



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2022

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.4.12

УДК 539.3

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАКРИТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

В.Э. Вильдеман, А.И. Мугатаров

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 16 августа 2022 г.

Одобрена: 08 декабря 2022 г.

Принята к публикации:

12 декабря 2022 г.

#### Ключевые слова:

закритическое деформирование, разупрочнение, кручение, аналитическое решение.

### АННОТАЦИЯ

Обеспечение прочности, надежности и безопасности конструкций требует изучения вопросов зарождения и развития зон неупругого деформирования, возникающих вследствие равновесного накопления повреждений. Одним из проявлений данного процесса является закритическое деформирование материала, характеризующееся снижением уровня напряжений при растущих деформациях. Представляется целесообразным применение основных положений теории закритического деформирования для проведения уточненного прочностного анализа и выявления дополнительных прочностных и деформационных резервов ответственных конструкций. Для этого, в частности, необходим расчет устойчивости процессов разупрочнения, связанный с влиянием жесткости нагружающих систем.

С точки зрения иллюстрации основных теоретических положений механики закритического деформирования показательным является рассмотрение аналитических решений, построенных с учетом возникновения и развития зон разупрочнения. В работе получено аналитическое решение задачи кручения полого цилиндрического тела с учетом стадии разупрочнения материала и жесткости нагружающей системы. Рассмотрены двухзвенная и трехзвенная аппроксимации полной диаграммы деформирования материала. Приведены эпюры распределения касательных напряжений по сечению; отмечена реализация различных сценариев развития зон неупругого деформирования. Построены диаграммы нагружения; для различных значений параметров материала и геометрии стержня определены точка максимума и максимальное значение зависимости крутящего момента от угла закручивания. Определены прочностные и деформационные резервы конструкции, реализуемые при выполнении выявленных условий реализации полной диаграммы нагружения при кручении; отмечено влияние жесткости нагружающей системы. Сделан вывод о рациональности и необходимости учета стадии разупрочнения материала и жесткости нагружающих систем в расчетах конструкций.

© ПНИПУ

© Вильдеман Валерий Эрвинович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: wildemann@pstu.ru,

ID: 0000-0002-6240-4022.

Мугатаров Артур Ильдарович – инженер-исследователь, e-mail: cem\_mugatarov@mail.ru,

ID: 0000-0002-2229-8181.

Valeriy E. Wildemann – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department,

e-mail: wildemann@pstu.ru, ID: 0000-0002-6240-4022.

Artur I. Mugatarov – Research Engineer, e-mail: cem\_mugatarov@mail.ru, ID: 0000-0002-2229-8181.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# STABILITY OF POSTCRITICAL DEFORMATION DURING TORSION OF THICK-WALLED CYLINDRICAL SOLID

V.E. Wildemann, A.I. Mugatarov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 16 August 2022  
Approved: 08 December 2022  
Accepted for publication:  
12 December 2022

### Keywords:

postcritical deformation, material softening, torsion, analytical solution.

## ABSTRACT

Ensuring the strength, reliability and safety of structures requires studying the issues of inelastic deformation zones occurrence and development which result from equilibrium accumulation of damages. Material postcritical deformation characterized by a decrease in the stress level during growing deformations is one of the damages accumulation effects. Application of postcritical deformation theory basic provisions to carry out structures refined strength analysis with additional deformation and strength reserves identification is expedient. Calculation of softening processes stability related to loading systems rigidity is necessary.

Consideration of analytical solutions where occurrence and development of softening zones are taken into account is expedient to illustrate main theoretical positions of postcritical deformation mechanics. The analytical solution to the hollow cylindrical solid torsion problem where material softening stage and loading system rigidity are considered is obtained. Two-link and three-link approximations of the complete material deformation diagram are considered. Diagrams of shear stresses distribution over the cross-section are shown; various postcritical deformation zones development scenarios existence is noted. Loading diagrams are built; torque maximum value dependence on material parameters and rod geometry is defined. The strength and deformation reserves of the structure are revealed. Conditions for complete loading diagram implementation are determined, the loading system rigidity influence is noted. Therefore, rationality and necessity of taking into account material softening stage and loading system rigidity in structural design are concluded.

© PNRPU

## Введение

Проведение уточненного прочностного анализа конструкций требует изучения вопросов зарождения и развития зон неупругого деформирования, возникающих вследствие равновесного накопления повреждений. Данный процесс находит отражение на диаграмме деформирования материала в виде ниспадающей ветви, характеризующейся снижением уровня напряжений при растущих деформациях и являющейся геометрическим местом точек, соответствующих достижению предела прочности [1–9]. Необходимым условием устойчивой реализации закритической стадии деформирования является достаточная жесткость нагружающей системы [10–12]. С помощью установок высокой жесткости полная диаграмма деформирования материала может быть получена экспериментально [13–15].

Учет разупрочнения материала при анализе различных конструкций позволяет выявить дополнительные прочностные и деформационные резервы [16; 17]. Получен ряд аналитических решений крайних задач механики закритического деформирования. В работе В.А. Ибрагимова и В.Д. Ключникова решены задачи чистого изгиба балки и деформирования сферической полости в пространстве, нагруженной равномерно распределенным давлением [18]. В исследовании Л.В. Никитина и Е.И. Рьжака рассмотрена задача о всестороннем сжатии горных пород [19]. В работе С.Д. Волкова, Г.И. Дубровиной и Ю.П. Соковнина приведена задача растяжения пластины с поперечной трещиной [20]. В исследовании В.В. Стружанова решена задача о разрушении диска с ослабленной цен-

тральной зоной [21]. В работах В.Э. Вильдемана рассмотрены задачи трехточечного изгиба балки, разрушения толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления, кручения цилиндрического тела с учетом разупрочнения, задачи механики закритического деформирования стержневых систем [10; 22–23].

Вопросы кручения неупругих тел различного сечения и пересчета диаграмм нагружения при кручении на истинную диаграмму деформирования при сдвиге рассмотрены в работах Е.В. Ломакина [24; 25], В.В. Стружанова и Е.Ю. Просвирякова [26–30], В.П. Радченко [31; 32], Н.Х. Арутюняна и Ю.Н. Радаева [33; 34], В.Г. Баженова [35; 36], Б.Г. Миронова и других авторов [37–41]. В ряде работ представлены полученные экспериментально диаграммы нагружения металлических образцов при кручении с выраженным участком разупрочнения.

Данная работа является продолжением рассмотренной авторами ранее задачи кручения цилиндрического тела при жестком нагружении с учетом разупрочнения [22]. Рассмотрена задача кручения толстостенного цилиндрического тела с учетом закритической стадии деформирования материала и жесткости нагружающей системы, представляющей собой соединенный последовательно с телом упругий элемент.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим полый осесимметричный стержень длины  $L$  с наружным диаметром  $D$  и внутренним диаметром  $d = \alpha D$ ,  $\alpha \in [0; 1)$  в цилиндрической системе координат. Один торец стержня закреплен, ко второму

через упругий элемент с жесткостью на кручение  $R_\varphi$  прикладывается момент, обеспечивающий угол поворота  $\Phi_0$ . Массовые силы не рассматриваются. Схема изображена на рис. 1.

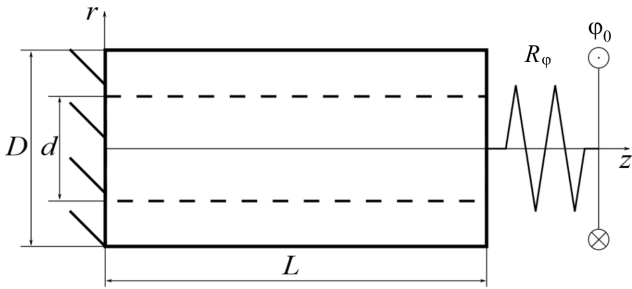


Рис. 1. Схема нагружения полого цилиндрического тела

Fig. 1. Loading scheme of the hollow cylindrical solid

В силу симметрии, наличия одного силового фактора – крутящего момента  $M$  и выполнения гипотезы плоских сечений, две компоненты вектора перемещений являются нулевыми, третья компонента не зависит от окружной координаты:

$$u_r(r, \theta, z) = 0; u_z(r, \theta, z) = 0; u_\theta(r, \theta, z) = u_\theta(r, z). \quad (1)$$

При выполнении гипотезы о сохранении радиусов сечений прямая связь между компонентой вектора перемещений  $u_\theta(r, z)$  и углом поворота сечения  $\varphi(z)$  является линейной:

$$u_\theta(r, z) = r\varphi(z). \quad (2)$$

В таком случае компоненты тензора деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{rz} = 0, \\ \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta(r, z)}{\partial z} = r \frac{d\varphi(z)}{dz}. \end{aligned} \quad (3)$$

Единственная ненулевая компонента тензора напряжений с использованием функции пластичности Ильюшина [42] будет записана в виде

$$\tau_{\theta z} = G(1 - \omega(\gamma_{\theta z}))\gamma_{\theta z}. \quad (4)$$

