

Феклистова, Е.В. Численное исследование процессов разрушения деформируемых тел с концентраторами напряжений с учетом статистического распределения прочности структурных элементов / Е.В. Феклистова, А.И. Мугатаров, В.Э. Вильдеман. – DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.07 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2024. – № 4. – С. 70–83.

Perm Polytech Style: Feklistova E.V., Mugatarov A.I., Wildemann V.E. Simulation of Fracture in Deformable Bodies with Stress Concentrators Taking into Account the Statistical Distribution of Ultimate Strength in Structural Elements. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, no. 4, pp. 70-83. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.07



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА  
№ 4, 2024  
PNRPU MECHANICS BULLETIN  
<https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index>



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.07

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ С УЧЕТОМ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЧНОСТИ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Е.В. Феклистова, А.И. Мугатаров, В.Э. Вильдеман

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

### О СТАТЬЕ

Получена: 02 августа 2024 г.  
Одобрена: 08 октября 2024 г.  
Принята к публикации:  
17 октября 2024 г.

#### Ключевые слова:

разрушение, метод конечных элементов, численное моделирование, концентратор напряжений, распределение прочностных характеристик.

### АННОТАЦИЯ

Решение проблемы обеспечения прочности и безопасности ответственных конструкций требует изучения их механического поведения не только в условиях нормальной эксплуатации, но и при реализации процессов разрушения на структурном уровне. Для численного моделирования процессов разрушения применяются различные методы, одним из широко используемых является подход, связанный с редуцированием жесткости конечных элементов при выполнении критерия разрушения. При данном подходе важным является учет неоднородности распределения прочностных характеристик структурных элементов в объеме тела.

В работе проведено численное исследование процессов разрушения тел с концентраторами напряжений при учете стохастичности распределения прочностных характеристик структурных элементов. Приведена постановка краевой задачи деформирования и разрушения и алгоритм ее решения методом конечных элементов. На примере решения типовой задачи изучено влияние геометрии концентратора напряжений и характерного размера зоны повреждения на поведение тела на макроуровне, его несущую способность и кинетику процесса накопления повреждений. Отмечена реализация закритической стадии деформирования на макроуровне при высоком значении разброса прочностных характеристик. Выявлено наличие порогового значения дисперсии распределения пределов прочности структурных элементов, по достижении которого концентратор напряжений перестает влиять на процесс разрушения. Отмечена существенная зависимость результатов численного моделирования от характерного размера зоны разрушения и целесообразность подбора данного параметра путем сопоставления полученных результатов с экспериментальными данными. Сделан вывод о рациональности учета неоднородности распределения прочностных характеристик структурных элементов при изучении процессов разрушения конструкций.

© Феклистова Евгения Вячеславовна – м. н. с. Центра экспериментальной механики, e-mail: cem.feklistova@mail.ru.

Мугатаров Артур Ильдарович – асс. кафедры экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, e-mail: cem\_mugatarov@mail.ru.

Вильдеман Валерий Эрвинович – д. ф.-м. н., проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, e-mail: wildemann@pstu.ru.

Eugeniia V. Feklistova – Junior Research Assistant, Centre for Experimental Mechanics, e-mail: cem.feklistova@mail.ru.

Artur I. Mugatarov – Assistant, Department of Experimental Mechanics and Structural Materials, e-mail: cem\_mugatarov@mail.ru.

Valeriy E. Wildemann – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Experimental Mechanics and Structural Materials, e-mail: wildemann@pstu.ru.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# SIMULATION OF FRACTURE IN DEFORMABLE BODIES WITH STRESS CONCENTRATORS TAKING INTO ACCOUNT THE STATISTICAL DISTRIBUTION OF ULTIMATE STRENGTH IN STRUCTURAL ELEMENTS

E.V. Feklistova, A.I. Mugatarov, V.E. Wildemann

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 02 August 2024  
Approved: 08 October 2024  
Accepted for publication:  
17 October 2024

### Keywords:

fracture, finite element method, numerical modeling, stress concentrator, strength properties distribution.

## ABSTRACT

To solve the problem of ensuring the strength and safety of critical structures, it is required to study their mechanical behavior at the structural level not only under normal operating conditions but also under destruction. Various methods are used to simulate destruction processes; one of them implies the reduction of the stiffness of finite elements when fulfilling the destruction criterion. When using this approach, it is important to take the heterogeneous distribution of strength characteristics of structural elements in the body's volume into account. The paper presents a numerical study of the destruction processes of bodies with stress concentrators taking into account the stochasticity of the distribution of strength characteristics of the structural elements. We present the statement of the boundary value problem of deformation and destruction, also its solution algorithm using the finite element method. By solving a typical problem, we study the influence of the stress concentrator geometry and the characteristic size of the damage zone on the behavior of the body at the macrolevel, its bearing capacity and the kinetics of the damage accumulation process. The implementation of the postcritical stage of deformation at the macrolevel with a wide range of strength characteristics is noted. There is a threshold value of the variance of the distribution of the strength limits of structural elements, upon which the stress concentrator ceases to affect the destruction process. A significant dependence of the simulation results on the characteristic size of the destruction zone and the expediency of selecting this parameter by comparing the obtained results with experimental data are noted. When studying structural destructions it is important to take heterogeneity of the distribution of strength characteristics of structural elements into account.

## Введение

Для решения проблемы обеспечения прочности конструкций необходимым является изучение поведения твердых тел в условиях реализации неоднородных полей напряжений [1]. Локальная концентрация напряжений в деформируемом теле может быть обусловлена конструктивными особенностями, технологией изготовления, а также различными внешними воздействиями, которые вызывают повреждения конструкции в процессе эксплуатации [2]. Во многих экспериментальных [3–5] и теоретических [5–11] работах изучается влияние концентрации напряжений на несущую способность тел из различных материалов. Тем не менее для повышения надежности и безопасности ответственных конструкций с концентраторами напряжений целесообразным является анализ состояния твердых тел не только в условиях нормальной эксплуатации, но и в условиях протекания процессов разрушения на структурном уровне [12].

Для анализа процессов деформирования и разрушения твердых тел применяются различные вычислительные методы. Наиболее широко используемыми из них являются: метод конечных элементов [13; 14], расширенный метод конечных элементов [15, 16], расширенный метод виртуальных элементов [17], перидинамика [18], метод бессеточных вычислений [19] и др. Кроме того, применяются различные модели механического поведения материалов: модель линейной упругости [20]

(в линейно-упругой механике разрушения), континуальные модели поврежденной среды [21], модели когезионных трещин [15], модели мостиковых трещин [22] и др.

При численном моделировании процессов разрушения широко используется подход, в котором реализуется изменение жесткостных свойств конечных элементов (КЭ) при выполнении критерия разрушения [23–25]. Преимуществами данного подхода являются: простота использования, отсутствие необходимости перестройки сетки после каждого акта разрушения, возможность реализации сложных схем редуцирования жесткости для учета различных механизмов повреждения конструкции (например, расслоения [24] или разрыва волокон [23; 25]). Однако данный подход требует учета ряда аспектов.

Во-первых, поскольку снижение жесткости КЭ после реализации критерия разрушения приводит к изменению напряженно-деформированного состояния, процесс разрушения должен осуществляться при постоянных граничных условиях до получения устойчивого состояния. Для этого необходимы дополнительные итерационные процедуры, включенные в программные комплексы численного моделирования процессов разрушения. Для определения окончания итерационных процедур используются различные критерии [23; 26–28]. Во-вторых, количество разрушаемых за итерацию элементов может влиять на результаты моделирования, что было продемонстрировано в работе [28]. В-третьих, на точность результатов влияет размер шага нагруже-

ния. С одной стороны, использование постоянного значения шага нагружения является более простым в реализации и в ряде случаев требует меньших вычислительных затрат. С другой стороны, автоматически подбираемое значение шага нагружения позволяет гораздо точнее описать процесс разрушения [29; 30]. В-четвертых, на результаты численного моделирования процесса разрушения существенное влияние оказывает дискретизация расчетной области, что было показано в работах [15; 31; 32]. Если при численном решении краевых задачах теории упругости увеличение числа степеней свободы приводит к улучшению сходимости, то при моделировании процессов разрушения уменьшение размера КЭ может существенно изменить получаемые результаты. Все вышеперечисленные аспекты были рассмотрены авторами в работе [28]. Было продемонстрировано, что для моделирования процессов деформирования и разрушения упругохрупких тел необходимо использовать итерационную процедуру пересчета напряженно-деформированного состояния при неизменных граничных условиях до достижения устойчивого состояния; редуцировать жесткость только одного (наиболее перегруженного) КЭ на каждой итерации; подбирать величину шага нагружения автоматически; подбирать размер КЭ на основе сравнения результатов эксперимента с численными данными, поскольку такой подход позволяет определить физически обоснованный размер КЭ.

На результаты моделирования процессов разрушения также существенное влияние оказывает неоднородность распределения механических характеристик структурных элементов по объему тела [23; 27; 33–35]. Однако в малом числе работ рассматривались процессы разрушения тел с концентраторами напряжений. В предыдущем исследовании [27] авторами было продемонстрировано, что изменение дисперсии распределения прочностных свойств структурных элементов конструкции с концентратором напряжений существенно влияет на ее поведение на макроуровне, несущую способность и кинетику процесса накопления повреждений.

Данная работа посвящена моделированию процессов деформирования и разрушения тел с концентраторами напряжений при учете статистического распределения прочностных характеристик структурных элементов. В частности, изучено влияние геометрии концентратора напряжений и размера структурного элемента на несущую способность тела и кинетику процесса накопления повреждений при различных дисперсиях распределения прочностных характеристик.

