

Вшивков А.Н., Изюмова А.Ю., Пантелеев И.А., Плехов О.А. О методе оценки распределения пластической деформации в области вершины усталостной трещины на основе решения задачи линейной теории упругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2023. – № 6. С. 41–49. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.04

Vshivkov A.N., Iziumova A.Yu., Panteleev I.A., Plekhov O.A. Method of estimating plastic deformation distributions at the fatigue crack tip based on the solution of linear elasticity theory. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, no. 6, pp. 41-49. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.04



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 6, 2023

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2023.6.04

УДК 539.3

## О МЕТОДЕ ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ОБЛАСТИ ВЕРШИНЫ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А.Н. Вшивков, А.Ю. Изюмова, И.А. Пантелеев, О.А. Плехов

Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, Пермь, Российская Федерация

### О СТАТЬЕ

Получена: 26 сентября 2023 г.  
Одобрена: 24 ноября 2023 г.  
Принята к публикации:  
31 ноября 2023 г.

#### Ключевые слова:

поле деформации, вершина усталостной трещины, гипотеза Диксона, метод корреляции цифровых изображений.

### АННОТАЦИЯ

Проведено экспериментальное исследование полей деформации в вершине усталостных трещин. Измерение полей деформации проводилось при помощи оптической камеры с использованием метода корреляции цифровых изображений. Запись изображений производилась оптической камерой Basler acA2440-75uc с объективом TC23007 OptoEngineering для достижения пространственного разрешения не менее 3 мкм. Частота записи данных составляла 100 Гц. Показана возможность использования решения линейной сингулярной задачи теории упругости для оценки распределения пластической деформации в вершине усталостной трещины. Механические испытания по одноосному циклическому деформированию с одновременной регистрацией поля деформации у вершины трещины различной длины проводились на плоских образцах из технического титана ВТ1-0 и титановых сплавов ОТ4-0 и ПТ-3В. Для локализации трещины образцы были ослаблены боковым полукруглым вырезом. Решение задачи об образце с боковой трещиной в упругой постановке осуществлялось численно в пакете конечно-элементного моделирования Comsol Multiphysics. Особенностью работы является использование гипотезы о функциональной связи реальных деформаций с упругим решением и величиной секущего модуля материала для оценки пластической деформации в вершине трещины. Экспериментально и численно определён размер зоны интенсивных пластических деформаций в области вершины усталостной трещины при различной длине трещины. В результате сопоставления расчётных и экспериментальных данных была показана возможность использования предложенной зависимости для оценки распределения поля пластической деформации в вершине трещины. Полученные результаты позволят анализировать поля необратимой деформации в вершине трещины для смешанных форм нагружения.

© ПНИПУ

© Вшивков Алексей Николаевич – м.н.с. лаб. термомеханики твердых тел, e-mail: vshivkov.a@icmm.com.  
Изюмова Анастасия Юрьевна – к.ф.-м.н., н.с. лаб. термомеханики твердых тел, e-mail: fedorova@icmm.ru.  
Пантелеев Иван Алексеевич – д.ф.-м.н., зав. лаб. цифровизации горнотехнических процессов, e-mail: pia@icmm.com.  
Плехов Олег Анатольевич – д.ф.-м.н., чл.-корр. Российской академии наук, в.н.с. лаб. термомеханики твердых тел, e-mail: poa@icmm.com.

Aleksei N. Vshivkov – Junior Researcher of Solid Thermomechanics Laboratory, e-mail: vshivkov.a@icmm.ru.  
Anastasia Iu. Iziumova – PhD, Researcher of Solid Thermomechanics Laboratory, e-mail: fedorova@icmm.ru.  
Ivan A. Panteleev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Laboratory, Digitalization of Mining Processes, e-mail: pia@icmm.ru.  
Oleg A. Plekhov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Leading Researcher of Solid Thermomechanics Laboratory, e-mail: poa@icmm.ru.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# METHOD OF ESTIMATING PLASTIC DEFORMATION DISTRIBUTIONS AT THE FATIGUE CRACK TIP BASED ON THE SOLUTION OF LINEAR ELASTICITY THEORY

A.N. Vshivkov, A.Yu. Iziyomova, I.A. Panteleev, O.A. Plekhov

Institute of Continuous Media Mechanic Ural Branch of Russian Academy of Science, Perm, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 26 September 2023

Approved: 24 November 2023

Accepted for publication:

31 November 2023

### Keywords:

strain field, fatigue crack tip, Dixon theory, digital image correlation.

## ABSTRACT

In this paper, an experimental study of the strain fields at the fatigue crack tip was carried out. The strain fields were measured by an optical camera based on the digital image using the correlation method. Images were recorded using a Basler acA2440-75uc optical camera with a TC23007 OptoEngineering lens to achieve a spatial resolution of at least 3  $\mu\text{m}$ . Recording frequency was 100 Hz. The possibility of using the solution of the linear singularity problem of elasticity theory to estimate the distribution of plastic strain at the fatigue crack tip was shown. Mechanical tests of uniaxial cyclic deformation with simultaneous registration of the strain field at the crack tip of different lengths were carried out on flat specimens of titanium alloys Ti Grade 2, Ti-1.1Al-0.9Mn, Ti Grade 9. The specimens were loosened by means of a lateral semicircular notch in order to localize the crack. The solution of the problem of a specimen with a notch in the elastic formulation was carried out numerically in the finite element modelling package Comsol Multiphysics. The peculiarity of the work is the use of the hypothesis of the functional relationship between real deformations and the elastic solution and the value of the secant modulus of the material to estimate the plastic deformation at the crack tip. The size of the zone of intense plastic deformations at the fatigue crack tip for different crack lengths was determined experimentally and numerically. By comparing the calculated and experimental data we showed the possibility of using the proposed dependence to estimate the distribution of the plastic strain field at the crack tip. The results obtained allow the analysis of the irreversible strain fields at the crack tip for mixed mode loading.

