Фирсанов В.В. Гипотезы Бернулли в задаче изгиба механически несжимаемой балки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 4. С. 121–129. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.12

Firsanov V.V. Bernoulli hypotheses in the problem of bending a mechanically incompressible beam. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2023, no. 4, pp. 121-129. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.12

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2023

PNRPU MECHANICS BULLETIN

https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index

Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.12

УДК 539.3

ГИПОТЕЗЫ БЕРНУЛЛИ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА МЕХАНИЧЕСКИ НЕСЖИМАЕМОЙ БАЛКИ

В.В. Фирсанов

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 02 марта 2023 г.
Одобрена: 17 августа 2023 г.
Принята к публикации: 31 августа 2023 г.

Ключевые слова:

гипотезы, изгиб, балка, деформации, напряжения, упругие перемещения, механическая несжимаемость, уравнения равновесия, физические соотношения, граничные условия.

АННОТАЦИЯ

Условие несжимаемости для изотропного линейно упругого материала серьезно ограничивает применение классических гипотез теории изгиба балок, сформулированных Бернулли для малых деформаций и перемещений. При этом принимается, что такое сильное кинематическое условие, как условие неизменяемости объема, должно, безусловно, выполняться. Термин «механическая несжимаемость» подразумевает воздействие на балку исключительно силовой нагрузки, но при тепловом на неё воздействии деформация изменения объёма является функцией температуры. Тем не менее в обоих этих случаях условие механической несжимаемости может быть конфликтным по отношению к классическим гипотезам изгиба балки, что может привести к вырождению задачи. Поэтому перед решением любой задачи для механически несжимаемых материалов необходимо все используемые и достаточно обоснованные для обычных материалов гипотезы проверить на предмет соответствия кинематическому условию неизменяемости объёма. В случае несоответствия необходимо построить модель расчёта, основанную на других, не противоречащих несжимаемости гипотезах, которые не приведут к серьёзному усложнению решаемых задач. Для изгибаемой балки используется модель Бернулли, основой которой являются кинематическая гипотеза прямой нормали (поперечный отрезок после деформации остаётся прямым, плоским, ортогональным к изогнутой оси балки, а расстояния между точками отрезка остаются неизменными) и силовая гипотеза ненадавливаемости волокон балки в поперечном направлении. Каждая из перечисленных гипотез должна быть проверена на предмет соответствия условию неизменяемости объёма балки при воздействии на неё поверхностной силовой изгибающей нагрузки. Учёт поперечных деформаций актуален для низкомодульных материалов и особенно для материалов с низким сдвиговым модулем в поперечном направлении. Несжимаемые материалы, как правило, относятся к низкомодульным, но не это их свойство является определяющим при анализе гипотез Бернулли.

© **Фирсанов Виктор Васильевич** – к.т.н., доцент, доцент, e-mail: v_firsanov@hotmail.com, iD 0009-0003-1219-8203

Victor V. Firsanov – PhD in Technical Sciences, Ass. Professor, e-mail: v_firsanov@hotmail.com, iD 0009-0003-1219-8203

BERNOULLI HYPOTHESES IN THE PROBLEM OF BENDING A MECHANICALLY INCOMPRESSIBLE BEAM

V.V. Firsanov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 02 March 2023
Approved: 17 August 2023
Accepted for publication:
31 August 2023

Keywords:
hypotheses, bending, beam, deformations, stresses, elastic displacements, mechanical incompressibility, equilibrium equations, physical relations, boundary conditions.

ABSTRACT

The incompressibility condition for an isotropic linearly elastic material seriously restricts the application of the classical hypotheses of the beam bending theory formulated by Bernoulli for small deformations and displacements. At the same time, it is assumed that such a strong kinematic condition as the condition of immutability of volume must be unconditionally fulfilled. The term “mechanical incompressibility” implies the impact on the beam exclusively of a force load, but with thermal action on it, the deformation of the volume change is a function of temperature. Nevertheless, in both of these cases, the condition of mechanical incompressibility may conflict with the classical hypotheses of beam bending, which may lead to the problem degeneration. Therefore, before solving any problem for mechanically incompressible materials, it is necessary to check all hypotheses used and sufficiently justified for conventional materials for compliance with the kinematic condition of volume immutability. In case of inconsistency, it is necessary to build a calculation model based on other hypotheses that do not contradict incompressibility, which will not lead to a serious complication of the tasks being solved. For a bent beam, the Bernoulli model is used, the basis of which is the kinematic hypothesis of a straight normal (the transverse segment after deformation remains straight, orthogonal to the curved axis of the beam and the distances between the points of the segment remain unchanged) and the force hypothesis of the non-compressibility of the beam fibers in the transverse direction. Each of the above hypotheses should be checked for compliance with the condition of immutability of the beam volume when exposed to the surface force bending load. The consideration of transverse deformations is relevant for low-modulus materials and especially for materials with a low shear modulus in the transverse direction. Incompressible materials, as a rule, belong to low-modulus, but this is not their property that is decisive in the analysis of Bernoulli hypotheses.

Введение

Одной из первых работ по уточнению классических теорий изгиба балок и пластин была работа выдающегося ученого С.П. Тимошенко [1], который отказался от гипотезы ортогональности поперечного отрезка к изогнутой оси балки и к срединной поверхности пластинки в результате их деформирования. При этом принималось постоянство касательных напряжений по высоте балки или пластинки, что привело к появлению касательной нагрузки на протяжённых границах балки и основаниях пластинки и, следовательно, исказило исходную задачу.