## 1. Постановка краевой задачи и алгоритм численного решения

Для учета распределения прочностных свойств твердое тело представлено как совокупность  $N$  подобластей, материал которых является однородным, изотропным и упругохрупким. Упругие свойства для каждой подобласти принимаются одинаковыми. Неодно-

родность распределения значений предела прочности по структурным элементам можно представить следующим образом:

$$\chi^{(m)}(\bar{r}) = \begin{cases} 1, \bar{r} \in V_m; \\ 0, \bar{r} \notin V_m; \end{cases} \quad (1)$$

$$\sigma_B(\bar{r}) = \sum_{m=1}^N \sigma_B^{(m)} \chi^{(m)}(\bar{r}).$$

Здесь  $\bar{r}$  – радиус-вектор;  $\chi^{(m)}$  – индикаторная функция, характеризующая расположение точки в подобласти с индексом  $(m)$ , пределом прочности  $\sigma_B^{(m)}$  и объемом  $V_m$ ;  $V$  – весь объем тела;  $\sigma_B$  – кусочно-постоянная функция, задающая распределение значений предела прочности по телу.

Рассматривается процесс разрушения, при котором происходит множественное разрушение подобластей, следовательно, необходимо учитывать историю процесса деформирования. Данный учет можно реализовать путем введения в задачу параметра процесса  $t$  как условного аналога времени. Соответственно, любая составляющая тензора напряжений, тензора деформаций или вектора перемещений должна зависеть не только от координат, но и от параметра процесса.

Поскольку каждая подобласть является упругохрупкой, предполагается, что ее разрушение происходит при невыполнении первой гипотезы прочности, т.е. когда максимальное значение первого главного напряжения  $\sigma_1$  достигает значения предела прочности. Поскольку каждая из подобластей имеет свое значение предела прочности, для сопоставления состояний различных структурных элементов в задачу вводится коэффициент перегрузки  $K$ , определяемый как отношение  $\sigma_1$  к  $\sigma_B$ :

$$K(\bar{r}, t) = \frac{\sigma_1(\bar{r}, t)}{\sigma_B(\bar{r})}. \quad (2)$$

Значение  $K$ , превышающее единицу, указывает на то, что подобласть должна быть разрушена.

Материал принимается упругохрупким, поэтому определяющие соотношения можно представить с помощью обобщенного закона Гука с учетом параметра целостности, определяющего реализацию критерия разрушения в подобластях:

$$\sigma_{ij}(\bar{r}, t) = \lambda(\bar{r}, t) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\bar{r}, t);$$

$$\lambda(\bar{r}, t) = \sum_{m=1}^N \lambda^{(m)}(t) \chi^{(m)}(\bar{r}); \quad (3)$$

$$\lambda^{(m)}(t) = \begin{cases} 0, \exists \tau \leq t : \max_{V_m} (K(\bar{r}, \tau)) \geq 1; \\ 1, \nexists \tau \leq t : \max_{V_m} (K(\bar{r}, \tau)) \geq 1. \end{cases}$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  – тензор деформаций;  $u_i$  – вектор перемещений;  $C_{ijkl}$  – тензор упругих констант;  $\lambda^{(m)}$  – параметр целостности подобласти  $(m)$ , принимающий либо нулевое, либо единичное значение;  $t$  (или  $\tau$ ) – условный параметр процесса;  $\lambda$  – кусочно-постоянная функция, отражающая распределение параметров целостности по объему тела.

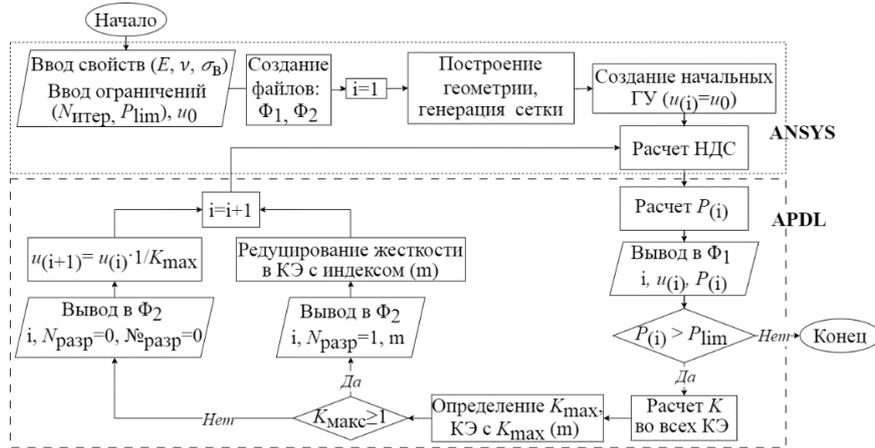


Рис. 1. Блок-схема алгоритма решения краевой задачи

Fig. 1. The flow chart of the boundary value problem solution algorithm

Краевая задача дополняется уравнениями равновесия (массовые силы не учитываются) и геометрическими соотношениями:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\bar{r}, t) = 0; \\ \varepsilon_{ij}(\bar{r}, t) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\bar{r}, t) + u_{j,i}(\bar{r}, t)). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $u_i$  – вектор перемещений. Для завершения постановки краевой задачи вводятся граничные условия в перемещениях и граничные условия в напряжениях:

$$\begin{cases} u_i(\bar{r}, t)|_{\Gamma_u} = u_i^0(\bar{r}, t); \\ \sigma_{ij}(\bar{r}, t)n_j(\bar{r})|_{\Gamma_s} = S_i^0(\bar{r}, t). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $u_i^0$  – вектор перемещений, приложенный к границе  $\Gamma_u$ ;  $S_i^0$  – вектор напряжений, приложенный к границе  $\Gamma_s$ ;  $n_j$  – единичный вектор нормали к границе  $\Gamma_s$ . Уравнения (1)–(5) образуют краевую задачу деформирования и разрушения твердого тела.

Краевая задача (1)–(5) решалась численно методом конечных элементов, предполагалось, что каждый элемент представляет собой одну подобласть. Алгоритм решения включает следующие этапы:

- 1) задание геометрии расчетной области и деление её на конечные элементы, генерация значений пределов прочности конечных элементов, ввод свойств материала;
- 2) задание граничных условий (уравнение (5), значения  $u_i^0$  и  $S_i^0$  должны быть малыми, чтобы не допустить выполнения критерия разрушения на первом шаге);
- 3) расчет напряженно-деформированного состояния;
- 4) расчет величины внешней нагрузки ( $P$ ). Если ее значение меньше порогового значения (обозначается как  $P_{lim}$ ), процесс моделирования процесса разрушения заканчивается;
- 5) расчет поля коэффициента перегрузки ( $K$ ), определение его максимального значения (обозначается как  $K_{max}$ ) в конечном элементе с индексом ( $m$ );
- 6) если  $K_{max} < 1$ , то увеличение граничных условий в  $1/K_{max}$  раз и переход к шагу 3, иначе редуцируется

жесткость конечного элемента с индексом ( $m$ ) и происходит переход к шагу 3.

Целесообразность предложенного алгоритма доказана в работах [27; 28]. Представленный алгоритм реализован на языке Ansys Parametric Design Language (APDL), блок-схема реализованного алгоритма представлена на рис. 1. Разрушение КЭ осуществлялось с помощью встроенной в ANSYS процедуры *death of finite element*, что приводило к снижению жесткостных свойств КЭ в  $10^6$  раз. При решении задачи использована опция больших деформаций. В процессе численного решения краевой задачи возможность образования сингулярных точек после редуцирования жесткости конечных элементов не рассматривалась. В результате решения краевой задачи деформирования и разрушения получены диаграммы нагружения и данные о кинетике процесса накопления повреждений.

Для исследования влияния геометрии концентратора напряжений на процесс разрушения тела со статистически распределенными значениями прочностных свойств элементов конструкции рассматривается задача кинематического статического нагружения пластины (шириной 100 мм, высотой 20 мм и толщиной 1 мм, плоское напряженное состояние) с концентратором напряжений в форме полуэллипса (малая полуось 1 мм, большая полуось  $r$  мм). Были выбраны следующие значения параметра  $r$ : 0, 1; 1,5; 2; 3; 4 и 5 мм. На рис. 2 представлена геометрия тела и граничные условия.

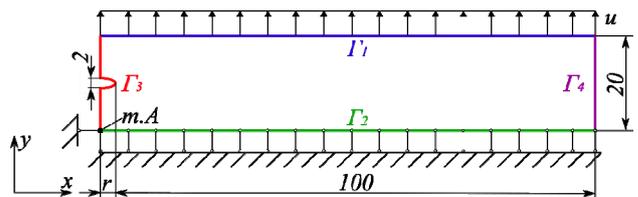


Рис. 2. Геометрия тела с концентратором напряжений и граничные условия

Fig. 2. The geometry of the solid with the stress concentrator and the boundary conditions

Граничные условия:

$$\begin{cases} u_y(t)|_{\Gamma_1} = u_0(t); \\ u_y(t)|_{\Gamma_2} = 0; \\ u_x(t)|_{m.A} = 0; \\ \sigma_{ij}(\bar{r}, t) n_j(\bar{r})|_{\Gamma_3} = 0; \\ \sigma_{ij}(\bar{r}, t) n_j(\bar{r})|_{\Gamma_4} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – верхняя и нижняя границы тела;  $\Gamma_3, \Gamma_4$  – левая и правая границы тела, точка  $A$  (т.  $A$ ) – нижний левый угол тела,  $u_0$  – смещение верхней границы (см. рис. 2).

Рассматривается модельный материал с модулем Юнга  $E=3$  ГПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,36$  (эти свойства соответствуют свойствам оргстекла [36] и выбраны для возможности проведения дальнейшей верификации полученных результатов). Предполагалось, что один КЭ соответствует одному структурному элементу тела. Значения предела прочности конечных элементов генерировались с использованием равномерного распределения. Во всех генерациях среднее значение (обозначаемое как  $\sigma_{Вм}$ ) было равным 40 МПа. Для характеристики дисперсии распределения предела прочности КЭ введен параметр  $\sigma$ , определяемый как отношение среднеквадратического отклонения распределения к  $\sigma_{Вм}$  (т.е. параметр  $\sigma$  является относительной величиной среднеквадратического отклонения). В случае равномерного распределения максимальное значение  $\sigma$ , не приводящее к появлению отрицательных значений, составляет  $\sigma_{lim} \approx 0,577$ . В данной работе значения параметра  $\sigma$  варьировались в диапазоне от 0,0 до  $0,9 \cdot \sigma_{lim}$  (т.е. в диапазоне от 0,0 до 0,520) с шагом  $0,1 \cdot \sigma_{lim}$ . Для каждого значения  $\sigma$  было сгенерировано пять различных наборов значений предела прочности КЭ.