Здесь  $G$  – начальный модуль сдвига материала. Три уравнения равновесия вырождаются в одно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = 0 \Rightarrow G \left( 1 - \omega(\gamma_{\theta z}) - \frac{\partial \omega(\gamma_{\theta z})}{\partial \gamma_{\theta z}} \gamma_{\theta z} \right) \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial z} = \\ = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим угол поворота сечения на правом торце  $\varphi(L) = \Phi_L$ , в таком случае с учетом граничных условий решение дифференциального уравнения (5) имеет вид

$$\varphi(z) = \frac{z}{L} \Phi_L. \quad (6)$$

Из выражений (2), (3) и (6) следует, что угол сдвига определяется как

$$\gamma_{\theta z} = r \frac{\Phi_L}{L}. \quad (7)$$

Из равенства внешних и внутренних силовых факторов следует

$$M = \int_{d/2}^{D/2} 2\pi r^2 \tau_{\theta z}(r) dr. \quad (8)$$

Связь между углами поворота  $\Phi_L$  и  $\Phi_0$  примет вид

$$\Phi_0 = \Phi_L + \frac{M}{R_\varphi}. \quad (9)$$

Условие устойчивости процесса деформирования может быть получено из следующих соображений: при активном нагружении положительному приращению угла поворота  $\Phi_0$  должно соответствовать положительное приращение угла поворота торца стержня  $\Phi_L$ . В таком случае при использовании выражения (9) получаем условие устойчивости, связывающее жесткость нагружающей системы  $R_\varphi$  с собственной жесткостью стержня:

$$\frac{d\Phi_0}{d\Phi_L} \geq 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{R_\varphi} \frac{dM}{d\Phi_L} \geq 0 \Rightarrow \frac{dM}{d\Phi_L} \geq -R_\varphi. \quad (10)$$

Таким образом, в задаче с использованием выражений (4), (7), (8)–(10) определяются связь крутящего момента с углом закручивания системы и распределение напряжений по поперечному сечению стержня.

## 2. Кручение стержня из материала с двухзвенной кусочно-линейной полной диаграммой деформирования

Закон связи между касательным напряжением и сдвиговой деформацией выбирается кусочно-линейным:

$$\tau_{\theta z} = \begin{cases} G\gamma_{\theta z}, & 0 \leq \gamma_{\theta z} < \gamma_y; \\ G\gamma_y - D_G(\gamma_{\theta z} - \gamma_y), & \gamma_y \leq \gamma_{\theta z} < \gamma_f; \\ 0, & \gamma_f \leq \gamma_{\theta z}. \end{cases} \quad (11)$$

здесь  $\gamma_y$  – угол сдвига, соответствующий началу пластических деформаций;  $\gamma_f$  – угол сдвига, соответствующий полной потере несущей способности;  $D_G$  – модуль разупрочнения при сдвиге. Соотношения (11) обеспечивают проиллюстрированную на рис. 2 двухзвенную кусочно-линейную аппроксимацию полной диаграммы деформирования. Также для удобства дальнейших расчетов введем обозначение

$$\bar{\lambda} = \frac{G + D_G}{G}. \quad (12)$$

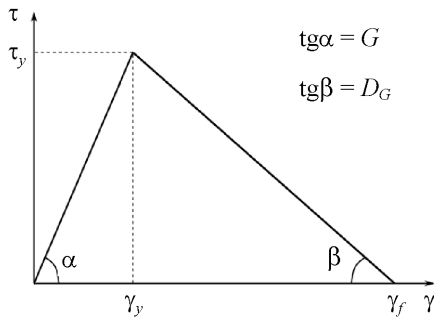


Рис. 2. Двухзвенная кусочно-линейная аппроксимация полной диаграммы деформирования

Fig. 2. Two-link piecewise linear approximation of the complete deformation diagram

Пусть начало пластического деформирования происходит при крутящем моменте  $M_y$  и угле поворота правого торца  $\varphi_y$ ; обозначим собственную жесткость стержня при кручении в упругой области  $R_L$ , тогда из (7), (8) и (11) следует

$$M_y = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) G \gamma_y; \quad \varphi_y = \frac{2\gamma_y L}{D}; \quad R_L = \frac{M_y}{\varphi_y} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) G. \quad (13)$$

В таком случае выражение (8) с учетом (7), (11)–(13) принимает вид

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^4 - \alpha^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \frac{\left(\frac{2\rho_f}{D}\right)^3 - \left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^3}{1 - \alpha^4} - (\bar{\lambda} - 1) \frac{\left(\frac{2\rho_f}{D}\right)^4 - \left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y};$$

$$\frac{2\rho_y}{D} = \begin{cases} 1, & \varphi_L < \varphi_y; \\ \frac{\varphi_y}{\varphi_L}, & \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y; \\ \alpha, & \frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L; \end{cases}$$

$$\frac{2\rho_f}{D} = \begin{cases} 1, & \varphi_L < \frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1} \varphi_y; \\ \frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1} \frac{\varphi_y}{\varphi_L}, & \frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1} \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1} \frac{1}{\alpha} \varphi_y; \\ \alpha, & \frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1} \frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\rho_y$ ,  $\rho_f$  – расстояния от центра сечения до границы зоны разупрочнения и зоны с потерявшим несущую способность материалом соответственно.

1 – стадия упругого деформирования. На данной стадии  $\varphi_L < \varphi_y$ , связь крутящего момента с углом закручивания торца является линейной:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\varphi_L}{\varphi_y}. \quad (15)$$

2 – стадия начальной закритической деформации. Здесь  $\varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y$  и  $\varphi_L < \frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1} \varphi_y$ . Момент зависит от угла поворота правого сечения следующим образом:

$$\frac{M}{M_y} = \left(1 - \bar{\lambda} \frac{1}{1 - \alpha^4}\right) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \frac{1}{1 - \alpha^4} - \frac{1}{3} \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^3. \quad (16a)$$

Данная функция имеет на исследуемом промежутке точку максимума

$$\frac{\varphi_L^*}{\varphi_y} = \sqrt[4]{\frac{\bar{\lambda}}{\lambda - (1 - \alpha^4)}}. \quad (16b)$$

Максимальное значение крутящего момента:

$$\frac{M^*}{M_y} = \frac{4}{3} \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^{\frac{1}{4}} (\bar{\lambda} - (1 - \alpha^4))^{\frac{3}{4}}\right). \quad (16в)$$

Условие устойчивости примет вид

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \bar{\lambda} \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(1 - \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^4\right) - 1. \quad (16г)$$

Далее, в зависимости от соотношения между геометрией стержня и свойствами материала, возможна реализация двух различных сценариев развития зон неупругого деформирования.

3.1 – стадия начального разрушения. На данной стадии  $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1} \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y$ , связь крутящего момента с углом закручивания рассчитывается по формуле

$$\frac{M}{M_y} = -\frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{1}{3} \bar{\lambda} \left( \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1}\right)^3 - 1 \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^3. \quad (17a)$$

Данная функция является монотонно убывающей. Условие устойчивости:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} + \bar{\lambda} \left( \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1}\right)^3 - 1 \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^4. \quad (17б)$$

3.2 – стадия развитой закритической деформации. Диапазон углов поворота торца определяется неравенством  $\frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{\bar{\lambda}}{\lambda-1} \varphi_y$ , выражение (14) принимает вид

$$\frac{M}{M_y} = (1 - \bar{\lambda}) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \bar{\lambda} \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^4}. \quad (18a)$$

Функция является линейной и монотонно убывающей, условие устойчивого закритического деформирования:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \bar{\lambda} - 1. \quad (18б)$$

После любого из сценариев развития неупругих зон (стадия 3.1 либо 3.2) деформирование продолжается по единому варианту.

4 – стадия развитой закритической деформации и разрушения. Здесь  $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda-1} \varphi_y \leq \varphi_L \leq \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{\lambda}}{\lambda-1} \varphi_y$  и  $\frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L$ , связь момента с углом закручивания имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_y} = & (\bar{\lambda} - 1) \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} - \frac{4}{3} \bar{\lambda} \frac{\alpha^3}{1 - \alpha^4} + \\ & + \frac{1}{3} \bar{\lambda} \left( \frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1} \right)^3 \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3. \end{aligned} \quad (19a)$$

Функция монотонно убывает, имеет соответствующий правой границе рассматриваемого промежутка минимум, в котором момент становится равным нулю и происходит полная потеря несущей способности. Условие устойчивости:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq -(\bar{\lambda} - 1) \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} + \bar{\lambda} \left( \frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1} \right)^3 \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4. \quad (19б)$$

Анализ решения. Эпюры распределения напряжений по сечению для различных стадий деформирования приведены на рис. 3.

На рис. 4 приведены диаграммы нагружения в относительных координатах для различных наборов значений параметров  $\bar{\lambda}$  и  $\alpha$ . На рис. 5, а, и б, приведены иллюстрирующие выражения (16в) и (16г) поверхности зависимости максимального значения крутящего момента и экстремального значения угла поворота торца стержня от его геометрии и свойств материала. Анализ показывает, что при снижении модуля спада материала и внутреннего диаметра стержня происходит рост максимального крутящего момента и соответствующего ему угла закручивания. Из графиков видно, что учет закритической стадии деформирования позволяет выявить значительные прочностные и деформационные резервы рассматриваемой конструкции.

