширина ребер $r^j = r^i = 2h$, высота $h^j = h^i = 3h$. Расстояние между ребрами обозначим x_r , а крайние ребра будут находиться от края конструкции на расстоянии $0,5x_r$.

В методе Ритца (25) примем $N = 16$, более подробно сходимости данного метода была рассмотрена в работе [46].

Осуществим расчеты ортотропных конструкций, выполненных из указанных выше материалов. Количество ребер будем брать одинаковым в обоих направлениях, для каждого нового варианта сетки увеличивая его на 2.

В табл. 4 показаны значения критических нагрузок потери устойчивости для разных вариантов подкрепле-

ния, полученные по обычному дискретному и уточненному дискретному методам учета ребер жесткости.

Таблица 2/Table 2

Геометрические параметры рассматриваемых оболочек

Geometrical parameters of shells

№ п/п	h , м	a , м	b , м	R_1 , м	R_2 , м	Изображение на рисунке
1	0,08	16	16	25	25	2, а
2	0,01	1,2	1,2	4,8	4,8	2, б

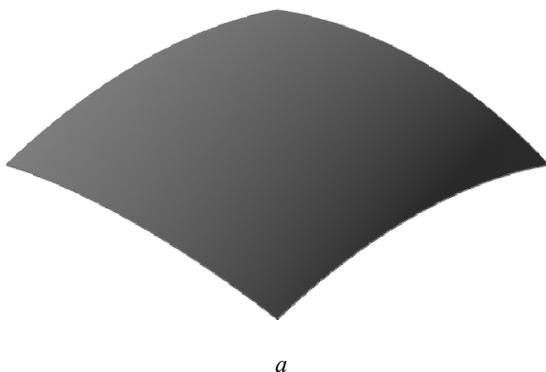
Таблица 3/Table 3

Характеристики материалов рассматриваемых конструкций

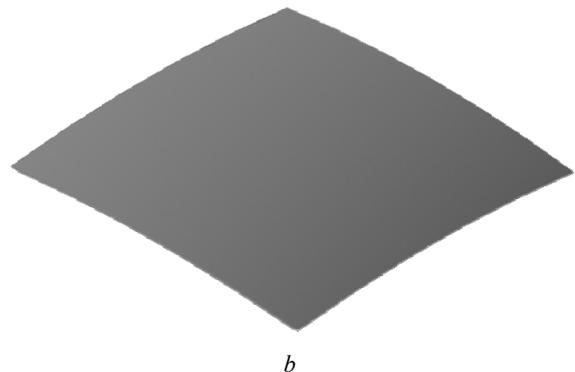
Material parameters of shells

Характеристика	Стеклопластик Т-10/УПЭ22-27 [49]	0/90 Woven Roving E-Glass/Vinyl Ester [50]
E_1 , МПа	$0,294 \cdot 10^5$	$0,17 \cdot 10^5$
μ_{12}	0,123	0,13
E_2 , МПа	$1,78 \cdot 10^4$	$0,17 \cdot 10^5$
G_{12} , МПа	$0,301 \cdot 10^4$	$0,04 \cdot 10^5$
G_{13} , МПа	$0,301 \cdot 10^4$	$0,0173 \cdot 10^5$
G_{23} , МПа	$0,301 \cdot 10^4$	$0,0173 \cdot 10^5$
F_1^+ , МПа	508	355,8
F_1^- , МПа	-209	-329,6
F_2^+ , МПа	246	355,8
F_2^- , МПа	-117	-329,6
F_{12} , МПа	43	65,5
$F_{12,45}^+$, МПа	130	-
$F_{12,45}^-$, МПа	-160	-

При выполнении расчетов направление оси ортотропии 1 совпадало с направлением локальной оси x . В силу симметрии геометрической формы пологих оболочек двойкой кривизны, направлять волокна материала в направлении оси y нет необходимости.