© PNRPU

## Введение

В рамках линейной механики разрушения в деформированной области вблизи трещины (за исключением малой окрестности у её вершины) компоненты поля напряжений могут быть представлены в виде асимптотических формул [1; 2]. Исходя из них, при приближении к вершине трещины напряжения неограниченно растут, а в точке, соответствующей вершине трещины, становятся равными «бесконечности». В действительности всегда в некоторой конечной области развиваются интенсивные пластические деформации, в результате которых перестаёт быть справедливым закон Гука и появляется нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями. Описание напряжённо-деформированного состояния в области вершины усталостной трещины конечной длины требует учёта размера зоны пластической деформации. В условиях, когда прилагаемые нагрузки относительно невелики и в сечениях с трещиной не возникает больших пластических зон, соизмеримых с остаточным сечением детали, можно воспользоваться выражениями и критериями линейной механики разрушения, введя пластическую поправку Ирвина. Она заключается в замене реальной длины трещины на эффективную [3] и позволяет исключить из рассмотрения эффекты, возникающие от пластической зоны [4]. Другой вариант учёта пластических деформаций у вершины трещины был предложен Диксоном [5; 6]. Его подход позволяет оценить напряжённо-деформированное состояние в области вершины трещины с учетом зоны пластической

деформации на основе связи между реальными деформациями, упругим решением и величиной секущего модуля материала. Для этого каждый образец с центральной разрезом полировался в несколько этапов с завершающим полированием алмазной пастой. Затем металлическую поверхность обезжировали и наносили слой Araldite СТ200 толщиной приблизительно 0,4–0,8 мм. В нанесённом слое делался надрез, совпадающий с надрезом в образце. В процессе эксперимента в образце за счёт приложения циклической нагрузки с коэффициентом асимметрии цикла  $R > 0$  выращивалась усталостная трещина. При достижении необходимой длины (достаточной для проведения измерений и малой по сравнению с размерами образца) к образцу прикладывалась постоянная нагрузка и фотографировались распределение интенсивности интерференционной картины (картины хроматических полос). В результате были определены распределения деформации для различных уровней напряжения в вершине усталостной трещины и показана возможность использования введённой гипотезы.

В [7; 8] на основе гипотезы Диксона показано, что работа пластической деформации и, как следствие, диссипация тепла в вершине трещины может быть разделена на две части, соответствующие обратимой (циклической) и монотонной пластическим зонам. Этот вывод нашел экспериментальное подтверждение в работах [9–11], где на основе энергетического подхода показана удовлетворительная корреляция между скоростью роста усталостной трещины и скоростью диссипации тепла в области ее вершины.

Реальная форма и размер зоны пластической деформации зависят от большого набора факторов, включающих свойства материала и условия нагружения [12–14]. Так, в работе [15] показано, что увеличение коэффициента Пуассона приводит к значительному уменьшению размеров пластической зоны, значительное сужение наблюдается вдоль направления оси трещины. Одним из результатов работы [16] является установление связи коэффициента асимметрии цикла с соотношением глубины монотонной и циклической пластических зон под поверхностью усталостных изломов при длине трещины, равной длине зоны стабильного роста трещины на поверхности усталостных изломов. Степень соответствия результатов аналитических расчётов с полями напряжений и деформаций определяется на основе прямых натурных или полунатурных экспериментов. Экспериментальные способы регистрации реального поля деформаций у вершины усталостной трещины начали свое развитие с методик на основе фотоупругих покрытий [17]. Современные технологии располагают оптическими камерами высокого разрешения, которые позволяют бесконтактно регистрировать изображения поверхности материала в процессе деформирования и с последующим применением метода корреляции цифровых изображений получать поля деформации в интересующей области [18; 19]. Метод также применялся для изучения процесса закрытия трещины [20–22], расчёта  $J$ -интеграла [23–25], расчёта коэффициента интенсивности напряжений [26–28]. В работе [29] на основе метода корреляции цифровых изображений развита компьютерная система стереозрения, с помощью которой проведено исследование процесса роста усталостной трещины в металлических сплавах и количественно рассчитаны скорость роста усталостной трещины, максимальное значение деформации и эффективный коэффициент асимметрии цикла. Совместная оценка характеристик поврежденности, акустической эмиссии и локальной деформации на основе метода корреляции цифровых изображений в работе [30] показала, что увеличение сдвиговой компоненты при растяжении приводит к изменениям механических и акустических свойств, а также критической температуры хрупкости. В [31] для сплава Д16с на основе метода корреляции цифровых изображений выявлено увеличение площади пластических зон в образцах после эксплуатации в условиях циклического нагружения.

Целью данного исследования является экспериментальное обоснование возможности аппроксимации напряженно-деформированного состояния в пластической зоне с помощью решения линейной упругой задачи о бесконечно тонком разрезе (гипотезы Диксона) на основе метода корреляции цифровых изображений, а также установление степени соответствия получаемых экспериментальных полей деформации модельным.

## 1. Материалы и условия эксперимента

В настоящей работе для регистрации поля деформации у вершины усталостной трещины использовался

метод корреляции цифровых изображений. Запись изображений производилась оптической камерой Basler acA2440-75uc с объективом TC23007 OptoEngineering для достижения пространственного разрешения не менее 3 мкм. Частота записи данных составляла 100 Гц. Обработка полученных данных проводилась на основе программного обеспечения Lavision. Перед применением методов корреляции цифровых изображений для каждого кадра производилась корректировка по уровню дисторсии линзы, компенсация относительного движения образца и регулировка освещённости.

Плоские образцы с боковым концентратором напряжений, изготовленные из технического титана ВТ1-0 и титановых сплавов ОТ4-0 и ПТ-3В, в состоянии поставки подвергались циклическому деформированию с одновременной регистрацией поля деформации в области концентратора напряжений. Перед началом эксперимента поверхность образцов полировалась. Геометрия образцов представлена на рис. 1.

