



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2022.4.16

УДК 539.3

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СВЯЗАННОСТЬ КОМПОЗИТА «ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК/ФЕРРИТ» С НАЧАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ

А.А. Паньков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 22 марта 2022 г.
Одобрена: 05 декабря 2022 г.
Принята к публикации:
12 декабря 2022 г.

Ключевые слова:

композит, эффективные свойства, начальное напряженное состояние, электромагнитоупругость, пьезоэффект, магнитоэлектричество, численное моделирование.

АННОТАЦИЯ

Разработана математическая модель электромагнитотермоупругости для начально-напряженного трансверсально-изотропного композита с пьезоэлектрическими магнитоэлектрическими фазами. Для решения связанной краевой задачи электромагнитотермоупругости использован метод функций Грина в рамках обобщенного сингулярного приближения статистической механики композитов с учетом начального напряженного состояния представительной области композита на микро- и макроуровнях. Получено решение задачи «эффективного модуля» для тензоров эффективных упругих, пьезомеханических, магнитоэлектрических свойств, диэлектрических и магнитных проницаемостей, температурных, пьезоэлектрических, пьезомагнитных коэффициентов и (появившимся лишь на макроуровне) электромагнитной и магнитоэлектрической связанности квазипериодического композита с начальным электромагнитоупругим напряженным состоянием. Решение для искомого тензора эффективных свойств квазипериодического композита представлено в виде аналитических формул – простых линейных разложений по решениям для тензоров эффективных свойств периодической структуры и статистической смеси, коэффициенты разложений – это коэффициент «периодичности» (корреляции квазипериодической и периодической структур) p и «разупорядоченности» $1-p$ соответственно. Представлены результаты расчета всех независимых компонент тензоров эффективных коэффициентов электромагнитной и магнитоэлектрической связанности различных структур (периодической, квазипериодической и статистической смеси) однонаправленно-волоконистого композита «PZT-4/феррит» при осесимметричном тензоре начальной макродеформации композита. Для квазипериодического композита (с начальным макродеформированием) выявлен существенно немонотонный характер зависимостей относительных (к значениям в отсутствие начального напряженного состояния) значений эффективных коэффициентов электромагнитной и магнитоэлектрической связанности от объемной доли ферритовых волокон. Выявлено, что увеличение абсолютных значений коэффициентов электромагнитной и магнитоэлектрической связанности композита имеем при отрицательных значениях его начальных осесимметричных осевых макродеформаций. Наиболее существенное влияние оказывает начальная всесторонняя макродеформация в трансверсальной плоскости на коэффициенты трансверсальной магнитоэлектрической связанности композита.

© ПНИПУ

© Паньков Андрей Анатольевич – д.ф.-м.н., проф., e-mail: a_a_pankov@mail.ru,
ID: [//orcid.org/0000-0001-8477-5206](https://orcid.org/0000-0001-8477-5206).

Andrey A. Pan'kov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: a_a_pankov@mail.ru,
ID: [//orcid.org/0000-0001-8477-5206](https://orcid.org/0000-0001-8477-5206).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ELECTROMAGNETIC COUPLING OF PIEZOELECTRIC/FERRITE COMPOSITE WITH INITIAL STRESS STATE

A.A. Pan'kov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 22 March 2022
Approved: 05 December 2022
Accepted for publication:
12 December 2022

Keywords:

composite, effective properties, initial stress state, electromagnetic elasticity, piezoeffect, magnetostriction, numerical modeling.

ABSTRACT

A mathematical model of electromagnetic thermoelasticity for an initial-stressed transversal-isotropic composite with piezoelectric magnetostrictive phases has been developed. To solve the related boundary value problem of electromagnetic thermoelasticity, the Green function method was used as part of a generalized singular approximation of the statistical mechanics of composites, taking into account the initial stress state of the representative domain of the composite at micro- and macro-levels. The solution of the problem of "effective module" for tensors of effective elastic, piezomechanical, magnetostrictive properties, dielectric permittivity and magnetic permittivity, temperature, pyroelectric, pyromagnetic coefficients and (which appeared only at the macro level) electromagnetic and magnetoelectric couplings of a quasi-periodic composite with an initial electromagnetic elastic state was obtained. The solutions for the desired tensors of effective properties of the quasi-periodic composite are presented in the form of analytical formulas of simple linear decompositions by solutions for tensors of effective properties of the periodic structure and statistical mixture, decomposition coefficients are the coefficient of "periodicity" (correlation of quasi-periodic and periodic structures) p and "disordering" $1-p$, respectively. Results of calculation of all independent components of tensors of effective coefficients of electromagnetic and magnetoelectric couplings of different structures (periodic, quasi-periodic and statistical mixture) are presented in unidirectional direction of fibrous composite "PZT-4/ferrite" with axisymmetric tensor of initial macrostrain of composite. For a quasi-periodic composite (with initial macrostrain), the significantly non-monotonic nature of the dependencies of relative (to values in the absence of an initial stress state) values of effective coefficients of electromagnetic and magnetoelectric couplings from the volume fraction of ferrite fibers was revealed. It was revealed that we have an increase in the absolute values of the electromagnetic and magnetoelectric coupling coefficients of composite at negative values of its initial axisymmetric axial macrostrains. The most significant effect is the initial comprehensive macrostrain in the transversal plane on the coefficients of the transversal magnetoelectric coupling of the composite.

© PNRPU

Введение

Изучение закономерностей и эффектов влияния начального напряженного состояния элементов структуры материала на особенности его последующего нагружения – одна из задач механики композитов [1–9]. Решение этой задачи актуально для различных практических приложений, в частности, ультразвукового неразрушающего контроля напряженного состояния нагруженных конструкций [10], методов геомеханики и сейсмических исследований [11]. Математическое моделирование и численное решение этой задачи возможно с использованием «линеаризованного подхода» на основе линеаризованных уравнений теории упругости для тела с начальным напряженным состоянием [3; 6; 7; 12; 13]. С использованием этого подхода получены численные решения и осуществлен дисперсионный анализ распространения упругих волн в композитах (конструкциях) с учетом наличия начального напряженного состояния, в частности, осуществлен анализ скорости распространения поверхностных волн в однородном слое на предварительно напряженном неоднородном полупространстве [14], анализ влияния величины начального бокового давления на поверхности полого составного цилиндра на скорость распространения осесимметричной волны [15], анализ влияния величины начального напряженно-

го состояния ортотропной композитной пластины с двумя близко расположенными параллельными цилиндрическими (туннельными) полостями с прямоугольным поперечным сечением на свободные и вынужденные колебания [16]. Для упругих композитов с идеально периодическими начально-напряженными структурами известны асимптотические решения, в частности, когда начальное напряженное состояние слоистой или однонаправленно-волокнистой структуры обусловлено тепловым нагревом [17].

Магнитоэлектрические материалы являются одними из наиболее перспективных функциональных материалов современной электроники [18–25]. В них сочетаются уникальные упругие и электромагнитные (в частности, диэлектрические, пьезоэлектрические, магнитоstrictionонные) свойства, которыми можно эффективно управлять с помощью внешних механических и электромагнитных воздействий. Магнитоэлектрические константы гомогенных магнитоэлектриков очень малы, что обуславливает создание гетерогенных композиционных магнитоэлектриков, магнитоэлектрические константы которых могут на несколько порядков превосходить соответствующие константы гомогенных материалов [24]. Возникновение эффекта магнитоэлектрической связанности композита обусловлено деформационным взаимодействием его пьезоэлектрической и магнитоstrictionон-

ной подсистем (фаз) даже в отсутствие такого эффекта для каждой фазы. Теоретическое изучение закономерностей влияния различных структурных параметров на электромагнитные поля (на микро- и макроуровнях) и эффективные (на макроуровне) электромагнитные и термоупругие свойства таких композитов основываются на постановке и решении связанных краевых задач электромагнитотермоупругости для микронеоднородной представительной области с использованием методов механики композитов [26–32], в частности, асимптотических «методов осреднения» [21; 23; 26] и методов на основе двойкопериодических комплексных функций [27] для идеально периодических структур, методов статистической механики композитов для нерегулярных, в частности, полидисперсных (рис. 1, *a, b*) и квазипериодических (рис. 1, *c, d*) структур [28–32], численных методов (пакетов прикладных программ) решения задач на ячейке периодичности или реализациях представительного фрагмента случайной структуры [30]. При этом для полидисперсных структур (рис. 1, *a, b*) решения для тензоров эффективных термоупругих и электромагнитных свойств получены в аналитическом виде [28; 32–35]. В [24; 25; 33] исследована максвелл-вагнеровская релаксация композитов «феррит/пьезоэлектрик», даны концентрационные и частотные зависимости действительных и мнимых частей эффективных электромагнитных констант. В [33–35] исследованы эффективные электромагнитотермоупругие свойства полидисперсных структур на основе аналитических решений. Линеаризованный подход теории упругости для тела с начальным напряженным состоянием обобщен на магнитоэлектроупругий композит [36]. Численный анализ динамического поведения пьезоэлектрических композитов с учетом начального электроупругого напряженного состояния фаз дан в [37]. Актуальным остается нахождение решений связанных краевых задач механики пьезоактивных композитов с комплексным учетом структурных особенностей, в частности, статистического характера взаимного расположения элементов структуры, взаимодействия возникающих в них связанных электрических, магнитных и деформационных полей и наличием начального

деформационного, электрического и магнитного напряженного состояния.

Цель – изучение влияния начального (микро- и макроуровневого) напряженного состояния на эффективные свойства композита с квазипериодической структурой (см. рис. 1, *c, d*) из пьезоэлектрических и магнитоэлектрических фаз в рамках обобщенного сингулярного приближения статистической механики композитов [29; 38]. Квазипериодические модели структур композитов позволяют непосредственно учитывать разупорядоченность элементов структуры, например, связанную с технологией их изготовления через вычисление поправок к известным решениям для идеально периодических структур [30].

1. Постановка задачи

Модели структур композитов. Рассматриваем две матричные квазипериодические двухфазные однонаправленные волокнистые структуры «со смещением» волокон (см. рис. 1, *c*) и «с удалением» волокон (см. рис. 1, *d*) в периодических гексагональных ячейках в трансверсальной плоскости r_1r_2 . В первой модели (см. рис. 1, *c*) центры круговых поперечных сечений волокон имеют независимые для каждой гексагональной ячейки случайные смещения \mathbf{a} из центров своих ячеек в плоскости r_1r_2 ; сечения не выходят за пределы ячеек. Ориентационный угол и модуль вектора отклонений \mathbf{a} распределены по независимым равномерным законам на отрезках $[0; 2\pi]$ и $[0; \Delta]$ соответственно, где $\Delta = k\Delta_{\max}$, $k \in [0; 1]$ – степень разупорядоченности волокон, $\Delta_{\max} = R - r_v(1 + \delta_0/2)$ – величина максимально допустимого смещения, R – радиус вписанной в ячейку окружности, r_v – радиус поперечных сечений волокон, $\delta_0 \equiv \Delta_0 / r_v = 0,02$ – относительная величина минимальной гарантированной прослойки Δ_0 матрицы между волокнами. Во второй модели (см. рис. 1, *d*) имеем статистически независимые для различных ячеек случайные размещения центров поперечных сечений

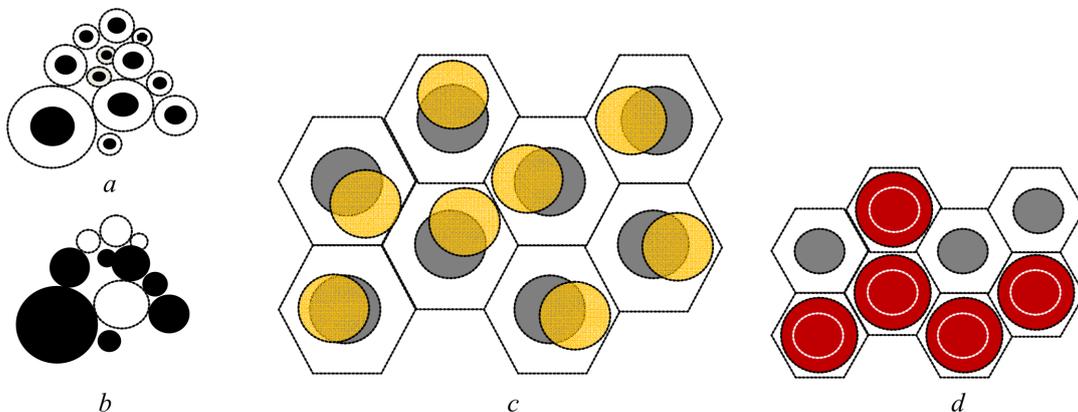


Рис. 1. Фрагменты реализаций полидисперсных (*a, b*) и квазипериодических (*c, d*) структур

Fig. 1. Fragments of implementations of polydisperse (*a, b*) and quasi-periodic (*c, d*) structures

волокон в центрах ячеек при заданной минимальной гарантированной прослойке Δ_0 матрицы между волокнами также 2 % от r_0 . Введем в рассмотрение две вспомогательные «базовые» структуры: первая – это периодическая структура (решение для которой считаем известным), вторая – «статистическая смесь» в виде полидисперсной «кластерной» структуры на рис. 1, *b*, из однотипных (по форме и ориентации) однородных полидисперсных (в том числе бесконечно малых) частиц, в которых статистически независимо реализуются с вероятностью ν_1 свойства 1-й фазы и с вероятностью $1-\nu_1$ – свойства 2-й фазы; представительный объем представляет собой два взаимопроникающих кластера частиц каждой из фаз (см. рис. 1, *b*). Для статистической смеси отсутствует корреляция свойств в ее различных точках и, как следствие, имеем предельную локальность ее многоточечных моментных функций структуры [29–32].