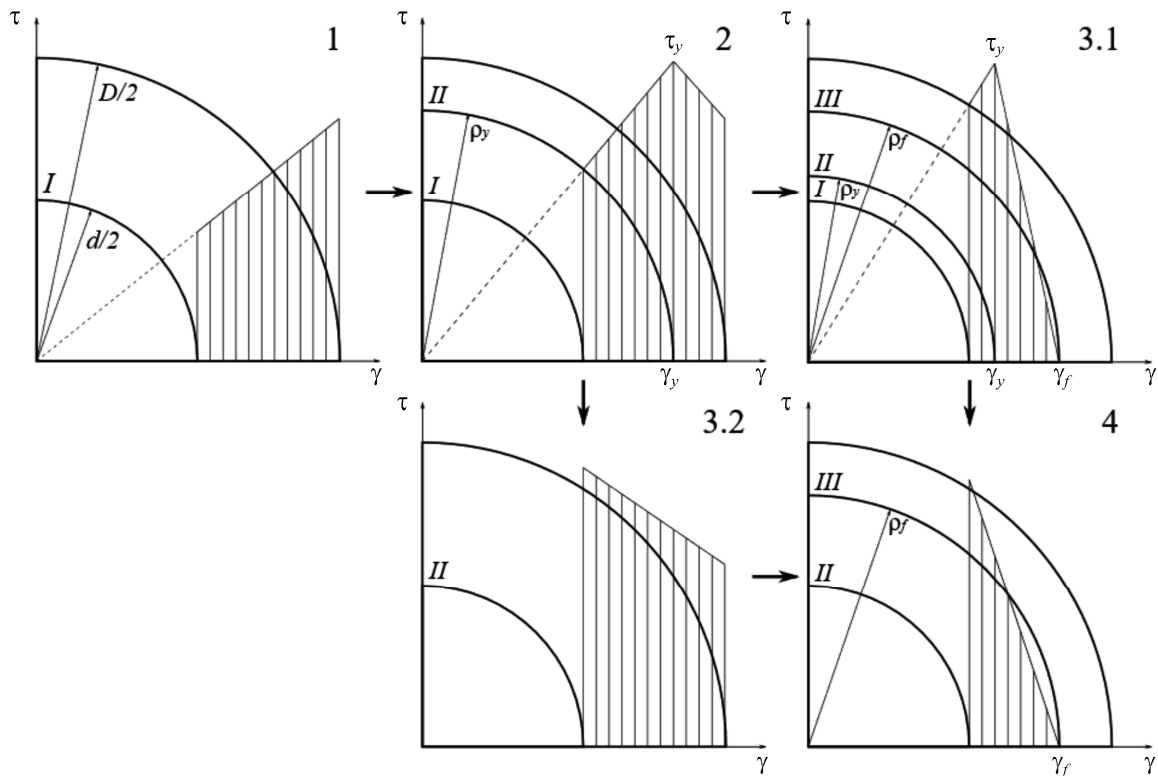


Рис. 3. Эпюры распределения напряжений

Fig. 3. Stress distribution diagrams

Анализ выражений (16г), (17б), (18б), (19б) позволяют сформировать условие реализации полной диаграммы нагружения, т.е. определить необходимую жесткость нагружающей системы:

$$\frac{R_\phi}{R_L} \geq \begin{cases} \bar{\lambda} \left( 1 - \left( \frac{\bar{\lambda}-1}{\bar{\lambda}} \right)^4 \right) \frac{1}{1-\alpha^4} - 1, & \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1} \leq \frac{1}{\alpha}; \\ \bar{\lambda} - 1, & \frac{1}{\alpha} < \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-1}. \end{cases} \quad (20)$$

Иллюстрация данной формулы приведена на рис. 6, а. На рис. 6, б, представлена диаграмма нагружения в виде зависимости крутящего момента от задаваемого угла поворота  $\phi_0$  для различных значений нагружающей системы, указаны точки срыва с диаграммы нагружения. Продемонстрирована необходимость учета свойств нагружающих систем в расчетах конструкций.

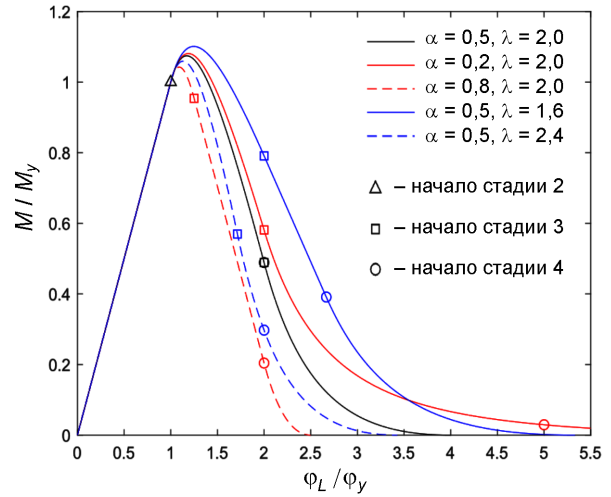


Рис. 4. Диаграммы нагружения

Fig. 4. Loading diagrams

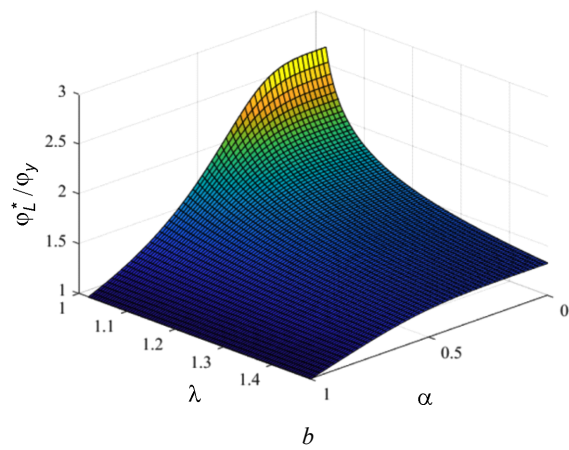
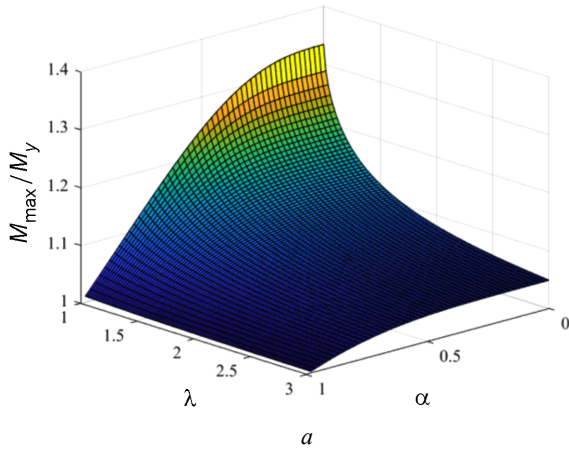


Рис. 5. Зависимость максимального значения крутящего момента (а) и соответствующего угла закручивания (б) от параметров материала и геометрии стержня

Fig. 5. Dependences of torsion moment maximum value (a) and corresponding value of rotation angle (b) on material parameters and geometry (in relative coordinates)

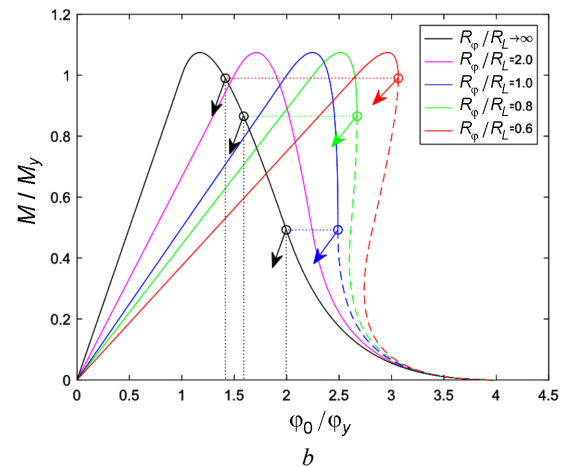
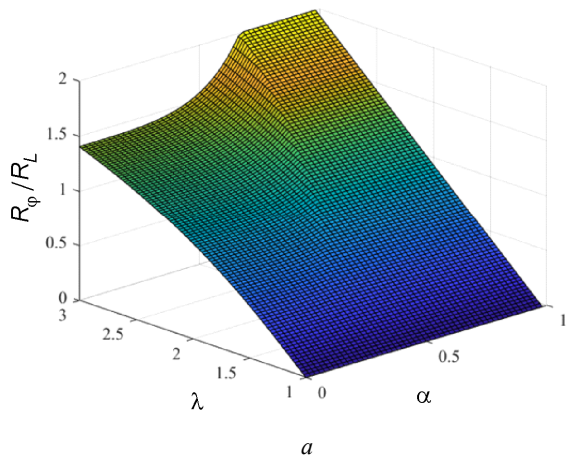