а



б

Рис. 2. Рассматриваемые пологие оболочки двойкой кривизны: а – вариант № 1; б – вариант № 2

Fig. 2. Considered shallow shells of double curvature: а – option No. 1; б – option No. 2

Критические нагрузки потери устойчивости для ортотропных подкрепленных пологих оболочек двоякой кривизны

Critical buckling loads for orthotropic stiffened shallow shells of double curvature

Вариант	Метод	Критическая нагрузка q_{cr} , МПа						
		0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10	12×12
№ 1 Стеклопластик Т10/УПЭ22-27	Уточн. дискр.	0.1360	0.1740	0.2978	0.3579	0.4093	0.4554	0.4984
	Дискр.	0.1360	0.1818	0.3932	0.4770	0.5643	0.7469	0.8063
№ 2 Стеклопластик Т10/УПЭ22-27	Уточн. дискр.	0.0589	0.1024	0.1256	0.1350	0.1446	0.1549	+
№ 2 Woven Roving E-Glass_Vinyl Ester	Уточн. дискр.	0.0468	0.0845	0.1019	0.1136	0.1252	+	+

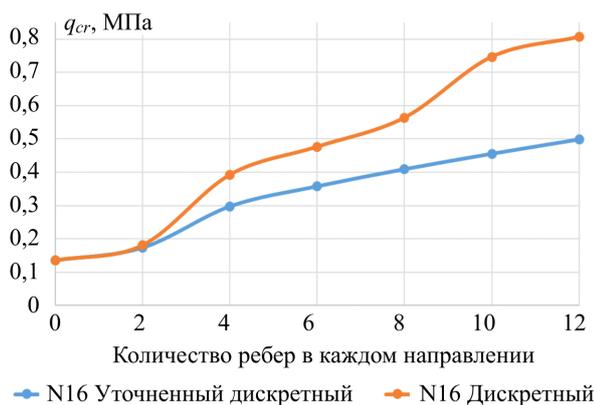


Рис. 3. Значения критических нагрузок при разном числе ребер жесткости (пологая оболочка двоякой кривизны 1, $N = 16$)

Fig. 3. Values of critical buckling loads for different numbers of stiffeners (shallow shell of double curvature 1, $N = 16$)

Таблица 5/Table 5

Сравнение результатов, полученных по рассматриваемым в данной работе методам с результатами эксперимента

Comparison of the results obtained by the methods considered in this paper with the experimental results

Метод		q_{cr} , МПа
		Количество ребер 9×9
Эксперимент В.И. Климанова и С.А. Тимашева [51]		$q_{cr} = 0.503 \cdot 10^{-2}$
N=16	Дискретный ввод ребер по полосе (В.В. Карпов, 1986) [46]	$0.733 \cdot 10^{-2}$
	Уточненный дискретный ввод ребер по полосе (А.А. Семенов)	$0.551 \cdot 10^{-2}$

На рис. 3 показана сходимость разных методов учета ребер жесткости для конструкции варианта 1 при $N = 16$.

2.2. Верификация

Имеются результаты экспериментов по исследованию устойчивости оболочек из оргстекла, проведенные в Уральском научном центре АН СССР и описанные в работе В.И. Климанова и С.А. Тимашева [51].

Авторами были проведены испытания над 18 образцами пологой оболочки двоякой кривизны, квадратной в плане, с параметрами $h = 0,001$ м, $a = b = 0,604$ м, $R_1 = R_2 = 1,51$ м (материал – оргстекло с параметрами $E = 0,0331 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,354$; параметры ребер жесткости – $n = m = 9$, $h^i = h^j = 0,0033$ м, $r = 0,0092$ м). Полученные значения критических нагрузок потери устойчивости q_{cr} дали разброс от $0,411 \cdot 10^{-2}$ до $0,703 \cdot 10^{-2}$ МПа. После математической обработки результатов эксперимента было вычислено итоговое значение критической нагрузки $q_{cr} = 0,503 \cdot 10^{-2}$ МПа.

Расчет этого варианта конструкции по рассмотренным в данной работе методам показал результаты, приведенные в табл. 5.

Заключение

Таким образом, автором предложен новый, наиболее точный вариант учета жесткостных характеристик ребер, связанный с добавлением разных коэффициентов приведения вдоль разных координатных осей. Для ребер, направленных перпендикулярно рассматриваемому направлению, вводится коэффициент приведения, равный отношению ширины ребер этого направления к линейному размеру оболочки в рассматриваемом направлении.