Математическая постановка задачи. Пусть представительная область \mathbf{V} композита, например, с квазипериодической двухфазной структурой (см. рис. 1, *c, d*) состоит из однородных трансверсально-изотропных пьезоэлектромагнитных фаз, плоскости изотропии которых лежат в координатной плоскости $r_1 r_2$, ось поляризации r_3 . Взаимное расположение фаз в области \mathbf{V} задаем через их индикаторные функции $i_f(\mathbf{r})$, для которых имеем $i_f = 1$ если $\mathbf{r} \in \mathbf{V}_f$, $i_f = 0$ если $\mathbf{r} \notin \mathbf{V}_f$, где \mathbf{V}_f – область f -й фазы в $\mathbf{V} = \bigcup_{f=1}^F \mathbf{V}_f$, $f = \overline{1, F}$, здесь число фаз $F = 2$ (в общем, $F \geq 2$).

В области \mathbf{V} композита имеем некоторое начальное равновесное электромагнитоупругое состояние $\zeta_0 = \{\sigma^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0\}$ в виде полей начальных механических напряжений σ^0 , электрической \mathbf{D}^0 и магнитной \mathbf{B}^0 индукций, которые обусловлены действием на композит некоторых начальных внешних механических нагрузок [1–17] и/или электромагнитных полей [36; 37]. Осредненные (макроскопические) значения – $\zeta_0^* = \langle \zeta_0 \rangle$, где $\langle \dots \rangle = 1/V \int_{\mathbf{V}} \dots d\mathbf{r}$ – оператор осреднения по области \mathbf{V} . Значение $\zeta_0^* = 0$ имеем для случая наличия самоуравновешенных остаточных напряжений σ^0 и индукций $\mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0$ внутри области \mathbf{V} после ее разгрузки на макроуровне. Начальные поля $\sigma^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0$ удовлетворяют уравнениям равновесия $\sigma_{ij,j}^0 = 0$ и непрерывности $D_{i,i}^0 = 0, B_{i,i}^0 = 0$.

При последующем (дополнительном к начальному) электромеханическом нагружении области \mathbf{V} композита дополнительно возникающие в \mathbf{V} поля напряжений σ и индукций \mathbf{D}, \mathbf{B} удовлетворяют уравнениям равновесия [1; 17] и непрерывности [36; 37] вида

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^0 u_{i,k})_{,j} = 0, \quad (D_j + D_k^0 u_{j,k})_{,j} = 0, \\ (B_j + B_k^0 u_{j,k})_{,j} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом поправок (дополнительных слагаемых), обусловленных наличием заданных начальных полей $\sigma^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0$ и дополнительного искомого поля перемещений \mathbf{u} . Первое уравнение в (1) может быть преобразовано к виду

$$\sigma_{ij,j} + \sigma_{ij}^0 u_{i,kj} = 0$$

с учетом выполнения уравнений равновесия $\sigma_{ij,j}^0 = 0$ для поля σ^0 . В (1) напряжения σ и индукции \mathbf{D}, \mathbf{B} выражаются по известным определяющим соотношениям [20–22, 31, 32]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = C_{ijmn} u_{m,n} - e_{nij} E_n - h_{nij} H_n - \beta_{ij} \Theta, \\ D_i = e_{imn} u_{m,n} + \lambda_{in} E_n + \pi_i \Theta, \\ B_i = h_{imn} u_{m,n} + \mu_{in} H_n + \vartheta_i \Theta \end{aligned} \quad (2)$$

через градиенты перемещений $\nabla \mathbf{u}$, напряженности электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей, однородное приращение температуры Θ с использованием известных тензоров упругих свойств \mathbf{C}_f , пьезоэлектрических \mathbf{e}_f и пьезомагнитных (магнитоstrictionных) \mathbf{h}_f свойств, диэлектрических λ_f и магнитных μ_f проницаемостей, температурных коэффициентов β_f , пирозлектрических π_f и пирромагнитных ϑ_f постоянных для каждой фазы f . Компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, векторов напряженностей $E_i = -\varphi_{,i}, H_i = -\psi_{,i}$ вычисляются через поля перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$, электрического $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ и магнитного $\psi = \psi(\mathbf{r})$ потенциалов с граничными условиями

$$u_{i|\Gamma} = u_{ij}^* \tilde{r}_j, \quad \varphi_{|\Gamma} = -E_i^* \tilde{r}_i, \quad \psi_{|\Gamma} = -B_i^* \tilde{r}_i, \quad (3)$$

где $\tilde{\mathbf{r}} \in \Gamma$ – граница области \mathbf{V} , осредненные или макроскопические значения напряжений $\sigma^* = \langle \sigma \rangle$, градиентов перемещений $\mathbf{u}^* = \langle \nabla \mathbf{u} \rangle$, напряженностей электрического $\mathbf{E}^* = \langle \mathbf{E} \rangle$ и магнитного $\mathbf{H}^* = \langle \mathbf{H} \rangle$ полей для области \mathbf{V} . Решение задачи (1)–(3) сводится к нахождению пульсаций $\mathbf{u}'(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}^*(\mathbf{r}), \varphi'(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) - \varphi^*(\mathbf{r}), \psi'(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) - \psi^*(\mathbf{r})$ – отклонений искомого поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, электрического $\varphi(\mathbf{r})$ и магнитного $\psi(\mathbf{r})$ потенциалов от соответствующих полей макроскопических (осредненных) значений $u_i^* = u_{ij}^* r_j, \varphi^* = -E_i^* r_i, \psi^* = -B_i^* r_i$ с учетом выполнения граничных условий

(3). Поля пульсаций $\mathbf{u}'(\mathbf{r})$, $\varphi'(\mathbf{r})$, $\psi'(\mathbf{r})$ пропорциональны заданным макроскопическим значениям $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, \mathbf{E}^* , \mathbf{H}^* , Θ и, как следствие, представимы в виде разложений

$$\begin{aligned} u_i'(\mathbf{r}) &= a_{imn}(\zeta_0, \mathbf{r})u_{mn}^* + b_{in}(\zeta_0, \mathbf{r})E_n^* + \\ &+ d_{in}(\zeta_0, \mathbf{r})H_n^* + t_i(\zeta_0, \mathbf{r})\Theta, \\ -\varphi'(\mathbf{r}) &= f_{mn}^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r})u_{mn}^* + h_n^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r})E_n^* + \\ &+ m_n^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r})H_n^* + t^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r})\Theta, \\ -\psi'(\mathbf{r}) &= f_{mn}^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r})u_{mn}^* + h_n^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r})E_n^* + \\ &+ m_n^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r})H_n^* + t^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r})\Theta \end{aligned} \quad (4)$$

с зависимостью коэффициентов разложений от начального напряженного состояния ζ_0 композита.

2. Метод функций Грина

Используем функции Грина

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} U_{ik} & U_i^{(1)} & U_i^{(2)} \\ \Phi_k & \Phi^{(1)} & \Phi^{(2)} \\ \Psi_k & \Psi^{(1)} & \Psi^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \quad (5)$$

однородной трансверсально-изотропной пьезоэлектромагнитной «среды сравнения» [29] для интегральной формы записи коэффициентов разложений $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, $\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{r})$, ..., $\mathbf{t}^{(2)}(\mathbf{r})$ (4) [31; 32; 38]. Например, запишем первые члены ряда коэффициентов пульсаций перемещений

$$\begin{aligned} a_{imn}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [U_{ij,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)C'_{jsmn}(\mathbf{r}_1) + \\ &+ U_{i,s}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(e'_{smn}(\mathbf{r}_1) + \delta_{sm}D_n^{0'}(\mathbf{r}_1)) + \\ &+ U_{i,s}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(h'_{smn}(\mathbf{r}_1) + \delta_{sm}B_n^{0'}(\mathbf{r}_1))]d\mathbf{r}_1 + \dots, \\ b_{in}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [-U_{ij,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)e'_{njs}(\mathbf{r}_1) + \\ &+ U_{i,s}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\lambda'_{sn}(\mathbf{r}_1)]d\mathbf{r}_1 + \dots, \\ d_{in}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [-U_{ij,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)h'_{njs}(\mathbf{r}_1) + \\ &+ U_{i,s}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mu'_{sn}(\mathbf{r}_1)]d\mathbf{r}_1 + \dots, \\ t_i(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [-U_{ij,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\beta'_{js}(\mathbf{r}_1) + U_{i,s}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\pi'_s(\mathbf{r}_1) + \\ &+ U_{i,s}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\vartheta'_s(\mathbf{r}_1)]d\mathbf{r}_1 + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

коэффициентов пульсаций электрического потенциала

$$\begin{aligned} f_{mn}^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [\Phi_{j,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)C'_{jsmn}(\mathbf{r}_1) + \\ &+ \Phi_{,s}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(e'_{smn}(\mathbf{r}_1) + \delta_{sm}D_n^{0'}(\mathbf{r}_1)) + \\ &+ \Phi_{,s}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(h'_{smn}(\mathbf{r}_1) + \delta_{sm}B_n^{0'}(\mathbf{r}_1))]d\mathbf{r}_1 + \dots, \\ h_n^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [-\Phi_{j,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)e'_{njs}(\mathbf{r}_1) + \\ &+ \Phi_{,s}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\lambda'_{sn}(\mathbf{r}_1)]d\mathbf{r}_1 + \dots, \\ m_n^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [-\Phi_{j,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)h'_{njs}(\mathbf{r}_1) + \\ &+ \Phi_{,s}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mu'_{sn}(\mathbf{r}_1)]d\mathbf{r}_1 + \dots, \\ t^{(1)}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [-\Phi_{j,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\beta'_{js}(\mathbf{r}_1) + \Phi_{,s}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\pi'_s(\mathbf{r}_1) + \\ &+ \Phi_{,s}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\vartheta'_s(\mathbf{r}_1)]d\mathbf{r}_1 + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

коэффициентов пульсаций магнитного потенциала

$$\begin{aligned} f_{mn}^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [\Psi_{j,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)C'_{jsmn}(\mathbf{r}_1) + \\ &+ \Psi_{,s}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(e'_{smn}(\mathbf{r}_1) + \delta_{sm}D_n^{0'}(\mathbf{r}_1)) + \\ &+ \Psi_{,s}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(h'_{smn}(\mathbf{r}_1) + \delta_{sm}B_n^{0'}(\mathbf{r}_1))]d\mathbf{r}_1 + \dots, \\ h_n^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [-\Psi_{j,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)e'_{njs}(\mathbf{r}_1) + \\ &+ \Psi_{,s}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\lambda'_{sn}(\mathbf{r}_1)]d\mathbf{r}_1 + \dots, \\ m_n^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [-\Psi_{j,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)h'_{njs}(\mathbf{r}_1) + \\ &+ \Psi_{,s}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mu'_{sn}(\mathbf{r}_1)]d\mathbf{r}_1 + \dots, \\ t^{(2)}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= \int_V [-\Psi_{j,s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\beta'_{js}(\mathbf{r}_1) + \Psi_{,s}^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\pi'_s(\mathbf{r}_1) + \\ &+ \Psi_{,s}^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\vartheta'_s(\mathbf{r}_1)]d\mathbf{r}_1 + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