Рис. 6. Зависимость требуемого значения жесткости нагружающей системы для реализации полной диаграммы нагружения от параметров материала и геометрии стержня (а); вид диаграмм нагружения при различных значениях относительной жесткости нагружающей системы (б)

Fig. 6. Dependence of the loading system stiffness required value for the complete loading diagram implementation on the material parameters and rod geometry (a); loading diagrams for various values of the loading system relative stiffness (b)

### 3. Кручение стержня из материала с трехзвенной кусочно-линейной полной диаграммой деформирования

Закон связи между касательным напряжением и сдвиговой деформацией:

$$\tau_{\theta z} = \begin{cases} G\gamma_{\theta z}, & 0 \leq \gamma_{\theta z} < \gamma_y; \\ G\gamma_y + G'(\gamma_{\theta z} - \gamma_y), & \gamma_y \leq \gamma_{\theta z} < \gamma_B; \\ (G - G')\gamma_y + G'\gamma_B - D_G(\gamma_{\theta z} - \gamma_B), & \gamma_B \leq \gamma_{\theta z} < \gamma_f; \\ 0, & \gamma_f \leq \gamma_{\theta z}. \end{cases} \quad (21)$$

здесь  $\gamma_B$  – угол сдвига, соответствующий пределу прочности и началу стадии разупрочнения;  $G'$  – модуль упругости при сдвиге. Соотношения (21) обеспечивают проиллюстрированную на рис. 7 трехзвенную кусочно-линейную аппроксимацию полной диаграммы деформирования. Введем обозначения

$$\bar{\kappa} = \frac{G - G'}{G}, \quad \beta = \frac{\gamma_B}{\gamma_y}, \quad \chi = \frac{\gamma_f}{\gamma_y} = \frac{\beta\bar{\lambda} + (1 - \beta)\bar{\kappa}}{\bar{\lambda} - 1}. \quad (22)$$

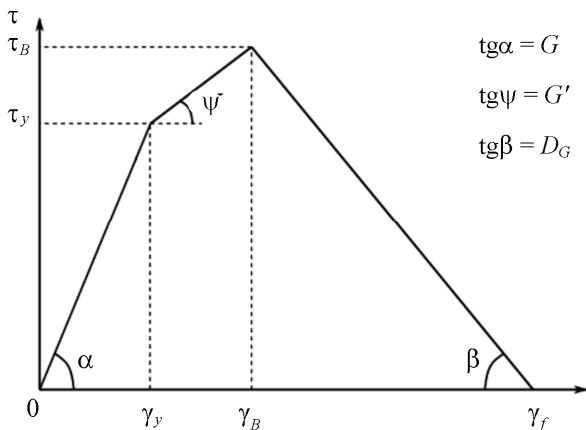


Рис. 7. Трехзвенная кусочно-линейная аппроксимация полной диаграммы деформирования

Fig. 7. Three-link piecewise linear approximation of the complete deformation diagram

Выражение (8) с учетом (7), (12), (13), (21), (22) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_y} = & \frac{\left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^4 - \alpha^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + (1 - \bar{\kappa}) \frac{\left(\frac{2\rho_B}{D}\right)^4 - \left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \\ & + (1 - \bar{\lambda}) \frac{\left(\frac{2\rho_f}{D}\right)^4 - \left(\frac{2\rho_B}{D}\right)^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \\ & + \frac{4 - \left(\frac{2\rho_f}{D}\right)^3 - \left(\frac{2\rho_y}{D}\right)^3}{3} \bar{\kappa} \frac{1}{1 - \alpha^4} + \frac{4}{3} \beta (\bar{\lambda} - \bar{\kappa}) \frac{\left(\frac{2\rho_f}{D}\right)^3 - \left(\frac{2\rho_B}{D}\right)^3}{1 - \alpha^4}; \end{aligned}$$

$$\frac{2\rho_y}{D} = \begin{cases} 1, & \varphi_L < \varphi_y; \\ \frac{\varphi_y}{\varphi_L}, & \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y; \\ \alpha, & \frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L; \end{cases} \quad \frac{2\rho_B}{D} = \begin{cases} 1, & \varphi_L < \beta\varphi_y; \\ \beta \frac{\varphi_y}{\varphi_L}, & \beta\varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \beta\varphi_y; \\ \alpha, & \frac{1}{\alpha} \beta\varphi_y \leq \varphi_L; \end{cases} \quad (23)$$

$$\frac{2\rho_f}{D} = \begin{cases} 1, & \varphi_L < \chi\varphi_y; \\ \chi \frac{\varphi_y}{\varphi_L}, & \chi\varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \chi\varphi_y; \\ \alpha, & \frac{1}{\alpha} \chi\varphi_y \leq \varphi_L, \end{cases}$$

где  $\rho_y, \rho_B$  – расстояния от центра сечения до границы зон упрочнения и разупрочнения соответственно.

1 – стадия упругого деформирования. На данной стадии  $\varphi_L < \varphi_y$ , связь крутящего момента с углом закручивания торца аналогична выражению (15).

2 – стадия начального упрочнения. Здесь  $\varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y$  и  $\varphi_L < \beta\varphi_y$ . Момент зависит от угла поворота торца следующим образом:

$$\frac{M}{M_y} = \left(1 - \bar{\kappa} \frac{1}{1 - \alpha^4}\right) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4 - \bar{\kappa}}{3} \frac{1}{1 - \alpha^4} - \frac{1 - \bar{\kappa}}{3} \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^3. \quad (24)$$

Данная функция является монотонно возрастающей.

В зависимости от соотношения между параметрами материала и геометрией стержня деформирование будет реализовываться по различным сценариям развития зон неупругого деформирования.

3.1 – стадия начального разупрочнения. На данной стадии угол закручивания стержня удовлетворяет неравенствам  $\beta\varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y$  и  $\varphi_L < \chi\varphi_y$ , зависимость момента от угла закручивания:

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_y} = & \left(1 - \bar{\lambda} \frac{1}{1 - \alpha^4}\right) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \chi (\bar{\lambda} - 1) \frac{1}{1 - \alpha^4} - \\ & - \frac{1}{3} (\beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa}) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_L}\right)^3. \end{aligned} \quad (25a)$$

При  $\frac{1}{\alpha} < \chi$  данная функция является монотонно возрастающей. Иначе данное выражение обладает точкой максимума

$$\frac{\varphi_L^*}{\varphi_y} = \sqrt[4]{\frac{\beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa}}{\bar{\lambda} - (1 - \alpha^4)}}, \quad (25б)$$

в которой принимает значение

$$\frac{M^*}{M_y} = \frac{4}{3} \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \chi(\bar{\lambda} - 1) - \left( \beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \bar{\lambda} - (1 - \alpha^4) \right)^{\frac{3}{4}} \right). \quad (25в)$$

В таком случае требуется условие устойчивости:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \bar{\lambda} - \left( \beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa} \right) \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4 \right) - 1. \quad (25г)$$

3.2 – стадия развитого упрочнения. Угол закручивания торца лежит в диапазоне  $\frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L < \beta \varphi_y$ , выражение (23) принимает вид

$$\frac{M}{M_y} = (1 - \bar{\kappa}) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4 - 1 - \alpha^3}{3} \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^4}. \quad (26)$$

Функция является монотонно возрастающей.

4.1 – стадия начального разрушения. На данной стадии  $\chi \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y$ , крутящий момент рассчитывается по формуле

$$\frac{M}{M_y} = -\frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{1}{3} \left( \chi^4 (\bar{\lambda} - 1) - \left( \beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa} \right) \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3. \quad (27а)$$

Данная функция на рассматриваемом промежутке является монотонно убывающей; условие устойчивости критического деформирования:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} - \left( \chi^4 (\bar{\lambda} - 1) - \left( \beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa} \right) \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4. \quad (27б)$$

4.2 – стадия развитого упрочнения и начального разрушения. Здесь  $\beta \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{1}{\alpha} \varphi_y$ ,  $\frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L < \chi \varphi_y$ , связь момента с углом закручивания имеет вид

$$\frac{M}{M_y} = \left( 1 - \bar{\kappa} - \frac{\bar{\lambda} - \bar{\kappa}}{1 - \alpha^4} \right) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \left( \chi^4 (\bar{\lambda} - 1) - \bar{\kappa} \alpha^3 \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} - \frac{1}{3} \beta^4 (\bar{\lambda} - \bar{\kappa}) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3. \quad (28а)$$

Данная функция имеет на исследуемом промежутке точку максимума

$$\frac{\varphi_L^*}{\varphi_y} = \beta^4 \sqrt[4]{\frac{\bar{\lambda} - \bar{\kappa}}{(\bar{\lambda} - 1) + (1 - \bar{\kappa}) \alpha^4}}. \quad (28б)$$