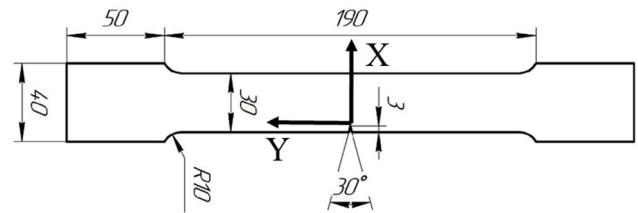


Рис. 1. Геометрия образцов (толщина листа технического титана ВТ1-0 и титанового сплава ПТ-3В – 3 мм, толщина листа титанового сплава ОТ4-0 – 4 мм, начало координат в вершине выреза)

Fig. 1. Samples geometry (thickness of Ti Grade 2 and Ti Grade 9 is 3 mm, thickness of Ti-1.1Al-0.9Mn is 4 mm, origin at the vertex of the notch)

Циклическое нагружение образцов производилось на серво гидравлической испытательной машине Ви-00-100 с постоянной максимальной нагрузкой в цикле 7,5 кН для технического титана ВТ1-0, 11 кН – для титанового сплава ОТ4-0 и 8,5 кН – для титанового сплава ПТ-3В. Частота нагружения составляла 10 Гц, коэффициент асимметрии цикла –  $R=0,1$ . Длина трещины в ходе испытания измерялась методом падения электрического потенциала. Поле деформации в области вершины усталостной трещины регистрировалось при разных длинах трещины.

## 2. Анализ экспериментальных данных и их сопоставление с результатами численного моделирования

В основе подхода Диксона лежит гипотеза о связи между упругой и полной деформациями в вершине усталостной трещины с использованием модуля Юнга и секущего модуля упругости [5; 6]:

$$\varepsilon_{ij}^{ef} = \left( \frac{E}{E_s} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{ij}^{el}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_{ij}^{ef}$  – полная деформация,  $\epsilon_{ij}^{el}$  – упругая деформация для трещины аналогичной длинны при заданной нагрузке,  $E$  – модуль упругости,  $E_s = f(\epsilon) = \sigma_e / \epsilon_e$  – секущий модуль, зависящий от деформации и определяемый из диаграммы эффективных напряжений  $\sigma_e$  и деформаций  $\epsilon_e$  [5] для соответствующей деформации. Для расчёта секущего модуля сделано допущение о равенстве эффективных характеристик и осевых.

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} = \sigma_y$$

$$\epsilon_e = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)} = \epsilon_y$$

Напряжение  $\sigma_y$  и деформация  $\epsilon_y$  определяются из эксперимента по одноосному растяжению. Для каждой точки на диаграмме деформирования рассчитан секущий модуль. Диаграмма деформирования и секущий модуль упругости представлены на рис. 2, 3 соответственно.

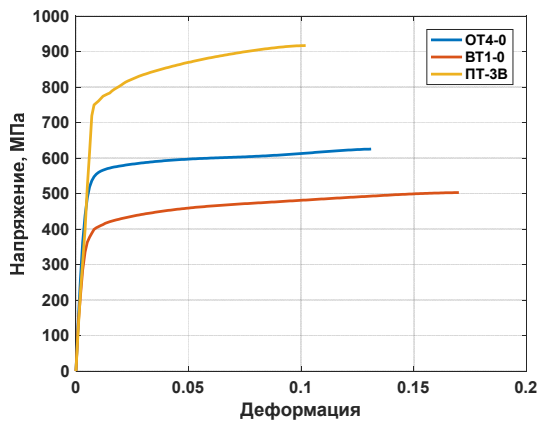


Рис. 2. Диаграмма деформирования

Fig. 2. Deformation diagram

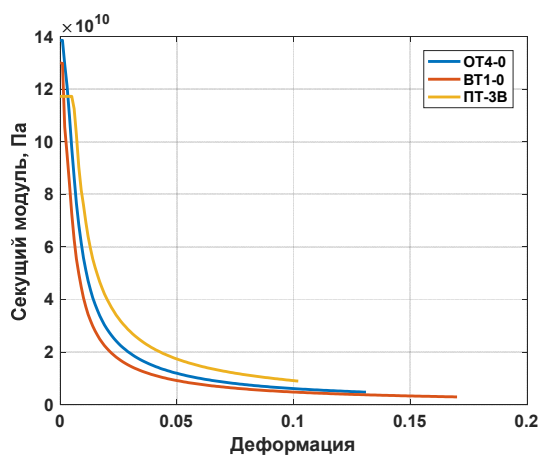


Рис. 3. Секущий модуль упругости

Fig. 3. Secant modulus of elasticity

Соотношение (1) введено как гипотеза в работах [5; 6] для связи экспериментально измеренной деформации и решения линейно-упругой задачи о бесконечно тонком разрезе в пластине.

Для определения процесса деформирования плоского образца с боковой трещиной различной длины решается задача линейной теории упругости для плоско напряженного состояния в пакете конечно-элементного моделирования Comsol Myltiphysics на основе системы уравнений:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} I_1(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{g} + \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\epsilon}, \\ \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] \end{cases}$$

где  $\boldsymbol{\epsilon}$  – тензор деформаций,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений,  $I_1(\boldsymbol{\epsilon})$  – первый инвариант тензора деформации,  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений,  $\mathbf{g}$  – единичный тензор,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

При моделировании поведения образца при одноосном растяжении задавались следующие граничные условия: один торец жестко закреплен, на втором торце – усилие, соответствующее максимальному усилию в цикле, реализованному в лабораторных циклических испытаниях образцов. Трещина задавалась в виде треугольного выреза с радиусом кривизны 100 мкм. Расчетная область разбивалась на конечные элементы с уменьшением их размера от крупного (торцы образца) до минимального (область перед треугольным вырезом). Для определения допустимого минимального размера конечных элементов предварительно было проведено исследование на сеточную сходимость. Размер конечных элементов уменьшался до тех пор, пока изменение осевой деформации в районе выреза по сравнению с предыдущим шагом (размером элементов) превышало 5 %. Итоговый размер конечного элемента в области вершины трещины составил 22 мкм. При расчёте использовалась линейная аппроксимация поля перемещений на элементе. Полученное в результате численного решения поле компоненты вдоль оси образца тензора деформации ( $\epsilon_y$ ) пересчитывалось по формуле (2) в поле осевой компоненты тензора полных деформаций, которое сравнивалось с экспериментальными измерениями.

$$\epsilon_y^{ef} = \left( \frac{E}{E_s(\epsilon_y^{el})} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_y^{el}, \quad (2)$$

где  $\epsilon_y^{el}$  – компонента деформации вдоль оси образца из решения упругой задачи,  $\epsilon_y^{ef}$  – компонента полной деформации вдоль оси образца. Секущий модуль в формуле (2) определяется из диаграммы деформирования и зависит от деформации. При пересчёте деформации по формуле (2) используется секущий модуль, соответствующий деформации, для которой производится пересчёт. В данной работе секущий модуль рассчитан по результатам испытаний на одноосное растяжение. На рис. 4–6