Позже Е. Рейсснер и С.А. Амбарцумян [2; 3] аппроксимировали поперечные касательные напряжения квадратной параболой, что позволило автоматически удовлетворить граничные условия отсутствия касательной нагрузки на основаниях пластинки. Благодаря этому увеличились количество неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений, что позволило удовлетворить по три граничных условия на каждой кромке прямоугольной пластинки.

Дальнейшие уточнения связаны с аппроксимацией перемещений по толщине с использованием полиномиальных функций различного порядка, от которых зависит точность результатов. Эти уточнения проводились для тонких пластин и балок достаточной длины, выполненных из традиционных, композиционных и резиноподобных материалов [4–9]. В работах [10–12] и других приводятся результаты исследований по уточнению теории изгиба пластин и балок, а также методы расчёта балок, пластин и оболочек из эластичных и резиноподобных материалов.

Для балок и пластин из несжимаемых материалов уточняющие расчётные модели практически отсутствуют.

Ниже в трёх разделах последовательно рассматриваются задачи изгиба несжимаемой балки с частичным использованием и без использования гипотез Бернулли. Полагаем, что внешняя силовая нагрузка не вызывает больших перемещений, а напряжения зависят линейно от деформаций, ось x совпадает с нейтральной осью балки, ось y направлена по высоте балки.

1. Анализ соответствия гипотез Бернулли условию механической несжимаемости

В качестве исходной задачи для применения гипотез Бернулли возьмём плоское напряжённое состояние, реализуемое в достаточно длинной полосе (балке) прямоугольного поперечного сечения, высота которого значительно больше толщины. Плоскость действия внешней поверхностной нагрузки нормальна к оси балки и распределена по одной или двум протяжённым границам или по торцевым сечениям балки. Для плоского напряжённого состояния используются статические гипотезы $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. К этим гипотезам добавляются гипотезы Бернулли $\sigma_y = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$. Соотношения обобщённого закона Гука для плоского напряжённого состояния, разрешённые относительно деформаций, имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right),$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right),\ \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right). \quad (1)$$

Условие несжимаемости получим из приведённых формул, почленно складывая левые и правые части равенств и полагая $\mu = 0,5$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\left(1 - 2\mu\right) = 0. \quad (2)$$

Из этого равенства видно, что статическая гипотеза Бернулли о ненадавливаемости волокон в поперечном направлении $\sigma_y = 0$ применима в физических соотношениях, поскольку она не противоречит условию несжимаемости. Полагая $\sigma_y = 0$ в равенствах (1), получим

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E},\quad \varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}\sigma_x,\quad \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\sigma_x.$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_y = \varepsilon_z$, и условие несжимаемости (2) преобразуется к виду

$$\varepsilon_x + 2\varepsilon_y = 0.$$

Если применить кинематическую гипотезу Бернулли $\varepsilon_y = 0$, то из этого равенства получим $\varepsilon_x = 0$, что приводит к отсутствию деформаций и перемещений в изгибаемой балке. Следовательно, указанная кинематическая гипотеза неприменима для балки из механически несжимаемого материала.

Разрешённые относительно напряжений физические соотношения (1) для механически несжимаемого материала

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta = 2G\varepsilon_x + S,$$
$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta = 2G\varepsilon_y + S, \quad (3)$$
$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta = 2G\varepsilon_z + S = 0$$

содержат силовую функцию *S*, заменяющую произведение $\lambda\theta$, поскольку первый сомножитель (объёмный модуль упругости) стремится к бесконечности при $\mu = 0,5$, второй – к нулю, а их произведение превращается в неопределённость, которая заменяется силовой функцией *S*. Из этих равенств следует, что в некоторых частных случаях нагружения и граничных условий возможно отсутствие в теле деформаций и перемещений, а напряжения при этом, благодаря наличию в равенствах силовой функции, будут отличны от нуля.

Если принять равенство нулю поперечных напряжений σ_y и деформаций ε_y, то силовая функция *S* будет равна нулю, что следует из второго равенства (3). Также будут равны нулю деформации ε_x из условия несжимаемости, ε_z в силу равенства $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ и перемещения. На основании этих рассуждений из рассмотренных гипотез Бернулли оставить можно только гипотезу о ненадавливаемости волокон балки в поперечном направлении, а от гипотезы $\varepsilon_y = 0$ необходимо отказаться, так как она приводит к тривиальному решению для напряжений, деформаций и перемещений.

Использование гипотезы отсутствия поперечного сдвига приводит к системе двух дифференциальных уравнений относительно двух искомых функций перемещений: продольных перемещений *u* и прогиба балки *v*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Здесь первое уравнение является условием несжимаемости, а второе – условием отсутствия деформации сдвига в плоскости *xy*. Следовательно, использование указанной гипотезы вместе с условием механической несжимаемости позволяет определить с точностью до произвольных констант интегрирования перемещения без использования уравнений равновесия. Эти уравнения будут использованы для определения двух напряжений σ_y и τ_{xy}, которые физически не определены.

Введём потенциальную функцию φ и выразим через неё перемещения так, чтобы второе условие системы (4) было тождественно удовлетворено

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в первое уравнение системы (4), получим разрешающее уравнение для определения потенциальной функции

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением гиперболического типа, его решение можно представить следующим рядом Фурье

$$\varphi = \sum_1^\infty \left(a_m \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y + b_m \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y\right)\sin\lambda_m x, \quad (6)$$

где $\lambda_m = \dfrac{m\pi}{l}$, l – длина балки.