Максимальное значение крутящего момента на данной стадии:

$$\frac{M^*}{M_y} = \frac{4}{3} \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \chi(\bar{\lambda} - 1) - \bar{\kappa} \alpha^3 - \beta (\bar{\lambda} - \bar{\kappa})^{\frac{1}{4}} \left( (\bar{\lambda} - 1) + (1 - \bar{\kappa}) \alpha^4 \right)^{\frac{3}{4}} \right). \quad (28в)$$

Условие устойчивости:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq (\bar{\lambda} - \bar{\kappa}) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( 1 - \beta^4 \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4 \right) - (1 - \bar{\kappa}). \quad (28г)$$

5.1 – стадия развитого упрочнения и начального разрушения. Угол закручивания торца лежит в диапазонах  $\frac{1}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L < \frac{\beta}{\alpha} \varphi_y$  и  $\chi \varphi_y \leq \varphi_L$ , крутящий момент равен

$$\frac{M}{M_y} = -(1 - \bar{\kappa}) \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} - \frac{4 - \bar{\kappa}}{3} \frac{\alpha^3}{1 - \alpha^4} + \frac{1}{3} \left( \chi^4 (\bar{\lambda} - 1) - \beta^4 (\bar{\lambda} - \bar{\kappa}) \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3. \quad (29а)$$

Данная функция является монотонно убывающей; достаточная жесткость нагружающей системы определяется неравенством:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq (1 - \bar{\kappa}) \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} + \left( \chi^4 (\bar{\lambda} - 1) - \beta^4 (\bar{\lambda} - \bar{\kappa}) \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4. \quad (29б)$$

5.2 – стадия развитого разрушения. На данной стадии  $\frac{\beta}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L < \chi \varphi_y$ , выражение (23) принимает вид

$$\frac{M}{M_y} = -(\bar{\lambda} - 1) \frac{\varphi_L}{\varphi_y} + \frac{4}{3} \chi (\bar{\lambda} - 1) \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^4}. \quad (30а)$$

Функция является монотонно убывающей. Условие устойчивости:

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq (\bar{\lambda} - 1). \quad (30б)$$

6 – стадия развитой критической деформации и разрушения. Здесь  $\chi \varphi_y \leq \varphi_L \leq \frac{1}{\alpha} \chi \varphi_y$  и  $\frac{\beta}{\alpha} \varphi_y \leq \varphi_L$ , связь момента с углом закручивания имеет вид



$$\frac{M}{M_y} = (\bar{\lambda} - 1) \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} \frac{\varphi_L}{\varphi_y} - \frac{4}{3} \chi (\bar{\lambda} - 1) \frac{\alpha^3}{1 - \alpha^4} + \frac{1}{3} \chi^4 (\bar{\lambda} - 1) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^3. \quad (31a)$$

Функция (31a) монотонно убывает, аналогично (19a) имеет соответствующий правой границе рассматриваемого промежутка минимум, в котором крутящий момент становится равным нулю и происходит полная потеря несущей способности. Закритическое деформирование является устойчивым при выполнении условия

$$\frac{R_\varphi}{R_L} \geq -(\bar{\lambda} - 1) \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^4} + \chi^4 (\bar{\lambda} - 1) \frac{1}{1 - \alpha^4} \left( \frac{\varphi_y}{\varphi_L} \right)^4. \quad (31б)$$

*Анализ решения.* Эпюры распределения напряжений по сечению для различных стадий деформирования приведены на рис. 8.

Из выражений (25в) и (28в) следует, что максимальное значение крутящего момента определяется выражением

$$\frac{M^*}{M_y} = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{1}{1 - \alpha^4} (\chi (\bar{\lambda} - 1) - (\beta^4 \bar{\lambda} + (1 - \beta^4) \bar{\kappa})^{\frac{1}{4}} (\bar{\lambda} - (1 - \alpha^4))^{\frac{3}{4}}), & \chi \leq \frac{1}{\alpha}; \\ \frac{4}{3} \frac{1}{1 - \alpha^4} (\chi (\bar{\lambda} - 1) - \bar{\kappa} \alpha^3 - \beta (\bar{\lambda} - \bar{\kappa})^{\frac{1}{4}} ((\bar{\lambda} - 1) + (1 - \bar{\kappa}) \alpha^4)^{\frac{3}{4}}), & \frac{1}{\alpha} < \chi. \end{cases} \quad (32)$$