представлены характерные поля компоненты тензора деформации вдоль оси образца в области вершины трещины, полученные методом корреляции цифровых изображений в ходе усталостных испытаний образцов из технического титана ВТ1-0 и титановых сплавов ОТ4-0 и ПТ-3В и результаты вычислений. В распределении деформаций, полученных методом корреляции цифровых изображений, наблюдается отсутствие симметрии. Это, вероятно, вызвано неидеальностью условий нагружения (закрепление образца, соосность захватов), постобработкой данных с видеосистемы (коррекция дисторсии и угла съёмки, компенсация движения объекта как жёсткого целого), которые становятся заметны на измеряемом масштабе порядка 2 мм. Из диаграммы деформирования материалов определён предел пропорциональности, который соответствует деформации 0,34 % для ВТ1-0, 0,38 % для ОТ4-0 и 0,72 % для ПТ-3В. Эти значения деформации соответствуют границам, отделяющим пластическую деформацию от упругой в области вершины трещины. На рис. 4–6 выделена изолиния, разделяющая упругую и пластическую деформацию.

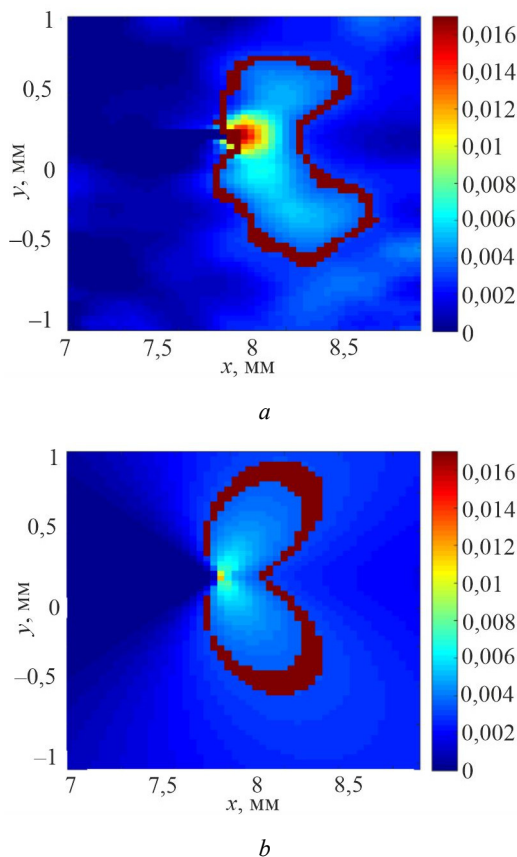


Рис. 4. Поле компоненты тензора деформации вдоль оси образца в области вершины трещины в титановом сплаве ОТ4-0, полученное методом корреляции цифровых изображений (а) и рассчитанное аналитически по формуле Диксона (б) при длине трещины 7,5 мм

Fig. 4. Field component of the strain tensor along the specimen axis at fatigue crack tip of titanium alloy Ti-1.1Al-0.9Mn obtained by digital image correlation method (a) and calculation based on Dixon equation (b) with crack length 7.5 mm

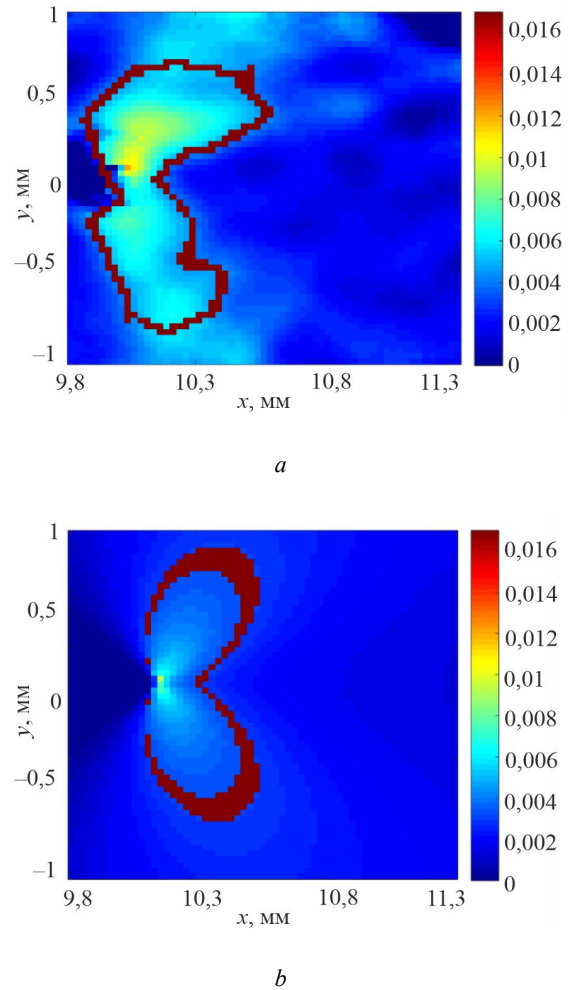
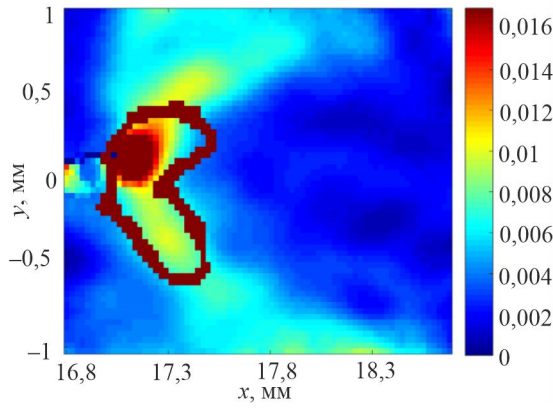


Рис. 5. Поле компоненты тензора деформации вдоль оси образца в области вершины трещины в титановом сплаве ВТ1-0, полученное методом корреляции цифровых изображений (а) и рассчитанное аналитически по формуле Диксона (б) при длине трещины 10 мм