При проведении численного моделирования с использованием реализованного в виде программы алгоритма был использован четырехузловой конечный элемент PLANE182. Равномерная сетка генерировалась автоматически. Решение задачи сходимости показало, что достаточно использовать КЭ с характерным линейным размером  $L_{эл} \approx 0,16$  мм (определяется как квадратный корень из отношения площади тела к числу КЭ), что соответствует числу элементов  $N \approx 74000-77000$ . Пороговое значение внешней нагрузки  $P_{lim}$  выбрано равным 0,1 кН.

Численные эксперименты проводились на высокопроизводительном вычислительном комплексе ЦКП ЦВВС ПНИПУ. Результаты моделирования процесса разрушения представлены ниже.

## 2. Результаты численного моделирования процессов разрушения

### 2.1. Влияние концентратора напряжений на процесс разрушения

С использованием вышеизложенного алгоритма для тел с концентраторами напряжений различной геомет-

рии построены расчетные диаграммы нагружения при различных значениях дисперсии распределения пределов прочности структурных элементов (рис. 3).

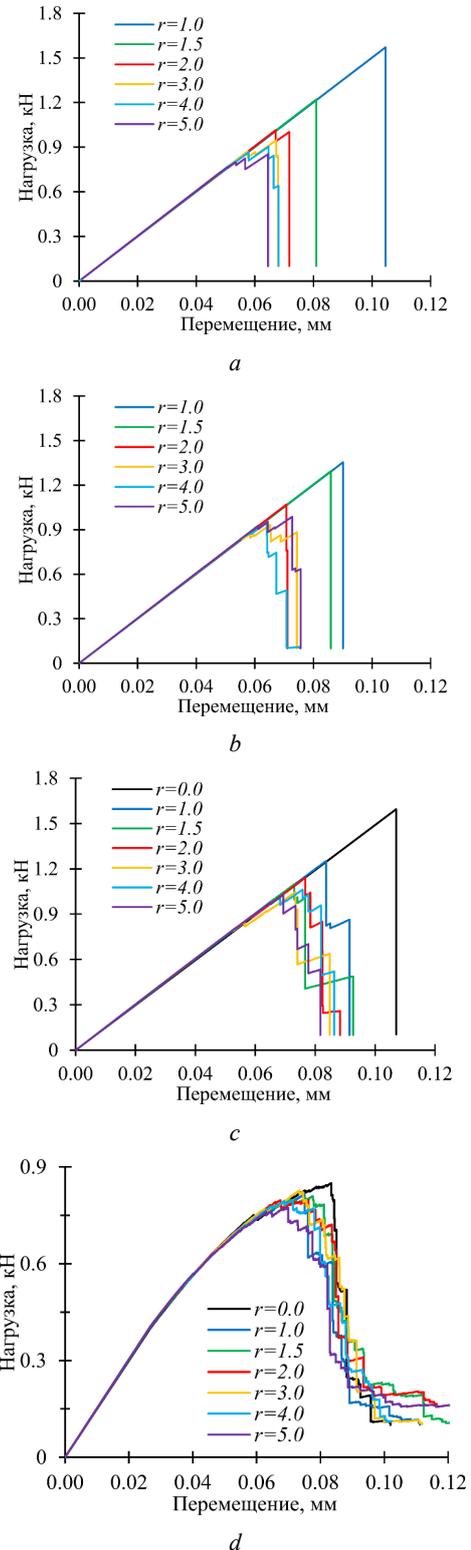


Рис. 3. Расчетные диаграммы нагружения для тел с концентраторами напряжений различной геометрии, значения  $\sigma$ : 0,000 (a), 0,173 (b), 0,346 (c), 0,520 (d)

Fig. 3. The calculated loading diagrams for the bodies with various concentrator depth values,  $\sigma$  values are: 0,000 (a), 0,173 (b), 0,346 (c), 0,520 (d)

Результаты демонстрируют, что при одинаковой прочности всех конечных элементов ( $\sigma=0,0$ ) несущая способность тела снижается с ростом глубины концентратора (т.е. с ростом значения параметра  $r$ ), поскольку происходит увеличение максимального напряжения у вершины концентратора. При этом в случае  $r < 2$  разрушение первого КЭ приводит к реализации неустойчивого процесса накопления повреждений, в то время как при  $r \geq 2$  после первичного разрушения возникают устойчивые состояния (т.е. существуют состояния, в которых рост макродефекта «останавливается»). Данная особенность объясняется существенной неоднородностью автоматически генерируемой конечно-элементной сетки. При увеличении параметра  $\sigma$  до 0,173 происходит снижение несущей способности тела для  $r \leq 1$ , практически не меняется несущая способность при  $r = 1,5$  мм и незначительно повышается максимальная нагрузка, выдерживаемая телом, при  $r \geq 2$ . Кроме этого, при большей глубине концентратора напряжений ( $r > 2$ ) наблюдается увеличение числа состояний, где не происходит роста трещины, реализуется за критическую стадию деформирования на макроуровне [27]. При  $\sigma = 0,346$  только при  $r = 0$  (т.е. при отсутствии концентратора напряжений) разрушение первого КЭ вызывает неустойчивый рост макродефекта, в остальных случаях реализуется ряд устойчивых состояний. Кроме этого, при  $r \geq 1$  несущая способность тела слабо зависит от глубины концентратора напряжений. При значительном разбросе прочностных характеристик КЭ ( $\sigma = 0,520$ ) диаграммы нагружения являются практически идентичными для всех глубин концентратора напряжений, на макроуровне наблюдается существенно нелинейное поведение с реализацией протяженной за критическую стадию деформирования.

Таким образом, можно сделать вывод, что рост среднеквадратического отклонения распределения пределов прочности структурных элементов в теле приводит к постепенной реализации нелинейного поведения на макроуровне и изменению несущей способности тела.

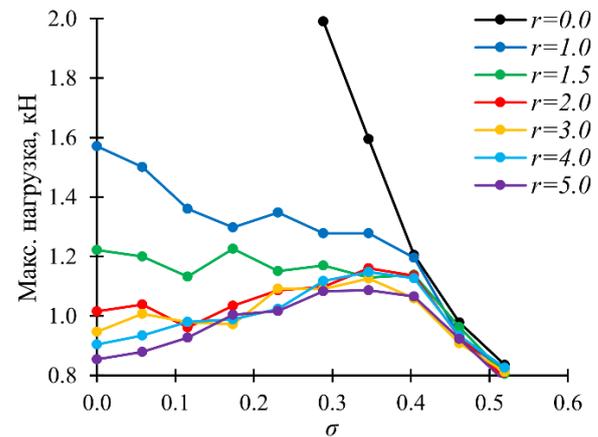
Поскольку дисперсия статистического распределения прочностных свойств КЭ приводит к изменению несущей способности пластины с концентратором напряжений, подробнее исследована зависимость максимальной нагрузки от значения параметра  $\sigma$ . На рис. 4, а, показаны зависимости средней (по результатам 5 расчетов) максимальной нагрузки, выдерживаемой телом, от значения параметра  $\sigma$  для различных геометрий концентратора напряжений. Результаты демонстрируют, что при  $r \leq 1$  увеличение значения  $\sigma$  приводит к снижению несущей способности. При этом, если  $r = 0$  мм, график линейно убывает в диапазоне  $0,00 \leq \sigma < 0,41$ . Если значение  $r$  превышает 2 мм, то наблюдается немонотонная зависимость несущей способности от разброса значений предела прочности: при  $\sigma < 0,34$  график практически монотонно возрастает, а при  $\sigma > 0,36$  – монотонно убывает. Случаи  $r = 1,5$  и  $r = 2$  мм являются переходными, максимальное значение нагрузки практически не меняется

в диапазонах  $0,00 \leq \sigma < 0,34$  и  $0,00 \leq \sigma < 0,18$  (в пределах статистического разброса несущей способности тела) соответственно.

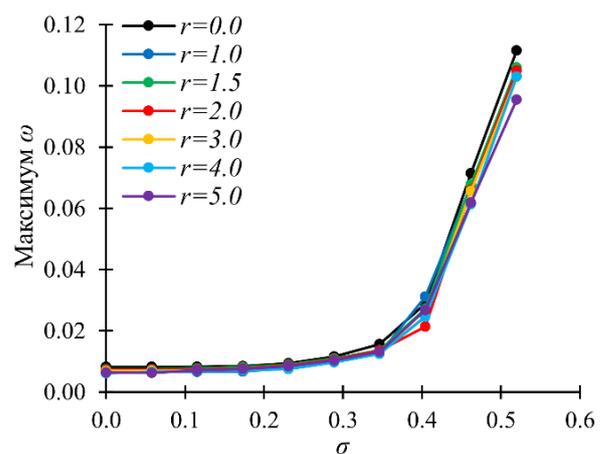
Для более детального рассмотрения процесса разрушения вводится параметр  $\omega$ , определяющий относительное количество элементов с редуцированной жесткостью (деактивированных КЭ), следующим образом:

$$\omega = \frac{N_{deact}}{N}, \quad (7)$$

где  $N_{deact}$  – количество деактивированных КЭ. На рис. 4, б, показаны зависимости среднего количества деактивированных элементов при завершении работы алгоритма (т.е. максимального значения  $\omega$ ) от значения параметра  $\sigma$  для различных геометрий концентратора напряжений. Результаты демонстрируют, что геометрия концентратора не влияет на количество деактивированных элементов. Полученные графики монотонно возрастают, при этом в диапазоне  $0,00 \leq \sigma < 0,24$  количество деактивированных КЭ остается практически неизменным.



а



б

Рис. 4. Зависимости максимального значения нагрузки (а) и максимального значения  $\omega$  (б) от  $\sigma$  для концентраторов напряжений различной глубины  $r$

Fig. 4. The dependencies of the maximum load value (a) and the maximum  $\omega$  value (b) on  $\sigma$  for the stress concentrators of various depth  $r$

Таким образом, подтверждается наличие порогового значения параметра  $\sigma$ , при достижении которого концентратор напряжений перестает оказывать влияние на процесс разрушения (соответствующая гипотеза была выдвинута в работе [27]). В случае равномерного распределения это пороговое значение находится в диапазоне  $0,41 < \sigma_r < 0,46$ . Однако изменение геометрии концентратора напряжений не влияет на количество деактивированных КЭ. Представляет интерес рассмотрение кинетики процесса разрушения.

