Микишанина Е.А. Моделирование установившейся фильтрации жидкости в кусочно-неоднородной упругопористой области в классе почти-периодических функций (плоская задача) // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 2. С. 38–46. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.05

Mikishanina E.A. Modeling of steady-state liquid filtration in a piecewise inhomogeneous elastic-porous medium in the class of almost-periodic functions (plane problem). *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 2, pp. 38-46. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.05

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2023

PNRPU MECHANICS BULLETIN

https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index

Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.05

УДК 532.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОПОРИСТОЙ ОБЛАСТИ В КЛАССЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

Е.А. Микишанина

Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 21 июля 2022 г.
Одобрена: 06 марта 2023 г.
Принята к публикации:
30 апреля 2023 г.

Ключевые слова:

моделирование, фильтрация жидкости, упругопористая среда, кусочно-неоднородная область, обобщенное дискретное преобразование Фурье, почти-периодическая функция, коэффициент фильтрации.

АННОТАЦИЯ

При моделировании фильтрации жидкости в пористой среде принято считать коэффициент фильтрации постоянным, в результате чего решение упрощается и сводится к краевой задаче для уравнения Лапласа. В настоящей работе строятся с помощью обобщенного дискретного преобразования Фурье почти-периодические по Бору аналитические решения плоской задачи установившейся фильтрации жидкости в упругопористой кусочно-неоднородной области. Область представляет собой полосу, состоящую нескольких слоев (полос) с различными упругими и фильтрационными характеристиками. В предположении, что коэффициент фильтрации упругопористой среды зависит от первого инварианта тензора напряжений, считаем его линейно-зависимым от координаты, изменяющейся вдоль ширины полосы. Задача фильтрации сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных с заданными граничными условиями на верхней и нижней границах всей многослойной полосы и условиями на внутренних линиях раздела сред, которая, в свою очередь, сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений Бесселя. Все решения в данной работе получены в виде абсолютно сходящихся рядов Бора – Фурье, коэффициенты которых выражаются через заданные функции. Смоделирована фильтрация жидкости в трехслойной полосе, состоящей из слоев различных легких и достаточно упругопористых осадочных и магматических горных пород. Построены графики искомых механических параметров. Показана их сходимость к граничным условиям и условиям на линиях раздела сред.

В работе также приведены основные сведения, касающиеся свойств почти-периодических функций и обобщенного дискретного преобразования Фурье, необходимые для более детального понимания проблемы.

© ПНИПУ

© **Микишанина Евгения Арифжановна** – к.ф.-м.н., доц., e-mail: evaeva_84@mail.ru.

Evgeniya A. Mikishanina – SCs of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: evaeva_84@mail.ru.

Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

MODELING OF STEADY-STATE LIQUID FILTRATION IN A PIECEWISE INHOMOGENEOUS ELASTIC-POROUS MEDIUM IN THE CLASS OF ALMOST-PERIODIC FUNCTIONS (PLANE PROBLEM)

E.A. Mikishanina

Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 21 July 2022
Approved: 06 March 2023
Accepted for publication:
30 April 2023

Keywords:

modeling, fluid filtration, elastic-porous medium, piecewise heterogeneous domain, generalized discrete Fourier transform, almost-periodic function, filtration coefficient.

ABSTRACT

When modeling liquid filtration in a porous medium, it is assumed that the filtration coefficient is constant, as a result of which the solution is simplified and reduced to a boundary value problem for the Laplace equation. In this paper, the almost periodic of Bohr analytical solutions of the plane problem of steady-state liquid filtration in an elastic – porous piecewise inhomogeneous domain are constructed using a generalized discrete Fourier transform . The domain is a strip consisting of several layers (strips) with different elastic and filtration parameters. Assuming that the filtration coefficient of an elastic-porous medium depends on the first invariant of the stress tensor, we consider it linearly dependent on the coordinate varying along the bandwidth. The filtration problem is reduced to solving a system of partial differential equations with specified boundary conditions on the upper and lower boundaries of the entire multilayer strip and conditions on the internal lines of the media interface, which in turn is reduced to solving the Cauchy problem for a system of Bessel ordinary differential equations. All solutions in this paper are obtained in the form of absolutely convergent Bohr-Fourier series, the coefficients of which are expressed in terms of given functions. Fluid filtration in a three-layer strip consisting of various light and sufficiently elastic-porous sedimentary and igneous rock layers is modeled. Graphs of the desired mechanical parameters are constructed. Their convergence to boundary conditions and conditions on the interface lines of media is shown.

The paper also provides basic information concerning the properties of almost-periodic functions and the generalized discrete Fourier transform necessary for a more detailed understanding of the problem.

© PNRPU

Введение

Решение задачи установившейся фильтрации жидкости в среде с постоянным коэффициентом фильтрации сводится к нахождению гармонической функции по ее граничным условиям и не представляет никаких сложностей. Достаточно подробно фильтрация в пористых, как правило, дисперсных средах изучена в работах [1–8], где предложен ряд методов (аналитических или численных) решения задачи в однородных и неоднородных пластах. И, действительно, говоря о фильтрации, как правило, складывается представление о движении жидкости в грунтах. Но жидкость способна проникать под действием гидравлического напора даже в упругие слабо пористые тела. Это подтверждается в работах [9; 10]. Например, при разработке угольных пластов для извлечения из кливажей метана применяют закачку под давлением воды с последующей откачкой, в результате чего изменяются свойства угля, и он может закупорить кливажи и затруднить извлечение газа [11]. Схожая проблема возникает при сооружении и эксплуатации глубинных построек [12].