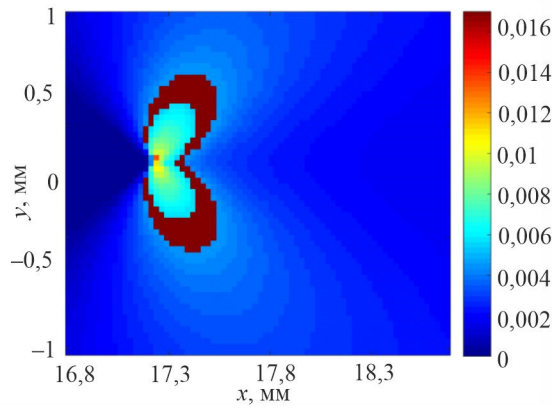
Fig. 5. Field component of the strain tensor along the specimen axis at fatigue crack tip of titanium alloy Ti Grade 2 obtained by digital image correlation method (a) and calculation based on Dixon equation (b) with crack length 10 mm

На рис. 7–9 представлено сравнение размера зоны пластической деформации в области вершины трещины, полученное в эксперименте и рассчитанное аналитически (ось  $Ox$  направлена вдоль направления распространения трещины). Представлены результаты измерений для трёх величин длины трещины каждого материала.

В таблице представлены экспериментальные и аналитические значения размера зоны пластической деформации в области вершины трещины для исследуемых материалов. Под размером области пластической деформации понимается диаметр окружности, в которую вписывается изолиния деформации (выделена на рис. 4–6), соответствующая пределу пропорциональности.



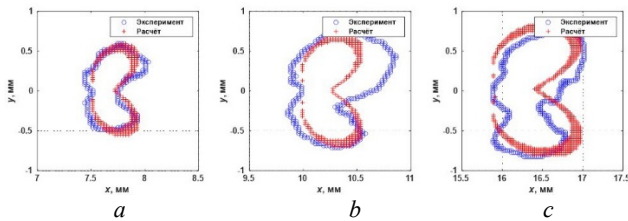
a



b

Рис. 6. Поле компоненты тензора деформации вдоль оси образца в области вершины трещины в титановом сплаве ПТ-3В, полученное методом корреляции цифровых изображений (a) и рассчитанное аналитически по формуле Диксона (b) при длине трещины 17 мм

Fig. 6. Field component of the strain tensor along the specimen axis at fatigue crack tip of titanium alloy Ti Grade 9 obtained by digital image correlation method (a) and calculation based on Dixon equation (b) with crack length 17 mm



a

b

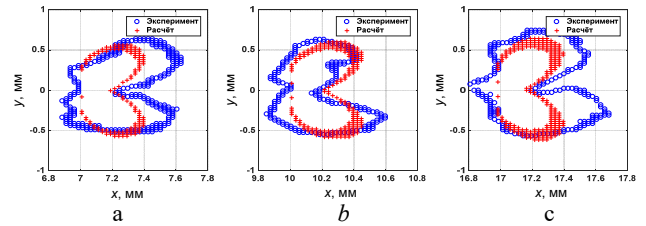
c

Рис. 7. Характерный размер зоны пластических деформаций для длин трещины 7,5 мм (125e3 циклов) (a), 10 мм (131e3 циклов) (b), 15 мм (136e3 циклов) (c) на образцах из титанового сплава ОТ4-0

Fig. 7. Characteristic size of plastic deformation zone with crack length 7.5 mm (125e3 cycles) (a), 10 mm (131e3 cycles) (b), 15 mm (136e3 cycles) (c) in sample of Ti-1.1Al-0.9Mn

Получено качественно удовлетворительное соответствие оценки размера зоны пластической деформации на основе гипотезы Диксона и экспериментальных значений величины области пластических деформаций,

полученных методом корреляции цифровых изображений даже при значительных длинах трещин для всех исследуемых материалов.



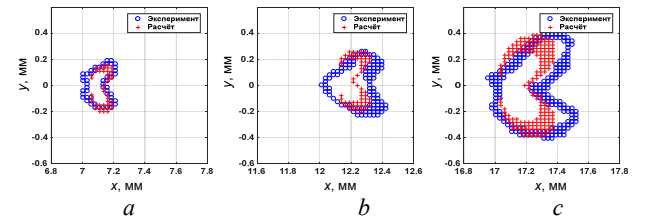
a

b

c

Рис. 8. Характерный размер зоны пластических деформаций для длин трещины 7 мм (89e3 циклов) (a), 12 мм (97e3 циклов) (b), 17 мм (100e3 циклов) (c) на образцах из титанового сплава ВТ1-0

Fig. 8. Characteristic size of plastic deformation zone with crack length 7 mm (89e3 cycles) (a), 12 mm (97e3 cycles) (b), 17 mm (100e3 cycles) (c) in sample of Ti Grade 2



a

b

c

Рис. 9. Характерный размер зоны пластических деформаций для длин трещины 7 мм (95e3 циклов) (a), 10 мм (102e3 циклов) (b), 17 мм (107e3 циклов) (c) на образцах из титанового сплава ПТ-3В

Fig. 9. Characteristic size of plastic deformation zone with crack length 7 mm (95e3 cycles) (a), 10 mm (102e3 cycles) (b), 17 mm (107e3 cycles) (c) in sample of Ti Grade 9

Размер зоны пластической деформации в области вершины трещины

The size of plastic deformation zone at fatigue crack tip

Материал	Длина трещины, мм	Эксперимент, мм	Численный расчёт, мм	Ошибка, %
ОТ4-0	7,5	1,1	1,16	5,45
ОТ4-0	10	1,52	1,44	5,26
ОТ4-0	15	1,76	1,7	3,41
ВТ1-0	7	1,22	1,15	5,74
ВТ1-0	10	1,27	1,2	5,51
ВТ1-0	17	1,33	1,28	3,76
ПТ-3В	7	0,38	0,37	2,63
ПТ-3В	12	0,51	0,49	3,92
ПТ-3В	17	0,83	0,78	6,02

Заключение

В результате работы на основе метода корреляции цифровых изображений экспериментально получены поля деформации в области вершины усталостной трещины при различных значениях ее длины на образцах из технического титана ВТ1-0 и титановых сплавов ОТ4-0 и ПТ-3В с боковым надрезом. В конечно-элементном

пакете Comsol Multiphysics решена задача о деформировании плоских образцов с боковым надрезом в упругой постановке. Результаты численного моделирования полей деформаций при различных длинах трещины были скорректированы в соответствии с гипотезой Диксона о связи между реальными деформациями, упругим решением и величиной секущего модуля материала. Анализ результатов для трёх исследованных титановых сплавов показал качественно удовлетворительное соответствие между размерами зон пластических деформаций,

полученными численно и экспериментально. Таким образом, показана возможность использования аппроксимации напряжённо-деформированного состояния в пластической зоне на основе решения линейной задачи теории упругости. Использование данной гипотезы в сочетании с принципом аддитивности решений упругой задачи теории упругости открывает значительные возможности для анализа полей необратимой деформации и интенсивности диссипации энергии в вершине трещины для смешанных форм нагружения.