Разработана наиболее точная математическая модель деформирования ортотропных оболочек при статическом нагружении с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета. Модель может быть использована для конструкций разной геометрической формы, которая может быть задана через параметры Ляме и радиусы главных кривизн.

Проведено исследование устойчивости ортотропных пологих оболочек двоякой кривизны, подкрепленных ребрами жесткости. Осуществлено сравнение результатов, получаемых по разным методам учета ребер жесткости. Выявлено, что обычный дискретный метод дает существенно завышенные значения критических нагрузок (особенно при увеличении числа ребер). Показано сравнение результатов расчета тестовой задачи с результатами, полученными другими авторами на основе эксперимента.

Библиографический список

1. Кривошапко С.Н. О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – № 1 (1). – С. 51–56.
2. Соколов В.Г., Разов И.О. Параметрические колебания и динамическая устойчивость магистральных газопроводов при наземной прокладке // Вестник гражданских инженеров. – 2014. – № 2 (43). – С. 65–68.
3. Al-Hashimi H., Seibi A.C., Molki A. Experimental Study and Numerical Simulation of Domes Under Wind Load // Proceedings of the ASME 2009 Pressure Vessels and Piping Division Conference. Prague, Czech Republic: ASME, 2009. – P. 519–528. DOI: 10.1115/PVP2009-77801.
4. Efimtsov B.M., Lazarev L.A. Forced vibrations of plates and cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners // Journal of Sound and Vibration. – 2009. – Vol. 327, № 1–2. – P. 41–54. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.05.021.
5. Garcia F.G., Ramos R. Design charts for the local buckling analysis of integrally web-stiffened panels with filleted junctions subjected to uniaxial compressive loads // Thin-Walled Structures. – 2021. – P. 108632. DOI: 10.1016/j.tws.2021.108632.
6. Sun Y., Qiu Y., Wu Y. Modeling of Wind Pressure Spectra on Spherical Domes // International Journal of Space Structures. – 2013. – Vol. 28, № 2. – P. 87–100. DOI: 10.1260/0266-3511.28.2.87.
7. Wind-induced dynamic behavior and its load estimation of a single-layer latticed dome with a long span / Y. Uematsu, O. Kurihara, M. Yamada, A. Sasaki, T. Hongo // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2001. – Vol. 89, № 14–15. – P. 1671–1687. DOI: 10.1016/S0167-6105(01)00125-8.
8. Vasiliev V.V., Barynin V.A., Rasin A.F. Anisogrid lattice structures – survey of development and application // Composite Structures. – 2001. – Vol. 54, № 2–3. – P. 361–370. DOI: 10.1016/S0263-8223(01)00111-8.
9. Experimental and numerical buckling analysis of a thin TRC dome / E. Verwimp, T. Tysmans, M. Mollaert, S. Berg // Thin-Walled Structures. – 2015. – Vol. 94. – P. 89–97. DOI: 10.1016/j.tws.2015.03.021.
10. Yu W., Li Z.L. Structural Similitude for Prestressed Vibration and Buckling of Eccentrically Stiffened Circular Cylindrical Panels and Shells by Energy Approach // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2016. – Vol. 16, № 10. – P. 1550074. DOI: 10.1142/S0219455415500741.
11. Solovei N.A., Krivenko O.P., Malygina O.A. Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities // Magazine of Civil Engineering. – 2015. – № 1 (53). – P. 56–69. DOI: 10.5862/MCE.53.6.
12. Dung D.V., Nam V.H. An analytical approach to analyze nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells subjected to time dependent axial compression and external pressure. Part 2: Numerical results and discussion // Vietnam Journal of Mechanics. – 2014. – Vol. 36, № 4. – P. 255–265. DOI: 10.15625/0866-7136/36/4/3986.
13. Less H., Abramovich H. Dynamic buckling of a laminated composite stringer-stiffened cylindrical panel // Composites Part B: Engineering. – 2012. – Vol. 43, № 5. – P. 2348–2358. DOI: 10.1016/j.compositesb.2011.11.070.
14. Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach / Y. Qu, S. Wu, Y. Chen, H. Hua // International Journal of Mechanical Sciences. – 2013. – Vol. 69. – P. 72–84. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026.
15. Numerical-based smeared stiffener method for global buckling analysis of grid-stiffened composite cylindrical shells / B. Wang, K. Tian, P. Hao, Y. Zheng, Y. Ma, J. Wang // Composite Structures. 2016. T. 152. C. 807–815. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.05.096.
16. Analysis of the influence of stiffness reduction on the load carrying capacity of ring-stiffened cylindrical shell / X. Bai, W. Xu, H. Ren, J. Li // Ocean Engineering. – 2017. – Vol. 135. – P. 52–62. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2017.02.034.
17. Barlag S., Rothert H. An idealization concept for the stability analysis of ring-reinforced cylindrical shells under external pressure // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2002. – Vol. 37, № 4–5. – P. 745–756. DOI: 10.1016/S0020-7462(01)00096-8.
18. Van der Neut A. The General Instability of Stiffened Cylindrical Shells under Axial Compression, Report S. 314, National Aeronautical Research Institute (Amsterdam). – 1947.
19. Baruch M., Singer J. Effect of Eccentricity of Stiffeners on the General Instability of Stiffened Cylindrical Shells under Hydrostatic Pressure // Journal of Mechanical Engineering Science. – 1963. – Vol. 5, № 1. – P. 23–27. DOI: 10.1243/JMES_JOUR_1963_005_005_02.
20. Block D.L., Card M.F., Mikulas M.M.Jr. Buckling of eccentrically stiffened orthotropic cylinders. NASA TN D-2960. August 1965.
21. Singer J., Baruch M., Harari O. On the stability of eccentrically stiffened cylindrical shells under axial compression // International Journal of Solids and Structures. – 1967. – Vol. 3, № 4. – P. 445–470. DOI: 10.1016/0020-7683(67)90001-7.
22. Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders / S. Kidane, G. Li, J. Helms, S.-S. Pang, E. Woldeesenbet // Composites Part B: Engineering. – 2003. – Vol. 34, № 1. – P. 1–9. DOI: 10.1016/S1359-8368(02)00074-4.
23. Jaunky N., Knight N.F., Ambur D.R. Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels // Composites Part B: Engineering. – 1996. – Vol. 27, № 5. – P. 519–526. DOI: 10.1016/1359-8368(96)00032-7.
24. Amiro I. Ya., Zarutskii V.A. Stability of ribbed shells // Soviet Applied Mechanics. – 1983. – Vol. 19, № 11. – P. 925–940. DOI: 10.1007/BF01362647.
25. Huang S., Qiao P. A new semi-analytical method for nonlinear stability analysis of stiffened laminated composite doubly-curved shallow shells // Composite Structures. – 2020. – Vol. 251. – P. 112526. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112526.
26. Khalmuradov R.I., Ismoilov E.A. Nonlinear vibrations of a circular plate reinforced by ribs // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – 2020. – Vol. 614. – P. 012071. DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012071.
27. Lee Y.-S., Kim Y.-W. Vibration analysis of rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners // Computers & Structures. – 1998. – Vol. 69, № 2. – P. 271–281. DOI: 10.1016/S0045-7949(97)00047-3.
28. Mustafa B.A.J., Ali R. An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells // Computers & Structures. – 1989. – Vol. 32, № 2. – P. 355–363. DOI: 10.1016/0045-7949(89)90047-3.
29. Sadeghifar M., Bagheri M., Jafari A.A. Buckling analysis of stringer-stiffened laminated cylindrical shells with nonuniform eccentricity // Archive of Applied Mechanics. – 2011. – Vol. 81, № 7. – P. 875–886. DOI: 10.1007/s00419-010-0457-0.
30. Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners / M. Talebitooti, M. Ghayour, S. Ziaei-Rad, R. Talebitooti // Archive of Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 80, № 3. – P. 201–215. DOI: 10.1007/s00419-009-0311-4.