Ввиду того, что скорость распространения упругих возмущений в рассматриваемой среде выше скорости фильтрации, то изменение напряженного состояния упругой среды повлечет изменение коэффициента фильтрации. В работе [13] автором была выдвинута и доказана гипотеза о зависимости коэффициента фильтрации от первого инварианта тензора напряжений. На самом деле зависимость водопроницаемости среды от возникающих на границе среды нагрузок – факт довольно известный, проверенный экспериментально. Однако этот вопрос рассматривается, как правило, в контексте сжимаемости грунтов, который обусловливается фильтрационной консолидацией и «переупаковкой» частиц [14; 15]. На практике используются лабораторно полученные значения коэффициентов фильтрации, которые могут не соответствовать реальным значениям и не давать математического описания среды в целом. В работах автора [13; 36] предложена четкая постановка краевой задачи фильтрации жидкости в среде с переменным коэффициентом фильтрации, как линейной функции от первого инварианта тензора напряжения. В упругопористых средах изменение коэффициента фильтрации будет происходить за счет изменения объема порового пространства. Таким образом, задачу можно свести к последовательному рассмотрению сначала напряженного состояния среды, а затем к решению задачи фильтрации с переменным коэффициентом фильтрации. В данной работе сделаны предположения, в рамках которых коэффициент фильтрации в плоской задаче линейно зависит от вертикальной координаты.

В данной работе решается плоская задача установившейся фильтрации в кусочно-неоднородной упругопористой области, представляющей горизонтальную полосу, состоящую из нескольких слоев – полос с различными упругими свойствами и различными линейными по вертикальной координате коэффициентами фильтрации. Математическая постановка предполагает решение системы дифференциальных уравнений в частных производных с заданием на внешних границах многослойной полосы граничных условий и дополнительных условий на внутренних линиях раздела слоев. Поставленная задача решается в классе почти-периодических по Бору функций [16; 17] с помощью обобщенного дискретного преобразования (ОДФ), введенного и изученного в [18; 19]. Построенный алгоритм представляет собой аналитический метод решения широкого класса задач математической физики. В работе [20] был описан алгоритм построения почти-периодических в смысле Бора решений краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, а в [21] – проиллюстрирован алгоритм на задаче установившейся фильтрации в пористой среде с постоянным коэффициентом фильтрации. В настоящей работе построены почти-периодические в смысле Бора решения краевых задач для уравнений в частных производных произвольного порядка, в том числе с переменными коэффициентами применительно к моделированию установившейся фильтрации жидкости в кусочно-неоднородной среде.

Довольно часто задачи математической физики решаются либо численно [22–27], либо аналитически с помощью преобразования Фурье, когда решения их записываются в виде интегралов Фурье, что вызывает большие вычислительные трудности [28–33]. В данной работе решения получены в виде абсолютно сходящихся рядов Бора – Фурье, коэффициенты которых выражаются через заданные функции.

Между теорией периодических и почти-периодических функций есть много общего. Однако класс почти-периодических функций гораздо шире, и, в отличие от периодических, для почти-периодических функций показатели Фурье могут иметь предельные точки на конечном расстоянии и лежать всюду плотно.

1. Почти-периодические функции и обобщенное дискретное преобразование Фурье

Приведем в этом разделе некоторые понятия и рассуждения, касающиеся почти-периодических функций и основного дискретного преобразования Фурье, которые необходимы для более детального понимания рассматриваемой в работе проблемы. Более подробно с этими понятиями можно ознакомиться в [16–19].

Множество почти-периодических по Бору функций Π_w состоит из функций вида

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{i\lambda_n t},\ -\infty<t<+\infty, \qquad (1)$$

причем соответствующая каждой такой функции последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_1$ [1], то есть справедливо $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|<\infty$.

Множество Π_w является банаховой алгеброй [16; 19]. Ряд (1) сходится абсолютно и равномерно при $-\infty<t<+\infty$.

Поставим каждой функции $F(t)\in\Pi_w$ в соответствие функцию

$$f(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}F(t)e^{-i\lambda t}, \qquad (2)$$

которая существует и отлична от нуля не более, чем для счетного множества действительных значений λ: $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n,\ldots$. Функция $f(\lambda)$ задает счетное множество пар

$$f(\lambda)=\{(f_1,\lambda_1),(f_2,\lambda_2),\ldots\}\in l_1,\ f_n\in C,\lambda_n\in R. \qquad (3)$$

Таким образом, установлено взаимно-однозначное соответствие между почти-периодическими по Бору функциями (1) и двумерными последовательностями (3). Справедливо и обратное: для каждой функции $f(\lambda)\in l_1$ существует функция $F(t)\in\Pi_w$, для которой выполнено (2).

Определение. Равенство (1), по которому каждой последовательности $f(\lambda)\in l_1$ ставится в соответствие функция $F(t)\in\Pi_w$, называется дискретным преобразованием Фурье (ОДФ). Обозначение: $F(t)=W_0 f(\lambda)$.

Определение. Равенство (2) по которому каждой функции $F(t)\in\Pi_w$ ставится в соответствие двумерная последовательность $f(\lambda)\in l_1$ называется обратным преобразованием Фурье. Обозначение: $f(\lambda)=W_0^{-1}F(t)$.