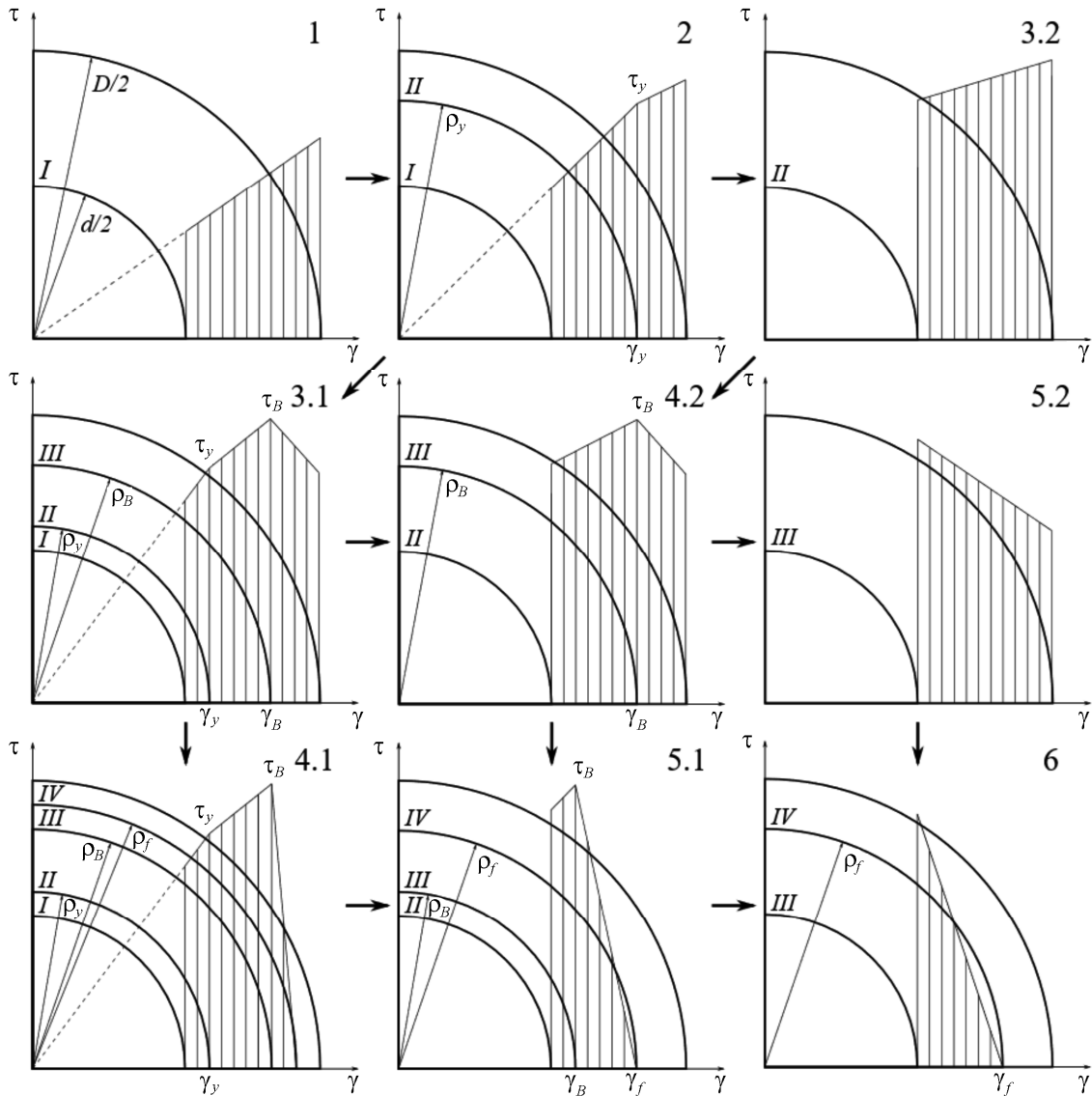


Рис. 8. Эпюры распределения напряжений

Fig. 8. Stress distribution diagrams

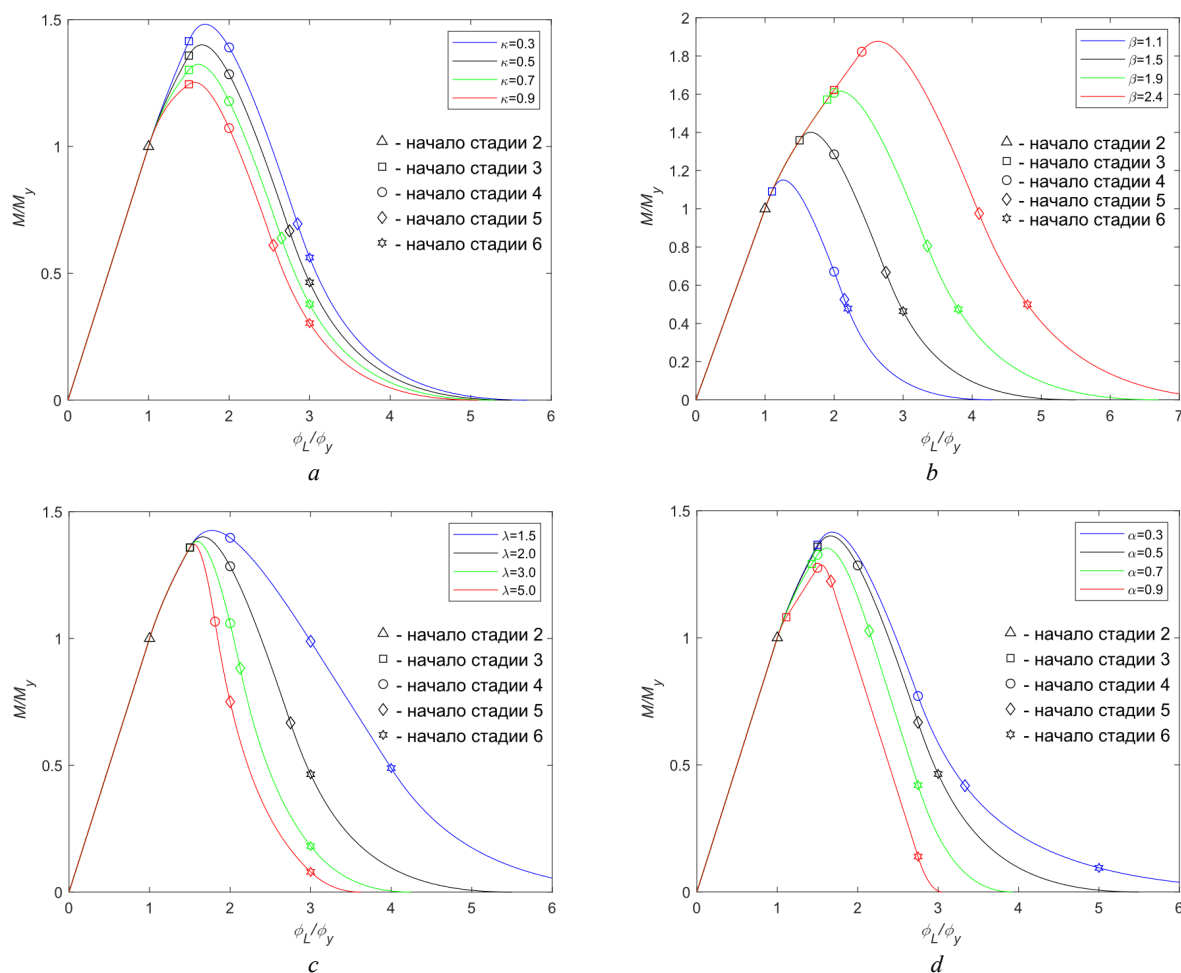


Рис. 9. Диаграммы нагружения при различных значениях  $\bar{\kappa}$  (a),  $\beta$  (b),  $\bar{\lambda}$  (c) и  $\alpha$  (d)

Fig. 9. Loading diagrams for various values of  $\bar{\kappa}$  (a),  $\beta$  (b),  $\bar{\lambda}$  (c) and  $\alpha$  (d)

На рис. 9 приведены диаграммы нагружения в относительных координатах для различных наборов значений параметров  $\bar{\kappa}$ ,  $\beta$ ,  $\bar{\lambda}$  и  $\alpha$ . Анализ показывает, что увеличение максимального значения крутящего момента происходит при росте модуля упрочнения, росте протяженности стадии упрочнения, снижении модуля спада и снижении внутреннего диаметра стержня. Рост максимального значения момента сопровождается смещением точки экстремума вправо, что говорит о сопутствующем увеличении деформационных резервов конструкции.

Анализ выражений (25г), (27б), (28г), (29б), (30б), (31б) позволяет сформировать условие реализации полной диаграммы нагружения при кручении полого цилиндрического тела:

$$\frac{R_{\phi}}{R_L} \geq \begin{cases} \left( \bar{\lambda} \left( 1 - \frac{\beta^4}{\chi^4} \right) + \bar{\kappa} \frac{\beta^4 - 1}{\chi^4} \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} - 1, & \chi < \frac{1}{\alpha}; \\ \left( \bar{\lambda} \left( 1 - \frac{\beta^4}{\chi^4} \right) + \bar{\kappa} \left( \frac{\beta^4}{\chi^4} - \alpha^4 \right) \right) \frac{1}{1 - \alpha^4} - 1, & \frac{1}{\alpha} \leq \chi < \frac{\beta}{\alpha}; \\ \bar{\lambda} - 1, & \frac{\beta}{\alpha} \leq \chi. \end{cases} \quad (33)$$

### Заключение

В работе получено новое аналитическое решение краевой задачи механики закритического деформирования о кручении толстостенного цилиндрического тела с учетом жесткости нагружающей системы. Были рассмотрены двухзвенная и трехзвенная кусочно-линейная аппроксимация полной диаграммы деформирования материала. Получены и проанализированы соотношения, описывающие зависимость крутящего момента от угла поворота торца стержня на различных стадиях деформирования. Определены точки максимума и максимальные значения функции момента; выявлена их связь со свойствами материала и геометрией полого стержня. Выявлены значительные прочностные и деформационные резервы рассматриваемой конструкции. Рассмотрен вопрос устойчивости закритического деформирования при кручении. Определена необходимая для реализации полной диаграммы нагружения жесткость нагружающей системы. На основе вышеизложенного можно сделать вывод о рациональности и необходимости учета стадии разупрочнения материала и жесткости нагружающей системы в расчетах конструкций.