Теперь из уравнений равновесия плоской задачи при отсутствии объёмных сил

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

определим сначала τ_{xy} из первого уравнения, в котором

$$\sigma_x = E\frac{\partial u}{\partial x} = E\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \\ = -E\sum_1^\infty \lambda_m^2 \left(a_m \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y + b_m \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y \right)\sin\lambda_m x. \quad (8)$$

В результате интегрирования по y получим

$$\tau_{xy} = E\sqrt{2}\sum_1^\infty \lambda_m^2 \left(-a_m \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y + b_m \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y \right)\times \\ \times\cos\lambda_m x + f_1(x), \quad (9)$$

где $f_1(x)$ – произвольная одномерная функция интегрирования.

Подставим (9) во второе уравнение системы (7):

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = E\sqrt{2}\sum_1^\infty \lambda_m^3 \times \\ \times\left(-a_m \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y + b_m \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y \right)\sin\lambda_m x - \frac{df_1}{dx}.$$

Интегрируя по y, получим решение для определения нормального напряжения в поперечном направлении с точностью до дополнительной одномерной функции интегрирования

$$\sigma_y = -2E\sum_1^\infty \lambda_m^2 \left(a_m \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y + b_m \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y \right)\times \\ \times\sin\lambda_m x - \frac{df_1}{dx}y + f_2(x). \quad (10)$$

Формулировка краевой задачи. Рассмотрим балку, изгибаемую поперечной произвольной нагрузкой, распределённой по верхней протяжённой границе, свободной от касательной нагрузки, нижняя протяжённая граница балки свободна от поперечной и касательной нагрузок, торцевые сечения балки либо шарнирно опёрты, либо жёстко защемлены. Произвольные одномерные функции интегрирования и $2m$ констант в равенствах (8)–(10) определим из статических граничных условий на протяжённых границах балки

$$\text{при } y = b/2 \;\; \tau_{xy}=0, \;\; \sigma_y = -q(x),$$

$$\text{при } y = -b/2 \;\; \tau_{xy}=0, \;\; \sigma_y = 0. \quad (11)$$

Здесь и далее b – высота балки, $q(x)$ – распределённая по верхней протяжённой границе переменная нагрузка, ось x совпадает с нейтральной осью балки, ось y направлена по высоте балки, начало координат принадлежит нейтральной оси и одному из торцевых сечений балки.

После определения из граничных условий (11) произвольных констант и одномерных функций интегрирования и подстановки их в равенства (6), (5), (8), (9) и (10) получим окончательное решение поставленной задачи для продольных перемещений и прогиба

$$u = \sum_1^\infty \lambda_m a_m \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y\cos\lambda_m x, \\ v = -\sum_1^\infty \lambda_m a_m \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m y\sin\lambda_m x, \quad (12)$$

а также для нормальных и касательных напряжений (8)–(10), в которых необходимо принять

$$f_1(x) = -E\sqrt{2}\sum_1^\infty \lambda_m^2 a_m \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m \frac{b}{2}\right)\cos\lambda_m x, \;\; b_m = 0, \\ f_2(x) = -\frac{q}{2}, \quad (13) \\ a_m = \frac{q_m}{2El\lambda_m^2}\frac{1}{\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m\frac{b}{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m\frac{b}{2}\right)},$$

где $q_m = \int_0^l q\sin\lambda_m x dx$.

Таким образом, оставляя в силе гипотезу $\gamma_{xy} = 0$ для задачи изгиба механически несжимаемой балки, получено решение, которое позволило точно удовлетворить статические граничные условия на протяжённых границах балки. Полученное решение позволяет автоматически удовлетворить некоторые граничные условия на торцевых границах при $x = 0$ и $x = l$.

Например, при шарнирном опирании балки на торцах, условия равенства нулю прогиба v и напряжения σ_x, а следовательно, изгибающего момента, выполняются при $x = 0$ и $x = l$, как это следует из второго соотношения (12) и равенства (8).

В случае жёсткого защемления одного или обоих торцевых сечений при $x = 0$ и $x = l$ граничное условие на функцию прогиба, второе равенство (12) выполняется автоматически, а условие на функцию продольного перемещения, первое равенство (12) удовлетворяется приближённо при $y = 0$, то есть только в одной точке, а не для всего торцевого сечения.

Если одно из торцевых сечений не закреплено и свободно от внешней поверхностной нагрузки, решение (8) позволяет удовлетворить условие отсутствия нормальных продольных напряжений, а следовательно, изгибающего момента, но условие отсутствия касательных напряжений (перерезывающей силы) решением (9) с учётом (13) не может быть выполнено.

Кроме того, все неоднородные статические и кинематические граничные условия на торцах полученным решением не выполняются.

2. Изгиб механически несжимаемой балки без учёта кинематических гипотез Бернулли

Оставляем единственную из трёх гипотез Бернулли – гипотезу о ненадавливаемости волокон в поперечном направлении, причём $\sigma_y = 0$ в физических соотношениях, а определять эти напряжения будем из уравнений равновесия.