Предложение. Если $F(t)$ дифференцируема p раз и принадлежит вместе со своими производными $\frac{dF^j(t)}{dt^j}$ до p порядка множеству Π_w, то

$$W_0^{-1}\frac{dF^j(t)}{dt^j}=(i\lambda)^j f(\lambda). \qquad (4)$$

Если существует последовательность положительных чисел $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_1$ такая, что $|f_n(y)|\le\varphi_n$ для любо-

[1] Семейство последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$, $p<\infty$, задает пространство l^p, с заданной на нем мерой $\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

го $y \in [a, b]$, то функции $F(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) e^{i\lambda_n t} \in \Pi_w^y$ на каждой горизонтальной прямой полосе $-\infty < t < +\infty, a \le y \le b$. Тогда коэффициенты последовательности $f(\lambda) = W_0^{-1} F(t, y)$ также будут зависеть от параметра y:

$$f(\lambda, y) = \{(f_1(y), \lambda_1), (f_2(y), \lambda_2), \ldots\}, \quad y \in [a, b].$$

В этом случае справедливо следующее.

Предложение. Если функция $F(t, y)$ дифференцируема по y p раз и по t q раз и вместе со своими частными производными $\frac{\partial^j F(t,y)}{\partial y^j}$, $j = \overline{0, p}$, и $\frac{\partial^k F(t,y)}{\partial t^k}$, $k = \overline{0, q}$, принадлежит Π_w^y, то

$$\begin{aligned} W_0^{-1} \frac{\partial^j F(t,y)}{\partial y^j} &= \frac{d^j f(\lambda, y)}{dy^j}, \\ W_0^{-1} \frac{\partial^k F(t,y)}{\partial t^k} &= (i\lambda)^k f(\lambda, y). \end{aligned} \tag{5}$$

2. Решение уравнений в частных производных в классе почти-периодических функций

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения в частных производных N-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{k} a_m^k \frac{\partial^k u(x,y)}{\partial x^{k-m} \partial y^m} = g(x, y). \tag{6}$$

Граничные условия задаются в зависимости от особенностей моделируемого сценария.

Требуется найти непрерывную функцию $u(x, y)$, которая в полосе $D = \{(x, y) | -\infty < x < +\infty, a \le y \le b\}$ определена и удовлетворяет уравнению (6) с заданными граничными условиями, которые определяются особенностями моделируемого сценария.

Считаем, что функция, стоящая в правой части уравнения (6)

$$g(x, y) = \sum_n g_n(y) e^{i\lambda_n x} \in \Pi_w^y,$$

а функции в граничных условиях принадлежат Π_w, то есть представимы в виде

$$\Phi(x) = \sum_n \varphi_n e^{i\lambda_n x}.$$

Будем искать почти-периодические по Бору решения, принадлежащие множеству Π_w^y, то есть в виде

$$u(x, y) = \sum_n u_n(y) e^{i\lambda_n x}.$$

Если подействовать оператором W_0^{-1} на уравнение (6), то получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение N-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{m=0}^{N} u_n^{(m)}(y) \sum_{k=m}^{N} a_m^k (i\lambda_n)^{k-m} = g_n(y), \tag{7}$$

где λ_n – параметр. Решая полученные уравнения для каждого λ_n, получим решение в виде

$$u_n(y) = u_n(\lambda_n, y) = \sum_{j=1}^{N} q_{n,j} \xi_j(\lambda_n, y) + \tilde{\xi}(\lambda_n, y),$$

где $\xi_j(\lambda_n, y)$ – линейно независимые решения линейного однородного уравнения, соответствующего уравнению (7), $\tilde{\xi}(\lambda_n, y)$ – частное решение линейного неоднородного уравнения (7), $q_{n,j}$ – постоянные, которые определяются для каждого λ_n из условий на границах $y = a$ и $y = b$.

Рассмотренный алгоритм решения уравнений может быть применен и для ряда дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами $a_m^k = a_m^k(y)$. Рассмотрим реализацию предложенного алгоритма для моделирования фильтрации жидкости с переменным коэффициентом фильтрации в многослойной полосе.

3. Задача фильтрации с переменным коэффициентом фильтрации

3.1. Обоснование переменности коэффициента фильтрации

Как правило, при решении задач фильтрации жидкости в упругопористой среде коэффициент фильтрации среды принято считать постоянным. В этом случае решение задачи значительно упрощается и сводится к решению краевой задачи для уравнения Лапласа. Однако в работе [13] была получена линейная зависимость коэффициента фильтрации упругопористой среды от первого инварианта тензора напряжений. То есть в плоском случае для коэффициента фильтрации справедливо

$$k = k_0(1 + \delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \quad \delta = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E},$$

где k, k_0 – скорректированный и теоретический коэффициенты фильтрации упругопористой среды соответственно.

Рассмотрим тяжелый упругопористый слой в привычных обозначениях осей декартовой системы координат Oxy, на продольных границах которого $y = l_1$ и $y = l_2$ заданы постоянные напряжения, не зависящие от

x (границы могут быть в том числе и свободны от напряжений). Считая, что ось Oy направлена вверх, решение плоской задачи теории упругости

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}-\rho_T g=0,\\&\Delta(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=0,\end{aligned}\qquad(8)$$

где ρ_T – плотность твердого тела, g – ускорение силы тяжести, будет иметь вид

$$\sigma_{xx}=\tau_{xy}=0,\quad \sigma_{yy}=\rho_T gy+c,$$

где константа c определяется условиями на границе.