с учетом равенств $(\sigma_{kj}^0 u_{ik}^*)_{,j} = \sigma_{kj,j}^0 u_{ik}^* = 0$ в силу выполнения уравнений равновесия $\sigma_{nj,j}^0 = 0$ для начальных напряжений $\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{r})$ в области \mathbf{V} и независимости макроскопических величин u_{mn}^* , E_n^* , H_n^* от координат \mathbf{r} . Здесь использована «теорема о свертках», согласно которой дифференцирование $\partial / \partial r_{(1)i}$ свертываемых функций в подынтегральных выражениях заменено на дифференцирование $-\partial / \partial r_{(1)i}$ или $\partial / \partial r_i$ соответствующих ядер – функций Грина \mathbf{U} , Φ , ..., $\Psi^{(2)}$ [38] с учетом их разностного аргумента $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ и асимптотических

равенств нулю при $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$. В первом столбце матрицы \mathbf{G} функций Грина (5) величины U_{ik} , Φ_k , Ψ_k – это перемещения по оси r_i , электрический и магнитный потенциалы в точке \mathbf{r} от действия в точке \mathbf{r}_1 единичной силы вдоль координатной оси r_k . Во втором и третьем столбцах матрицы \mathbf{G} (5) величины $U_{ik}^{(1)}$, $\Phi_k^{(1)}$, $\Psi_k^{(1)}$ и $U_{ik}^{(2)}$, $\Phi_k^{(2)}$, $\Psi_k^{(2)}$ – это перемещения по оси r_i , электрический и магнитный потенциалы в точке \mathbf{r} от действия в точке \mathbf{r}_1 единичного электрического или магнитного источника соответственно. Свойства среды сравнения задаем через тензоры упругих свойств \mathbf{C}_* , диэлектрической λ_* и магнитной μ_* проницаемостей, пьезоэлектрических \mathbf{e}_* и пьезомагнитных \mathbf{h}_* модулей, которые (в различных приближениях) можно приравнять к осредненным по объему свойствам $\mathbf{C}_* = \langle \mathbf{C} \rangle$, ..., $\mathbf{h}_* = \langle \mathbf{h} \rangle$ или к свойствам одной из фаз $\mathbf{C}_* = \mathbf{C}_f$, ..., $\mathbf{h}_* = \mathbf{h}_f$ или к искомым эффективным свойствам $\mathbf{C}_* = \mathbf{C}^*$, ..., $\mathbf{h}_* = \mathbf{h}^*$ (схема самосогласования) композита [29; 30; 39]. В (6)–(8) использованы обозначения пульсаций свойств

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'(\mathbf{r}) &= \mathbf{C}(\mathbf{r}) - \langle \mathbf{C} \rangle, \quad \mathbf{e}'(\mathbf{r}) = \mathbf{e}(\mathbf{r}) - \langle \mathbf{e} \rangle, \\ \mu'(\mathbf{r}) &= \mu(\mathbf{r}) - \langle \mu \rangle, \dots \end{aligned}$$

и пульсаций начального напряженного состояния.

$$\begin{aligned} \sigma^0(\mathbf{r}) &= \sigma^0(\mathbf{r}) - \sigma^{*0}, \quad \mathbf{D}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{D}^0(\mathbf{r}) - \mathbf{D}^{*0}, \\ \mathbf{B}^0(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}^0(\mathbf{r}) - \mathbf{B}^{*0}. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Эффективные свойства композита

Тензоры эффективных свойств \mathbf{C}^* , λ^* , μ^* , \mathbf{e}^* , \mathbf{h}^* , β^* , π^* , ϑ^* и дополнительно тензоры электромагнитной \mathbf{k}^* и магнитоэлектрической χ^* связности (проявляющиеся в нашем случае лишь на макроуровне) композита с пьезоэлектрическими и пьезомагнитными фазами при наличии начального напряженного состояния ζ_0 входят в определяющие соотношения на макроуровне композита

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* &= C_{ijmn}^* \varepsilon_{mn}^* - e_{(\sigma)nij}^* E_n^* - h_{(\sigma)nij}^* H_n^* - \beta_{ij}^* \Theta, \\ D_i^* &= e_{(D)imn}^* \varepsilon_{mn}^* + \lambda_{in}^* E_n^* + \chi_{in}^* H_n^* + \pi_i^* \Theta, \\ B_i^* &= h_{(B)imn}^* \varepsilon_{mn}^* + \mu_{in}^* H_n^* + \kappa_{in}^* E_n^* + \vartheta_i^* \Theta, \end{aligned} \quad (10)$$

связывая макроскопические значения напряжения $\sigma^* = \langle \sigma \rangle$, индукций $\mathbf{D}^* = \langle \mathbf{D} \rangle$, $\mathbf{B}^* = \langle \mathbf{B} \rangle$ с деформацией $\varepsilon^* = \langle \varepsilon \rangle$, напряженностями $\mathbf{E}^* = \langle \mathbf{E} \rangle$, $\mathbf{H}^* = \langle \mathbf{H} \rangle$

и температурой нагрева Θ представительной области \mathbf{V} композита и в общем случае рассчитываются по формулам [31; 32]

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^* &= \langle C_{ijmn} \rangle + \langle C_{ijdb}^i a_{dmn,b} \rangle + \langle e_{pij}^i f_{mn,p}^{(1)} \rangle + \langle h_{pij}^i f_{mn,p}^{(2)} \rangle, \\ \lambda_{kn}^* &= \langle \lambda_{kn} \rangle + \langle \lambda_{kp}^i h_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle e_{kpq}^i b_{qn,p} \rangle, \\ \mu_{kn}^* &= \langle \mu_{kn} \rangle + \langle \mu_{kp}^i m_{n,p}^{(2)} \rangle + \langle h_{kpq}^i d_{qn,p} \rangle, \\ e_{(\sigma)nij}^* &= \langle e_{nij} \rangle - \langle C_{ijpq}^i b_{qn,p} \rangle + \langle e_{pij}^i h_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle h_{pij}^i h_{n,p}^{(2)} \rangle, \\ h_{(\sigma)nij}^* &= \langle h_{nij} \rangle - \langle C_{ijpq}^i d_{qn,p} \rangle + \langle e_{pij}^i m_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle h_{pij}^i m_{n,p}^{(2)} \rangle, \quad (11) \\ e_{(D)imn}^* &= \langle e_{imn} \rangle + \langle e_{ipq}^i a_{pmn,q} \rangle + \langle \lambda_{ip}^i f_{mn,p}^{(1)} \rangle, \\ h_{(B)imn}^* &= \langle h_{imn} \rangle + \langle h_{ipq}^i a_{pmn,q} \rangle + \langle \mu_{ip}^i f_{mn,p}^{(2)} \rangle, \\ \chi_{kn}^* &= \langle \lambda_{kp}^i m_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle e_{kpq}^i d_{qn,p} \rangle, \\ \kappa_{kn}^* &= \langle \mu_{kp}^i h_{n,p}^{(2)} \rangle + \langle h_{kpq}^i b_{qn,p} \rangle, \\ \beta_{ij}^* &= \langle \beta_{ij} \rangle - \langle C_{ijdb}^i t_{d,b} \rangle + \langle e_{pij}^i t_{,p}^{(1)} \rangle + \langle h_{pij}^i t_{,p}^{(2)} \rangle, \\ \pi_i^* &= \langle \pi_i \rangle + \langle \lambda_{ip}^i t_{,p}^{(1)} \rangle + \langle e_{ipq}^i t_{q,p} \rangle, \\ \vartheta_i^* &= \langle \vartheta_i \rangle + \langle \mu_{ip}^i t_{,p}^{(2)} \rangle + \langle h_{ipq}^i t_{q,p} \rangle, \end{aligned}$$

где верхним индексом « $'$ » обозначены пульсации тензоров электромагнитотермоупругих свойств микроструктуры композита. Задача нахождения тензоров \mathbf{C}^* , ..., ϑ^* эффективных свойств композита (10) сводится к нахождению полей производных $\nabla \mathbf{a}(\mathbf{r})$, $\nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{r})$, ..., $\nabla \mathbf{t}^{(2)}(\mathbf{r})$ и последующему осреднению произведений в правых частях равенств (11). Производные коэффициентов $\nabla \mathbf{a}(\mathbf{r})$, $\nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{r})$, ..., $\nabla \mathbf{t}^{(2)}(\mathbf{r})$ в (11) как результат дифференцирования левых и правых частей уравнений (6)–(8) выражаются через вторые производные функций Грина $\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$, где ∇ – оператор дифференцирования по координатам \mathbf{r} . В «обобщенном сингулярном приближении» [29] у вторых производных тензорных функций Грина $\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$ учитываются лишь сингулярные составляющие [38]

$$\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \approx \mathbf{G}^s \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1), \quad \mathbf{G}^s = \begin{pmatrix} U_{ijn}^s & U_{imn}^{s(1)} & U_{imn}^{s(2)} \\ \Phi_{imn}^s & \Phi_{mn}^{s(1)} & \Phi_{mn}^{s(2)} \\ \Psi_{imn}^s & \Psi_{mn}^{s(1)} & \Psi_{mn}^{s(2)} \end{pmatrix} \quad (12)$$

для пьезоэлектромагнитной среды сравнения с эллипсоидальным «зерном неоднородности» [29].

Метод периодических составляющих [30; 32; 39]. Рассматриваемые структуры: квазипериодическая (см. рис. 1, *c, d*), периодическая и статистическая смесь (см. рис. 1, *b*) имеют одинаковые объемные доли v_f ,

свойства фаз и общие граничные условия вида (3), т.е. $u_{ij\Gamma}^p = u_{ij}^* \tilde{r}_j$, $\Phi_{\Gamma}^p = -E_i^* \tilde{r}_i$, $\Psi_{\Gamma}^p = -B_i^* \tilde{r}_i$ и $u_{ij\Gamma}^s = u_{ij}^* \tilde{r}_j$, $\Phi_{\Gamma}^s = -E_i^* \tilde{r}_i$, $\Psi_{\Gamma}^s = -B_i^* \tilde{r}_i$. Индексами «p», «s» отмечаем величины этих вспомогательных структур соответственно. Для рассматриваемых двухфазных структур поля пульсаций

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'(\mathbf{r}) &= \bar{\mathbf{C}}_i'(\mathbf{r}), \quad \mathbf{e}'(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{e}}_i'(\mathbf{r}), \quad \mathbf{h}'(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{h}}_i'(\mathbf{r}), \dots, \\ \mathbf{C}^{p'}(\mathbf{r}) &= \bar{\mathbf{C}}_i^{p'}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{e}^{p'}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{e}}_i^{p'}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{h}^{p'}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{h}}_i^{p'}(\mathbf{r}), \dots, \quad (13) \\ \mathbf{C}^{s'}(\mathbf{r}) &= \bar{\mathbf{C}}_i^{s'}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{e}^{s'}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{e}}_i^{s'}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{h}^{s'}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{h}}_i^{s'}(\mathbf{r}), \dots \end{aligned}$$

пропорциональны пульсациям соответствующих индикаторных функций $i_1'(\mathbf{r})$, $i_1^{p'}(\mathbf{r})$, $i_1^{s'}(\mathbf{r})$ 1-й фазы (включений), где тензоры разностей $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$, $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2, \dots$

Производные коэффициентов $\nabla \mathbf{a}(\mathbf{r})$, $\nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{r})$, ..., $\nabla \mathbf{t}^{(2)}(\mathbf{r})$ в (11) для двухфазной квазипериодической структуры представим в виде

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{a} &= \mathbf{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k (i_1')^k, \quad \nabla \mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{\Phi}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{\Phi}_k (i_1')^k, \dots, \\ \nabla \mathbf{t}^{(2)} &= \mathbf{T}_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}_k^{(2)} (i_1')^k \quad (14) \end{aligned}$$

и аналогично для периодической структуры

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{a}^p &= \mathbf{A}_0^p + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k (i_1^{p'})^k, \quad \nabla \mathbf{f}^{p(1)} = \mathbf{\Phi}_0^p + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{\Phi}_k (i_1^{p'})^k, \\ \dots, \nabla \mathbf{t}^{p(2)} &= \mathbf{T}_0^{p(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}_k^{p(2)} (i_1^{p'})^k, \quad (15) \end{aligned}$$