31. Wang C.M., Swaddiwudhipong S., Tian J. Ritz Method for Vibration Analysis of Cylindrical Shells with Ring Stiffeners // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1997. – Vol. 123, № 2. – P. 134–142. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:2(134).

32. Wang J.T.-S., Hsu T.-M. Discrete analysis of stiffened composite cylindrical shells // *AIAA Journal*. – 1985. – Vol. 23, № 11. – P. 1753–1761. DOI: 10.2514/3.9162.

33. Zhao X., Liew K.M., Ng T.Y. Vibrations of rotating cross-ply laminated circular cylindrical shells with stringer and ring stiffeners // *International Journal of Solids and Structures*. – 2002. – Vol. 39, № 2. – P. 529–545. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00194-9.

34. Bich D.H., Dung D.V., Nam V.H. Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened imperfect functionally graded doubly curved thin shallow shells // *Composite Structures*. – 2013. – Vol. 96. – P. 384–395. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.10.009.

35. Buragohain M., Velmurugan R. Buckling Analysis of Composite Hexagonal Lattice Cylindrical Shell using Smeared Stiffener Model // *Defence Science Journal*. – 2009. Т. 59, – № 3. – P. 230–238. DOI: 10.14429/dsj.59.1516.

36. Srinivasan R.S., Krishnan P.A. Dynamic analysis of stiffened conical shell panels // *Computers & Structures*. – 1989. – Vol. 33, № 3. – P. 831–837. DOI: 10.1016/0045-7949(89)90257-5.

37. Totaro G. Flexural, torsional, and axial global stiffness properties of anisogrid lattice conical shells in composite material // *Composite Structures*. – 2016. – Vol. 153. – P. 738–745. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.06.072.

38. Tu T.M., Loi N.V. Vibration Analysis of Rotating Functionally Graded Cylindrical Shells with Orthogonal Stiffeners // *Latin American Journal of Solids and Structures*. – 2016. – Vol. 13, № 15. – P. 2952–2969. DOI: 10.1590/1679-78252934.

39. Jones R.M. Buckling of circular cylindrical shells with multiple orthotropic layers and eccentric stiffeners // *AIAA Journal*. – 1968. – Vol. 6, № 12. – P. 2301–2305. DOI: 10.2514/3.4986.

40. Numerical investigation into the buckling behavior of advanced grid stiffened composite cylindrical shell / M. Ren, T. Li, Q. Huang,

B. Wang // *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. – 2014. – Vol. 33, № 16. – P. 1508–1519. DOI: 10.1177/0731684414537881.

41. Лурье А.И. Общие уравнения оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. – Л., 1948. – 28 с.

42. Власов В.З. Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней // *Изв. АН СССР. ОТН*. – 1949. – № 6. – С. 819–939.

43. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромиздат, 1962. – 431 с.

44. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

45. Semenov A. Strength of Steel Shell Cylindrical Panels Reinforced with an Orthogonal Grid of Stiffeners // *Journal of Applied and Computational Mechanics*. – 2022. – Vol. 8, № 2. – P. 723–732. DOI: 10.22055/jacm.2022.38968.3317.

46. Karpov V.V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts // *International Journal of Solids and Structures*. – 2018. – Vol. 146. – P. 117–135. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024.

47. Семенов А.А., Леонов С.С. Метод непрерывного продолжения решения по наилучшему параметру при расчете оболочечных конструкций // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2019. – Т. 161, № 2. – С. 230–249. DOI: 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249.

48. Карпов В.В., Семенов А.А. Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2015. – № 3. – С. 74–94. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.07.

49. Тышкевич В.Н. Выбор критерия прочности для труб из армированных пластиков // *Известия ВолгГТУ*. – 2011. – № 5 (78). – С. 76–79.

50. Sirivolu D., Hoo Fatt M.S. Dynamic stability of double-curvature composite shells under external blast // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2015. – Vol. 77. – P. 281–290. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.09.005.

51. Климанов В.И., Тимашев С.А. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – 291 с.