На рис. 5 представлены изображения тел (поля первого главного напряжения) с различными значениями параметра  $r$  в состояниях, где  $\omega=0,006$ .

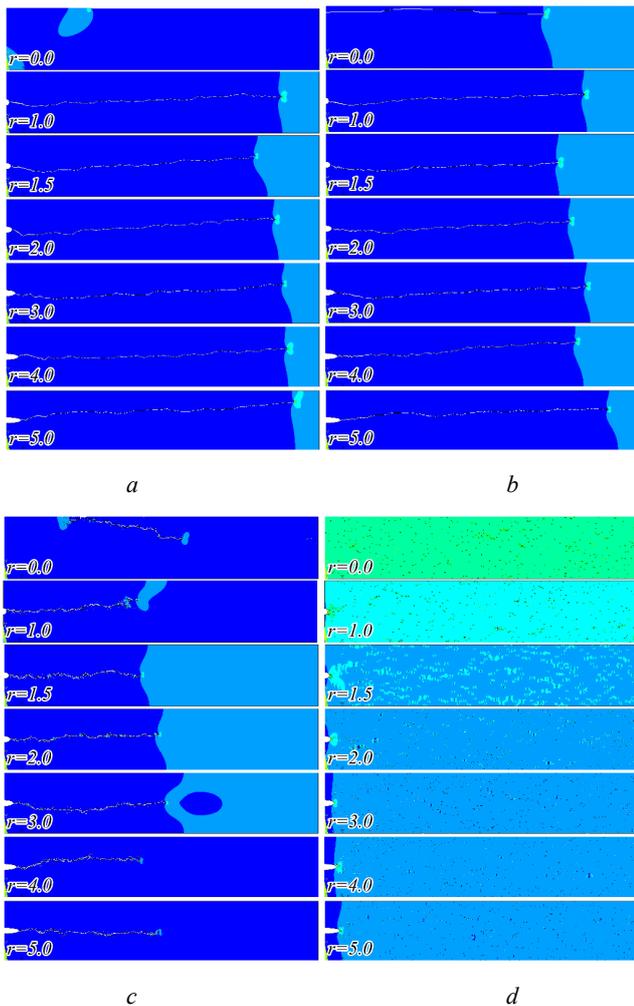


Рис. 5. Изображения тела с различными значениями  $r$  при  $\omega=0,006$ :  $\sigma=0,000$  (a);  $\sigma=0,173$  (b);  $\sigma=0,346$  (c);  $\sigma=0,520$  (d)

Fig. 5. Images of the body with various  $r$  value at  $\omega=0.006$ :  $\sigma=0.000$  (a);  $\sigma=0.173$  (b);  $\sigma=0.346$  (c);  $\sigma=0.520$  (d)

Результаты демонстрируют, что при малом значении стандартного отклонения распределения пределов прочности КЭ ( $\sigma < 0,24$ ) макродефект образуется в виде трещины толщиной в 1-2 КЭ от вершины концентратора напряжений (или от КЭ с наибольшим значением коэффициента перегрузки, если  $r=0$ ). Реализуется локализованный тип накопления повреждений, характеризующийся деактивацией последующего КЭ в вершине

уже образовавшегося макродефекта. При высокой дисперсии распределения прочности КЭ ( $\sigma > 0,46$ ) наблюдается дисперсный тип накопления повреждений. В этом случае КЭ деактивируются хаотично во всем объеме тела и концентратор напряжений практически не оказывает влияния на процесс разрушения. При других значениях  $\sigma$  наблюдается смешанный тип накопления повреждений, характеризующийся деактивацией КЭ в зоне концентрации напряжений и прорастанием макродефекта через образующуюся ослабленную область. Отмечено, что максимальная несущая способность тела (при  $r \geq 2$ ) достигается именно при реализации смешанного типа накопления повреждений.

Сделан вывод, что несмотря на существенное влияние геометрии концентратора напряжений на несущую способность тела и форму расчетной диаграммы нагружения, значение параметра  $r$  не влияет на реализуемый тип накопления повреждений при равных значениях среднеекватического отклонения распределения пределов прочности КЭ.

С целью более подробного изучения кинетики процесса накопления повреждений, была рассмотрена эволюция поврежденных зон в теле. Расчетные диаграммы нагружения и поля первого главного напряжения (для состояний, отмеченных точками на диаграммах нагружения) представлены на рис. 6. Результаты подтверждают, что при  $\sigma=0,404$  реализуется смешанный тип накопления повреждений независимо от геометрии концентратора напряжений. Однако увеличение значения параметра  $r$  приводит к более локализованному росту макродефекта с меньшим количеством КЭ, разрушенных дисперсно в объеме тела. При значении параметра  $\sigma=0,520$  процесс разрушения происходит по дисперсному типу, распространение макродефекта начинается только после формирования достаточно развитой поврежденной структуры. Данная особенность объясняет снижение несущей способности при высоких значениях среднеекватического отклонения распределения пределов прочности КЭ.

Таким образом, изучено влияние геометрии концентратора напряжений на разрушение тела со статистически распределенными значениями пределов прочности КЭ. Однако поскольку на процесс разрушения оказывает влияние не только геометрия концентратора напряжений, но и характерный размер повреждения, то необходимым является исследование влияния данного параметра на результаты численного моделирования.

## 2.2. Влияние характерного размера зоны повреждения на процесс разрушения

Многими авторами [28; 37–41] высказывалось предположение, что материалы обладают прочностным свойством, которое представляет собой характерный размер зоны структурного повреждения (т.е. это свойство является прочностной константой материала с размерностью длины).

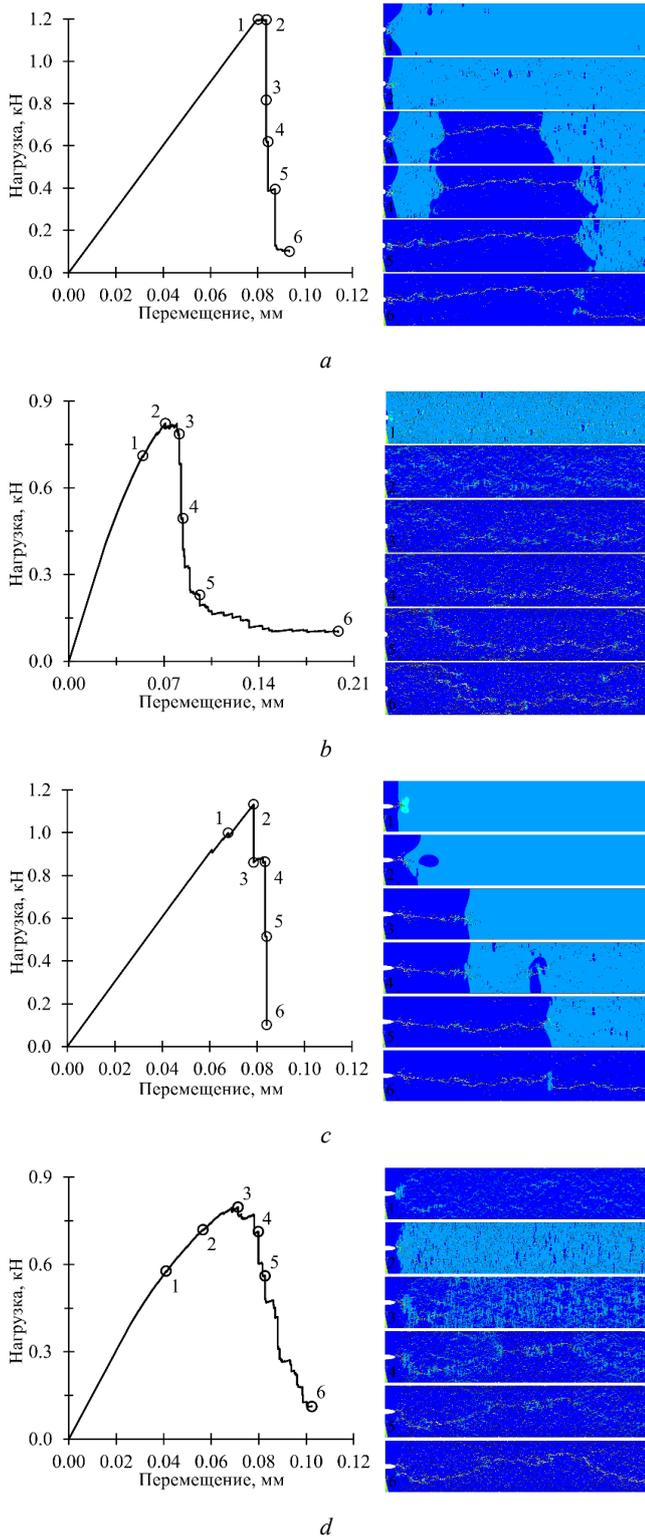


Рис. 6. Расчетная диаграмма нагружения (левая сторона) и эволюция поврежденных зон (правая сторона):  $\sigma=0,404$ , глубина концентратора напряжений  $r=1$  мм (a) и 4 мм (b);  $\sigma=0,520$ ,  $r=1$  мм (c) и  $r=4$  мм (d)

Fig. 6. The calculated loading diagram (left side) and the evolution of damaged zones (right side):  $\sigma=0.404$ , stress concentrator depth  $r=1$  mm (a) and 4 mm (b);  $\sigma=0.520$ ,  $r=1$  mm (c) and  $r=4$  mm (d)

Если данная гипотеза верна, то этот характерный размер следует учитывать при численном моделировании процессов разрушения. Преимуществом учета этого

свойства является возможность уточнения влияния масштабного фактора. В данной работе влияние характерного размера зоны повреждения исследуется путем численного моделирования процесса разрушения тела с использованием различных размеров КЭ, поскольку деактивация КЭ имитирует единичный акт разрушения.