Таким образом, коэффициент фильтрации представим в виде

$$k=a+\varepsilon y,\qquad(9)$$

причем $a+\varepsilon y>0$ для любого $y\in[l_1,l_2]$.

Таким образом, задача плоской установившейся фильтрации в упругопористой среде с коэффициентом фильтрации (9) примет вид

$$\nabla\cdot((a+\varepsilon y)\nabla p)=0,\qquad(10)$$

где ∇ – оператор набла, с граничными условиями

$$p(x,l_1)=0,\quad p(x,l_2)=\Phi(x).$$

Рассмотрим далее решение задачи плоской установившейся фильтрации в кусочно-неоднородной упругопористой среде.

3.2. Установившаяся плоская фильтрация жидкости в кусочно-неоднородной упругопористой среде

Математическая постановка задачи. Найти непрерывные в каждой полосе $-\infty<x<+\infty,\ l_j\le y\le l_{j+1}$ упругопористой области функции давления $p_j(x,y)$ (без учета весомости жидкости), $j=\overline{1,m},$ удовлетворяющие системе уравнений

$$\nabla\cdot\left(k_j^0\left(a_j+\varepsilon_j y\right)\nabla p_j(x,y)\right)=0.\qquad(11)$$

На верхней и нижней границах области заданы граничные условия

$$p_1(x,l_1)=0,\quad p_m(x,l_{m+1})=\Phi(x).$$

На линиях раздела сред заданы условия

$$p_j(x,l_{j+1})=p_{j+1}(x,l_{j+1}),$$

$$k_j^0\left(a_j+\varepsilon_j l_{j+1}\right)\frac{\partial p_j}{\partial y}(x,l_{i+1})=k_{j+1}^0\left(a_{j+1}+\varepsilon_{j+1}l_{j+1}\right)\frac{\partial p_{j+1}}{\partial y}(x,l_{j+1}),$$

$$j=\overline{1,m-1}.$$

Считая, что функция $\Phi(x)$ представима в виде

$$\Phi(x)=\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{i\lambda_n x},$$

решение системы (11) будем искать в виде

$$p_j(x,y)=p_{0,j}(y)+\sum_{n=1}^{\infty}p_{n,j}(y)e^{i\lambda_n x}.\qquad(12)$$

Решение. Подействуем оператором W_0^{-1} на частные производные уравнений (11) и получим обыкновенные дифференциальные уравнения, приводимые к уравнениям Бесселя [34]

$$p''_{n,j}+\frac{1}{b_j+y}p'_{n,j}-\lambda_n^2 p_{n,j}=0,$$

где $b_j=a_j/\varepsilon_j$.

При $\lambda_0=0$ получим

$$p_{0,j}(y)=d_j^1+d_j^2\ln(b_j+y).$$

При остальных λ_n получим

$$p_{n,j}=c_{n,j}^1 I_0\left(\lambda_n(b_j+y)\right)+c_{n,j}^2 K_0\left(\lambda_n(b_j+y)\right),$$

где I_0, K_0 – функции Бесселя 1-го и 2-го рода нулевого порядка мнимого аргумента.

Таким образом, решения системы дифференциальных уравнений (11) имеет вид

$$p_j(x,y)=d_j^1+d_j^2\ln(b_j+y)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{n,j}^1 I_0\left(\lambda_n(b_j+y)\right)+c_{n,j}^2 K_0\left(\lambda_n(b_j+y)\right)\right]e^{i\lambda_n x}.$$

Постоянные $d_j^1,d_j^2,c_{n,j}^1,c_{n,j}^2$ определяются из граничных условий и условий на линиях раздела сред как решения систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}d_1^1+d_1^2\ln(b_1+l_1)=0,\\d_m^1+d_m^2\ln(b_m+l_{m+1})=\varphi_0,\\d_j^1+d_j^2\ln(b_j+l_{j+1})=d_{j+1}^1+d_{j+1}^2\ln(b_{j+1}+l_{j+1}),\\d_j^2k_j\varepsilon_j=d_{j+1}^2k_{j+1}\varepsilon_{j+1},\\j=\overline{1,m-1}.\end{cases}\qquad(13)$$

$$\begin{cases}c_{n,1}^1 I_0\left(\lambda_n(b_1+l_1)\right)+c_{n,1}^2K_0\left(\lambda_n(b_1+l_1)\right)=0,\\c_{n,m}^1 I_0\left(\lambda_n(b_m+l_{m+1})\right)+c_{n,m}^2K_0\left(\lambda_n(b_m+l_{m+1})\right)=\varphi_n,\\c_{n,j}^1 I_0\left(\lambda_n(b_j+l_{j+1})\right)+c_{n,j}^2K_0\left(\lambda_n(b_j+l_{j+1})\right)=\\=c_{n,j+1}^1 I_0\left(\lambda_n(b_{j+1}+l_{j+1})\right)+c_{n,j+1}^2K_0\left(\lambda_n(b_{j+1}+l_{j+1})\right),\\\dfrac{k_j\varepsilon_j\left(b_j+l_{j+1}\right)}{k_{j+1}\varepsilon_{j+1}\left(b_{j+1}+l_{j+1}\right)}\left[c_{n,j}^1 I_1\left(\lambda_n(b_j+l_{j+1})\right)-c_{n,j}^2K_1\left(\lambda_n(b_j+l_{j+1})\right)\right]=\\=c_{n,j+1}^1 I_1\left(\lambda_n(b_{j+1}+l_{j+1})\right)-c_{n,j+1}^2K_1\left(\lambda_n(b_{j+1}+l_{j+1})\right),\ j=\overline{1,m-1},\end{cases}\qquad(14)$$

где I_1, K_1 – функции Бесселя 1-го и 2-го рода первого порядка мнимого аргумента.