где \mathbf{A}_0 , $\mathbf{\Phi}_0$, $\mathbf{T}_0^{(2)}$, ... – некоторые поправки, учитывающие дальний порядок (периодичность, квазипериодичность) структур через формальные составляющие [29] вторых производных функций Грина $\nabla \nabla \mathbf{G}$, для которых $\langle \mathbf{A}_0 \rangle = \langle \mathbf{\Phi}_0 \rangle = \langle \mathbf{T}_0^{(2)} \rangle = 0$. Для статистической смеси имеем

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{a}^s &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k (i_1^{s'})^k, \quad \nabla \mathbf{f}^{s(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{\Phi}_k (i_1^{s'})^k, \dots, \\ \nabla \mathbf{t}^{s(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}_k^{(2)} (i_1^{s'})^k, \quad (16) \end{aligned}$$

так как для нее дальний порядок отсутствует, а ближний – форма включений – учитывается формой «зерна неоднородности» сингулярной составляющей (14). В (14)–(16) компоненты тензоров \mathbf{A}_k , $\mathbf{\Phi}_k$, ..., $\mathbf{T}_k^{(2)}$ зависят от начального напряженного состояния ζ_0 и выражаются через сингулярные составляющие \mathbf{G}^s (14) вторых производных функций Грина $\nabla \nabla \mathbf{G}$, например, компоненты тензора \mathbf{A}_1 имеют вид

$$\begin{aligned} A_{(1)imn}(\zeta_0) &= U_{ijs}^s \bar{\mathbf{C}}_{jsmn} + U_{its}^{(1)s} (\bar{\mathbf{e}}_{smn} + \delta_{sm} \bar{\mathbf{D}}_n^0) + \\ &+ U_{its}^{(2)s} (\bar{\mathbf{h}}_{smn} + \delta_{sm} \bar{\mathbf{B}}_n^0), \quad (17) \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} a_{imn,t}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= U_{ijs}^s C'_{jsmn}(\mathbf{r}) + U_{its}^{(1)s} (e'_{smn}(\mathbf{r}) + \delta_{sm} D_n^{0'}(\mathbf{r})) + \\ &+ U_{its}^{(2)s} (h'_{smn}(\mathbf{r}) + \delta_{sm} B_n^{0'}(\mathbf{r})) + \dots \end{aligned}$$

или с учетом (13)

$$\begin{aligned} a_{imn,t}(\zeta_0, \mathbf{r}) &= [U_{ijs}^s \bar{\mathbf{C}}_{jsmn} + U_{its}^{(1)s} (\bar{\mathbf{e}}_{smn} + \delta_{sm} \bar{\mathbf{D}}_n^0) + \\ &+ U_{its}^{(2)s} (\bar{\mathbf{h}}_{smn} + \delta_{sm} \bar{\mathbf{B}}_n^0)] i_1'(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned}$$

Выполняются равенства

$$\langle (\nabla \mathbf{a} - \nabla \mathbf{a}^p) i_1' \rangle = p \langle \nabla \mathbf{a}^s i_1^{s'} \rangle, \quad (18)$$

$$\langle (\nabla \mathbf{f}^{(1)} - \nabla \mathbf{f}^{p(1)}) i_1' \rangle = p \langle \nabla \mathbf{f}^{s(1)} i_1^{s'} \rangle, \dots,$$

$$\langle (\nabla \mathbf{t}^{(2)} - \nabla \mathbf{t}^{p(2)}) i_1' \rangle = p \langle \nabla \mathbf{t}^{s(2)} i_1^{s'} \rangle$$

с учетом доказанного ранее [32] выражения

$$\langle i_1' (i_1^{p'})^{n-1} \rangle / \langle i_1'^n \rangle = p, \quad (19)$$

где $n = 2, 3, \dots$, коэффициент корреляции (периодичности) квазипериодической структуры

$$p \equiv \frac{v_{11} - v_1^2}{v_1(1 - v_1)} \quad (20)$$

рассчитывается через $v_{11} = \langle i_1^{p'} \rangle$ – относительное объемное содержание в \mathbf{V} области пересечения 1-фазы (включений) квазипериодической и периодической структур при их мысленном совмещении, $p \in (0; 1)$.

Решение «задачи эффективного модуля» – поиск тензоров \mathbf{C}^* , $\boldsymbol{\lambda}^*$, $\boldsymbol{\mu}^*$, \mathbf{e}^* , \mathbf{h}^* , \mathbf{k}^* , $\boldsymbol{\chi}^*$, $\boldsymbol{\beta}^*$, $\boldsymbol{\pi}^*$, $\boldsymbol{\vartheta}^*$ пьезокомпозиата (10), (11) с разупорядоченной (квазипериодической) двухфазной структурой рассмотрим на примере нахождения решения для его тензора \mathbf{C}^* эффективных упругих свойств. Для этого запишем общие формулы для расчета тензоров эффективных упругих свойств рассматриваемых (квазипериодической, периодической, статистической смеси) структур двухфазных пьезокомпозиатов

$$\mathbf{C}^* = \langle \mathbf{C} \rangle + \langle i_1' \boldsymbol{\Lambda} \rangle,$$

$$\Delta_{ijmn} = \bar{\mathbf{C}}_{ijdb} a_{dmn,b} + \bar{\mathbf{e}}_{pij} f_{mn,p}^{(1)} + \bar{\mathbf{h}}_{pij} f_{mn,p}^{(2)};$$

$$\mathbf{C}^{p*} = \langle \mathbf{C} \rangle + \langle i_1^{p'} \boldsymbol{\Lambda}^p \rangle,$$

$$\Delta_{ijmn}^p = \bar{\mathbf{C}}_{ijdb} a_{dmn,b}^p + \bar{\mathbf{e}}_{pij} f_{mn,p}^{p(1)} + \bar{\mathbf{h}}_{pij} f_{mn,p}^{p(2)}; \quad (21)$$

$$\mathbf{C}^{s*} = \langle \mathbf{C} \rangle + \langle i_1^{s'} \boldsymbol{\Lambda}^s \rangle,$$

$$\Delta_{ijmn}^s = \bar{\mathbf{C}}_{ijdb} a_{dmn,b}^s + \bar{\mathbf{e}}_{pij} f_{mn,p}^{s(1)} + \bar{\mathbf{h}}_{pij} f_{mn,p}^{s(2)}$$

с учетом (6)–(8), (11) или в виде

$$C^* - \langle C \rangle = \langle (i_1^i)^2 \rangle \bar{\Lambda} = v_1(1-v_1)\bar{\Lambda}, \quad \bar{\Lambda} \equiv \langle \Lambda \rangle_1 - \langle \Lambda \rangle_2;$$

$$C^{p*} - \langle C \rangle = \langle (i_1^{p'})^2 \rangle \bar{\Lambda}^p = v_1(1-v_1)\bar{\Lambda}^p, \\ \bar{\Lambda}^p \equiv \langle \Lambda^p \rangle_{p1} - \langle \Lambda^p \rangle_{p2}; \quad (22)$$

$$C^{s*} - \langle C \rangle = \langle (i_1^{s'})^2 \rangle \bar{\Lambda}^s = v_1(1-v_1)\bar{\Lambda}^s,$$

$$\bar{\Lambda}^s \equiv \langle \Lambda^s \rangle_{s1} - \langle \Lambda^s \rangle_{s2},$$

где $\langle \dots \rangle_{1,2}$ – операторы осреднения по 1-й или 2-й фазам соответствующей структуры, имеем пропорциональные зависимости (13) вида

$$\Lambda = \bar{\Lambda} i_1^i, \quad \Lambda^p = \bar{\Lambda} i_1^{p'}, \quad \Lambda^s = \bar{\Lambda} i_1^{s'} \quad (23)$$

с учетом (22), $\langle \Lambda \rangle = \langle \Lambda^p \rangle = \langle \Lambda^s \rangle = 0$. При этом для статистической смеси имеем

$$C^{s*} = \langle C \rangle + \langle i_1^{s'} \Lambda^s \rangle = \langle C \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{(k)} \langle (i_1^{s'})^{k+1} \rangle$$

или

$$C^{s*} = \langle C \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{(k)} m_{(k+1)} \quad (24)$$

с учетом разложения

$$\Lambda^s = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{(k)} (i_1^{s'})^k \quad (25)$$

и обозначения компонент

$$\Lambda_{(k)ijmn}(\zeta_0) = \bar{C}_{ijdb} A_{(k)dbmn}(\zeta_0) - \\ - \bar{e}_{pij} \Phi_{(k)pmn}^{(1)}(\zeta_0) - \bar{h}_{pij} \Phi_{(k)pmn}^{(2)}(\zeta_0), \quad (26)$$

тензора $\Lambda_{(k)}$, центрального момента k -го порядка

$$m_{(k)} = \langle (i_1^i)^k \rangle = v_1(1-v_1)[(1-v_1)^{k-1} - (-v_1)^{k-1}], \quad (27)$$

где $v_1 = \langle i_1 \rangle$ – относительное объемное содержание 1-й фазы композита. Аналогичные (25), (26) разложения для квазипериодической и периодической структур имеют вид (21)

$$C^* = \langle C \rangle + \langle i_1^i \Lambda \rangle, \quad \Lambda = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{(k)} (i_1^i)^k, \quad (28)$$

$$C^{p*} = \langle C \rangle + \langle i_1^{p'} \Lambda^p \rangle, \quad \Lambda^p = \Lambda_0^p + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{(k)} (i_1^{p'})^k,$$

здесь Λ_0, Λ_0^p – поправки, учитывающие наличие «ближнего» (локальную упорядоченность, форму и размер включений, непрерывность матрицы) и «дальнего» порядка (периодичность, квазипериодичность) структур через «формальные составляющие» [29] вторых производных функций Грина $\nabla \nabla G$. С учетом предполагаемого равенства поправок $\Lambda_0^p \approx \Lambda_0$ квазипе-

риодической и периодической структур в (28) вычтем из первого уравнения второе, получив отклонения

$$\Lambda^\circ \equiv \Lambda - \Lambda^p = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{(k)} [(i_1^i)^k - (i_1^{p'})^k]. \quad (29)$$

После умножения левой и правой частей (29) на пульсацию $i_1^i(\mathbf{r})$ и последующего осреднения получим выражение

$$\langle i_1^i \Lambda^\circ \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{(k)} \langle (i_1^i)^{k+1} - i_1^i (i_1^{p'})^k \rangle = (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{(k)} m_{(k+1)}$$

с учетом $\langle (i_1^i)^{k+1} \rangle = \langle i_1^i (i_1^{p'})^k \rangle = (1-p)m_{(k+1)}$ (19), (27)

или в окончательном виде

$$\langle i_1^i \Lambda^\circ \rangle = (1-p)(C^{s*} - \langle C \rangle) \quad (30)$$

с учетом $C^{s*} = \langle C \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{(k)} m_{(k+1)}$ (24). Левую часть (30)

$\langle i_1^i \Lambda^\circ \rangle$ запишем в ином виде $\langle i_1^i \Lambda^\circ \rangle = \langle i_1^i \Lambda \rangle - \langle i_1^i \Lambda^p \rangle$ или

$$\langle i_1^i \Lambda^\circ \rangle = C^* - \langle C \rangle + p(C^{p*} - \langle C \rangle), \quad (31)$$

так как имеем

$$\langle i_1^i \Lambda \rangle = \langle i_1^i i_1^i \rangle \bar{\Lambda} = v_1(1-v_1)\bar{\Lambda} = C^* - \langle C \rangle,$$

$$\langle i_1^i \Lambda^p \rangle = \langle i_1^{p'} i_1^{p'} \rangle \bar{\Lambda}^p = p \langle i_1^{p'} i_1^{p'} \rangle \bar{\Lambda}^p = \\ = p v_1(1-v_1)\bar{\Lambda}^p = p(C^{p*} - \langle C \rangle)$$

с учетом (19)–(23), (25). Приравнявая правые части выражений (30) и (31), получим искомого решение

$$C^* = p C^{p*} + (1-p) C^{s*}. \quad (32)$$

Таким образом, для пьезокомпозита с квазипериодической двухфазной структурой (по аналогии с решением (32) для C^*) имеем решение

$$\begin{Bmatrix} C^* \\ \dots \\ \mathbf{k}^* \\ \chi^* \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} C^{p*} \\ \dots \\ \mathbf{k}^{p*} \\ \chi^{p*} \end{Bmatrix} + (1-p) \begin{Bmatrix} C^{s*} \\ \dots \\ \mathbf{k}^{s*} \\ \chi^{s*} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

для тензоров эффективных упругих свойств C^* , диэлектрической λ^* и магнитной μ^* проницаемостей, пьезомеханических свойств e^* и h^* , коэффициентов электромагнитной \mathbf{k}^* и магнитоэлектрической χ^* связанностей, температурных напряжений β^* , векторов эффективных пьезоэлектрических π^* и пьеромагнитных ϑ^* постоянных, которые выражаются (33) через решения $C^{s*}, \dots, \vartheta^{s*}$ обобщенного сингулярного приближения (12) [29] для «статистической смеси» и решения

$C^{p*}, \dots, \vartheta^{p*}$ [20–23, 26, 27] для периодической структуры. Отметим, что для статистической смеси коэффициент периодичности $p = 0$.