## Библиографический список

1. Shlyannikov V., Tumanov A. Characterization of crack tip stress fields in test specimens using mode mixity parameters // *International Journal of Fracture*. – 2014. – Vol. 185, no. 1–2. – P. 49–76. DOI: 10.1007/s10704-013-9898-0
2. Степанова Л.В., Росляков П.С. Полное асимптотическое разложение М. Уильямса у вершин двух коллинеарных трещин конечной длины в бесконечной пластине // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2015. – № 4. – С. 188–225.
3. Irwin G.R. *Fracture, elasticity and plasticity*. – Springer, Berlin, 1958. – P. 551–590.
4. Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. *Избранные нелинейные задачи механики разрушения*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 408 с. EDN UGLGQP
5. Dixon J.R. Effect of plastic deformation on the strain distribution around cracks in sheet materials // *Journal mechanical engineering science*. – 1964. – Vol. 6, no. 2. – P. 132–136. DOI: 10.1243/JMES\_JOUR\_1964\_006\_022
6. Dixon J.R. Stress and strain distributions around cracks in sheet materials having various work-hardening characteristics // *International Journal of Fracture Mechanics*. – 1965. – Vol. 1, no. 3. – P. 224–244. DOI: 10.1007/BF00186858
7. Raju K.N. On the calculation of plastic energy dissipation rate during stable crack growth // *International Journal of Fracture Mechanics*. – 1969. – Vol. 5, no. 2. – P. 101–112.
8. Raju K.N. An energy balance criterion for crack growth under fatigue loading from considerations of energy of plastic deformation // *International Journal of Fracture Mechanics*. – 1972. – Vol. 8, no. 1. – P. 1–14.
9. Iziumova A., Plekhov O. Calculation of the energy J-integral in plastic zone ahead of a crack tip by infrared scanning // *FFEMS*. – 2014. – Vol. 37. – P. 1330–1337. DOI: 10.1111/ffe.12202
10. Ranganathan N., Chalon F., Meo S. Some aspects of the energy based approach to fatigue crack propagation Original research article // *International Journal of Fatigue*. – 2008. – Vol. 30, no. 10–11. – P. 1921–1929. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2008.01.010
11. Experimental and theoretical analysis of heat flux at fatigue crack tip under mixed mode loading / A. Vshivkov, A. Iziumova, R. Yarullin, V. Shlyannikov, O. Plekhov // *Procedia Structural Integrity*. – 2019. – Vol. 18. – P. 608–615. DOI: 10.1016/j.prostr.2019.08.206
12. Swapnil P., Umesh C. Plastic zone analysis of SS316L and Ti6Al4V materials under mixed mode loading conditions // *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. – 2022. – Vol. 23, no. 5. – P. 429–450. DOI: 10.1080/15502287.2021.1992542
13. Graba M. Characteristics of selected measures of stress triaxiality near the crack tip for 145Cr6 steel – 3D issues for stationary cracks // *Open Eng*. – 2020. – Vol. 10. – P. 571–585. DOI: 10.1515/eng-2020-0042
14. Local state of stress of the material at the crack tip for various types of loading / G.V. Klevtsov, R.Z. Valiev, N.A. Klevtsova, A.M. Glezer, I.N. Pigaleva // *Russian Metallurgy (Metally)*. – 2021. – P. 1177–1182. DOI: 10.1134/S0036029521100165
15. Crack tip plastic zone shape for anisotropic material subjected to mode -I loading [Электронный ресурс] / S.B. Shailendra, K. Amanpreet, P. Mahesh, S. Krishna, S. Subhalakshmi, K. Bhavesh, S. Vishal // *Materials Today: Proceedings*. – 2023. – DOI: 10.1016/j.matpr.2023.09.087. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214785323047600> (дата обращения: 01.09.2023).
16. Определение параметров аварийного усталостного разрушения изделий по глубине пластических зон под поверхностью изломов / Г.В. Клевцов, Л.Р. Ботвина, Н.А. Клевцова, Р.З. Валиев, И.Н. Пигалева // *Физическая мезомеханика*. – 2022. – Т. 25, № 5. – С. 5–11. DOI 10.55652/1683-805X\_2022\_25\_5
17. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризации-оптические методы механики деформируемого тела. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
18. Carroll J.D., Abuzaid W., Lambros J. High resolution digital image correlation measurements of strain accumulation in fatigue crack growth // *International Journal of Fatigue*. – 2013. – Vol. 57. – P. 140–150. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2012.06.010
19. Near-tip strain evolution under cyclic loading: In situ experimental observation and numerical modelling / J. Tong, Y. Lu, K. Madi, Y.H. Tai, J.R. Yates, V. Doquet // *International Journal of Fatigue*. – 2015. – Vol. 71. – P. 45–52. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2014.02.013
20. Investigation of fatigue crack closure using multiscale image correlation experiments / J. Carroll, C. Efstathiou, J. Lambros, H. Sehitoğlu, B. Hauber, S. Spottswood, R. Chona // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2009. – Vol. 76, no. 15. – P. 2384–2398. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2009.08.002
21. Yusof F., Lopez-Crespo P., Withers P.J. Effect of overload on crack closure in thick and thin specimens via digital image correlation // *International Journal of Fatigue*. – 2013. – Vol. 56. – P. 17–24. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2013.07.002
22. Mathieu, F., Hild, F., Roux, S. Identification of a crack propagation law by digital image correlation // *International Journal of Fatigue*. – 2012. – Vol. 36, no. 1. – P. 146–154. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2011.08.004
23. An approach to calculate the J-integral by digital image correlation displacement field measurement / T.H. Becker, M. Mostafavi, R.B. Tait, T.J. Marrow // *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. – 2012. – Vol. 35, no. 10. – P. 971–984. DOI: 10.1111/j.1460-2695.2012.01685.x.