Асимптотическое поведение коэффициентов. Исследуем поведение коэффициентов при неограниченном возрастании λ_n. Асимптотические формулы для модифицированных функций Бесселя при достаточно больших значениях аргументов имеют вид [35]

$$I_\nu(z) \propto \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad K_\nu(z) \propto \frac{\pi e^{-z}}{\sqrt{2\pi z}}, \ |z| \to \infty . \qquad (15)$$

Заменяя модифицированные функции Бесселя выражениями (15) в системе (14), получим асимптотические выражения для коэффициентов ряда (12):

при $\lambda_n \to +\infty$

$$p_{n,j}(\lambda_n, y) \propto \frac{\varphi_n\left(Ae^{-\lambda_n(y-l_j)} + Be^{\lambda_n(y-l_j)}\right)\left(e^{(l_j-l_1)\lambda_n} + o\left(e^{(l_j-l_1)\lambda_n}\right)\right)}{\sqrt{(b_j+y)}\left(e^{(l_m-l_1)\lambda_n} + o\left(e^{(l_m-l_1)\lambda_n}\right)\right)},$$

$$y \in \left[l_j, l_{j+1}\right].$$

при $\lambda_n \to +\infty$

$$p_{n,j}(\lambda_n, y) \propto \frac{\varphi_n\left(Ae^{-\lambda_n(y-l_j)} + Be^{\lambda_n(y-l_j)}\right)\left(e^{-(l_j-l_1)\lambda_n} + o\left(e^{-(l_j-l_1)\lambda_n}\right)\right)}{\sqrt{(b_j+y)}\left(e^{-(l_m-l_1)\lambda_n} + o\left(e^{-(l_m-l_1)\lambda_n}\right)\right)},$$

$$y \in \left[l_j, l_{j+1}\right],$$

где $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Таким образом, при $y < l_m$ и $y \in \left[l_j, l_{j+1}\right]$

$$\lim_{\lambda_n \to \pm\infty} p_{n,j}(\lambda_n, y) = 0,$$

при $y = l_m$

$$\lim_{\lambda_n \to \pm\infty} p_{n,m}(\lambda_n, y) = C \cdot \varphi_n,$$

C – некоторая постоянная. Так как $\left\{\varphi_n\right\}_n \in l^1$, то при фиксированном $y = y^*$ последовательность коэффициентов $\left\{p_{n,j}(\lambda_n, y^*)\right\}_n \in l^1$.

3.3. Числовые расчеты

Рассмотрим упругопористый пласт, состоящий из трех слоев: вулканического туфа (первый нижний слой, h = 1 м), известняка-ракушечника (второй средний слой, h = 2 м), пористого кавернозного известняка (третий верхний слой, h = 1 м). Основные механические и фильтрационные свойства материалов представлены в таблице.

Введем систему координат, как показано на рис. 1.

Решая задачу упругости с учетом массовых сил (8), определим коэффициенты фильтрации в каждом слое

$$k_1 = 0{,}0005\left(0{,}9705 + 0{,}0115y\right),$$

$$k_2 = 0{,}003\left(0{,}94 + 0{,}012y\right), \qquad (16)$$

$$k_3 = 0{,}002\left(0{,}976 + 0{,}006y\right).$$

Механические (упругие) и фильтрационные свойства сред

Elastic and filtration media properties

Порода	Плотность в водонасыщенном состоянии ρ, кг/м^3	Коэффициент Пуассона, ν	Модуль упругости, E, МПа	Коэффициент фильтрации недеформированной среды, k, м/с
Вулканический туф	1900	0,2	1,2	0,0005
Известняк-ракушечник	1230	0,33	0,45	0,003
Известняк кавернозный	2280	0,3	2	0,002

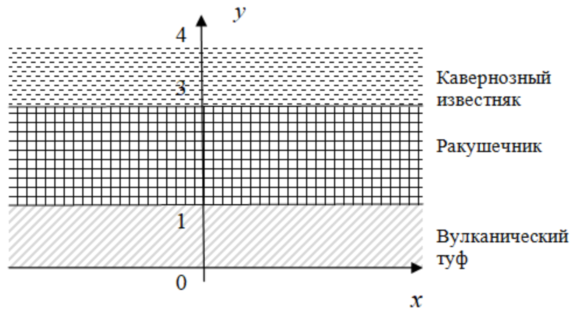

Рис. 1. Трехслойная упругопористая плита

Fig. 1. Three-layer elastic-porous plate

Найдем непрерывные в каждой полосе $-\infty < x < +\infty$, $0 \le y \le 1$, $1 \le y \le 3$, $3 \le y \le 4$, с заданным коэффициентами фильтрации (16) функции давления $p_j(x, y)$, $j = \overline{1,3}$, удовлетворяющие системе уравнений (11), если на внешних границах области заданы условия

$$p(x,0) = 0, \quad p(x,4) =$$
$$10^3\left(5 - 2\cos\left(\sqrt{0{,}1}x\right) + \sin\left(\sqrt{0{,}1}x\right) + \cos\left(0{,}2x\right)\right).$$

Перепишем граничные условия в виде

$$p(x,0) = 0,$$

$$p(x,4) = 10^3\left(5 + \frac{1}{2}e^{0{,}2ix} + \frac{1}{2}e^{-0{,}2ix} + \right.$$
$$\left. + \left(-1 - \frac{1}{2}i\right)e^{\sqrt{0{,}1}ix} + \left(-1 + \frac{1}{2}i\right)e^{-\sqrt{0{,}1}ix}\right).$$

На рис. 2 представлено изменение давления в пластах.