Характерный размер зоны повреждения (обозначаемый как  $L$ ) вычисляется как квадратный корень из отношения площади тела к числу КЭ. В данной работе значение параметра  $L$  варьировалось в диапазоне 0,12–0,21 мм. Изменение характерного размера зоны повреждения также соответствует имитации влияния масштабного фактора, поскольку уменьшение значения параметра  $L$  является аналогом увеличения размеров тела. Численное моделирование проводилось для тел со значениями глубины концентратора напряжений  $r=1$  и  $r=4$  мм и значениями среднеквадратического отклонения распределения пределов прочности КЭ в диапазоне  $0 \leq \sigma \leq 0,404$ .

На рис. 7 представлены расчетные диаграммы нагружения для тела с глубиной концентратора напряжений  $r=4$  мм для различных значений  $\sigma$ . Результаты демонстрируют, что увеличение характерного размера зоны повреждения приводит к росту несущей способности тела при любых значениях среднеквадратического отклонения распределения пределов прочности КЭ. Данные результаты соответствуют тому, что уменьшение размеров тела повышает его несущую способность, что качественно соответствует влиянию масштабного фактора, наблюдаемому, в частности, при экспериментальном исследовании прочности образцов горных пород [42; 43]. Рост величины параметра  $L$  также уменьшает количество устойчивых состояний на макроуровне, за исключением случая  $\sigma=0,404$ , при котором форма диаграммы нагружения слабо зависит от значения характерного размера зоны повреждения. Результаты моделирования процесса разрушения тела с  $r=1$  мм были аналогичными.

Сделан вывод, что изменение характерного размера зоны повреждения влияет на несущую способность тела с концентратором напряжений и его механическое поведение на макроуровне.

Исследовано влияние характерного размера зоны повреждения на несущую способность тела и максимальное значение параметра  $\omega$ . Результаты представлены на рис. 8. Отмечено, что при значении параметра  $r$ , равном 1 мм, рост значения параметра  $\sigma$  приводит к постепенному снижению несущей способности для всех значений  $L$ . Причем при  $L > 0,16$  и при  $L < 0,15$  полученные зависимости практически подобны в диапазоне  $0,00 \leq \sigma < 0,12$ . При  $r=4$  мм зависимости максимальной нагрузки от среднеквадратического отклонения распределения пределов прочности КЭ монотонно возрастают при  $L < 0,15$ , однако при  $L > 0,16$  они немонотонны, максимальное значение находится в диапазоне  $0,25 < \sigma < 0,41$ . Также обнаружено, что изменение значения параметра  $L$  качественно не влияет на зависимости максимального

значения  $\omega$  от значения  $\sigma$ , количественное изменение объясняется увеличением зоны повреждения при равном количестве деактивированных КЭ за счет роста их площади.

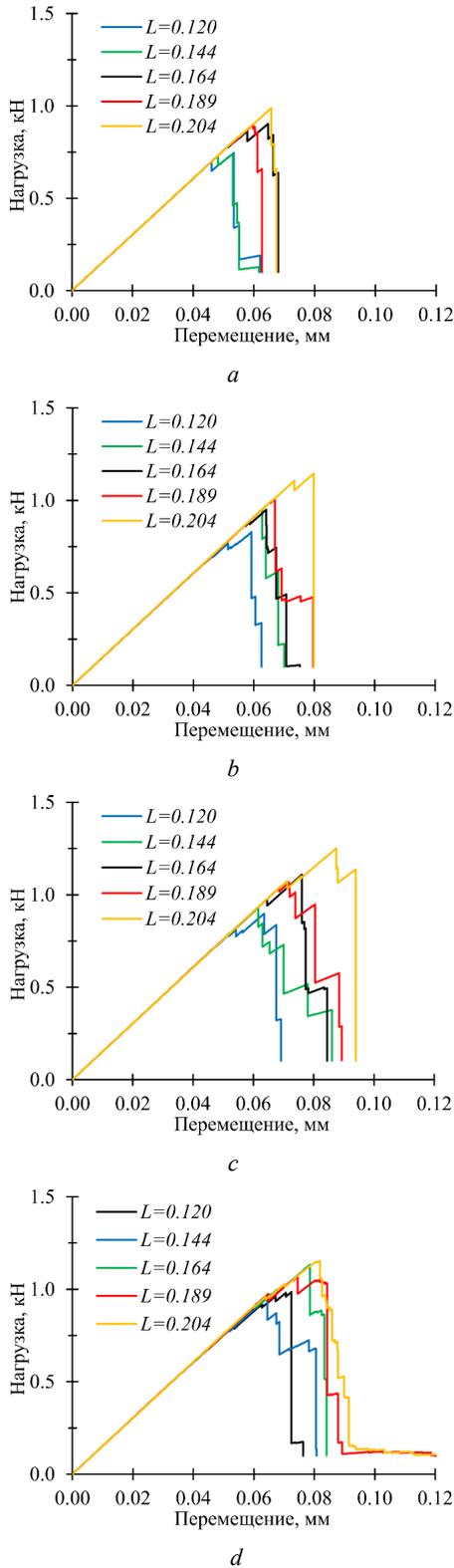


Рис. 7. Расчетные диаграммы нагружения для тел ( $r=4$  мм) с различной  $L$ , значения  $\sigma$  составляют: 0,000 (a), 0,173 (b), 0,289 (c), 0,404 (d)

Fig. 7. The calculated loading diagrams for the bodies ( $r=4$  мм) with various  $L$ , the  $\sigma$  values are: 0,000 (a), 0,173 (b), 0,289 (c), 0,404 (d)

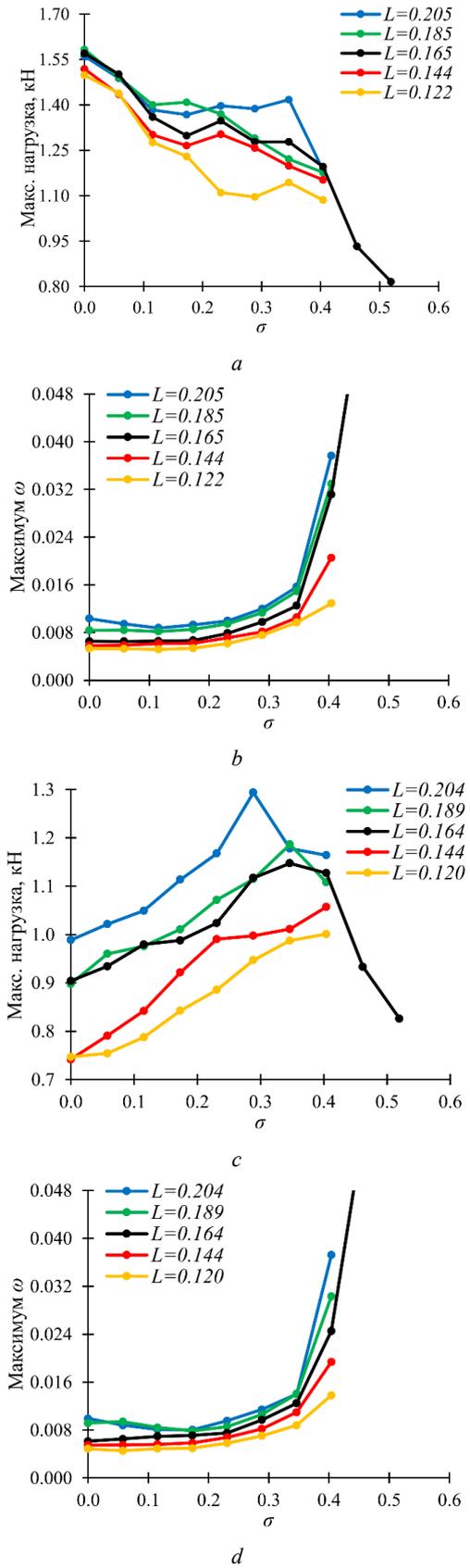


Рис. 8. Зависимости максимального значения нагрузки (a, c) и максимального значения  $\omega$  от  $\sigma$  для глубины концентраторов напряжений  $r=1$  мм (a, b) и  $r=4$  мм (c, d)

Fig. 8. The dependencies of the maximum load value (a, c) and the maximum  $\omega$  value (b, d) on  $\sigma$  for the stress concentrators depth  $r=1$  мм (a, b) and  $r=4$  мм (c, d)

Таким образом, сделан вывод, что уменьшение характерного размера повреждения (соответствует увеличению размеров тела) приводит к снижению несущей способности. При этом, если глубина концентратора напряжений достаточно велика и зависимость максимальной нагрузки от значения параметра  $\sigma$  немонотонна, точка максимума этой зависимости смещается вправо. В связи с этим внесено предположение, что изменение характерного размера зоны повреждения приводит к изменению типа кинетики накопления повреждений.

Для исследования кинетики процесса накопления повреждений были получены изображения тела (поля первого главного напряжения) для тела со значением геометрического параметра  $r=4$  мм (рис. 9).