В отсутствие поперечных нормальных напряжений σ_y условие несжимаемости записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

поскольку в этом случае для плоского напряжённого состояния $\varepsilon_y=\varepsilon_z$. Выразим продольные перемещения и прогиб через потенциальную функцию φ так, чтобы удовлетворить тождественно условию несжимаемости

$$u=2\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \qquad (14)$$

Выразим напряжения через потенциальную функцию, используя физические соотношения, уравнения связи деформаций и перемещений и равенства (14)

$$\begin{gathered}\sigma_x=E\varepsilon_x=E\frac{\partial u}{\partial x}=2E\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},\\ \tau_{xy}=G\gamma_{xy}=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=G\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right).\end{gathered} \qquad (15)$$

Подставляя (14) в первое уравнение (7), получим дифференциальное уравнение третьего порядка для определения потенциальной функции

$$(2E-G)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y}+2G\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}=0.$$

Для несжимаемого материала $E=3G$, благодаря чему приведённое уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+0,4\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=0.$$

Интегрируя по поперечной координате, получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+0,4\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=f_1(x), \qquad (16)$$

где $f_1(x)$ – произвольная функция интегрирования, а полученное уравнение представляет собой уравнение эллиптического типа, решение которого есть сумма решения однородного уравнения и частного интеграла, зависящего от вида правой части этого уравнения.

Решение однородного уравнения (16) при $f_1(x)=0$ можно представить в виде ряда

$$\varphi_0=\sum_1^\infty\left(a_m sh1,58\lambda_m y+b_m ch1,58\lambda_m y\right)\cos\lambda_m x.$$

Произвольную функцию $f_1(x)$ также представим в виде бесконечного ряда по косинусам

$$f_1(x)=\sum_1^\infty c_m\cos\lambda_m x.$$

Для определения частного интеграла $\overline{\varphi}$ примем

$$\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x^2}=f_1(x)=\sum_1^\infty c_m\cos\lambda_m x,$$

$$\text{откуда } \overline{\varphi}=-\sum_1^\infty\frac{1}{\lambda_m^2}c_m\cos\lambda_m x.$$

Общее решение уравнения (15) складывается из решения однородного уравнения и частного решения

$$\begin{gathered}\varphi=\varphi_0+\overline{\varphi}=\\ =\sum_1^\infty\left(a_m sh1,58\lambda_m y+b_m ch1,58\lambda_m y-\frac{1}{\lambda_m^2}c_m\right)\cos\lambda_m x.\end{gathered} \qquad (17)$$

Из второго уравнения (7) определим поперечное нормальное напряжение σ_y после определения касательного напряжения из второго равенства (15) при подстановке в него (17)

$$\begin{gathered}\tau_{xy}=G\sum_1^\infty\lambda_m^2\times\\ \times\left(6a_m sh1,58\lambda_m y+6b_m ch1,58\lambda_m y-\frac{1}{\lambda_m^2}c_m\right)\cos\lambda_m x,\end{gathered} \qquad (18)$$

$$\begin{gathered}\sigma_y=G\sum_1^\infty\lambda_m^2\left(3,8a_m ch1,58\lambda_m y+3,8b_m sh1,58\lambda_m y-\frac{1}{\lambda_m}c_m y\right)\times\\ \times\sin\lambda_m x+f_2(x).\end{gathered}$$

Рассмотрим ту же граничную задачу, что и в разделе 1. Произвольные константы a_m, b_m и c_m и функцию $f_2(x)$ определим, выполнив статические граничные условия (11) на протяжённых границах балки при

$$y=\pm\frac{b}{2}\quad \tau_{xy}=0,\ \ \sigma_y=-q(x),\ 0\ .$$

После определения из граничных условий (11) произвольных констант и одномерной функций интегрирования и подстановки их в равенства (17), (14), в первое равенство (15) и (18) получим окончательное решение поставленной задачи для продольных перемещений, прогиба и напряжений. Здесь приведём решение только для функции прогиба

$$v=\sum_1^\infty\lambda_m b_m\left(ch1,58\lambda_m y-6ch1,58\lambda_m\frac{b}{2}\right)\sin\lambda_m x, \qquad (19)$$

где

$$b_m=-\frac{q_m}{G\lambda_m^2 l\left(3,8sh1,58\lambda_m\frac{b}{2}-6\lambda_m\frac{b}{2}ch1,58\lambda_m\frac{b}{2}\right)},$$

$$q_m=\int_0^l q(x)\sin\lambda_m x dx\ .$$

Все рассуждения о выполнении граничных условий на торцевых границах балки в разделе 1 справедливы и для раздела 2.

3. Изгиб механически несжимаемой балки без учёта гипотез Бернулли

В этом разделе используем только гипотезы плоского напряжённого состояния теории упругости без привлечения гипотез Бернулли или каких-либо других дополнительных гипотез. Будем использовать схему решения задачи в перемещениях, хотя термин «в перемещениях» условен для механически несжимаемой балки в силу присутствия в физических соотношениях, разрешённых относительно напряжений, неизвестной статической функции, заменяющей неопределённость в виде произведения объёмного модуля на деформацию изменения объёма (3).