В обобщенном сингулярном приближении тензоры $C^{s*}, \dots, \vartheta^{s*}$ (33) эффективных свойств двухфазного композита с начальным напряженным состоянием рассчитываем через тензоры $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots, \bar{\mathbf{T}}^{(2)}$, которые входят в разложения

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ij} &= \bar{A}_{ijmn} u_{mn}^* + \bar{B}_{ijn} E_n^* + \bar{D}_{ijn} H_n^* + \bar{T}_{ij} \Theta, \\ \bar{E}_i &= \bar{F}_{imn}^{(1)} u_{mn}^* + \bar{H}_{in}^{(1)} E_n^* + \bar{M}_{in}^{(1)} H_n^* + \bar{T}_i^{(1)} \Theta, \\ \bar{H}_i &= \bar{F}_{imn}^{(2)} u_{mn}^* + \bar{H}_{in}^{(2)} E_n^* + \bar{M}_{in}^{(2)} H_n^* + \bar{T}_i^{(2)} \Theta \end{aligned}$$

с учетом представления пульсаций производных перемещений $u'_{i,j}(\mathbf{r})$, напряженностей электрического и магнитного $\mathbf{H}'(\mathbf{r})$ полей в виде

$$\begin{aligned} u'_{i,j}(\mathbf{r}) &\equiv u_{i,j}(\mathbf{r}) - u_{ij}^* = \bar{u}_{ij} i'_i(\mathbf{r}), \\ \mathbf{E}'(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^* = \bar{\mathbf{E}} i'_i(\mathbf{r}), \\ \mathbf{H}'(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}^* = \bar{\mathbf{H}} i'_i(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Тензоры $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots, \bar{\mathbf{T}}^{(2)}$ находим из решения соответствующих четырех независимых систем линейных алгебраических уравнений общего вида $[\mathbf{A}]\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{B}\}$ с матрицей коэффициентов [38]

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a_{ijks}^{(1,1)} & a_{ijd}^{(1,2)} & a_{ijd}^{(1,3)} \\ a_{iks}^{(2,1)} & a_{ik}^{(2,2)} & a_{ik}^{(2,3)} \\ a_{iks}^{(3,1)} & a_{ik}^{(3,2)} & a_{ik}^{(3,3)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

когда для 1-й системы $\{\mathbf{X}\} = \{\bar{A}_{ksmn}, \bar{F}_{kmn}^{(1)}, \bar{F}_{kmn}^{(2)}\}$, $\{\mathbf{B}\} = \{b_{ijmn}^{(1)}, b_{imn}^{(2)}, b_{imn}^{(3)}\}$, для 2-й системы $\{\bar{B}_{ksn}, \bar{H}_{dn}^{(1)}, \bar{H}_{dn}^{(2)}\}$, $\{c_{ijn}^{(1)}, c_{in}^{(2)}, c_{in}^{(3)}\}$, для 3-й системы $\{\bar{D}_{ksn}, \bar{M}_{dn}^{(1)}, \bar{M}_{dn}^{(2)}\}$, $\{d_{ijn}^{(1)}, d_{in}^{(2)}, d_{in}^{(3)}\}$, для 4-й системы $\{\bar{T}_{ks}, \bar{T}_d^{(1)}, \bar{T}_d^{(2)}\}$, $\{f_{ij}^{(1)}, f_i^{(2)}, f_i^{(3)}\}$ соответственно. Начальное напряженное состояние учитывается видом коэффициентов

$$\begin{aligned} a_{ijks}^{(1,1)} &= \delta_{ik} \delta_{js} - U_{ijdb}^s \left[\tilde{C}_{dbks} + \delta_{dk} \sigma_{bs}^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{C}_{dbks} + \delta_{dk} \bar{\sigma}_{bs}^0) \right] - \\ &- U_{ijd}^{s(1)} \left[\tilde{e}_{dks} + \delta_{dk} D_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{e}_{dks} + \delta_{dk} \bar{D}_s^0) \right] - \\ &- U_{ijd}^{s(2)} \left[\tilde{h}_{dks} + \delta_{dk} B_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{h}_{dks} + \delta_{dk} \bar{B}_s^0) \right], \\ a_{iks}^{(2,1)} &= -\Phi_{idb}^s \left[\tilde{C}_{dbks} + \delta_{dk} \sigma_{bs}^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{C}_{dbks} + \delta_{dk} \bar{\sigma}_{bs}^0) \right] - \\ &- \Phi_{id}^{s(1)} \left[\tilde{e}_{dks} + \delta_{dk} D_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{e}_{dks} + \delta_{dk} \bar{D}_s^0) \right] - \\ &- \Phi_{id}^{s(2)} \left[\tilde{h}_{dks} + \delta_{dk} B_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{h}_{dks} + \delta_{dk} \bar{B}_s^0) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} a_{iks}^{(3,1)} &= -\Psi_{idb}^s \left[\tilde{C}_{dbks} + \delta_{dk} \sigma_{bs}^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{C}_{dbks} + \delta_{dk} \bar{\sigma}_{bs}^0) \right] - \\ &- \Psi_{id}^{s(1)} \left[\tilde{e}_{dks} + \delta_{dk} D_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{e}_{dks} + \delta_{dk} \bar{D}_s^0) \right] - \\ &- \Psi_{id}^{s(2)} \left[\tilde{h}_{dks} + \delta_{dk} B_s^{*0} + (1-2\nu_1)(\bar{h}_{dks} + \delta_{dk} \bar{B}_s^0) \right] \end{aligned}$$

первого столбца матрицы $[\mathbf{A}]$ и видом компонент

$$\begin{aligned} b_{ijmn}^{(1)} &= U_{ijks}^s \bar{C}_{ksmn} + U_{ijk}^{s(1)} (\bar{e}_{kmn} + \delta_{km} \bar{D}_n^0) + U_{ijk}^{s(2)} (\bar{h}_{kmn} + \delta_{km} \bar{B}_n^0), \\ b_{imn}^{(2)} &= \Phi_{iks}^s \bar{C}_{ksmn} + \Phi_{ik}^{s(1)} (\bar{e}_{kmn} + \delta_{km} \bar{D}_n^0) + \Phi_{ik}^{s(2)} (\bar{h}_{kmn} + \delta_{km} \bar{B}_n^0), \quad (36) \\ b_{imn}^{(3)} &= \Psi_{iks}^s \bar{C}_{ksmn} + \Psi_{ik}^{s(1)} (\bar{e}_{kmn} + \delta_{km} \bar{D}_n^0) + \Psi_{ik}^{s(2)} (\bar{h}_{kmn} + \delta_{km} \bar{B}_n^0) \end{aligned}$$

вектор-столбца $\{\mathbf{B}\}$ с учетом сингулярных составляющих \mathbf{G}^s (12). Здесь использованы обозначения тензоров разностей $\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{e}}, \dots$ (13) и дополнительно тензоров $\tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}_*, \dots, \tilde{\boldsymbol{\mu}} = \langle \boldsymbol{\mu} \rangle - \boldsymbol{\mu}_*$ – отклонений осредненных значений тензоров $\langle \mathbf{C} \rangle, \dots, \langle \boldsymbol{\mu} \rangle$ композита от соответствующих тензоров $\mathbf{C}_*, \dots, \boldsymbol{\mu}_*$ среды сравнения. Использовано представление полей начального напряженного состояния в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{r}) &= \boldsymbol{\sigma}^{*0} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 i'_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{D}^{*0} + \bar{\mathbf{D}}^0 i'_i(\mathbf{r}), \\ \mathbf{B}^0(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}^{*0} + \bar{\mathbf{B}}^0 i'_i(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (37)$$

с учетом выражения пульсаций

$$\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{r}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 i'_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}^0(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{D}}^0 i'_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}^0(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{B}}^0 i'_i(\mathbf{r})$$

через пульсацию $i'_i(\mathbf{r})$ индикаторной функции $i_i(\mathbf{r})$ для 1-й фазы, где тензоры разностей

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 = \boldsymbol{\sigma}_1^0 - \boldsymbol{\sigma}_2^0, \quad \bar{\mathbf{D}}^0 = \mathbf{D}_1^0 - \mathbf{D}_2^0, \quad \bar{\mathbf{B}}^0 = \mathbf{B}_1^0 - \mathbf{B}_2^0. \quad (38)$$

Отметим, что ранее в [39] сделан вывод, что в решении (33) «статистическая смесь» – это полидисперсная структура (см. рис. 1, *b*) в виде двух взаимопроникающих кластеров частиц каждой из фаз. Этот вывод сделан на основе анализа аппроксимаций (разложений) двухточечных корреляционных функций в трансверсальной плоскости однонаправленных волоконистых (матричных) квазипериодических структур (см. рис. 1, *c, d*) по «базовым» корреляционным функциям периодической (гексагональной) структуры и статистической смеси (см. рис. 1, *b*). Тензоры эффективных свойств $C^{s*}, \dots, \vartheta^{s*}$ такой полидисперсной кластерной структуры (статистической смеси) могут быть определены по схеме самосогласования из решения известной задачи для одиночного включения (волокна) в «эффективной среде» [28] или по формулам обобщенного сингулярного приближения [38] (34)–(36), когда тензоры $\mathbf{C}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \mathbf{e}^*, \mathbf{h}^*$

среды сравнения приравнены к соответствующим искомым тензорам C^{s*} , λ^{s*} , μ^{s*} , e^{s*} , h^{s*} статистической смеси с учетом начального напряженного состояния ζ_0 (37), (38). Вычисление тензоров эффективных свойств пьезокомпозита с периодической структурой C^{p*} , ..., ϑ^{p*} в формулах (33) в общем сводится к решению задачи электромагнитотермоупругости на ячейке периодичности и представляет собой отдельную сложную задачу [20–23, 26, 27]. Во многих работах, например [29–32], отмечается, что значения эффективных упругих свойств многих матричных композитов с периодическими структурами близки к решению для полидисперсной матричной структуры (см. рис. 1, а) и к решению обобщенного сингулярного приближения при приравнивании свойств среды сравнения к свойствам матрицы композита. Поэтому тензоры C^{p*} , ..., ϑ^{p*} в (33) также могут быть рассчитаны по формулам обобщенного сингулярного приближения [38] (34)–(36) при приравнивании тензоров C^* , λ^* , μ^* , e^* , h^* среды сравнения к соответствующим тензорам C_2 , λ_2 , μ_2 , e_2 , h_2 матрицы (например, 2-й фазы) композита. В [34] для продольного коэффициента электромагнитной связанности κ_{33}^* однонаправленных волокнистых композитов с пьезоэлектрическими и магнитоэлектрическими фазами (матрицей и/или волокнами) установлена тождественность аналитических решений по различным расчетным схемам: «волокно/матрица» в виде составной цилиндрической ячейки или «волокно/матрица/эффективная среда» с размещением такой ячейки в эффективной среде (схема самосогласования) (см. рис. 1, а) [28], обобщенного сингулярного приближения [38] при приравнивании свойств среды сравнения к свойствам матрицы композита. При этом для композита «феррит/пьезоэлектрик» (пьезоэлектрические волокна в ферритовой матрице) установлено совпадение этого решения κ_{33}^* с решением асимптотического метода осреднения [21] для κ_{33}^* идеальной периодической волокнистой структуры.