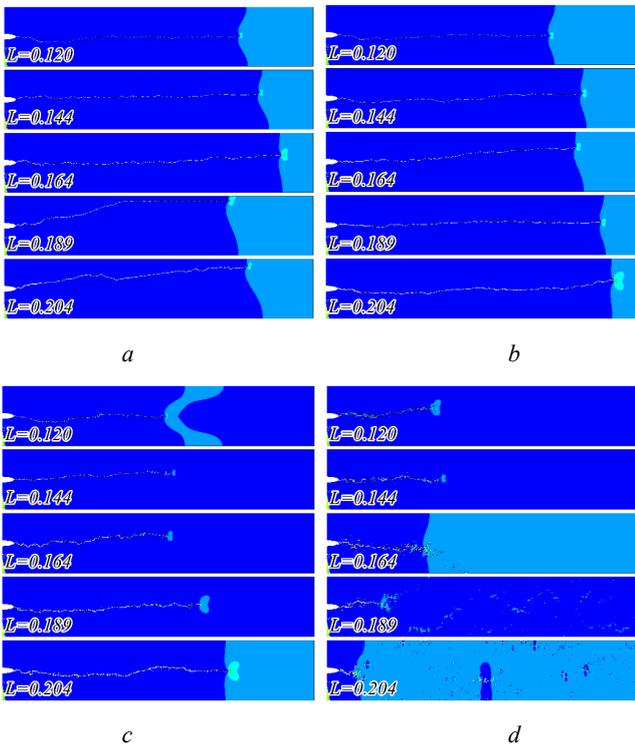


Рис. 9. Изображения тела при различных значениях  $L$ :  $\sigma=0,000$  (a),  $\sigma=0,173$  (b),  $\sigma=0,289$  (c),  $\sigma=0,404$  (d), глубина концентратора напряжений 4 мм

Fig. 9. Images of the body with various  $L$  value:  $\sigma=0.000$  (a),  $\sigma=0.173$  (b),  $\sigma=0.289$  (c),  $\sigma=0.404$  (d), stress concentrator depth is 4 mm

Поскольку изменение характерного размера зоны повреждения приводит к изменению параметра  $\omega$ , относительное количество деактивированных КЭ было выбрано равным 0,008; 0,007; 0,006; 0,005; 0,004 для значений параметра  $L=0,204$ ; 0,189; 0,164; 0,144; 0,120 мм, соответственно. Результаты демонстрируют, что при малом значении стандартного отклонения распределения пределов прочности КЭ ( $\sigma < 0,24$ ) макродефект формируется в виде трещины толщиной в 1–2 КЭ независимо от значения параметра  $L$ ; реализуется локализованный тип накопления повреждений. Смешанный тип повреждения реализуется при  $\sigma=0,289$ , если характерный размер зоны повреждения является достаточно

большим ( $L > 0,16$ ). При  $\sigma=0,404$  во всех случаях реализуется смешанный тип накопления повреждений, однако возникновение множества дисперсно деактивированных КЭ отмечается при  $L > 0,18$ . Аналогичные результаты получены для тела со значением параметра  $r=1$  мм.

Таким образом, характерный размер зоны повреждения влияет на кинетику процесса накопления повреждений, соответственно, внесенное выше предположение верно. Уменьшение значения параметра  $L$  приводит к реализации более локализованного накопления повреждений, смешанный тип накопления повреждений реализуется при более высоких значениях параметра  $\sigma$ , что соответствует смещению точки максимума зависимости максимальной нагрузки от  $\sigma$  вправо. Таким образом, подтверждается, что максимум несущей способности тела с концентратором напряжений (при  $r \geq 2$ ) достигается при реализации смешанного типа накопления повреждений.

На рис. 10 приведена эволюция поврежденных зон ( $r=4$  мм,  $\sigma=0,404$ ) для различных значений характерного размера зоны повреждения.

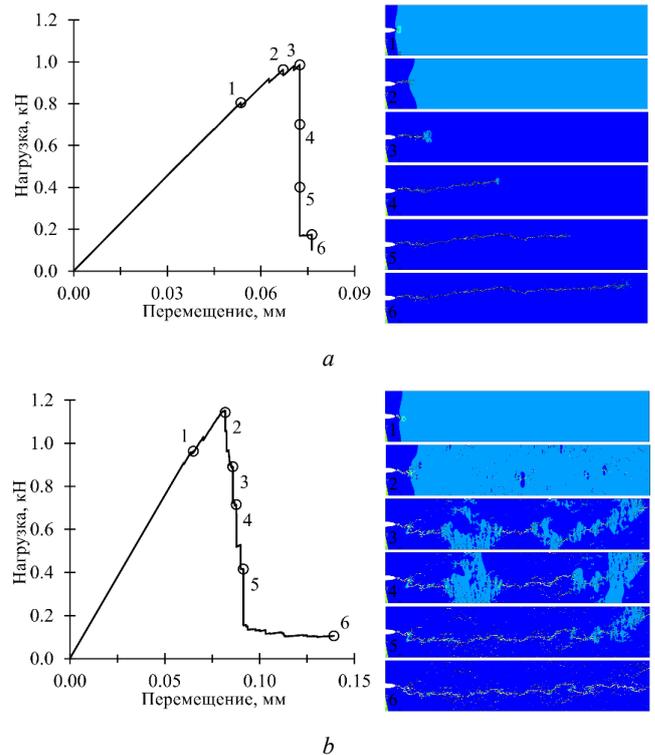


Рис. 10. Расчетная диаграмма нагружения (левая сторона) и эволюция поврежденных зон (правая сторона) для тела с глубиной концентратора напряжений  $r=4$  мм и  $\sigma=0,404$ :  $L=0,120$  (a),  $L=0,204$  (b)

Fig. 10. The calculated loading diagram (left side) and the evolution of damaged zones (right side) for the body with stress concentrator depth  $r=4$  mm and  $\sigma=0.404$ :  $L=0.120$  (a),  $L=0.204$  (b)

Результаты подтверждают, что уменьшение значения параметра  $L$  (или рост размеров тела) приводит к реализации более локализованного типа накопления повреждений. Деактивация КЭ происходит только в локализованной области у вершины концентратора напря-

жений, если характерный размер зоны повреждения мал, но если тело состоит из множества крупных структурных элементов, могут быть реализованы структурные повреждения во всем объеме тела.

Таким образом, сделан вывод о существенном влиянии характерного размера зоны повреждения на процесс разрушения тела со статистически распределенными значениями пределов прочности КЭ.

## Заключение

В данной работе проведено теоретическое исследование процессов разрушения тел при учете статистического распределения значений пределов прочности структурных элементов. Рассмотрена задача растяжения пластин, находящихся в плоском напряженном состоянии, с концентраторами напряжений различной геометрии. Предполагалось, что разрушение структурных элементов происходило при невыполнении первой гипотезы прочности. Основными результатами данного исследования являются следующие:

- подробно рассмотрено влияние геометрии эллиптического концентратора напряжений на процесс разрушения при различных значениях среднеквадратического отклонения распределения пределов прочности КЭ. Выявлено, что рост глубины концентратора напряжений приводит к снижению несущей способности тела, происходит качественное изменение вида зависимости максимальной

нагрузки от дисперсии значений пределов прочности с монотонно убывающей на немонотонную. Подтверждена гипотеза о существовании порогового значения среднеквадратического отклонения распределения пределов прочности КЭ, при котором концентратор напряжений не оказывает влияния на процесс разрушения;

- исследована кинетика процесса накопления повреждений. Отмечено, что рост среднеквадратического отклонения распределения пределов прочности КЭ приводит к изменению типа накопления повреждений с локализованного на дисперсный. Установлено отсутствие влияния геометрии концентратора напряжений на кинетику процесса разрушения;

- рассмотрено влияние характерного размера зоны повреждения на процесс разрушения. Продемонстрировано, что уменьшение размера КЭ (или соответствующее увеличение размеров тела) приводит к снижению несущей способности тела и реализации более локализованного типа накопления повреждений.

Результаты данного исследования могут быть полезны для численного моделирования процессов разрушения твердых тел с неоднородной структурной (композитов, горных пород, бетонов и т.д.). Дальнейшие исследования будут направлены на анализ влияния различных режимов нагружения на процесс разрушения тел с концентраторами напряжений. Также планируется разработка расчетно-экспериментальных методов определения характерного размера зоны повреждения.

## Библиографический список

1. The effect of stress concentrations on the fracture strength of polymethylmethacrylate / D. Taylor [et al.] // *Materials Science and Engineering: A*. – 2004. – Vol. 382(1-2). – P. 288–294. DOI: 10.1016/j.msea.2004.05.012
2. Plastic stress concentration effects in fatigue strength / M. Liu [et al.] // *International Journal of Fatigue*. – 2023. – Vol. 168, no. 107394. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.107394
3. Gorunov, A.I. Effect of stress concentrators on fracture resistance of specimens fabricated by direct metal laser sintering / A.I. Gorunov, O.V. Kudimov, A.Kh. Gilmutdinov // *Engineering Failure Analysis*. – 2022. – Vol. 131, no. 105900. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2021.105900
4. Effect of stress concentrator shape on impact fracture mechanisms of 17Mn1Si steel / S.V. Panin, P.O. Maruschak, I.V. Vlasov, O. Prentkovskis // 15th International scientific conference “Underground Urbanisation as a Prerequisite for Sustainable Development: Procedia Engineering. St. Petersburg, 2016. – Vol. 165. – P. 1925–1930. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.03.097
5. The Analysis of Stress Raisers Affecting the GFRP Strength at Quasi-Static and Cyclic Loads by the Theory of Critical Distances, Digital Image Correlation, and Acoustic Emission / D. Lobanov [et al.] // *Polymers*. – 2023. – Vol. 15, no. 2087. DOI: 10.3390/polym15092087
6. Kostina, A. A Non-local Damage Model for Brittle Fracture in Metallic Structures with Stress Concentrators / A. Kostina, A. Terekhina, O. Plekhov // 2nd International Conference on Structural Integrity: Procedia Structural Integrity. Funshal, 2017. – Vol. 5. – P. 302–309. DOI: 10.1016/j.prostr.2017.07.175

7. Liu, H. 3D stress concentration around circular hole under remote biaxial loading / H. Liu, L. Deng, W. Wang // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2024. – Vol. 268. – No. 109032. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2024.109032
8. Experimental and numerical study on the in-plane bending behaviour of FRP-strengthened steel tubular welded T-joints / R. Rashnooie, M. Zeinoddini, E. Ghafoori, M. Sharafi // *Thin-Walled Structures*. – 2024. – Vol. 201(A), no. 112000. DOI: 10.1016/j.tws.2024.112000
9. Frantziskonis, G. The effects of stress concentrators on strength of materials at nanoscale: A molecular dynamics study / G. Frantziskonis, P. Deymier // *Mechanics research communications*. – 2006. – Vol. 33(3). – P. 352–358. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2005.06.011
10. Frantziskonis, G. Surface effects at the nanoscale significantly reduce the effects of stress concentrators / G. Frantziskonis, P. Deymier // *Probabilistic Engineering Mechanics*. – 2006. – Vol. 21(3). – P. 277–286. DOI: 10.1016/j.probenmech.2005.10.004
11. Guo, W. Elastic-plastic solutions for corner and surface cracks emanating from stress concentrators / W. Guo, W. Guo // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2021. – Vol. 246, no. 107624. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107624
12. Sokolkin, Yu. Post-critical deformation and failure of composite materials / Yu. Sokolkin, V. Vil'deman // *Mechanics of Composite Materials*. – 1993. – Vol. 29. – P. 120–126.
13. Investigation of the Influence of Small Hole on the Fatigue Crack Growth Path / X.-Q. Zhang [et al.] // *J. Fail. Anal. Prev.* – 2016. – Vol. 16. – P. 391–399. DOI: 10.1007/s11668-016-0098-x