В силу того что для плоского напряжённого состояния $\sigma_z = 0$, из третьего равенства (3) определим деформацию $\varepsilon_z = -\frac{1}{2G}S$. Тогда условие несжимаемости можно преобразовать к виду

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \frac{1}{2G}S = 0. \qquad (20)$$

При постановке задачи в перемещениях имеем три искомых функции: два перемещения, продольное и поперечное (прогиб), и статическую функцию S, для определения которых используем систему из трёх уравнений: равновесия (7), представленные через перемещения и функцию S, и условия (20). Но можно свести задачу к двум разрешающим дифференциальным уравнениям равновесия, удовлетворив заранее условию (20) путём введения потенциальной функции и выражения перемещений через потенциальную функцию и силовую функцию S

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{4G}\int S dx, \quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{4G}\int S dy. \qquad (21)$$

С учётом равенств (21) выразим напряжения в (3) через потенциальную функцию

$$\begin{gathered}
\sigma_x = 2G\frac{\partial u}{\partial x} + S = 2G\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}S + S = 2G\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{3}{2}S, \\
\sigma_y = 2G\frac{\partial v}{\partial y} + S = -2G\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}S + S = -2G\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{3}{2}S, \\
\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \\
= G\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{4G}\left(\int\frac{\partial S}{\partial y}dx + \int\frac{\partial S}{\partial x}dy\right)\right].
\end{gathered} \qquad (22)$$

Внесём (22) в уравнения (7) и продифференцируем первое по x, второе по y. В результате получим систему уравнений для определения потенциальной функции φ и статической функции S

$$\begin{gathered}
G\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\nabla^2\varphi + \frac{1}{4}\nabla^2 S + \frac{3}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0, \\
-G\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\nabla^2\varphi + \frac{1}{4}\nabla^2 S + \frac{3}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0.
\end{gathered} \qquad (23)$$

При сложении этих равенств получим уравнение Лапласа для определения функции S

$$\nabla^2 S = 0. \qquad (24)$$

Тогда уравнения (23) после интегрирования по x первого и по y второго будут такими

$$\begin{gathered}
G\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\varphi + \frac{3}{2}\frac{\partial S}{\partial x} = f(y), \\
-G\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi + \frac{3}{2}\frac{\partial S}{\partial y} = \psi(x),
\end{gathered} \qquad (25)$$

где $f(y)$ и $\psi(x)$ – произвольные функции интегрирования, которыми можно пренебречь без ущерба для решения задачи.

Исключим силовую функцию S из системы уравнений (25) путём дифференцирования первого уравнения по y, второго по x и последующего вычитания из первого уравнения второго. Получим

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = 0.$$

В итоге будем решать систему из двух несвязанных дифференциальных уравнений для определения потенциальной функции φ и функции S

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = 0, \ \nabla^2 S = 0. \qquad (26)$$

Решения этих уравнений можно представить в рядах Фурье

$$\begin{gathered}
\varphi = \sum_1^\infty\left[\left(A_k + B_k y\right)ch\lambda_k y + \left(C_k + D_k y\right)sh\lambda_k y\right]\cos\lambda_k x, \\
S = \sum_1^\infty\left(a_k ch\lambda_k y + b_k sh\lambda_k y\right)\sin\lambda_k x,
\end{gathered} \qquad (27)$$

где $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, l – длина балки (размер в направлении оси x).

Полученное решение содержит $6k$ произвольных констант, что больше количества граничных условий на протяжённых границах балки. Это связано с тем, что порядок полученной системы дифференциальных уравнений (26) был искусственно завышен. Поэтому необходимо вернуться к исходной системе уравнений (25) без произвольных функций в правых частях и исключить $2k$ лишних констант. В результате подстановки равенств (27) в исходную систему (25) получим следующие условия связи между константами

$$a_k = -\frac{4G}{3}\lambda_k B_k, \quad b_k = -\frac{4G}{3}\lambda_k D_k. \qquad (28)$$

Подставив (28) в (27), а полученное в систему равенств (22), будем иметь решение для напряжений с точностью до произвольных констант интегрирования, которые определим из статических граничных условий (11) на протяжённых границах балки. Определив константы интегрирования, получим окончательное решение рассматриваемой задачи.

В силу громоздкости формул окончательное решение приведём только для функции прогиба без подстановки в него найденных констант.

$$v=\sum_{1}^{\infty}\left[\begin{matrix}\lambda_k A_k ch\lambda_k y+\lambda_k C_k sh\lambda_k y+B_k\left(\lambda_k y ch\lambda_k y-\frac{1}{3}sh\lambda_k y\right)+\\ +D_k\left(\lambda_k y sh\lambda_k y-\frac{1}{3}ch\lambda_k y\right)\end{matrix}\right]\sin\lambda_k x, \quad (29)$$

где

$$A_k=-D_k\left(\frac{1}{\lambda_k}+\frac{b}{2}th\lambda_k\frac{b}{2}\right),$$

$$D_k=\frac{q_k}{2Gl\lambda_k\left(sh\lambda_k\frac{b}{2}+\lambda_k\frac{b}{2}th\lambda_k\frac{b}{2}sh\lambda_k\frac{b}{2}-\lambda_k\frac{b}{2}ch\lambda_k\frac{b}{2}\right)},$$

$$q_k=\int_0^l q(x)\sin\lambda_k x dx.$$

Здесь приведены формулы для вычисления только тех констант, которые будут необходимы при определении максимального прогиба в среднем сечении балки.

Все рассуждения по граничным условиям на торцах балки, приведённые в первых двух разделах, справедливы и для этого раздела.

4. Сравнение полученных в разделах 1–3 результатов

Сравнение проведём по значениям прогиба в среднем сечении балки на нейтральной оси, то есть при $x=\frac{l}{2}$ и $y=0$, при отношении высоты балки к её длине $\frac{b}{l}=0,2$, при постоянной нагрузке q_0, распределённой по верхней протяжённой границе. Нижние индексы прогибов соответствуют номеру раздела.