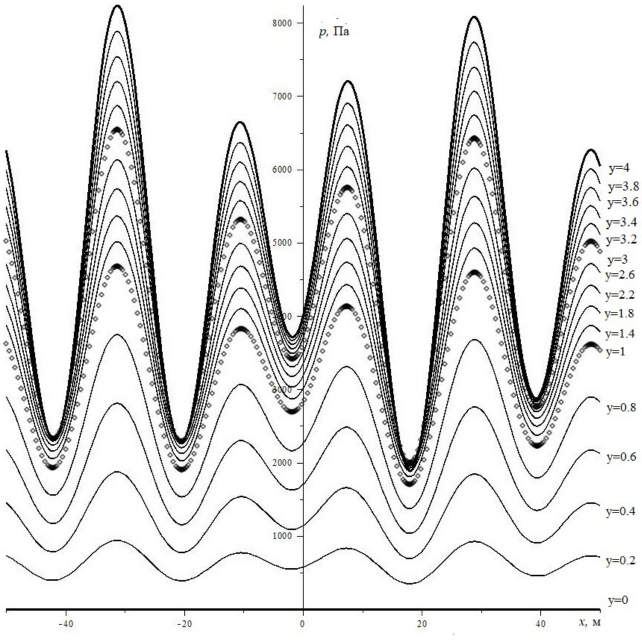

Рис. 2. График функции давления в многослойном пласте

Fig. 2. Graph of the pressure function in a multilayer formation

Жирными линиями изображены граничные условия, тонкими линиями – соответствующие функции давления внутри пласта, точечными – функции давления на линиях раздела сред. Видим сходимость искомой функции к граничным условиям и равенство функций давления соседних пластов на линиях раздела сред.

Заключение

В работе предложен алгоритм моделирования в классе почти-периодических функций установившейся фильтрации жидкости в плоской упругопористой кусочно-неоднородной области в рамках предположения о том, что коэффициент фильтрации линейно зависит от первого инварианта тензора напряжений среды. Проведены числовые расчеты для области, состоящей из трех слоев осадочных и магматических упругопористых горных пород. Построенный алгоритм может быть применим для широкого класса задач математической физики, механики сплошной среды, геофизики и других. Полученные в работе результаты могут представлять интерес для различных научных коллективов.

Библиографический список

1. Голубев Г.В., Тумашев Г.Г. Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. – Казань: издательство Казанского университета, 1972. – 195 с.

2. Bashurov V.V., Vaganova N.A., Filimonov M.Y. Numerical simulation of thermal conductivity processes with fluid filtration in soil // Computational technologies. – 2011. – Vol. 16, no. 4. – P. 3–18.

3. Ravshanov N., Kurbonov N., Mukhamadiev A. An Approximate Analytical Solution of the Problem of Fluid Filtration in the Multilayer Porous Medium // International Journal of Computational Methods. – 2016. – Vol. 13, no. 6. – P. 1–10. DOI: 10.1142/S0219876216500420

4. Badriev I.B., Banderov V.V., Signatullin M.Y. Numerical investigation of nonlinear filtration problems of high-viscosity fluids in porous media // Applied Mechanics and Materials. – 2015. – Vol. 740. – P. 672–675.

5. Mikishanina E. The Study of Fluid Filtration through Elastic-Porous Materials // Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 753. – P. 022025. DOI: 10.1088/1757-899X/753/2/022025

6. Леонтьев Н.В. Основы теории фильтрации. – М.: МАКС Пресс, 2017. – 88 с.

7. Шейдеггер А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. – М.: Гостоптехиздат, 1960. – 252 с.

8. Polubarinova-Kochina P. Ya. Theory of Filtration of Liquids in Porous Media // Advances in Applied Mechanics. – 1951. – Vol. 2. – P. 153–225. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70301-6

9. Binshan Ju, Yushu Wu, Tailiang Fan. Study on fluid flow in nonlinear elastic porous media: Experimental and modeling approaches // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011. – Vol. 76, no. 3–4. – P. 205–211. DOI: 10.1016/j.petrol.2011.01.010

10. Showalter R.E. Poroelastic filtration coupled to Stokes flow // Control theory of partial differential equations. – Chapman and Hall/CRC. – 2005. – P. 243–256.

11. Метан угольных пластов: чистая энергия для всего мира / Д. Боскович [и др.] // Нефтегазовое обозрение. – 2009. – Т. 21, № 2. – С. 4–17.

12. Terntiev A.G. Deep water technology: problem and solution // World Maritime Technology Conf. – Saint-Petersburg, 2012. – P. 1–7.

13. Микишанина Е.А. Исследование коэффициента фильтрации упругопористой среды при плоской деформации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2019. – Т. 29, № 3. – С. 396–407. DOI: 10.20537/vm190309

14. Цытович Н.А. Механика грунтов. – М.: Высшая школа, 1979. – 272 с.