В отсутствие начального напряженного состояния для трансверсально-изотропного (с осью симметрии r_3) композита тензоры эффективных пьезоэлектрических e^* и пьезомагнитных (магнитоэлектрических) h^* модулей, электромагнитной κ^* и магнитоэлектрической χ^* связанностей (10), (11) в матричной форме записи имеют вид [19–25; 31; 32]

$$\|e_{ij}^*\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 & 0 \\ e_{31}^* & e_{31}^* & e_{33}^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_{ij}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14}^* & h_{15}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{15}^* & -h_{14}^* & 0 \\ h_{31}^* & h_{31}^* & h_{33}^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\|\kappa_{ij}^*\| = \begin{pmatrix} \kappa_{11}^* & \kappa_{12}^* & 0 \\ -\kappa_{12}^* & \kappa_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^* \end{pmatrix}, \quad \|\chi_{ij}^*\| = \|\kappa_{ij}^*\|^T,$$

где верхним индексом «Т» обозначена операция транспонирования, тензорные и матричные индексы связаны между собой соотношениями: 11 → 1, 22 → 2, 33 → 3, 23 и 32 → 4, 13 и 31 → 5, 12 и 21 → 6. Для случая заданных на макроуровне композита значений начальных деформаций ϵ^{*0} , напряженностей электрического E^{*0} и магнитного H^{*0} полей соответствующие значения для фаз $\zeta_{0f} \equiv \langle \zeta_0 \rangle_f = \{\sigma_f^0, D_f^0, B_f^0\}$, в частности, тензоры $\sigma_{1,2}^0$, $D_{1,2}^0$, $B_{1,2}^0$ двухфазного композита (12), могут быть найдены, например, по известному решению [38] без начального напряженного состояния, где $\langle \dots \rangle_f = 1/V_f \int_{V_f} \dots d\mathbf{r}$ – оператор осреднения по области V_f f -й фазы композита, $V = \bigcup_{f=1}^2 V_f$.

4. Результаты численного моделирования

Результаты вычисления относительных значений независимых эффективных коэффициентов электромагнитной (κ^*) и магнитоэлектрической (χ^*) связанностей трансверсально-изотропного композита «PZT-4/феррит» с различными (квазипериодическими и вспомогательными) структурами (см. рис. 1) представлены в виде графиков на рис. 2–7 в зависимости от значений объемной доли v_1 ферритовых волокон, компонент ($\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} \neq 0$ и/или $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$) осесимметричного тензора начальной макродеформации ϵ^{*0} при $E^{*0} = 0$, $H^{*0} = 0$. Выполняются равенства $\kappa_{11}^* = \kappa_{22}^*$, $\chi_{11}^* = \chi_{22}^*$, $\kappa_{12}^* = -\kappa_{21}^*$, $\chi_{12}^* = -\chi_{21}^*$, $\kappa_{33}^* = \chi_{33}^*$, при этом имеем $\kappa_{12}^* / \kappa_{12}^{0*} = \kappa_{21}^* / \kappa_{21}^{0*}$, $\chi_{12}^* / \chi_{12}^{0*} = \chi_{21}^* / \chi_{21}^{0*}$. На рис. 2–7 использованы обозначения (\diamond , \circ) графиков решений для квазипериодических структур: «со смещением» волокон (\diamond) (см. рис. 1, с) при степени разупорядоченности $k = 1$ и «с удалением» волокон (\circ) (см. рис. 1, d) в гексагональных ячейках. Решения для периодической структуры (\square) и статистической смеси (Δ) получены по формулам обобщенного сингулярного приближения [38] при приравнивании свойств среды сравнения к свойствам матрицы (PZT-4) композита или к осредненным по объему композита значениям соответственно. Выявлены линейные зависимости, например на рис. 3, относительных значений всех ненулевых

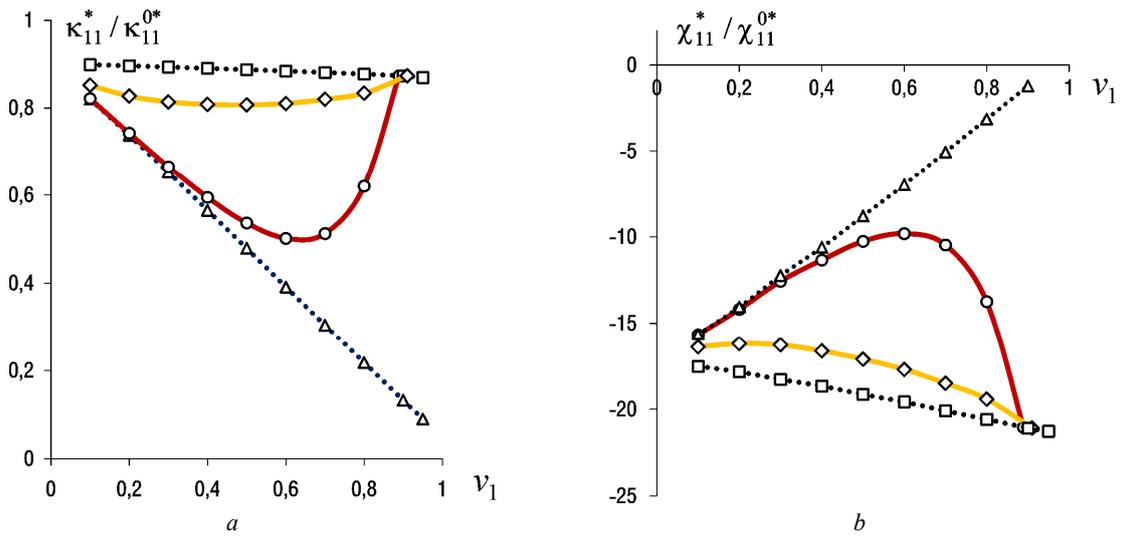


Рис. 2. Эффективные коэффициенты κ_{11}^* (a), χ_{11}^* (b) композита «PZT-4/феррит» в зависимости от объемной доли v_1 волокон для случая $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} = 0,05$, $\epsilon_{33}^{0*} = 0$

Fig. 2. Effective coefficients κ_{11}^* (a), χ_{11}^* (b) of the composite "PZT-4/ferrite" depending on the volume fraction v_1 of fibers for case $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} = 0.05$, $\epsilon_{33}^{0*} = 0$

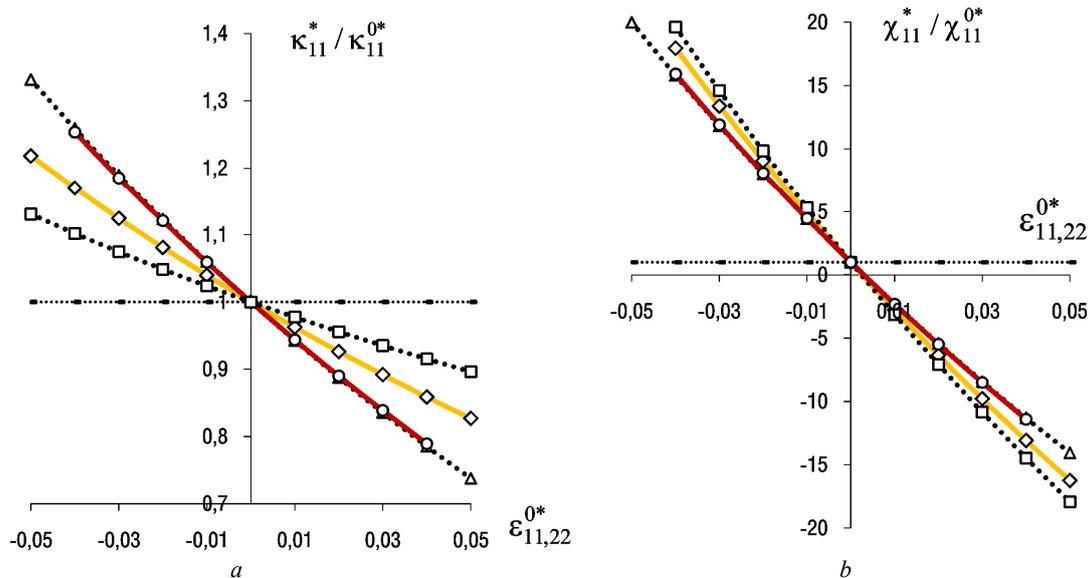


Рис. 3. Эффективные коэффициенты κ_{11}^* (a), χ_{11}^* (b) композита в зависимости от начальной макродеформации $\epsilon_{11,22}^{0*}$, $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ для случая $v_1 = 0,2$

Fig. 3. Effective coefficients κ_{11}^* (a), χ_{11}^* (b) of the composite depending on the initial macrostrain $\epsilon_{11,22}^{0*}$, $\epsilon_{33}^{0*} = 0$, for case $v_1 = 0.2$

компонент тензоров κ^* , χ^* от значений $\epsilon_{11,22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*} осесимметричного тензора начальной макродеформации ϵ^{0*} композита. На рис. 3 графики решений без учета начального напряженного состояния обозначены символом (—). При предельной объемной доле волокон $v_{1max} \approx 0,9$ обе квазипериодические структуры (см. рис. 1, c, d) вырождаются в одну периодическую структуру, поэтому на рис. 2, 4–7 решения (\diamond , \circ) для квазипериодических структур при v_{1max} совпадают с решением (\square) для периодической структуры.

Заключение

Разработана математическая модель начально-напряженного (на микро- и макроуровнях) композита с пьезоэлектрическими магнитоstrictionными фазами, с использованием которой получено численно-аналитическое решение задачи «эффективного модуля» начально-напряженного квазипериодического композита в рамках обобщенного сингулярного приближения статистической механики композитов. Представлены результаты расчета всех независимых компонент тензоров

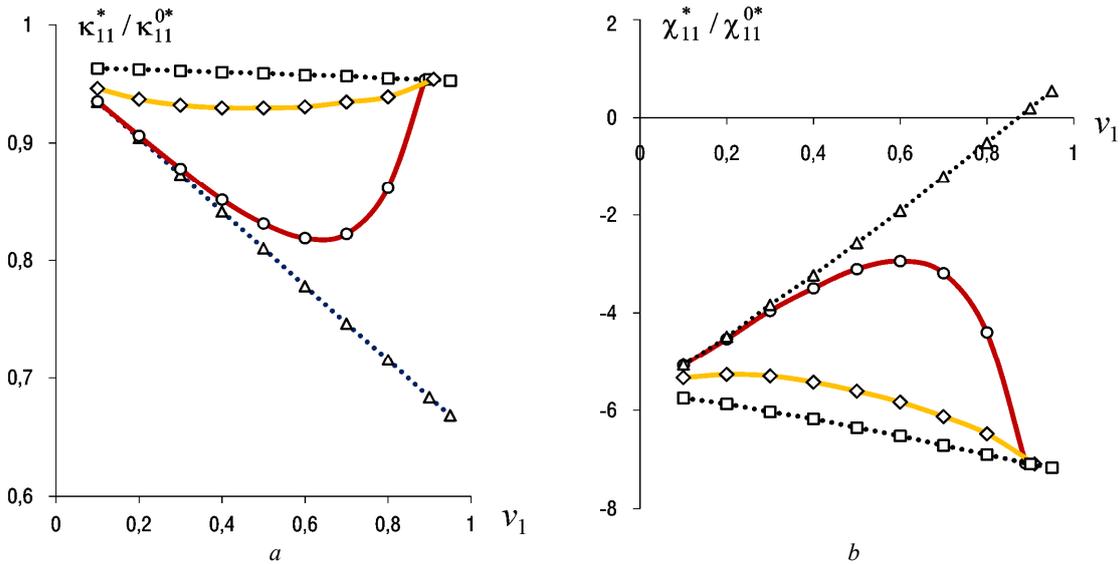


Рис. 4. Эффективные коэффициенты κ_{11}^* (a), χ_{11}^* (b) композита в зависимости от объемной доли v_1 волокон для случая $\epsilon_{33}^{0*} = 0,05, \epsilon_{11,22}^{0*} = 0$

Fig. 4. Effective coefficients κ_{11}^* (a), χ_{11}^* (b) of the composite depending on the volume fraction v_1 of fibers for case $\epsilon_{33}^{0*} = 0,05, \epsilon_{11,22}^{0*} = 0$