Для вычисления прогиба v_1 преобразуем второе равенство (12) с учётом заданных параметров

$$v_1=-\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_m a_m\sin\lambda_m x=$$

$$=-\frac{q_0 l}{G}\sum_{1}^{\infty}\frac{0,24}{(m\pi)^2\left(\sin 0,07m\pi+0,07m\pi\cos 0,07m\pi\right)}\sin\frac{m\pi}{2},$$

где m является нечётным рядом чисел вследствие того, что $q_m=\frac{q_0}{\lambda_m}(1-\cos m\pi)=\frac{2q_0}{\lambda_m}$ при нечётных значениях m и $q_m=0$ при их чётных значениях.

Ряд быстро сходится, уже третье слагаемое суммы меньше первого слагаемого почти в сто раз. В итоге получим

$$v_1=-0,053\frac{q_0 l}{G}.$$

Для вычисления прогиба v_2 преобразуем равенство (19) с учётом заданных параметров

$$v_2=\sum_{1}^{\infty}\lambda_m b_m\left(1-6ch0,158m\pi\right)\sin\frac{m\pi}{2}=$$

$$=-\frac{q_0 l}{G}\sum_{1}^{\infty}\frac{2\left(1-6ch0,158m\pi\right)}{(m\pi)^2\left(3,8sh0,158m\pi-0,6m\pi ch0,158m\pi\right)}\sin\frac{m\pi}{2}.$$

Здесь m также обретает только нечётные значения. В результате имеем

$$v_2=-7,15\frac{q_0 l}{G}.$$

Этот ряд также быстро сходится, для получения почти точного результата достаточно удержать первые три слагаемые.

Для вычисления прогиба v_3 преобразуем равенство (29) с учётом заданных параметров и связи между константами

$$v_3=\sum_{1}^{\infty}\left(\lambda_k A_k-\frac{1}{3}D_k\right)\sin\frac{m\pi}{2}=$$

$$=-\frac{q_0 l}{G}\sum_{1}^{\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}+0,1m\pi th0,1m\pi\right)}{(m\pi)^2\left(sh0,1m\pi+0,1m\pi th0,1m\pi sh0,1m\pi-0,1m\pi ch0,1m\pi\right)}\sin\frac{m\pi}{2}.$$

Задавая m нечётные значения и удерживая три первых слагаемых в сумме, получим

$$v_3=-7,22\frac{q_0 l}{G}.$$

Заключение

1. Показано, что кинематическая гипотеза $\varepsilon_y=0$ неприемлема для задачи изгиба балки из несжимаемого материала.

2. Использование кинематической гипотезы $\gamma_{xy}=0$ в сочетании с условием несжимаемости для решения той же задачи приводит к результату (прогиб v_1), который значительно (более чем в сто раз) отличается от решений, полученных во втором и третьем разделах (прогибы v_2 и v_3). Это можно объяснить тем, что в отсутствие изменения объёма и формы тела деформации и перемещения либо отсутствуют, либо близки к нулю.

3. Для получения адекватного решения можно использовать статическую гипотезу Бернулли о ненадавливаемости волокон балки в поперечном направлении, поскольку решения для прогибов v_2 и v_3 практически совпадают.

4. Целесообразно использовать схему решения задачи, приведённую в разделе 2, поскольку она проще схемы раздела 3 (без гипотез), а результаты по прогибу отличаются на 1 %.