15. Chernyshev S.N., Zommer T.V., Lavrusevich A.A. Calculation methodology for defining the filtration coefficient of a rock mass with loose crack filler // Power Technology and Engineering. – 2017. – Vol. 51. – P. 414–417. DOI: 10.1007/s10749-017-0848-2

16. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 396 с.

17. Осипов В.Ф. Почти-периодические функции Бора-Френеля. – СПб.: Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 1952. – 308 с.

18. Кулагина М.Ф. О некоторых бесконечных системах с разностными индексами // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 3. – С. 18–23.

19. Кулагина М.Ф. Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти-периодических функций // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 8. – С. 19–29.

20. Кулагина М.Ф., Микишанина Е.А. Построение почти-периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений // Математические заметки СВФУ. – 2015. – Т. 5, № 3. – С. 11–19.

21. Микишанина Е.А. Построение почти-периодических решений некоторых систем диффеенциальных уравнений в

задачх теории фильтрации // Information Technologies for Intellegent Decision Making Support (ITIDS'2016). – УФА, 2016. – С. 138–141.

22. Терентьев А.Г., Казакова А.О, Микишанина Е.А. Численное решение полигармонических уравнений в механике сплошных сред // Information Technologies for Intellegent Decision Making Support (ITIDS'2018). – УФА, 2018. – С. 34–42.

23. Казакова А.О., Терентьев А.Г. Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 11. – С. 2050–2059.

24. Garcia A.L. Numerical methods for physics. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2000. – 423 p.

25. Stakgold I. Boundary Value Problems of Mathematical Physics. – Vol. 1. Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2000. DOI: 10.10631/1.30340864

26. Polozhii G.N. The method of summary representation for numerical solution of problems of mathematical physics. – Elsevier, 1965(2014). DOI: 10.2307/2003491

27. Микишанина Е.А. Краевые задачи для неоднородных систем полигармонических уравнений с приложениями в теории тонких оболочек и пластин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 4. – С. 136–144. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.13

28. Снеддон И.Н. Преобразование Фурье / под. ред. Ю.Л. Рабиновича. – М.: Издательство иностранной литературы, 1955. – 667 с.

29. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

30. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 632 с.

31. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.

32. Debnath L., Bhatta D. Integral transforms and their applications. – Chapman and Hall/CRC, 2006. 728 p. DOI: 10.1201/9781420010916

33. Zhdanov M.S. Integral transforms in geophysics. – Springer Science & Business Media, 2012. – 367 p.

34. Баденко В.Л., Баденко Г.В. Специальные разделы высшей математики. Математическая физика: учеб. пособие. – СПб., 2014. – 55 с.

35. Olver F.W.J., Maximon L.C. Bessel functions // NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, Cambridge. – 2010. – P. 215–286 (Chapter 10).

36. Микишанина Е.А., Терентьев А.Г. Об определении напряженного состояния упруго-пористой среды // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 2. – С. 204–215.

References

1. Golubev G.V., Tumashev G.G. Fil'tratsiia neszhimaemoi zhidkosti v neodnorodnoi poristoi srede [Filtration of incompressible fluid in an inhomogeneous porous medium]. Kazan, Kazan University Press, 1972, 195 p.

2. Bashurov V.V., Vaganova N.A., Filimonov M.Y. Numerical simulation of thermal conductivity processes with fluid filtration in soil, *Computational technologies*, 2011, vol. 16, no. 4, pp. 3-18.

3. Ravshanov N., Kurbonov N., Mukhamadiev A. An Approximate Analytical Solution of the Problem of Fluid Filtration in the Multilayer Porous Medium, *International Journal of Computational Methods*, 2016, no. 13(6), pp. 1-10. doi:10.1142/S0219876216500420

4. Badriev I.B., Banderov V.V., Signatullin M.Y. Numerical investigation of nonlinear filtration problems of high-viscosity fluids in porous media, *Applied Mechanics and Materials*, 2015, vol. 740, pp. 672-675.

5. Mikishanina E. The Study of Fluid Filtration through Elastic-Porous Materials, *Materials Science and Engineering*, 2020, vol.753, 022025. doi:10.1088/1757-899X/753/2/022025

6. Leont'ev N.V. Osnovy teorii fil'tratsii [Fundamentals of filtration theory]. Moskva, MAKS Press, 2017, 88 p.

7. Sheidegger A.E. Fizika techeniia zhidkostei cherez poristye sredy [Physics of fluid flow through porous media]. Moskva, Gostoptekhizdat, 1960, 252 p.

8. Polubarinova-Kochina P. Ya. Theory of Filtration of Liquids in Porous Media, *Advances in Applied Mechanics*, 1951, vol. 2, pp. 153-225. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70301-6

9. Binshan Ju, Yushu Wu, Tailiang Fan. Study on fluid flow in nonlinear elastic porous media: Experimental and modeling approaches. *Journal of Petroleum Science and Engineering,* 2011, vol. 76, no. 3-4, pp. 205-211. doi:10.1016/j.petrol.2011.01.010

10. Showalter R. E. Poroelastic filtration coupled to Stokes flow, *Control theory of partial differential equations,* Chapman and Hall/CRC, 2005, pp. 243-256.

11. Boskovich D. et al. Metan ugol'nykh plastov: chistaia energiia dlia vsego mira [Coalbed methane: clean energy for the whole world]. *Neftegazovoe obozrenie*, 2009, vol.21, no. 2, pp. 4-17.

12. Terentiev A.G. Deep water technology: problem and solution. *World Maritime Technology Conf.* Saint-Petersburg, 2012, pp. 1-7.