24. J-Integral calculation by finite element processing of measured full-field surface displacements / S.M. Barhli, M. Mostafavi, A.F. Cinar, D. Hollis, T.J. Marrow // *Experimental Mechanics*. – 2017. – Vol. 57, no. 6. – P. 997–1009. DOI: 10.1007/s11340-017-0275-1
25. A J-integral approach using digital image correlation for evaluating stress intensity factors in fatigue cracks with closure effects / G.L.G. Gonzáles, J.A.O. González, J.T.P. Castro, J.L.F. Freire // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2017. – Vol. 90. – P. 14–21. DOI: 10.1016/j.tafmec.2017.02.008
26. Yoneyama S., Morimoto Y., Takashi M. Automatic evaluation of mixed-mode stress intensity factors utilizing digital image correlation // *Strain*. – 2006. – Vol. 42, no. 1. – P. 21–29. DOI: 10.1111/j.1475-1305.2006.00246.x
27. Lorenzino P., Beretta G., Navarro A. Application of digital image correlation (DIC) in resonance machines for measuring fatigue crack growth // *Fracture and Structural Integrity*. – 2014. – Vol. 30. – P. 369–374. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.30.44
28. Zhang R., He L. Measurement of mixed-mode stress intensity factors using digital image correlation method // *Optics and*

*Lasers in Engineering*. – 2012. – Vol. 50, no. 7. – P. 1001–1007. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2012.01.009

29. Развитие метода корреляции цифровых изображений для изучения процессов деформации и разрушения конструкционных материалов / П.С. Любутин, С.В. Панин, В.В. Титков, А.В. Еремин, Р. Сундер // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2019. – № 1. – С. 87–107. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.08

30. Разрушение стали 30ХГСА в условиях смешанных мод нагружения / Л.Р. Ботвина, Е.Н. Белецкий, М.Р. Тютин, Ю.А. Демина, И.О. Синев, А.И. Болотников // *Физическая мезомеханика*. – 2023. – Т. 26, № 2. – С. 30–42. DOI 10.55652/1683-805X\_2023\_26\_2\_30

31. Исследование кинетики разрушения сплава Д16ч методами акустической эмиссии, корреляции цифровых изображений и изучения реальной поврежденности / Л.Р. Ботвина, А.И. Болотников, И.О. Синев, М.Р. Тютин, Е.Н. Белецкий // *Металлы*. – 2022. – № 4. – С. 15–23.

## References

1. Shlyannikov, V., Tumanov, A. Characterization of crack tip stress fields in test specimens using mode mixity parameters, 2014, *International Journal of Fracture*, 185 (1-2), pp. 49-76. doi:10.1007/s10704-013-9898-0
2. Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Polnoe asimptoticheskoe razlozhenie M. Uil'iamsa u verшин dvukh kollinearnykh treshchin konechnoi dliny v beskonechnoi plastine [Complete asymptotic expansion M. Williams near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane medium], 2015, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 4, pp. 188-225. doi:10.15593/perm.mech/2015.4.12
3. Irwin G.R. *Fracture, Elasticity and Plasticity*. Berlin, Springer, 1958, 551-590 p.
4. Levin, V.A. Izbrannyye nelineinye zadachi mekhaniki razrusheniia / V.A. Levin, E.M. Morozov, Iu.G. Matvienko [Selected nonlinear problems of fracture mechanics]. Moscow, FIZMATLIT, 2004, 480 p.
5. Dixon J.R. Effect of plastic deformation on the strain distribution around cracks in sheet materials, 1964, *Journal mechanical engineering science*, 6 (2), pp. 132-136. doi: 10.1243/JMES\_JOUR\_1964\_006\_022
6. Dixon J.R. Stress and strain distributions around cracks in sheet materials having various work-hardening characteristics. 1965, *International Journal of Fracture Mechanics*, 1 (3), pp. 224-244. doi: 10.1007/BF00186858
7. Raju K. N. On the calculation of plastic energy dissipation rate during stable crack growth. 1969, *International Journal of Fracture Mechanics*, 5 (2), pp. 101-112.
8. Raju K. N. An energy balance criterion for crack growth under fatigue loading from considerations of energy of plastic deformation. 1972, *International Journal of Fracture Mechanics*, 8 (1), pp. 1-14.
9. Iziumova, A., Plekhov, O. Calculation of the energy J-integral in plastic zone ahead of a crack tip by infrared scanning, 2014, *FFEMS*, 37, pp. 1330–1337. doi:10.1111/ffe.12202
10. Ranganathan, N., Chalon, F., Meo, S. Some aspects of the energy based approach to fatigue crack propagation Original research article, 2008, *International Journal of Fatigue*, 30 (10–11), pp. 1921-1929. doi:10.1016/j.ijfatigue.2008.01.010
11. Vshivkov A., Iziumova A., Yarullin R., Shlyannikov V., Plekhov O. Experimental and theoretical analysis of heat flux at fatigue crack tip under mixed mode loading, 2019,

*Procedia Structural Integrity*, 18, pp. 608-615. doi:10.1016/j.prostr.2019.08.206.

12. Swapnil P., Umesh C., Plastic zone analysis of SS316L and Ti6Al4V materials under mixed mode loading conditions, 2022, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 23 (5), pp. 429-450. doi: 10.1080/15502287.2021.1992542.