References

1. Krivoshapko S.N. O vozmozhnostyah obolochechnyh sooruzhenij v sovremennoj arhitekture i stroitel'stve [On the possibilities of shell structures in modern architecture and construction], *Stroitel'naja mehanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij*, 2013. No. 1 (1), P. 51–56.

2. Sokolov V.G., Razov I.O. Parametricheskie kolebanija i dinamičeskaja ustojčivost' magistral'nyh gazoprovodov pri nazemnoj prokladke [Parametric vibrations and dynamic stability of main gas pipelines during ground laying], *Bulletin of Civil Engineers*, 2014. No. 2 (43), P. 65–68.

3. Al-Hashimi H., Seibi A.C., Molki A. Experimental Study and Numerical Simulation of Domes Under Wind Load, Proceedings of the ASME 2009 Pressure Vessels and Piping Division Conference. Prague, Czech Republic: ASME, 2009, P. 519–528. DOI: 10.1115/PVP2009-77801.

4. Efimtsov B.M., Lazarev L.A. Forced vibrations of plates and cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners, *Journal of Sound and Vibration*, 2009, Vol. 327, No. 1–2, P. 41–54. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.05.021.

5. Garcia F.G., Ramos R. Design charts for the local buckling analysis of integrally web-stiffened panels with filleted junctions subjected to uniaxial compressive loads, *Thin-Walled Structures*, 2021, P. 108632. DOI: 10.1016/j.tws.2021.108632.

6. Sun Y., Qiu Y., Wu Y. Modeling of Wind Pressure Spectra on Spherical Domes, *International Journal of Space Structures*, 2013, Vol. 28, No. 2, P. 87–100. DOI: 10.1260/0266-3511.28.2.87.

7. Uematsu Y., Kuribara O., Yamada M., Sasaki A., Hongo T. Wind-induced dynamic behavior and its load estimation of a single-layer latticed dome with a long span, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2001, Vol. 89, No. 14–15, P. 1671–1687. DOI: 10.1016/S0167-6105(01)00125-8.

8. Vasiliev V.V., Barynin V.A., Rasin A.F. Anisogrid lattice structures – survey of development and application, *Composite Structures*, 2001, Vol. 54, No. 2–3, P. 361–370. DOI: 10.1016/S0263-8223(01)00111-8.

9. Verwimp E., Tysmans T., Mollaert M., Berg S. Experimental and numerical buckling analysis of a thin TRC dome, *Thin-Walled Structures*, 2015, Vol. 94, P. 89–97. DOI: 10.1016/j.tws.2015.03.021.

10. Yu W., Li Z.L. Structural Similitude for Prestressed Vibration and Buckling of Eccentrically Stiffened Circular Cylindrical Panels and Shells by Energy Approach, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2016, Vol. 16, No. 10, P. 1550074. DOI: 10.1142/S0219455415500741.