14. Determination of stress intensity factors for finite cracked bimaterial plates in bending / W. Xu [et al.] // Arch. Appl. Mech. – 2017. – Vol. 87. – P. 1151–1163. DOI: 10.1007/s00419-017-1239-8
15. Predicting Damage in Notched Functionally Graded Materials Plates through extended Finite Element Method based on computational simulations / H. Siguerdjidjene [et al.] // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2024. – Vol. 18(70). – P. 1–23. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.70.01
16. Prince, M.B. A numerical study on predicting bond-slip relationship of reinforced concrete using surface based cohesive behavior / M.B. Prince, D. Sen. // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2024. – Vol. 69. – P. 154–180. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.69.12
17. Extended virtual element method for the Laplace problem with singularities and discontinuities / E. Benvenuti [et al.] // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2021. – Vol. 356. – P. 571–597. DOI: 10.1016/j.cma.2019.07.028
18. A multiscale peridynamic framework for modeling mechanical properties of polymer-based nanocomposites / G. Ongaro [et al.] // Eng. Fract. Mech. – 2022. – Vol. 274, no. 108751. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2022.108751
19. Rabczuk, T. On three-dimensional modeling of crack growth using partition of unity methods / T. Rabczuk, S. Bordas, G. Zi // Comput. Struct. – 2010. – Vol. 88 (23–24). – P. 1391–1411. DOI: 10.1016/j.compstruc.2008.08.010
20. Markides, C. Revisiting classical concepts of Linear Elastic Fracture Mechanics-Part I: The closing ‘mathematical’ crack in an infinite plate and the respective Stress Intensity Factors / C. Markides, S.K. Kourkoulis // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2023. – Vol. 17(66). – P. 233–260. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.66.15
21. A computational methodology for simulating quasi-brittle fracture problems / Y. Kumchol, W. Zhenqing, C. Mengzhou, L. Jingbiao, K. Tae-Jong, S. Namjin, J. Kyongsu, R. Sakaya // Comput. Struct. – 2019. – Vol. 215. – P. 65–79. DOI: 10.1016/j.compstruc.2019.02.003
22. Carpinteri, A. The Bridged Crack Model with multiple fibers: Local instabilities, scale effects, plastic shake-down, and hysteresis / A. Carpinteri, F. Accornero // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2019. – Vol. 104, no. 102351. DOI: 10.1016/j.tafmec.2019.102351
23. An innovative micromechanics-based multiscale damage model of 3D woven composites incorporating probabilistic fiber strength distribution / T. Zheng, L. Guo, J. Ding, Z. Li // Compos. Struct. – 2022. – Vol. 287, no. 115345. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.115345
24. Dezfuli, F.H. Sensitivity analysis of carbon fiber reinforced elastomeric isolators based on experimental tests and finite element simulations / F.H. Dezfuli, M.S. Alam // Bull. Earthq. Eng. – 2014. – Vol. 12. – P. 1025–1043. DOI: 10.1007/s10518-013-9556-y
25. Nicoletto, G. Failure mechanisms in twill-weave laminates: FEM predictions vs. experiments / G. Nicoletto, E. Riva // Compos. Part A Appl. Sci. Manuf. – 2004. – Vol. 35, no. 8. – P. 787–795. DOI: 10.1016/j.compositesa.2004.01.007
26. A damage model based on the introduction of a crack direction parameter for FRP composites under quasi-static load / K. Yun, Z. Wang, L. He, J. Liu // Compos. Struct. – 2018. – Vol. 184. – P. 388–399. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.09.099
27. Fracture processes numerical modeling of elastic-brittle bodies with statistically distributed subregions strength values / E. Feklistova, A. Mugatarov, V. Wildemann, A. Agishev // Frat. Integrità Strutt. – 2024. – Vol. 18, no. 68. – P. 325–339. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.68.22
28. Аспекты численного моделирования процессов разрушения упругохрупких тел / В.Э. Вильдеман [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. – 2023. – Т. 16, № 4. – С. 420–429. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.4.35
29. Ильиных, А.В. Моделирование структуры и процессов разрушения зернистых композитов / А.В. Ильиных, В.Э. Вильдеман // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 443–451.
30. Вильдеман, В.Э. Моделирование процессов структурного разрушения и масштабных эффектов разупрочнения на закритической стадии деформирования неоднородных сред / В.Э. Вильдеман, А.В. Ильиных // Физическая мезомеханика. – 2007. – № 4. – С. 23–29.
31. Mesoscale modeling of size effect on the evolution of fracture process zone in concrete / R. Zhou, Y. Lu, L. Wang, H. Chen // Eng. Fract. Mech. – 2021. – Vol. 245, no. 107559. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107559
32. Assessment of mesh dependency in the numerical simulation of compact tension tests for orthotropic materials / B. Lopes, M.R.T. Arruda, L. Almeida-Fernandes, L. Castro, N. Silvestre, J.R. Correia // Compos. Part C Open Access. – 2020. – Vol. 1, no. 100006. DOI: 10.1016/j.jcomc.2020.100006
33. Hai, L. Modeling tensile failure of concrete considering multivariate correlated random fields of material parameters / L. Hai, M.-Z. Lyu // Probabilistic Eng. Mech. – 2023. – Vol. 74, no. 103529. DOI: 10.1016/j.probenmech.2023.103529
34. Chen, X. An extended two-scale random field model for stochastic response analysis and its application to RC short-leg shear wall structure / X. Chen, J. Li // Probabilistic Eng. Mech. – 2023. – Vol. 74, no. 103508. DOI: 10.1016/j.probenmech.2023.103508
35. Liu, Y.Yi. The modified mesoscopic stochastic fracture model incorporating the random field of Young's modulus for the uniaxial constitutive law of concrete / Y.Yi. Liu, J.B. Chen, J. Li // Probabilistic Eng. Mech. – 2024. – Vol. 75, no. 103585. DOI: 10.1016/j.probenmech.2024.103585
36. Третьякова, Т.В. Экспериментальное исследование предельных напряженно-деформированных состояний хрупкого материала с использованием метода корреляции цифровых изображений / Т.В. Третьякова, Е.М. Спаскова // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2013. – № 2. – С. 186–198. DOI: 10.15593/perf.mech/2013.2.186-198
37. Новожилов, В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В.В. Новожилов // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33. – С. 212–222.
38. Гольдштейн, Р.В. Влияние вида элементов структуры материала на сценарий разрушения при сложном напряженном состоянии / Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко // Механика твердого тела. – 2015. – № 2. – С. 44–59.
39. Васильев, В.В. Определение нагрузки, вызывающей появление пластической деформации в растягиваемой пластине с трещиной / В.В. Васильев, С.А. Лурье, В.А. Салов // Известия российской академии наук. механика твердого тела. – 2020. – № 4. – С. 43–49. DOI: 10.31857/S0572329920040133
40. Васильев, В.В. Новое решение задачи о трещине в растягиваемой ортотропной пластине / В.В. Васильев, С.А. Лурье, В.А. Салов // Известия российской академии наук. механика твердого тела. – 2021. – № 6. – С. 23–32. DOI: 10.31857/S0572329921060167
41. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
42. Влияние масштабного эффекта и неоднородности горных пород при определении их прочностных свойств / Д.В. Зайцев [и др.] // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2016. – № 11. – С. 208–215.
43. Супрун, В.И. Влияние масштабного фактора на прочность горных пород / В.И. Супрун // ГИАБ. Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2023. – № 10. – С. 5–19. DOI: 10.25018/0236\_1493\_2023\_10\_0\_5