Библиографический список

1. Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. Mag. – 1921. – Vol. 41. – P. 744–746. DOI: 10.1080/14786442108636264
2. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. – 1945. – Vol. 12, iss. 2. – P. 69–77. DOI: 10.1115/1.4009435
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
4. *Васильев В.В.* О *теории тонких пластин* // Изв. РАН. МТТ. – 1992. – № 3. – С. 26–47.
5. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. АН. МТТ. – 1992. – № 3. – С. 48–64.
6. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ // Изв. АН. МТТ. – 1998. – № 3. – С. 46–58.
7. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. Beam Structures: Classical and Advanced Theories. –Wiley, 2011 – 204 p.
8. Моделирование несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотического осреднения / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, Д.Ю. Кольжанов, С.Б. Каримов // Математическое моделирование и численные методы. – 2017. – № 1. – С. 32–54. DOI: 10.18698/2309-3684-2017-1-3254
9. Фирсанов В.В. Изгиб балки, выполненной из материала с неизменяемым объёмом // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т. 26, № 2. – С. 200–211. DOI: 10.33113/MKMK.RAS.2020.26.02.200_211.04
10. Pobedrya B.E. Equations of state of viscoelastic isotropic media // Mechanics of Composite Materials. – 1967. – Vol. 3, iss. 4. – P. 429–432. DOI: 10.1007/BF01150958
11. Treloar L.R.G. The Physics of Rubber Elasticity. – OUP Oxford, 2005. – 324 p.
12. Козлов В.В. Анализ определяющих соотношений изотропных упругих несжимаемых материалов // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2011. – Вып. 3. – С. 93–101.
13. Лазарев М.И. Решение основных задач теории упругости для несжимаемых сред // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, № 5. – С. 867–874.
14. Stepanyan S.Pa. On the numerical solution to a non-classical problem of bending and stability for an orthotropic beam of variable thickness // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. – 2021. – № 73. – С. 111–120. DOI: 10/17223/19988621/73/10.
15. Соляев Ю.О., Лурье С.А., Волков А.В. Численное решение задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории упругости // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10, № 2. – С. 137–152. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.1
16. Kaplunov, Izuru Takewaki. Modern Trends in Structural and Solid Mechanics 1: Statics and Stability. – Noël Challamel, Julius, John Wiley and Sons, 2021. – 266 p.
17. Hardy H. Engineering Elasticity: Elasticity with less Stress and Strain. – Springer, 2022. – 275 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-09157-5
18. Herakovich C.T. A Concise Introduction to Elastic Solids: An Overview of the Mechanics of Elastic Materials and Structures. – Springer, 2017. – 136 p. DOI: 10.1007/978-3-319-45602-7
19. Богачев И.В. Совместная идентификация механических характеристик функционально градиентных пластин в рамках моделей Кирхгофа и Тимошенко. // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 4. – С. 19–29. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.4.03
20. Зубов Л.М. Универсальные решения для изотропных несжимаемых микрополярных тел // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 435, № 1. – С. 35–39.
21. Сащенко М.А., Павлов Д.А., Жигалов М.В. Сравнительный анализ математических моделей балок Бернулли – Эйлера, Тимошенко, Шереметьева – Пелеха, Акавчи, Туаратье на примере контактной задачи // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2022. – № 1 (92). – С. 36–48.
22. Recent approaches in the theory of plates and plate-like structures / Altenbach H., Bauer S., Eremeyev V.A., Mikhasev G.I., Morozov N.F. – Springer, Switzerland, 2022. – 326 p. DOI: 10.1007/978-3-030-87185-7
23. Bhaskar K., Varadan T. Plates: Theories and Applications. – Springer, 2021. – 278 p. DOI: 10.1007/978-3-030-69424-1
24. Eslami M.R. Buckling and Postbuckling of Beams, Plates, and Shells. – Springer, 2017. – 588 p. DOI: 10.1007/978-3-319-62368-9
25. Сагдатуллин М.К. Расчёт конструкций из несжимаемых материалов // Вестник Казанского технологического университета. – 2021. – Т. 24, № 2. – С. 79–82.
26. Точное решение задачи о поэтапной деформации многослойного цилиндра из несжимаемого гипоупругого материала / В.А. Левин, А.В. Вершинин, К.М. Зингерман, Д.Р. Бирюков. // Чебышевский сборник. – 2022. – № 4 (85). – Т. XXIII. – С. 262–272. DOI: 1022405/2226-8383=2022-23-4-262-271
27. Jones R.M. Buckling of Bars, Plates, and Shells. – Bull Ridge Corporation, 2006. – 824 p.
28. Vijayakumar K., Ramaiah G.K. Poisson Theory of Elastic Plates. – Springer, 2021. – 149 p. DOI: 10.1007/978-981-33-4210-1
29. Mukherjee B., Dillard D.A. On buckling of a thin plate on an elastomeric foundation // International Journal of Mechanical Sciences. – Elsevier, 2018. – Vol. 149. – P. 429–435. DOI: 10/1016/j.ijmecsci.2017.10.015
30. Фирсанов В.В. Изгиб композитной балки с учётом сдвиговой деформации // Известия ТулГУ Технические науки. – 2018. – Вып. 4. – С. 168–174.
31. Фирсанов В.В. Моделирование изгиба балок из резиноподобных материалов. // Математическое моделирование и численные методы. – 2021. – № 4.– С. 3–16. DOI: 10.18698/2309-3684-2021-4-316.

References

1. Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. – Phil. Mag. – 1921. – Vol. 41. – pp. 744-746. doi:10.1080/14786442108636264
2. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech.– 1945. – Vol. 12. – Iss. 2. – pp 69-77. doi: https://doi.org/10.1115/1.4009435

3. Ambarcumyan S.A Teoriya anizotropnyh plastin [Theory of anisotropic plates]. – M., Nauka. – 1987. – 360 p

4. Vasil'ev V.V. O teorii tonkih plastin [On the theory of thin plates] // Izv. RAN. MTT. –1992.– No. 3.– pp. 26-47.

5. ZHilin P.A. O teoriyah plastin Puassona i Kirhgofa s pozicij sovremennoj teorii plastin [On the theories of Poisson and Kirchhoff plates from the standpoint of modern plate theory] // Izv. AN MTT. –1992.– No. 3.– pp. 48-64.

6. Vasil'ev V.V. Klassicheskaya teoriya plastin – istoriya i sovremennyj analiz [Classical theory of plates – history and modern analysis] // Izv. AN. MTT. – 1998. – No. 3.– pp. 46-58.

7. Carrera E., Giunta G., Petrolo M. Beam Structures: Classical and Advanced Theories. –Wiley. – 2011. – 204 p

8. Dimitrienko YU.I., Gubareva E.A., Kol'zhanov D.YU., Karimov S.B. Modelirovanie neszhimaemyh sloistyh kompozitov s konechnymi deformaciyami na osnove metoda asimptoticheskogo osredneniya [Modeling of incompressible layered composites with finite deformations based on the method of asymptotic averaging] // Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody. – 2017. – No. 1. – C.32-54. doi: 10.18698/2309-3684-2017-1-3254

9. Firsanov V.V. Izgib balki, vypolnennoj iz materiala s neizmenyaemym ob"yomom [Bending beams made of a material with an unchangeable volume]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii. – 2020. – Vol.26. – No. 2. – p.200-211. doi: 10.33113/MKMK.RAS.2020.26.02.200_211.04

10. Pobedrya B.E. Equations of state of viscoelastic isotropic media // Mechanics of Composite Materials. – 1967. – Vol.3. – Iss. 4. – pp. 429-432. doi: https://doi.org/10.1007/BF01150958

11. Treloar L.R.G. The Physics of Rubber Elasticity. – OUP Oxford. – 2005. –324 p.

12. Kozlov V.V. Analiz opredelyayushchih sootnoshenij izotropnyh uprugih neszhimaemyh materialov [Analysis of the determining ratios of isotropic elastic incompressible materials]. // Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki. – 2011. – Issue 3. – pp.93-101.