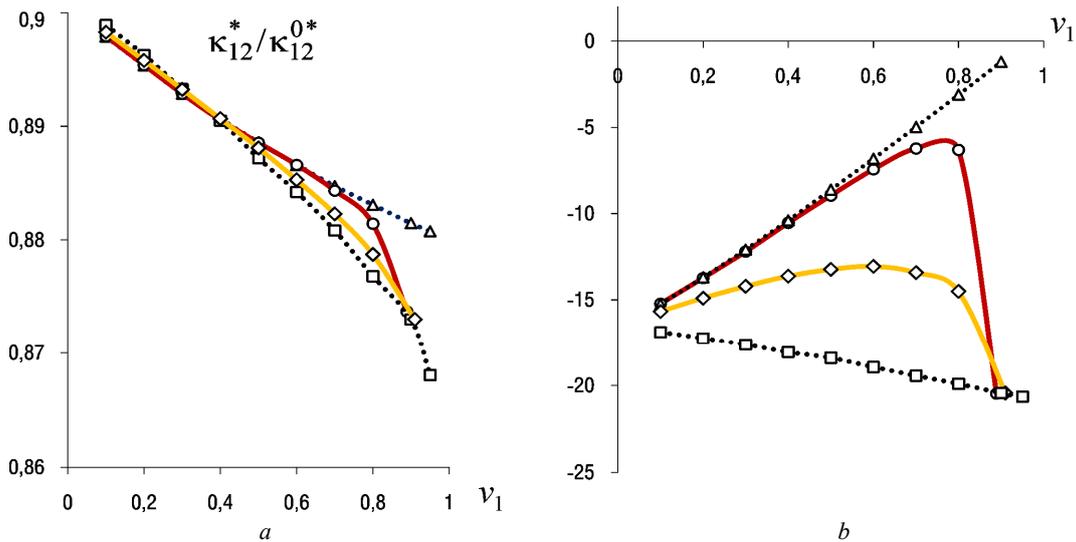


Рис. 5. Эффективные коэффициенты κ_{12}^* (a), χ_{12}^* (b) композита в зависимости от объемной доли v_1 волокон для случая $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} = 0,05, \epsilon_{33}^{0*} = 0$

Fig. 5. Effective coefficients κ_{12}^* (a), χ_{12}^* (b) of the composite depending on the volume fraction v_1 of fibers for case $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} = 0,05, \epsilon_{33}^{0*} = 0$

эффективных коэффициентов электромагнитной $\mathbf{\kappa}^*$ и магнитоэлектрической $\boldsymbol{\chi}^*$ связанностей трансверсально-изотропного однонаправленно-волокнистого композита «PZT-4/феррит» при осесимметричном тензоре начальной макродеформации $\boldsymbol{\epsilon}^{0*}$ композита, когда компоненты $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} \neq 0$ и / или $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$. Выявлено, что при осесимметричном тензоре начальной макродеформации $\boldsymbol{\epsilon}^{0*}$ композита тензоры $\mathbf{\kappa}^*, \boldsymbol{\chi}^*$ по-прежнему имеют однотипный вид (39), но не связаны транспонированием

$\boldsymbol{\chi}^* \neq \mathbf{\kappa}^{*T}, \chi_{33}^* = \kappa_{33}^*$ для рассмотренных случаев: $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} \neq 0$ и/или $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ осесимметричного по оси r_3 начального напряженно-деформированного состояния композита. Для всех ненулевых значений компонент тензоров $\mathbf{\kappa}^*, \boldsymbol{\chi}^*$ выявлены, во-первых, монотонность (как убывающих, так и возрастающих) зависимостей относительных величин $\kappa^*/\kappa^{0*}, \chi^*/\chi^{0*}$ от объемной доли ферритовых волокон v_1 (см. рис. 2, 4–7) для базовых структур: периодической структуры (\square) и статистической смеси (Δ),

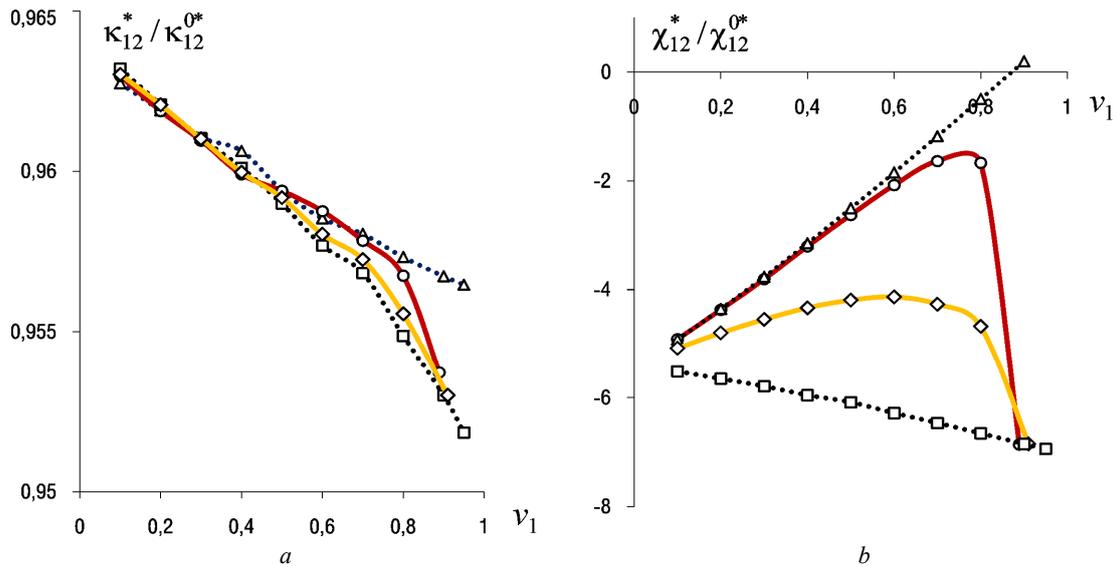


Рис. 6. Эффективные коэффициенты κ_{12}^* (a), χ_{12}^* (b) композита в зависимости от объемной доли ν_1 волокон для случая $\epsilon_{33}^{0*} = 0,05$, $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$

Fig. 6. Effective coefficients κ_{12}^* (a), χ_{12}^* (b) of the composite depending on the volume fraction ν_1 of fibers for case $\epsilon_{33}^{0*} = 0.05$, $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$

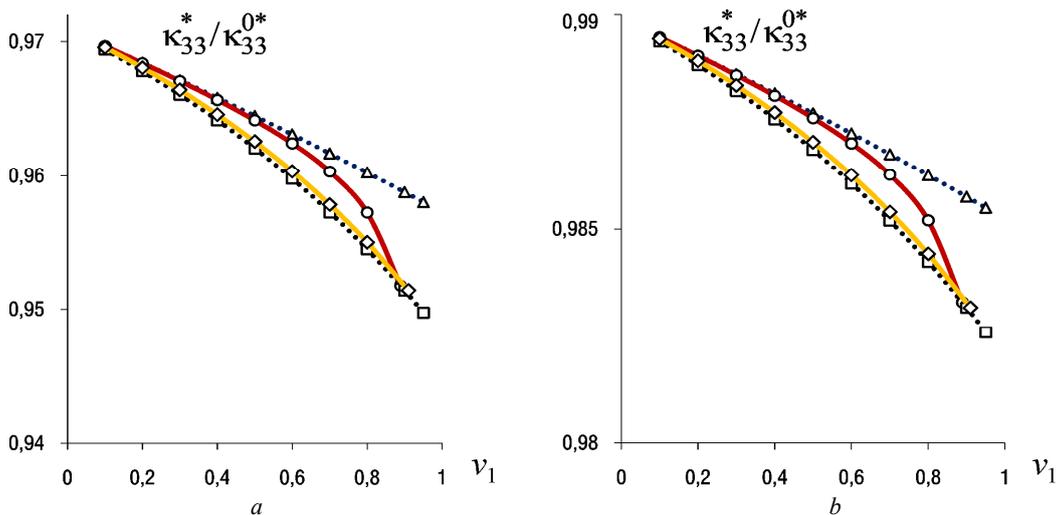


Рис. 7. Эффективный коэффициент κ_{33}^* композита в зависимости от объемной доли ν_1 волокон для случаев: $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} = 0,05$, $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} = 0,05$, $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b)

Fig. 7. Effective coefficient κ_{33}^* of the composite depending on volume fraction ν_1 of fibres for cases: $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} = 0.05$, $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} = 0.05$, $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b)

и существенная немонотонность этих зависимостей для квазипериодических структур (\diamond , \circ) (см. рис. 1, c, d). Во-вторых, выявлены линейность и монотонно убывающий характер зависимостей относительных величин κ^*/κ^{0*} , χ^*/χ^{0*} от значений начальных осевых макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*}$ и/или ϵ_{33}^{0*} композита (например, на рис. 3) с учетом равенств $\kappa^*/\kappa^{0*} = \chi^*/\chi^{0*} = 1$ при $\epsilon^{0*} = 0$. Различия прямолинейных графиков (см. рис. 3) величин κ^*/κ^{0*} , χ^*/χ^{0*} состоят в различиях значений коэффициента пропорциональности, т.е. в угле наклона

графиков к оси абсцисс – начальной осевой деформации: ϵ_{11}^{0*} , ϵ_{22}^{0*} , ϵ_{33}^{0*} при фиксированном значении объемной доли волокон ν_1 . Пропорции в различиях угла наклона графиков этих величин κ^*/κ^{0*} , χ^*/χ^{0*} (например, на рис. 3 при $\nu_1 = 0,2$) обуславливаются пропорциями этих величин на графиках концентрационных (существенно немонотонных для квазипериодических структур) зависимостей на рис. 2, 4–7 при соответствующем значении ν_1 (например, на рис. 2 при $\nu_1 = 0,2$). Таким образом, увеличение абсолютных значений компонент тензоров κ^* , χ^* рассматриваемых структур композитов

(см. рис. 1) имеем при отрицательных значениях компонент ϵ_{11}^{0*} , ϵ_{22}^{0*} , ϵ_{33}^{0*} осесимметричного тензора начальной макродеформации ϵ^{0*} композита. Наиболее существенное влияние имеем для компонент χ_{11}^* (см. рис. 2, *b*, рис. 3, *b*), χ_{12}^* (см. рис. 5, *b*) для случая ненулевых значений начальных осевых макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*}$ в трансверсальной плоскости композита. В случае комбиниро-

ванного начального макродеформирования композита, когда одновременно имеем $\epsilon_{11,22}^{0*} \neq 0$, $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$, тогда результирующие значения относительных величин κ^*/κ^{0*} , χ^*/χ^{0*} находим суммированием соответствующих «коэффициентов влияния» κ^*/κ^{0*} , χ^*/χ^{0*} от каждой из компонент ($\epsilon_{11,22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*}) осесимметричного тензора начальной макродеформации ϵ^{0*} композита.