## Библиографический список

1. Nguyen H.T., Caner F.C., Bažant Z.P. Conversion of explicit microplane model with boundaries to a constitutive subroutine for implicit finite element programs // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2021. – Vol. 122, is. 6. – P. 1563–1577. DOI: 10.1002/nme.6590
2. Nguyen H.T., Dönmez A.A., Bažant Z.P. Structural strength scaling law for fracture of plastic-hardening metals and testing of fracture properties // *Extreme Mechanics Letters*. – 2021. – Vol. 43, no. 101141. DOI: 10.1016/j.eml.2020.101141
3. Yang X., Wu T., Liu X. Stress–Strain Model for Lightweight Aggregate Concrete Reinforced with Carbon–Polypropylene Hybrid Fibers // *Polymers*. – 2022. – Vol. 14, is. 9, no. 1675. DOI: 10.3390/polym14091675
4. Zhang R., Guo L., Li W. Combining Thermal Loading System with Acoustic Emission Technology to Acquire the Complete Stress-Deformation Response of Plain Concrete in Direct Tension // *Materials*. – 2021. – Vol. 14, is. 3, no. 602. DOI: 10.3390/ma14030602
5. Complete Stress–Strain Curves of Self-Compacting Steel Fiber Reinforced Expanded-Shale Lightweight Concrete under Uniaxial Compression / M. Zhao, B. Zhang, P. Shang, Y. Fu, X. Zhang, S. Zhao // *Materials*. – 2019. – Vol. 12, is. 18, no. 2979. DOI: 10.3390/ma12182979
6. Hu Z., Wang K. Evolution of Dynamic Recrystallization in 5CrNiMoV Steel during Hot Forming // *Advances in Materials Science and Engineering*. – 2020. – Vol. 2020, no. 4732683. DOI: 10.1155/2020/4732683
7. Complete “stress-strain” diagrams of rolled steel beams / S. Fomin, Y. Izbash, Y. Bondarenko, S. Butenko, I. Plakhotnikova // *MATEC Web of Conferences*. – 2018. – Vol. 230, no. 02008. DOI: 10.1051/mateconf/201823002008
8. Rock Brittleness Evaluation Method Based on the Complete Stress-Strain Curve / C.Y. Liu, Y. Wang, X.P. Zhang, L.Z. Du // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2019. – Vol. 13, no. 49. – P. 557–567. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.52
9. Effect of complex combined loading mode on the fracture toughness of titanium alloys / M.G. Chausov, P.O. Maruschak, V. Hutsaylyuk, L. Śniezek, A.P. Pylypenko // *Vacuum*. – 2018. – Vol. 147. – P. 51–57. DOI: 10.1016/j.vacuum.2017.10.010
10. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / под ред. Ю.В. Соколкина. – М.: Наука: Физматлит, 1997. – 288 с.
11. Вильдеман В.Э., Чаусов Н.Г. Условия деформационного разупрочнения материала при растяжении образца специальной конфигурации // *Заводская лаборатория. Диагностикика материалов*. – 2007. – Т. 73, № 10. – С. 55–59.
12. Tretyakov M.P., Tretyakova T.V., Wildemann V.E. Influence of the loading system stiffness on the jerky flow in Al-Mg alloy at inelastic and postcritical deformation stages // *Procedia Structural Integrity*. – 2021. – Vol. 33. – P. 1089–1094. DOI: 10.1016/j.prostr.2021.10.121
13. Setup for testing materials with plotting complete stress-strain diagrams / N.G. Chausov, D.G. Vojtyuk, A.P. Pilipenko, A.M. Kuz'menko // *Strength of Materials*. – 2004. – Vol. 36, is. 5. – P. 532–537. DOI: 10.1023/B:STOM.0000048404.91503.89
14. Anisotropy of Mechanical Properties and Residual Stress in Additively Manufactured 316L Specimens / A. Fedorenko, B. Fedulov, Yu. Kuzminova, S. Evlashin, O. Staroverov, M. Tretyakov, E. Lomakin, I. Akhatov // *Materials*. – 2021. – Vol. 14, is. 23. – No. 7176. DOI: 10.3390/ma14237176
15. Закрытое деформирование и разрушение тел с концентраторами в условиях плоского напряженного состояния / В.Э. Вильдеман, Е.В. Ломакин, Т.В. Третьякова, М.П. Третьяков // *Изв. РАН. МТТ*. – 2017. – № 5. – С. 22–29.
16. Радченко В.П., Горбунов С.В. Метод решения краевой упругопластической задачи о растяжении полосы с концентраторами напряжений с учетом локальных областей пластического разупрочнения материала // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. – 2014. – № 4 (37). – С. 98–110. DOI: 10.14498/vsgtu1366
17. Вильдеман В.Э., Третьяков М.П., Мугатаров А.И. Моделирование процесса деформирования пластины с концентратором напряжений при учете закрытой стадии деформирования материала // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2020. – № 3. – С. 32–40. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.04
18. Ибрагимов В.А., Ключников В.Д. Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой // *Механика твердого тела*. – 1971. – № 4. – С. 116–121.
19. Никитин Л.В., Рыжак Е.И. Закономерности разрушения горной породы с внутренним трением и дилатансией // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. – 1977. – № 5. – С. 22.
20. Волков С.Д., Дубровина Г.И., Соковнин Ю.П. О краевой задаче механики разрушения // *Проблемы прочности*. – 1978. – № 1. – С. 3–7.
21. Стружанов В.В. О разрушении диска с центральной ослабленной зоной // *Изв. АН СССР. МТТ*. – 1986. – № 1. – С. 135–141.
22. Вильдеман В.Э., Мугатаров А.И. Задача о кручении цилиндрического тела с учетом разупрочнения // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2019. – № 4. – С. 29–36. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.03
23. Вильдеман В.Э. Задачи механики закрытого деформирования стержневых систем // *Вестн. Перм. гос. техн. ун-та. Динамика и прочность машин*. – 2005. – № 5. – С. 15–29
24. Ломакин Е.В., Тишин П.В. Разработка методов решения задач кручения физически нелинейных тел // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2021. – Т. 14, № 4. – С. 413–424. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.34.
25. Ломакин Е.В. Кручение цилиндрических тел с изменяющимися деформационными свойствами // *Известия РАН. МТТ*. – 2008. – № 3. – С. 217–226.
26. Стружанов В.В., Просвирыков Е.Ю. Растяжение с кручением. Сообщение 1. Свойства материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки*. – 2008. – № 1 (16). – С. 36–44. DOI: 10.14498/vsgtu570
27. Стружанов В.В., Просвирыков Е.Ю. Растяжение с кручением. Сообщение 2. Устойчивость процесса деформирования образца в механической системе. Жесткое и мягкое нагружения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки*. – 2008. – № 2 (17). – С. 77–86. DOI: 10.14498/vsgtu403
28. Стружанов В.В., Просвирыков Е.Ю. Растяжение с кручением. Сообщение 3. Итерационный метод расчета параметров равновесия и устойчивости процесса деформирования механической системы при ее смешанном нагружении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки*. – 2009. – № 1 (18). – С. 66–74. DOI: 10.14498/vsgtu662
29. Стружанов В.В., Вичужанин Д.И. Метод пересчета экспериментальной диаграммы кручения цилиндрического образца на диаграмму деформирования материала // *Вестник*

Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 2. – С. 107–113. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.10

30. Стружанов В.В., Бахарева Е.А. К расчету параметров равновесия и устойчивости процесса кручения круглых стержней из разупрочняющегося материала // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2012. – № 2 (27). – С. 53–64. DOI: 10.14498/vsgtu1083

31. Радченко В.П., Цветков В.В. Кинетика напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненном цилиндрическом образце при сложном напряженном состоянии в условиях ползучести // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – № 1 (34). – С. 93–108. DOI: 10.14498/vsgtu1313

32. Радченко В.П., Цветков В.В., Саушкин М.Н. Релаксация остаточных напряжений в упрочненном цилиндре в условиях ползучести при нагружении осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – № 4. – С. 96–107. DOI: 10.15372/PMTF20200412

33. Арутюнян Н.Х., Радаев Ю.Н. Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // ПММ. – 1989. – Т. 53, № 6. – С. 1014–1022.

34. Арутюнян Н.Х., Радаев Ю.Н. Упругопластическое кручение призматических стержней // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 297, № 3. – С. 563–566.

35. Численно-экспериментальный анализ процессов растяжения-кручения цилиндрических образцов из стали 09Г2С при больших деформациях до разрушения / В.Г. Баженов, Е.В. Нагорных, Д.Л. Осетров, А.А. Рябов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер.: Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 3. – С. 495–507.

## References

1. Nguyen H.T., Caner F.C., Bažant Z.P. Conversion of explicit microplane model with boundaries to a constitutive subroutine for implicit finite element programs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2021, vol. 122, iss. 6, pp. 1563-1577. doi: 10.1002/nme.6590

2. Nguyen H.T., Dönmez A.A., Bažant Z.P. Structural strength scaling law for fracture of plastic-hardening metals and testing of fracture properties. *Extreme Mechanics Letters*, 2021, vol. 43, no. 101141. doi: 10.1016/j.eml.2020.101141

3. Yang X., Wu T., Liu X. Stress–Strain Model for Lightweight Aggregate Concrete Reinforced with Carbon–Polypropylene Hybrid Fibers. *Polymers*, 2022, vol. 14, iss. 9, no. 1675. doi: 10.3390/polym14091675

4. Zhang R., Guo L., Li W. Combining Thermal Loading System with Acoustic Emission Technology to Acquire the Complete Stress-Deformation Response of Plain Concrete in Direct Tension. *Materials*, 2021, vol. 14, iss. 3, no. 602. doi: 10.3390/ma14030602

5. Zhao M., Zhang B., Shang P., Fu Y., Zhang X., Zhao S. Complete Stress–Strain Curves of Self-Compacting Steel Fiber Reinforced Expanded-Shale Lightweight Concrete under Uniaxial Compression. *Materials*, 2019, vol. 12, iss. 18, no. 2979. doi: 10.3390/ma12182979

6. Hu Z., Wang K. Evolution of Dynamic Recrystallization in 5CrNiMoV Steel during Hot Forming. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 2020, no. 4732683. doi: 10.1155/2020/4732683

7. Fomin S., Izbash Y., Bondarenko Y., Butenko S., Plakhotnikova I. Complete “stress-strain” diagrams of rolled steel beams. *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 230, no. 02008. doi: 10.1051/mateconf/201823002008

36. Modeling the Behavior of Elastoplastic Rods during Tension–Torsion Deformation and Plotting Their Strain Diagram before Rupture While Taking into Account the Type of Stress–Strain State / V.G. Bazhenov, D.A. Kazakov, E.V. Nagornykh, D.L. Osetrov, A.A. Ryabov // *Doklady Physics*. – 2021. – Vol. 66, no. 11. – P. 311–315. DOI: 10.1134/S102833582111001X

37. Миронов Б.Г., Миронов Ю.Б. Кручение неоднородных цилиндрических и призматических стержней из идеально пластического материала при линеаризованном условии пластичности // Изв. РАН. МТТ. – 2020. – № 6. – С. 65–72. DOI: 10.31857/S0572329920060100

38. Mironov B.G., Mironov Yu.B. Torsion of anisotropic and composite cylindrical rod // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. – 2019. – Vol. 1203, no. 012009. DOI: 10.1088/1742-6596/1203/1/012009

39. Миронов Б.Г., Миронов Ю.Б. К вопросу о кручении стержней из упрочняющегося материала, находящихся под действием переменного внешнего давления, при линеаризованном условии пластичности // Изв. РАН. МТТ. – 2022. – № 2. – С. 82–89. DOI: 10.31857/S0572329922020143

40. Torsion of anisotropic and inhomogeneous prismatic rods with a rectangular cross section / E.A. Derevyannykh, A.N. Maksimov, T.V. Mitrofanova, T.N. Smirnova, T.N. Kopysheva // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2020. – Vol. 734, no. 012053. DOI: 10.1088/1757-899X/734/1/012053

41. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: справ. пособие. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.

42. Ильющин А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. – М.: Изд-во ОГИЗ, 1948. – 376 с.