11. Solovei N.A., Krivenko O.P., Malygina O.A. Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities,

- Magazine of Civil Engineering*, 2015, No. 1 (53), P. 56–69. DOI: 10.5862/MCE.53.6.
12. Dung D.V., Nam V.H. An analytical approach to analyze nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells subjected to time dependent axial compression and external pressure. Part 2: Numerical results and discussion, *Vietnam Journal of Mechanics*, 2014, Vol. 36, No. 4, P. 255–265. DOI: 10.15625/0866-7136/36/4/3986.
 13. Less H., Abramovich H. Dynamic buckling of a laminated composite stringer-stiffened cylindrical panel, *Composites Part B: Engineering*, 2012, Vol. 43, No. 5, P. 2348–2358. DOI: 10.1016/j.compositesb.2011.11.070.
 14. Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua H. Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, Vol. 69, P. 72–84. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026.
 15. Wang B., Tian K., Hao P., Zheng Y., Ma Y., Wang J. Numerical-based smeared stiffener method for global buckling analysis of grid-stiffened composite cylindrical shells, *Composite Structures*, 2016, Vol. 152, P. 807–815. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.05.096.
 16. Bai X., Xu W., Ren H., Li J. Analysis of the influence of stiffness reduction on the load carrying capacity of ring-stiffened cylindrical shell, *Ocean Engineering*, 2017, Vol. 135, P. 52–62. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2017.02.034.
 17. Barlag S., Rothert H. An idealization concept for the stability analysis of ring-reinforced cylindrical shells under external pressure, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, Vol. 37, No. 4–5, P. 745–756. DOI: 10.1016/S0020-7462(01)00096-8.
 18. Van der Neut A. The General Instability of Stiffened Cylindrical Shells under Axial Compression, Report S. 314, National Aeronautical Research Institute (Amsterdam), 1947.
 19. Baruch M., Singer J. Effect of Eccentricity of Stiffeners on the General Instability of Stiffened Cylindrical Shells under Hydrostatic Pressure, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1963, Vol. 5, No. 1, P. 23–27. DOI: 10.1243/JMES_JOUR_1963_005_005_02.
 20. Block D.L., Card M.F., Mikulas M.M.Jr, Buckling of eccentrically stiffened orthotropic cylinders. NASA TN D-2960. August 1965.
 21. Singer J., Baruch M., Harari O. On the stability of eccentrically stiffened cylindrical shells under axial compression, *International Journal of Solids and Structures*, 1967, Vol. 3, No. 4, P. 445–470. DOI: 10.1016/0020-7683(67)90001-7.
 22. Kidane S., Li G., Helms J., Pang S.-S., Woldesenbet E. Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders, *Composites Part B: Engineering*, 2003, Vol. 34, No. 1, P. 1–9. DOI: 10.1016/S1359-8368(02)00074-4.
 23. Jaunky N., Knight N.F., Ambur D.R. Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels, *Composites Part B: Engineering*, 1996, Vol. 27, No. 5, P. 519–526. DOI: 10.1016/1359-8368(96)00032-7.
 24. Amiro I. Ya., Zarutskii V.A. Stability of ribbed shells, *Soviet Applied Mechanics*, 1983, Vol. 19, No. 11, P. 925–940. DOI: 10.1007/BF01362647.
 25. Huang S., Qiao P. A new semi-analytical method for nonlinear stability analysis of stiffened laminated composite doubly-curved shallow shells, *Composite Structures*, 2020, Vol. 251, P. 112526. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112526.
 26. Khalmuradov R.I., Ismoilov E.A. Nonlinear vibrations of a circular plate reinforced by ribs, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2020, Vol. 614, P. 012071. DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012071.
 27. Lee Y.-S., Kim Y.-W. Vibration analysis of rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners, *Computers & Structures*, 1998, Vol. 69, No. 2, P. 271–281. DOI: 10.1016/S0045-7949(97)00047-3.
 28. Mustafa B.A.J., Ali R. An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells, *Computers & Structures*, 1989, Vol. 32, No. 2, P. 355–363. DOI: 10.1016/0045-7949(89)90047-3.
 29. Sadeghifar M., Bagheri M., Jafari A.A. Buckling analysis of stringer-stiffened laminated cylindrical shells with nonuniform eccentricity, *Archive of Applied Mechanics*, 2011, Vol. 81, No. 7, P. 875–886. DOI: 10.1007/s00419-010-0457-0.
 30. Talebitooti M., Ghayour M., Ziaei-Rad S., Talebitooti R. Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners, *Archive of Applied Mechanics*, 2010, Vol. 80, No. 3, P. 201–215. DOI: 10.1007/s00419-009-0311-4.
 31. Wang C.M., Swaddiwudhipong S., Tian J. Ritz Method for Vibration Analysis of Cylindrical Shells with Ring Stiffeners, *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, Vol. 123, No. 2, P. 134–142. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:2(134).
 32. Wang J.T.-S., Hsu T.-M. Discrete analysis of stiffened composite cylindrical shells, *AIAA Journal*, 1985, Vol. 23, No. 11, P. 1753–1761. DOI: 10.2514/3.9162.
 33. Zhao X., Liew K.M., Ng T.Y. Vibrations of rotating cross-ply laminated circular cylindrical shells with stringer and ring stiffeners, *International Journal of Solids and Structures*, 2002, Vol. 39, No. 2, P. 529–545. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00194-9.
 34. Bich D.H., Dung D.V., Nam V.H. Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened imperfect functionally graded doubly curved thin shallow shells, *Composite Structures*, 2013, Vol. 96, P. 384–395. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.10.009.
 35. Buragohain M., Velmurugan R. Buckling Analysis of Composite Hexagonal Lattice Cylindrical Shell using Smeared Stiffener Model, *Defence Science Journal*, 2009, Vol. 59, No. 3, P. 230–238. DOI: 10.14429/dsj.59.1516.
 36. Srinivasan R.S., Krishnan P.A. Dynamic analysis of stiffened conical shell panels, *Computers & Structures*, 1989, Vol. 33, No. 3, P. 831–837. DOI: 10.1016/0045-7949(89)90257-5.
 37. Totaro G. Flexural, torsional, and axial global stiffness properties of anisogrid lattice conical shells in composite material, *Composite Structures*, 2016, Vol. 153, P. 738–745. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.06.072.
 38. Tu T.M., Loi N.V. Vibration Analysis of Rotating Functionally Graded Cylindrical Shells with Orthogonal Stiffeners, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2016, Vol. 13, No. 15, P. 2952–2969. DOI: 10.1590/1679-78252934.
 39. Jones R.M. Buckling of circular cylindrical shells with multiple orthotropic layers and eccentric stiffeners, *AIAA Journal*, 1968, Vol. 6, No. 12, P. 2301–2305. DOI: 10.2514/3.4986.
 40. Ren M., Li T., Huang Q., Wang B. Numerical investigation into the buckling behavior of advanced grid stiffened composite cylindrical shell, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2014, Vol. 33, No. 16, P. 1508–1519. DOI: 10.1177/0731684414537881.
 41. Lur'e A.I. Obshhie uravneniya obolochki, podkrepленноj rebrami zhestkosti [General Equations of a Shell Reinforced with Stiffeners]. Leningrad, 1948. 28 p.
 42. Vlasov V.Z. Kontaktnye zadachi po teorii obolochek i tonkostennyh sterzhnej [Contact problems in the theory of shells and thin-walled rods], *Izv. AN SSSR. OTNTH*, 1949, No. 6, P. 819–939.
 43. Novozhilov V.V. Teorija tonkih obolochek [Theory of thin shells]. Leningrad: Sudpromizdat, 1962. 431 p.
 44. Vol'mir A.S. Ustojchivost' deformiruemyh system [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka, 1967. 984 p.