13. Mikishanina E.A. Issledovanie koeffitsienta fil'tratsii uprugo-poristoi sredy pri ploskoi deformatsii [Investigation of the filtration coefficient of an elastic-porous medium under plane deformation]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'iuternye nauki*, 2019, vol.29, no.3, pp. 396-407. doi: 10.20537/vm190309.

14. Cytovich N.A. Mekhanika gruntov [Soil mechanics]. Moskva, Vysshaya shkola, 1979, 272 p.

15. Chernyshev S.N., Zommer T.V., Lavrusevich A.A. Calculation methodology for defining the filtration coefficient of a rock mass with loose crack filler. *Power Technology and Engineering*, 2017, vol. 51, pp. 414-417. doi:10.1007/s10749-017-0848-2

16. Levitan B.M. Pochti-periodicheskie funktsii [Almost-periodic functions]. Moskva, GITTL, 1953, 396 p.

17. Osipov V.F. Pochti-periodicheskie funktsii Bora-Frenelia [Almost-periodic Bohr-Fresnel functions]. Sankt-Peterburg, Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta, 1952, 308 p.

18. Kulagina M.F. O nekotorykh beskonechnykh sistemakh s raznostnymi indeksami [On some infinite systems with difference indices]. *Izvestiia VUZov. Matematika*, 1992, no. 3, pp. 18-23.

19. Kulagina M.F. Ob integral'nykh uravneniiakh v srednikh znacheniiakh v prostranstvakh pochti-periodicheskikh funktsii [On integral equations in mean values in spaces of almost-periodic functions]. *Izvestiia VUZov. Matematika*, 1993, no.8, pp. 19-29.

20. Kulagina M.F., Mikishanina E.A. Postroenie pochti-periodicheskikh reshenii nekotorykh sistem differentsial'nykh uravnenii [Constructing almost-periodic solutions of some systems

of differential equations]. *Matematicheskie zametki SVFU*, 2015, vol.5, no.3, pp. 11-19.

21. Mikishanina E.A. Postroenie pochti-periodicheskikh reshenii nekotorykh sistem diffeentsial'nykh uravnenii v zadachkh teorii fil'tratsii [Constructing almost-periodic solutions of some systems of differential equations in problems of filtration theory]. *Information Technologies for Intellegent Decision Making Support (ITIDS'2016)*, UFA, 2016, pp. 138-141.

22. Terent'ev A.G., Kazakova A.O., Mikishanina E.A. Chislennoe reshenie poligarmonicheskikh uravnenii v mekhanike sploshnykh sred [Numerical solution of polyharmonic equations in continuum mechanics]. *Information Technologies for Intellegent Decision Making Support (ITIDS'2016)*, UFA, 2018, pp. 34-42.

23. Kazakova A.O., Terent'ev A.G. Chislennoe reshenie kraevykh zadach dlia poligarmonicheskogo uravneniia [Numerical solution of boundary value problems for a polyharmonic equation]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2012, vol.52, no.11, pp. 2050-2059.

24. Garcia A.L. Numerical methods for physics. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 2000, 423 p.

25. Stakgold I. Boundary Value Problems of Mathematical Physics: Volume 1. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. doi: 10.10631/1.30340864

26. Polozhii G.N. The method of summary representation for numerical solution of problems of mathematical physics. Elsevier, 1965(2014). doi: 10.2307/2003491

27. Mikishanina E.A. Kraevye zadachi dlia neodnorodnykh sistem poligarmonicheskikh uravnenii s prilozheniiami v teorii tonkikh obolochek i plastin [Boundary value problems for inhomogeneous systems of polyharmonic equations with applications in the theory of thin shells and plates]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2019, no. 4, pp. 136-144. doi: 10.15593/perm.mech/2019.4.13

28. Sneddon, I.N. Preobrazovanie Fur'e [Fourier Transform]. Moskva, Izdatel'stvo inostrannoi literatury pod. red. Rabinovicha Iu.L., 1955, 667 p.

29. Parton V.Z., Perlin P.I. Metody matematicheskoi teorii uprugosti [Methods of mathematical theory of elasticit]. Moskva, Nauka, 1981, 688 p.

30. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniia matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics.]. Moskva, Nauka, 1977, 632 p.

31. Ufliand Ia.S. Integral'nye preobrazovaniia v zadachakh teorii uprugosti [Integral transformations in problems of elasticity theory]. Leningrad, Nauka, 1968, 402 p.

32. Debnath L., Bhatta D. Integral transforms and their applications. Chapman and Hall/CRC, 2006, 728 p. doi: 10.1201/9781420010916

33. Zhdanov M.S. Integral transforms in geophysics. Springer Science & Business Media, 2012, 367 p.

34. Badenko, V.L., Badenko, G.V. Spetsial'nye razdely vysshei matematiki. Matematicheskaia fizika: Ucheb. Posobie [Special sections of higher mathematics. Mathematical physics: Textbook]. Sankt-Peterburg, 2014, 55 p.

35. Olver F. W. J., Maximon L. C. Bessel functions // NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, pp. 215–286 (Chapter 10).

36. Mikishanina, E.A., Terentiev, A.G. Ob opredelenii napryazhennogo sostoyaniya uprugo-poristoj sredy [On determination of the stress state of an eslastic porous medium]. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol.159, no. 2, pp. 204–215.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад авторов равноценен.

Financing. The study was not sponsored.
Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.
The contribution of the authors is equivalent.