8. Liu C.Y., Wang Y., Zhang X.P., Du L.Z. Rock Brittleness Evaluation Method Based on the Complete Stress-Strain Curve. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2019, vol. 13, no. 49, pp. 557-567. doi: 10.3221/IGF-ESIS.49.52

9. Chausov M.G., Maruschak P.O., Hutsaylyuk V., Śniezek L., Pylypenko A.P. Effect of complex combined loading mode on the fracture toughness of titanium alloys. *Vacuum*, 2018, vol. 147, pp. 51-57. doi: 10.1016/j.vacuum.2017.10.010

10. Wildemann V.E., Sokolkin Y.V., Tashkinov A.A. Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozicionnykh materialov [Mechanics of inelastic deformation and fracture of composite materials]. *Moscow, Nauka. Fizmatlit*, 1997, 288 p.

11. Wildemann V.E., Chausov M.G. Usloviya deformacionnogo razuprochneniya materiala pri rastyazhenii obrazca special'noj konfiguracii [Conditions for material strain softening under special configuration sample tension]. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2007, vol. 73, iss. 10, pp. 55-59.

12. Tretyakov M.P., Tretyakova T.V., Wildemann V.E. Influence of the loading system stiffness on the jerky flow in Al-Mg alloy at inelastic and postcritical deformation stages. *Procedia Structural Integrity*, 2021, vol. 33, pp. 1089-1094. doi: 10.1016/j.prostr.2021.10.121

13. Chausov N.G., Vojtyuk D.G., Pilipenko A.P., Kuz'menko A.M. Setup for testing materials with plotting complete stress-strain diagrams. *Strength of Materials*, 2004, vol. 36, iss. 5, pp. 532-537. doi: 10.1023/B: STOM.0000048404.91503.89

14. Fedorenko A., Fedulov B., Kuzminova Yu., Evlashin S., Staroverov O., Tretyakov M., Lomakin E., Akhatov I. Anisotropy of Mechanical Properties and Residual Stress in Additively Manufactured 316L Specimens. *Materials*, 2021, vol. 14, iss. 23, no. 7176. doi: 10.3390/ma14237176

15. Vildeman V.E., Lomakin E.V., Tret'yakova T.V., Tret'yakov M.P. Supercritical Deformation and Fracture of Bodies with Concentrators under Plane Stress State Conditions. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, iss. 5, pp. 488-494. doi: 10.3103/S002565441705003X
16. Radchenko V.P., Gorbunov S.V. The method of solution of the elastic-plastic boundary value problem of tension of strip with stress raisers with allowance for local domains of softening plasticity of material. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2014, iss. 4 (37), pp. 98-110. doi: 10.14498/vsgtu1366
17. Wildemann V.E., Tret'yakov M.P., Mugarov A.I. Modeling the deformation process of a plate with a stress concentrator taking into account the postcritical stage of material deformation. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 3, pp. 32-40. doi: 10.15593/perm.mech/2020.3.04
18. Ibragimov V.A., Klyushnikov V.D. Nekotorye zadachi dlya sred s padayushchej diagrammoj [Some of the tasks for environments with falling graph]. *Mechanics of Solids*, 1971, no. 4. pp. 116-121.
19. Nikitin L.V., Ryzhak E.I. Zakonomernosti razrusheniya gornoj porodoy s vnutrennim treniem i dilatatsiej [Regularities of rock destruction with internal friction and dilatation]. *Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli*, 1977, no. 5, pp. 22.
20. Volkov S.D., Dubrovina G.I., Sokovnin Yu.P. The edge problem of fracture mechanics. *Strength of Materials*, 1978, iss. 1, pp. 1-5.
21. Struzhanov V.V. O razrushenii diska s central'noj oslablennoj zonoj [About destruction of a disk with the central weakened zone]. *Mechanics of Solids*, 1986, vol. 21, iss. 1, pp. 140-146.
22. Wildemann V.E., Mugarov A.I. The torsion problem of a cylindrical solid taking into account the material weakening. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 29-36. doi: 10.15593/perm.mech/2019.4.03
23. Wildemann V.E. Zadachi mekhaniki zakriticheskogo deformirovaniya sterzhnevnyh sistem [Problems of mechanics of supercritical deformation of rod systems]. *Vestn. PGTU. Dinamika i prochnost' mashin*, 2005, no. 5, pp. 15-29.
24. Lomakin E.V., Tishin P.V. Development of methods for solving torsion problems of physically nonlinear solids. *Computational Continuum Mechanics*, 2021, vol. 14, no. 4, pp. 413-424. doi: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.34
25. Lomakin E.V. Torsion of cylindrical bodies with varying strain properties. *Mechanics of Solids*, 2008, vol. 43, iss. 3, pp. 502-511. doi: 10.3103/S0025654408030217
26. Struzhanov V.V., Prosviryakov E.Yu. Tension with torsion. Part 1. Material properties. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2008, iss. 1 (16), pp. 36-44. doi: 10.14498/vsgtu570
27. Struzhanov V.V., Prosviryakov E.Yu. Tension with torsion. Part 2. Deformation process stability of a sample in a mechanical system. Rigid and soft loadings. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2008, iss. 2 (17), pp. 77-86. doi: 10.14498/vsgtu403
28. Struzhanov V.V., Prosviryakov E.Yu. Tension with Torsion. Message 3. Iterative Method of Equilibrium parameters Calculation and Stability of Deformation Process in Mechanical System at Mixed Loading Conditions. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2009, iss. 1 (18), pp. 66-74. doi: 10.14498/vsgtu662
29. Struzhanov V.V., Vichuzhanin D.I. A method for converting an experimental torsion diagram for a cylindrical specimen to the stress-strain diagram of the material. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 107-113. doi: 10.15593/perm.mech/2018.2.10
30. Struzhanov V.V., Bakhareva E.A. To the calculation of equilibrium parameters and stability of torsion process of circular bars made of weakening material. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2012, iss. 2 (27), pp. 53-64. doi: 10.14498/vsgtu1083
31. Radchenko V.P., Tsvetkov V.V. Kinetics of the stress-strain state of surface hardened cylindrical specimen under complex stress state of creep. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2014, iss. 1 (34), pp. 93-108. doi: 10.14498/vsgtu1313
32. Radchenko V.P., Tsvetkov V.V., Saushkin M.N. Residual Stress Relaxation in a Hardened Cylinder under Creep, Loaded by an Axial Force, Torque, and Internal Pressure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020, vol. 61, iss. 4, pp. 583-592. doi: 10.1134/S0021894420040124
33. Arutyunyan N.Kh., Radayev Yu.N. Elastoplastic torsion of a cylindrical rod for finite deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, vol. 53, iss. 6, pp. 804-811. doi: 10.1016/0021-8928(89)90090-7
34. Arutyunyan N.Kh., Radayev Yu.N. Elastoplastic torsion of prismatic rods. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1987, vol. 297, no. 3, pp. 563-566.
35. Bazhenov V.G., Nagornykh E.V., Osetrov D.L., Ryabov A.A. Numerical and experimental analysis of tension-torsion processes in cylindrical samples made of 09G2S steel under large deformations before destruction. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, book 3, pp. 495-507.
36. Bazhenov V.G., Kazakov D.A., Nagornykh E.V., Osetrov D.L., Ryabov A.A. Modeling the Behavior of Elastoplastic Rods during Tension-Torsion Deformation and Plotting Their Strain Diagram before Rupture While Taking into Account the Type of Stress-Strain State. *Doklady Physics*, 2021, vol. 66, iss. 11, pp. 311-315. doi: 10.1134/S102833582111001X
37. Mironov B.G., Mironov Yu.B. Torsion of Non-Uniform Cylindrical and Prismatic Rods Made of Ideally Plastic Material under Linearized Yield Criterion. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, iss. 6, pp. 813-819. doi: 10.3103/S0025654420060102
38. Mironov B.G., Mironov Yu.B. Torsion of anisotropic and composite cylindrical rod. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 2019, vol. 1203, no. 012009. doi: 10.1088/1742-6596/1203/1/012009
39. Mironov B.G., Mironov Yu.B. Problem on torsion of rods made of a hardening material under the action of variable external pressure using a linearized plasticity condition. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 2, pp. 271-277. doi: 10.3103/S0025654422020182
40. Derevyannykh E.A., Maksimov A.N., Mitrofanova T.V., Smirnova T.N., Kopysheva T.N. Torsion of anisotropic and inhomogeneous prismatic rods with a rectangular cross section. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 734, no. 012053. doi: 10.1088/1757-899X/734/1/012053
41. Pisarenko G.S., Mozharovskij N.S. Uravneniya i kraevye zadachi teorii plastichnosti i polzuchesti. Spravochnoe posobie [Equations and boundary value problems of plasticity and creep theory. Reference book]. *Kiev, Nauk. Dumka*, 1981, 496 p.
42. Il'yushin A.A. Plastichnost'. Ch.I. Uprugoplasticheskie deformatsii [Plasticity. Part 1. Elastic-plastic deformation]. *Moscow, Izd-vo OGIz*, 1948, 376 p.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-19-00765) в Пермском национальном исследовательском политехническом университете.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Financing.** The work was carried out with support of the Russian Science Foundation (Project № 22-19-00765) in the Perm National Research Polytechnic University.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.