13. Graba M., Characteristics of selected measures of stress triaxiality near the crack tip for 145Cr6 steel – 3D issues for stationary cracks, 2020, *Open Eng*, 10, pp. 571–585. doi: 10.1515/eng-2020-0042

14. Klevtsov, G.V., Valiev, R.Z., Klevtsova, N.A. Glezer A. M., Pigaleva I. N., Local state of stress of the material at the crack tip for various types of loading, 2021, *Russian Metallurgy (Metally)*, pp. 1177–1182. doi:10.1134/S0036029521100165

15. Shailendra S.B., Amanpreet K., Mahesh P., Krishna S., Subhalakshmi S., Bhavesh K., Vishal Sharma, Crack tip plastic zone shape for anisotropic material subjected to mode -I loading, 2023, *Materials Today: Proceedings*. doi:10.1016/j.matpr.2023.09.087. available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214785323047600>

16. Klevtsov G.V., Botvina L.R., Klevtsova N.A., Valiev R.Z., Pigaleva I.N. Opredelenie parametrov avariinogo ustalostnogo razrusheniia izdelii po glubine plasticheskikh zon pod poverkhnost'iu izlomov [Determination of fatigue failure parameters by the depth of plastic zones beneath the fracture surface], 2022, *Physical mesomechanics*, 25 (5), pp. 5-11. doi:10.55652/1683-805X\_2022\_25\_5\_5.

17. Aleksandrov A.Ia., Akhmetzianov M.Kh. Poliarizatsionno-opticheskie metody mekhaniki deformiruemogo tela [Polarisation-optical methods of deformable body mechanics]. Moscow, Nauka, 1973, 576 p.

18. Carroll, J. D., Abuzaid, W., Lambros, J. High resolution digital image correlation measurements of strain accumulation in fatigue crack growth, 2013, *International Journal of Fatigue*, 57, pp. 140–150. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2012.06.010.

19. Tong, J., Lu, Y., Madi, K., Tai, Y.H., Yates, J.R., Doquet, V. Near-tip strain evolution under cyclic loading: In situ experimental observation and numerical modelling, 2015, *International Journal of Fatigue*, 71, pp. 45–52. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2014.02.013.



20. Carroll, J., Efstathiou, C., Lambros, J., Sehitoglu, H., Hauber, B., Spottswood, S., Chona, R. Investigation of fatigue crack closure using multiscale image correlation experiments, 2009, *Engineering Fracture Mechanics*, 76 (15), pp. 2384–2398. doi: 10.1016/j.engfracmech.2009.08.002.
21. Yusof, F., Lopez-Crespo, P., Withers, P.J. Effect of overload on crack closure in thick and thin specimens via digital image correlation, 2013, *International Journal of Fatigue*, 56, pp. 17–24. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2013.07.002.
22. Mathieu, F., Hild, F., Roux, S. Identification of a crack propagation law by digital image correlation, 2012, *International Journal of Fatigue*, 36 (1), pp. 146–154. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2011.08.004.
23. Becker, T. H., Mostafavi, M., Tait, R.B., Marrow, T.J. An approach to calculate the J-integral by digital image correlation displacement field measurement, 2012, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 35 (10), pp. 971–984. doi: 10.1111/j.1460-2695.2012.01685.x.
24. Barhli, S.M., Mostafavi, M., Cinar, A.F., Hollis, D., Marrow, T.J. J-Integral Calculation by Finite Element Processing of Measured Full-Field Surface Displacements, 2017, *Experimental Mechanics*, 57 (6), pp. 997–1009. doi: 10.1007/s11340-017-0275-1.
25. González, G.L.G., González, J.A.O., Castro, J.T.P., Freire, J.L.F. A J-integral approach using digital image correlation for evaluating stress intensity factors in fatigue cracks with closure effects, 2017, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 90, pp. 14–21. doi: 10.1016/j.tafmec.2017.02.008.
26. Yoneyama, S., Morimoto, Y., Takashi, M. Automatic evaluation of mixed-mode stress intensity factors utilizing digital image correlation, 2006, *Strain*, 42 (1), pp. 21–29. doi: 10.1111/j.1475-1305.2006.00246.x.
27. Lorenzino, P., Beretta, G., Navarro, A. Application of digital image correlation (DIC) in resonance machines for measuring fatigue crack growth, 2014, *Fracture and Structural Integrity*, 30, pp. 369–374. doi: 10.3221/IGF-ESIS.30.44.
28. Zhang, R., He, L. Measurement of mixed-mode stress intensity factors using digital image correlation method, 2012, *Optics and Lasers in Engineering*, 50 (7), pp. 1001–1007. doi: 10.1016/j.optlaseng.2012.01.009.
29. Lyubutin P.S., Panin S.V., Titkov V.V., Eremin A.V., Sunder R. Razvitiye metoda korreliatsii tsifrovyykh izobrazhenii dlia izucheniia protsessov deformatsii i razrusheniia konstruktsionnykh materialov [Development of digital image correlation method to study deformation and fracture processes of structural materials], 2019, *PNRPU Mechanics Bulletin*. No. 1, pp. 87-107. doi: 10.15593/perm.mech/2019.1.08
30. Botvina L.R., Beletsky E.N., Tyutin M.R., Demina Yu.A., Sinev I.O., Bolotnikov A.I. Razrushenie stali 30KhGSA v usloviakh smeshannykh mod nagruzeniia [Fracture of 30CrMnSiA steel under mixed loading modes], 2023, *Physical mesomechanics*, 26 (2), pp. 30-42. doi: 10.55652/1683-805X\_2023\_26\_2\_30.
31. Botvina L.R., Beletsky E.N., Tyutin M.R., Demina Yu.A., Sinev I.O., Bolotnikov A.I. Issledovanie kinetiki razrusheniia splava D16ch metodami akusticheskoi emissii, korreliatsii tsifrovyykh izobrazhenii i izucheniia real'noi povrezhdennosti [Investigation of D16h alloy fracture kinetics by methods of acoustic emission, digital image correlation and real damage study ], 2022, *Metally*, No. 4, pp. 15-23.

**Финансирование.** Экспериментальная часть работы выполнена за счет гранта Российского Научного Фонда № 22-79-10168. Анализ данных и численная оценка размера зоны пластической деформации выполнены в рамках госзадания ИМСС УрО РАН – филиала ПФИЦ УрО РАН (тема № 122022800161-1).

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов равноценен.**

**Funded.** The experimental part of the work was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 22-79-10168. Data analysis and numerical assessment of the size of the plastic deformation zone were carried out within the framework of the state task of the IMSS Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, a branch of the PFIC Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (topic No. 122022800161-1).

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.

**The contribution of the authors is equivalent.**