Библиографический список

1. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. – Oxford: Pergamon Press, 1982. – 630 p.
2. Гузь А.Н. Об определении приведенных упругих постоянных композитных слоистых материалов с начальными напряжениями // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 3. – С. 216–219.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2 т. – Киев. Наукова думка, 1986. Т. 1. Общие вопросы. Киев: Наук. думка. – 376 с. Т. 2. Закономерности распространения. – Киев: Наук. думка. – 536 с.
4. Алехин В.В., Аннин Б.Д., Колпаков А.Г. Синтез слоистых материалов и конструкций. – Новосибирск. Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1988. – 128 с.
5. Akbarov S.D., Guliev M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestretched compound circular cylinder made of incompressible materials // International Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 45, no. 10. – P. 1141–1151.
6. Akbarov S.D. Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, no. 12. – P. 1305–1324.
7. Akbarov S.D. Stability loss and buckling delamination: Three-dimensional linearized approach for elastic and viscoelastic composites. – Springer, 2013. – 448 p.
8. Гулиев М.С., Сейфулаев А.И., Абдуллаева Д.Н. Исследование распространения упругих волн в составном цилиндре с начальным кручением // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2018. – № 5. – С. 404–413.
9. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Свойства преднапряженных изотропных материалов при учете упругих модулей высших порядков // Наука Юга России. – 2017. – № 2. – С. 3–12.
10. Гузь А.Н. Об ультразвуковом неразрушающем методе определения напряжений в элементах конструкций и в приповерхностных слоях материалов: фокус на украинские исследования (обзор) // Прикладная механика. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 3–30.
11. Kuliev G.G., Jabbarov M.D. To elastic waves propagation in strained nonlinear anisotropic media // Proceedings the sciences of Earth of academy sciences Azerbaijan. – 1998. – № 2. – P. 103–112.
12. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Springer, New York, 1999. – 555 p.
13. Akbarov S.D. Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: Linearized three-dimensional approach. – Springer, 2016. – 1004 p.
14. Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space / S. Gupta, D.K. Majhi, S. Kundu, S.K. Vishwakarma // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – Vol. 218, no. 9. – P. 5655–5664.
15. Hu W.T., Chen W.Y. Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model // Journal of Central South University. – 2014. – Vol. 21, no. 2. – P. 753–760.
16. Yesil U.B. Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities // Comput. Mater. Continua. – 2017. – Vol. 53, no. 1. – P. 1–22.
17. Kolpakov A.G. Effect of influence of initial stresses on the homogenized characteristics of composite // Mechanics of materials. – 2005. – Vol. 37, no. 8. – P. 840–854.
18. Уорден К. Новые интеллектуальные материалы и конструкции. – М.: Техносфера, 2006. – 223 с.
19. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика. Т. 1: Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. – М.: Мир, 1966. – С. 204–326.
20. Каралюнас Р.И. Эффективные термопьезоэлектрические свойства слоистых композитов // Механика композитных материалов. – 1990. – № 5. – С. 823–830.
21. Гетман И.П. О магнитоэлектрическом эффекте в пьезокомпозитах // ДАН СССР. – 1991. – Т. 317, № 2. – С. 1246–1259.
22. Коган Л.З., Мольков В.А. Магнитоэлектрические свойства волоконистых пьезокомпозитов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 5. – С. 62–68.
23. Gorbachev V.I. Integral formulas in electromagnetic elasticity of heterogeneous bodies. application in the mechanics of composite materials // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International J. – 2017. – Vol. 8, no. 2. – P. 147–170.
24. Филиппов Д.А. Теория магнитоэлектрического эффекта в гибридных феррит-пьезоэлектрических композиционных материалах // Письма в ЖТФ. – 2004. – Т. 30, № 9. – С. 6–11.
25. Магнитоэлектричество в двумерных статистических смесях / А.В. Турик, А.И. Чернобабов, М.Ю. Родинин, Е.А. Толокольников // Физика твердого тела. – 2009. – Т. 51, № 7. – С. 1395–1397.
26. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. университета, 1984. – 336 с.
27. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
28. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
29. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1976. – 399 с.
30. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. – М.: Наука, 1984. – 115 с.

31. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

32. Паньков А.А. Статистическая механика пьезокомпозитов. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 480 с.

33. Pan'kov A.A. Maxwell-wagner relaxation in fibrous polydisperse magnetoelectric piezocomposites // *Mechanics of Composite Materials*. – 2013. – Vol. 49, no. 1. – P. 45–50.

34. Pan'kov A.A. Piezoactive unidirectionally fibrous polydisperse composite // *Mechanics of Composite Materials*. – 2012. – Vol. 48, no. 6. – P. 603–610.

35. Паньков А.А. Диэлектрические свойства полидисперсных волоконистых пьезоэлектромагнетиков с максвелл-вагнеровской релаксацией // *Физическая мезомеханика*. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 73–78.

References

1. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. *Oxford: Pergamon Press*, 1982, 630 p.

2. Guz' A.N. Ob opredelenii privedennykh uprugih postoyannykh kompozitnykh sloistykh materialov s nachal'nymi napryazheniyami [On the definition of the given elastic permanent composite laminates with initial stresses]. *Doklady AN USSSR. Ser. A*, 1975, no. 3, pp. 216-219.

3. Guz' A.N. Uprugie volny v telah s nachal'nymi napryazheniyami [Elastic waves in bodies with initial voltages]. Kiev. Naukova dumka, 1986. V 2-h t. T.1 Obshchie voprosy [General issues]. Kiev: Nauk. dumka, 376 p. T.2. Zakonomernosti rasprostraneniya [Patterns of distribution]. *Kiev: Nauk. dumka*, 536 p.

4. Alekhin V.V., Annin B.D., Kolpakov A.G. Sintez sloistykh materialov i konstrukcij [Synthesis of layered materials and structures]. *Novosibirsk. In-t gidrodinamiki SO AN SSSR*, 1988, 128 p.

5. Akbarov S.D., Guliev M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestretched compound circular cylinder made of incompressible materials. *International Applied Mechanics*, 2009, vol. 45, no. 10, pp. 1141-1151.

6. Akbarov S.D. Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses. *International Applied Mechanics*, 2007, vol. 43, no. 12, pp. 1305-1324.

7. Akbarov S.D. Stability loss and buckling delamination: Three-dimensional linearized approach for elastic and viscoelastic composites, *Springer*, 2013, 448 p.

8. Guliev M.S., Sejfulaev A.I., Abdullaeva D.N. Issledovanie rasprostraneniya uprugih voln v sostavnom cilindre s nachal'nym krucheniem [Study of the propagation of elastic waves in a composite cylinder with initial torsion]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij*, 2018, no.5, pp. 404-413.

9. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Svoystva prednapryazhennykh izotropnykh materialov pri uchete uprugih modulej vysshih poruyadkov [Properties of prestressed isotropic materials when taking into account elastic modules of higher orders]. *Nauka YUga Rossii*, 2017, no.2, pp. 3-12.

10. Guz' A.N. Ob ul'trazvukovom nerazrushayushchem metode opredeleniya napryazhenij v elementah konstrukcij i v pri-poverhnostnykh sloyah materialov: fokus na ukrainskie issledovaniya (obzor) [On the ultrasonic non-destructive method of determining stresses in structural elements and near-surface layers of materials: focus on Ukrainian research (review)]. *Prikladnaya mekhanika*, 2014, vol.50, no.3, pp. 3-30.

11. Kuliev G.G., Jabbarov M.D. To elastic waves propagation in strained nonlinear anisotropic media. *Proceedings the sciences of Earth of academy sciences Azerbaijan*, 1998, no. 2, pp.103-112.

36. Guo X., Wei P. Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses // *Ultrasonics*. – 2016. – Vol. 66. – P. 72–85.

37. Dasdemir A. Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core // *International Applied Mechanics*. – 2018. – Vol. 54, no. 4. – P. 480–493.

38. Паньков А.А. Коэффициенты электромагнитной связи композита с пьезоактивными фазами // *Физическая мезомеханика*. – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 93–99.

39. Паньков А.А. Упругие свойства квазипериодических композитов с учетом корреляционных функций структуры // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2011. – Т. 17, № 3. – С. 385–400.

12. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies, *Springer, New York*, 1999, 555 p.

13. Akbarov S.D. Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: Linearized three-dimensional approach, *Springer*, 2016, 1004 p.

14. Gupta S., Majhi D.K., Kundu S., Vishwakarma S.K. Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, vol. 218, no. 9, pp. 5655-5664.

15. Hu W.T., Chen W.Y. Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model. *Journal of Central South University*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 753-760.

16. Yesil U.B. Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities. *Comput. Mater. Continua*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 1-22.

17. Kolpakov A.G. Effect of inflation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite. *Mechanics of materials*, 2005, vol. 37, no. 8, pp. 840-854.

18. Uorden K. Novye intellektual'nye materialy i konstrukcii [New Intelligent Materials and Designs]. *Moscow: Tekhnosfera*, 2006. – 223 p.

19. Berlinkur D., Kerran D., ZHaffe G. P'ezoelektricheskie i p'ezomagnitnye materialy i ih primenenie v preobrazovatelyah [Piezoelectric and piezomagnetic materials and their use in transducers]. *Fizicheskaya akustika*. T.1: Metody i pribory ul'trazvukovykh issledovaniy. CHast' A., *Moscow: Mir*, 1966, pp. 204–326.

20. Karalyunas R.I. Effektivnyye termop'ezoelektricheskie svoystva sloistykh kompozitov [Effective thermopiezoelectric properties of laminated composites]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1990, no. 5, pp. 823 830.

21. Getman I.P. O magnitoelektricheskom effekte v p'ezokompozitah [On the magnetoelectric effect in piezocomposites]. *DAN SSSR*, 1991, vol. 317, no. 2, pp. 1246–1259.

22. Kogan L.Z., Mol'kov V.A. Magnitoelektricheskie svoystva voloknistykh p'ezokompozitov [Magnetoelectric properties of fibrous piezocomposites]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 1996, no. 5, pp. 62 68.

23. Gorbachev V.I. Integral formulas in electromagnetic elasticity of heterogeneous bodies. application in the mechanics of composite materials. *Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International J.*, 2017, vol. 8, no. 2, pp. 147–170.

24. Filippov D.A. Teoriya magnitoelektricheskogo effekta v gibridnykh ferrit-p'ezoelektricheskikh kompozitsionnykh materialah

[Theory of magnetoelectric effect in hybrid ferrite-piezoelectric composites]. *Pis'ma v ZHTF*, 2004, vol. 30, no. 9, pp. 6-11.

25. Turik A.V., Chernobabov A.I., Rodinin M.YU., Tolokol'nikov E.A. Magnitoelektrichestvo v dvumernykh statisticheskikh smesyah [Magnetoelectricity in two-dimensional statistical mixtures]. *Fizika tverdogo tela*, 2009, vol. 51, no. 7, pp. 1395-1397.

26. Pobedrya B.E. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. *Moscow: Izd-vo Mosk. universiteta*, 1984, 336 p.

27. Grigolyuk E.I., Fil'shtinskij L.A. Perforirovannye plastiny i obolochki [Perforated plates and shells]. *Moscow: Nauka*, 1970, 556 p.

28. Kristensen R. Vvedenie v mekhaniku kompozitov [Introduction to the mechanics of composites]. *Moscow: Mir*, 1982, 334 p.

29. Shermegor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodny'x sred [Theory of elasticity of microneodonorous media]. *Moscow: Nauka*, 1976, 399 p.

30. Sokolkin YU.V., Tashkinov A.A. Mekhanika deformirovaniya i razrusheniya strukturno neodnorodnykh tel [Mechanics of deformation and destruction of structurally heterogeneous bodies]. *Moscow: Nauka*, 1984, 115 p.

31. Horoshun L.P., Maslov B.P., Leshchenko P.V. Prognozirovaniye effektivnykh svoystv p'ezoaktivnykh kompozitnykh materialov [Prediction of effective properties of piezoactive composite materials]. *Kiev: Nauk. dumka*, 1989, 208 p.

32. Pan'kov A.A. Statisticheskaya mekhanika p'ezokompozitov [Statistical mechanics of piezocomposites]. *Perm': Izd-vo Perm. gos. tekhn. un-ta*, 2009, 480 p.

33. Pan'kov A.A. Maxwell–wagner relaxation in fibrous polydisperse magnetoelectric piezocomposites // *Mechanics of Composite Materials*, 2013, vol.49, no.1, pp.45-50.

34. Pan'kov A.A. Piezoactive unidirectionally fibrous polydisperse composite. *Mechanics of Composite Materials*, 2012, vol.48, no.6, pp. 603-610.

35. Pan'kov A.A. Dielektricheskie svoystva polidispersnykh voloknistykh p'ezoelektromagnetikov s maksvell-vagnerovskoy relaksaciej [Dielectric properties of polydisperse fibrous piezoelectromagnets with Maxwell-Wagnerian relaxation]. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 73-78.

36. Guo X., Wei P. Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses. *Ultrasonics*, 2016, vol. 66, pp. 72-85.

37. Dasdemir A. Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core. *International Applied Mechanics*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 480-493.

38. Pan'kov A.A. Koeffitsienty elektromagnitnoy svyazi kompozita s p'ezoaktivnymi fazami [Electromagnetic coupling coefficients of the composite with piezoactive phases]. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2011, vol.14, no.2, pp. 93–99.

39. Pan'kov A.A. Uprugie svoystva kvaziperiodicheskikh kompozitov s uchetom korrelyatsionnykh funktsiy struktury [Elastic properties of quasi-periodic composites taking into account the correlation functions of the structure]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 385–400.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края в рамках научного проекта № 20-41-596010.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Financing. The reported study was funded by RFBR and Perm Territory, project number 20-41-596010.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.