45. Semenov A. Strength of Steel Shell Cylindrical Panels Reinforced with an Orthogonal Grid of Stiffeners, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2022, Vol. 8, No. 2, P. 723–732. DOI: 10.22055/jacm.2022.38968.3317.
46. Karpov V.V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts, *International Journal of Solids and Structures*, 2018, Vol. 146, P. 117–135. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024.
47. Semenov A.A., Leonov S.S. Metod nepreryvnogo prodolzhenija reshenija po nailuchshemu parametru pri raschete obolocheknyh konstrukcij [The method of continuous continuation of the solution by the best parameter in the calculation of shell structures], *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Serija: Fiziko-matematicheskie nauki*, 2019, Vol. 161, No. 2, P. 230–249. DOI: 10.26907/2541-7746.2019.2.230-249.
48. Karpov V.V., Semenov A.A. Dimensionless parameters in the theory of reinforced shells. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, No. 3, P. 74–94. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.07.
49. Tyshkevich V.N. Vybor kriterija prochnosti dlja trub iz armirovannyh plastikov [Selection of Strength Criteria for Reinforced Plastic Pipes], *Izvestija VolgGTU*, 2011. No. 5 (78), P. 76–79.
50. Sirivolu D., Hoo Fatt M.S. Dynamic stability of double-curvature composite shells under external blast, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2015, Vol. 77, P. 281–290. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.09.005.
51. Klimanov V.I., Timashev S.A. Nelinejnye zadachi podkrepennyh obolochek [Nonlinear problems of reinforced shells]. *Sverdlovsk: UNC AN SSSR*, 1985. 291 p.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Financing. The study was not sponsored.

Conflict of interest. The author declare no conflict of interest.