13. Lazarev M.I. Reshenie osnovnyh zadach teorii uprugosti dlya neszhimaemyh sred [Solving the main problems of elasticity theory for incompressible media] // Prikladnaya matematika i mekhanika. – 1980. – T. 44. – № 5. – S. 867-874.

14. Stepanyan S.Pa. On the numerical solution to a non-classical problem of bending and stability for an orthotropic beam of variable thickness // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. – 2021. – № 73. – C. 111-120. doi: 10/17223/19988621/73/10.

15. Solyaev Yu.O., Lur'e S.A., Volkov A.V. Chislennoe reshenie zadachi chistogo izgiba balki v ramkah dilatacionnoj teorii uprugosti [Numerical solution of the problem of pure beam bending in the framework of the dilation theory of elasticity] // Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred. – 2017. – T. 10. – № 2. – S. 137-152. doi: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.1

16. Kaplunov, Izuru Takewaki Modern Trends in Structural and Solid Mechanics 1: Statics and Stability.– Noël Challamel, Julius, John Wiley and Sons. – 2021 – 266 p

17. Hardy H. Engineering Elasticity: Elasticity with less Stress and Strain– Springer. – 2022. — 275 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-031-09157-5

18. Herakovich C.T. A Concise Introduction to Elastic Solids: An Overview of the Mechanics of Elastic Materials and Structures. – Springer –2017. – 136 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-45602-7

19. Bogachev I.V. Sovmestnaya identifikaciya mekhanicheskih harakteristik funkcional'no gradientnyh plastin v ramkah modelej Kirhgofa i Timoshenko [Joint identification of mechanical characteristics of functionally gradient plates within the framework of the Kirchhoff and Timoshenko models] // Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika. – 2021. – № 4. – S. 19-29. doi: 10.15593/perm.mech/2021.4.03

20. Zubov L.M. Universal'nye resheniya dlya izotropnyh neszhimaemyh mikropolyarnyh tel [Universal solutions for isotropic incompressible micropolar bodies] // Doklady Akademii Nauk. – 2010. – Tom 435 – №1. — S 35-39.

21. Sashchenko M.A., Pavlov D.A., Zhigalov M.V. Sravnitel'nyj analiz matematicheskih modelej balok Bernulli – Ejlera, Timoshenko, Sheremet'eva – Pelekha, Akavchi, Tuarat'e na primere kontaktnoj zadachi [Comparative analysis of mathematical models of Bernoulli -Euler, Timoshenko, Sheremetyev – Pelekh, Akavchi, Tuaratier beams on the example of a contact problem] // Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. – 2022.– №1 (92) – S. 36-48.

22. Altenbach H., Bauer S., Eremeyev V.A., Mikhasev G.I., Morozov N.F. Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. – Springer, Switzerland. –2022– 326 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7

23. Bhaskar K., Varadan T. Plates: Theories and Applications. – Springer – 2021. – 278 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-69424-1

24. Eslami M.R. Buckling and Postbuckling of Beams, Plates, and Shells. – Springer. – 2017. – 588 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-62368-9

25. Sagdatullin M.K. Raschyot konstrukcij iz neszhimaemyh materialov // V Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta. – 2021.– Tom 24. – № 2. – S.79-82

26. V.A. Levin, A.V. Vershinin, K.M. Zingerman, D.R. Biryukov. Tochnoe reshenie zadachi o poetapnoj deformacii mnogoslojnogo cilindra iz neszhimaemogo gipouprugogo materiala [Exact solution of the problem of step-by-step deformation of a multilayer cylinder made of incompressible hypo-elastic material] // Chebyshevskij sbornik.– Tula – 2022 – №4 (85) – Tom XXIII. – S.262-272. doi: 1022405/2226-8383=2022-23-4-262-271

27. Jones R.M. Buckling of Bars, Plates, and Shells. – Bull Ridge Corporation. –2006. – 824 p.

28. Vijayakumar K., Ramaiah G.K. Poisson Theory of Elastic Plates. – Springer. – 2021. – 149 p.

29. B Mukherjee, DA Dillard. On buckling of a thin plate on an elastomeric foundation // International Journal of Mechanical Sciences. – Elsevier – 2018 –Volume 149 – pp. 429-435. doi: 10/1016/j.ijmecsci.2017.10.015

30. Firsanov V.V. Iizgib kompozitnoj balki s uchyotom sdvigovoj deformacii [Bending of a composite beam taking into account shear deformation] // Izvestiya TulGU Tekhnicheskie nauki –2018.– Vyp. 4. – S. 168-174.

31. Firsanov V.V. Modelirovanie izgiba balok iz rezinopodobny`x materialov [Modeling the bending of beams made of rubber-like materials]. // Matematicheskoe modelirovanie i chislenny`e metody`. – 2021. – № 4.– S. 3–16. doi: 10.18698/2309-3684-2021-4-316.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора 100 %.

Funding. The work was not sponsored.
Conflict of interest. The author declare no conflict of interest.
Author's contribution 100 %.