## References

1. Taylor D., Merlo M., Pegley R., Cavatorta M.P. The effect of stress concentrations on the fracture strength of polymethylmethacrylate, *Materials Science and Engineering: A*, 2004, Vol. 382(1-2), pp. 288-294. DOI: 10.1016/j.msea.2004.05.012.
2. Liu M., Miranda A.C.O., Antunes M.A., Meggiolaro M.A., de Castro J.T.P., Plastic stress concentration effects in fatigue strength, *International Journal of Fatigue*, 2023, Vol. 168, No. 107394. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2022.107394.
3. Gorunov A.I., Kudimov O.V., Gilmudtinov A.Kh., Effect of stress concentrators on fracture resistance of specimens fabricated by direct metal laser sintering, *Engineering Failure Analysis*, 2022, Vol. 131, No. 105900. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2021.105900.
4. S.V. Panin, P.O. Maruschak, I.V. Vlasov, O. Prentkovskis, Effect of stress concentrator shape on impact fracture mechanisms of 17Mn1Si steel (15th International scientific conference "Underground Urbanisation as a Prerequisite for Sustainable Development: Procedia Engineering). St.Petersburg, 2016, Vol. 165, P. 1925-1930. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.03.097.
5. Lobanov D., Yankin A., Mullahmetov M., Chebotareva E., Melnikova V., The Analysis of Stress Raisers Affecting the GFRP Strength at Quasi-Static and Cyclic Loads by the Theory of Critical Distances, Digital Image Correlation, and Acoustic Emission, *Polymers*, 2023, 15, No. 2087. DOI: 10.3390/polym15092087.
6. A. Kostina, A. Terekhina, O. Plekhov, A Non-local Damage Model for Brittle Fracture in Metallic Structures with Stress Concentrators (2nd International Conference on Structural Integrity: Procedia Structural Integrity). Funshal, 2017, Vol. 5, P. 302-309. DOI: 10.1016/j.prostr.2017.07.175. DOI: 10.1016/j.prostr.2017.07.175.
7. Liu H., Deng L., Wang W., 3D stress concentration around circular hole under remote biaxial loading, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, Vol. 268, No. 109032. DOI: 10.1016/j.ijmecs.2024.109032.
8. Rashnooie R., Zeinoddini M., Ghafoori E., Sharafi M., Experimental and numerical study on the in-plane bending behaviour of FRP-strengthened steel tubular welded T-joints, *Thin-Walled Structures*, 2024, Vol. 201(A), No. 112000. DOI: 10.1016/j.tws.2024.112000.
9. Frantziskonis G., Deymier P., The effects of stress concentrators on strength of materials at nanoscale: A molecular dynamics study, *Mechanics research communications*, 2006, Vol. 33(3), pp. 352-358. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2005.06.011
10. Frantziskonis G., Deymier P., Surface effects at the nanoscale significantly reduce the effects of stress concentrators, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2006, Vol. 21(3), pp. 277-286. DOI: 10.1016/j.probenmech.2005.10.004.
11. Guo W., Guo W., Elastic-plastic solutions for corner and surface cracks emanating from stress concentrators, *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, Vol. 246, No. 107624. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107624.
12. Sokolkin Yu., Vil'deman V., Post-critical deformation and failure of composite materials, *Mechanics of Composite Materials*, 1993, Vol. 29, pp. 120-126.
13. Zhang X.-Q., Zhang X., Li L., Duan S.-W., Li S.-Z., Huang Z.-L., Zhang Y.-W. and Feng J.-Y.. Investigation of the Influence of Small Hole on the Fatigue Crack Growth Path, *J. Fail. Anal. Prev.*, 2016, V. 16, pp. 391-399. DOI: 10.1007/s11668-016-0098-x.
14. Xu W., Tong Z., Rong D., Leung A.Y.T., Xu X., Zhou Z. Determination of stress intensity factors for finite cracked bimaterial plates in bending, *Arch. Appl. Mech.*, 2017, V.87, pp. 1151-1163. DOI:10.1007/s00419-017-1239-8.
15. Siguerdjidjene H., Houari A., Madani K., Amroune S., Mokhtari M., Mohamad B., Ahmed C., Merah A., Campilho, R. Predicting Damage in Notched Functionally Graded Materials Plates through extended Finite Element Method based on computational simulations. *Frattura Ed Integrità Strutturale*, 2024, 18(70), pp. 1-23. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.70.01
16. Prince M.B., Sen., D. A numerical study on predicting bond-slip relationship of reinforced concrete using surface based cohesive behavior, *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2024, V.69, pp. 154-180. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.69.12.
17. Benvenutia, E., Chiozzia, A., Manzinib, G. and Sukumarc, N. Extended virtual element method for the Laplace problem with singularities and discontinuities, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2021, V.356, pp. 571-597. DOI: 10.1016/j.cma.2019.07.028.
18. Ongaro G., Bertani R., Galvanetto U., Pontefisso A., Zaccariotto, M. A multiscale peridynamic framework for modeling mechanical properties of polymer-based nanocomposites, *Eng. Fract. Mech.* 2022, 274, No. 108751. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2022.108751.
19. Rabczuk, T., Bordas, S., Zi, G. On three-dimensional modeling of crack growth using partition of unity methods, *Comput. Struct.* 2010, 88(23-24), pp. 1391-1411. DOI: 10.1016/j.compstruc.2008.08.010.
20. Markides C., Kourkoulis, S.K. Revisiting classical concepts of Linear Elastic Fracture Mechanics-Part I: The closing 'mathematical' crack in an infinite plate and the respective Stress Intensity Factors, *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2023, V.17(66), pp. 233-260. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.66.15.
21. Kumchol Y., Zhenqing W., Mengzhou C., Jingbiao L., Tae-Jong K., Namjin S., Kyongsu J., Sakaya, R. A computational methodology for simulating quasi-brittle fracture problems, *Comput Struct.*, 2019, V. 215, pp. 65-79. doi: 10.1016/j.compstruc.2019.02.003.
22. Carpinteri A., Accornero F. The Bridged Crack Model with multiple fibers: Local instabilities, scale effects, plastic shake-down, and hysteresis. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2019, V. 104, no. 102351. DOI: 10.1016/j.tafmec.2019.102351.
23. Zheng T., Guo L., Ding J., Li Z. An innovative micro-mechanics-based multiscale damage model of 3D woven composites incorporating probabilistic fiber strength distribution. *Compos. Struct.*, 2022, V. 287, no. 115345. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.115345.
24. Dezfuli F.H., Alam, M.S. Sensitivity analysis of carbon fiber reinforced elastomeric isolators based on experimental tests and finite element simulations. *Bull. Earthq. Eng.*, 2014, V. 12, pp. 1025-1043. DOI:10.1007/s10518-013-9556-y.
25. Nicoletto G., Riva E. Failure mechanisms in twill-weave laminates: FEM predictions vs. experiments. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 2004, V. 35, no. 8, pp. 787-795. DOI: 10.1016/j.compositesa.2004.01.007.
26. Yun K., Wang Z., He L., Liu J. A damage model based on the introduction of a crack direction parameter for FRP composites under quasi-static load. *Compos. Struct.*, 2018, V. 184, pp. 388-399. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.09.099.
27. Feklistova E., Mugatarov A., Wildemann V., Agishev A. Fracture processes numerical modeling of elastic-brittle bodies with statistically distributed subregions strength values. *Frat. Integrità Strutt.*, 2024, V. 18, no. 68, pp. 325-339. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.68.22.
28. Wildemann, V.E., Feklistova, E.V., Mugatarov, A.I., Mullahmetov, M.N. and Kuchukov, A.M. (2023). Aspekty chislennogo modelirovaniya processov razrusheniya uprugohrupkikh tel [Aspects of numerical simulation of failure of elastic-brittle solids]. *Comput. Contin. Mech.*, 16(4), pp. 420-429. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.4.35.
29. Ilinykh, A.V. and Vildeman, V.E. (2012). Modelirovaniye struktury i protsessov razrusheniya granulirovannykh

kompozitov [Modeling of structure and failure processes of granular composites]. *Comput. Contin. Mech.*, 5(4), pp. 443–451. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.4.52.

30. Wildemann, V.E. and Ilynykh, A.V. (2007). Modelirovaniye strukturnogo razrusheniya i masshtabnykh effektov razuprochneniya na stadii zakriticheskogo deformirovaniya v geterogennykh sredakh [Simulation of structural failure and scale effects of softening at the post-critical deformation stage in heterogeneous media]. *Phys. Mesomech.*, 10(4), pp. 23–29.

31. Zhou R., Lu Y., Wang L., Chen H. Mesoscale modeling of size effect on the evolution of fracture process zone in concrete. *Eng. Fract. Mech.*, 2021, V. 245, no. 107559. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107559.

32. Lopes B., Arruda M.R.T., Almeida-Fernandes L., Castro L., Silvestre N., Correia, J.R. Assessment of mesh dependency in the numerical simulation of compact tension tests for orthotropic materials. *Compos. Part C Open Access*, 2020, V. 1, no. 100006. DOI: 10.1016/j.jcomc.2020.100006.

33. Hai L., Lyu M.-Z. Modeling tensile failure of concrete considering multivariate correlated random fields of material parameters. *Probabilistic Eng. Mech.*, 2023, V. 74, no. 103529. DOI: 10.1016/j.probenmech.2023.103529.

34. Chen X., Li J. An extended two-scale random field model for stochastic response analysis and its application to RC Short-leg shear wall structure. *Probabilistic Eng. Mech.*, 2023, V. 74, no. 103508. DOI: 10.1016/j.probenmech.2023.103508.

35. Liu Y.Yi., Chen J.B., Li J. The modified mesoscopic stochastic fracture model incorporating the random field of Young's modulus for the uniaxial constitutive law of concrete. *Probabilistic Eng. Mech.*, 2024, V. 75, no. 103585. DOI: 10.1016/j.probenmech.2024.103585.

36. Tretyakova, T.V. and Spaskova, E.M. (2013). Eksperimental'noye issledovaniye predel'nykh napryazhenno-

deformirovannykh sostoyaniy kvazikhрупкого материала s ispol'zovaniyem metoda korrelyatsii tsifrovyykh izobrazheniy [Experimental study of the limiting stress-strain states of a quasi-brittle material using the digital image correlation method]. *PNRPU Mech. Bull.*, V. 2, pp. 186–198. DOI: 10.15593/perm.mech/2013.2.186-198.

37. Novozhilov V.V. O neobkhodimosti i dostatochnosti kriteriya khрупkosti prochnosti // Prikladnaya matematika i mekhanika. – 1969. – V.33. – pp. 212–222.

38. Goldstein R. V., Osipenko N. M. Vid elementov struktury materiala dlya razrusheniya v slozhnykh sostoyaniyakh // Mekhanika tverdogo tela. – 2015. – № 2. – pp. 44 – 59.

39. Vasiliev V.V., Lurye S.A., Salov V.A. Opredeleniye nagruzok, vyzvayushchikh poyavleniye plasticheskoy deformatsii v rastyagivayushcheysya plastine s treshchinoy // Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. mekhanika tverdogo tela. – 2020. – № 4. – pp. 43-49. Doi:10.31857/S0572329920040133

40. Vasiliev V.V., Lurye S.A., Salov V.A. Novoye resheniye zadachi o treshchine v rastyagivayemoy ortotropnoy plastine // Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. mekhanika tverdogo tela. 2021. № 6. pp. 23-32. Doi:10.31857/S0572329921060167

41. Cherepanov G.P. Mekhanika khрупкого razrusheniya / M.: Nauka, 1974. – 640 pp.

42. D.V. Zaytsev, A.N. Kochanov, Sh.Zh. Toktogulov, I.A. Panteleev, P.E. Panfilov, Vliyaniye masshtabnogo effekta i neodnorodnosti gornykh porod na opredeleniye ikh prochnostnykh svoystv [Influence of scale effect and heterogeneity of rocks to determine their strength properties]. *Mining informational and analytical bulletin*, No. 11, pp. 208-215, 2016.

43. V.I. Suprun, Ya.V. Levchenko, A.S. Kolotovkin, K.S. Voroshilin, Vliyaniye razmera na prochnost' gornykh porod [Size effect on rock strength]. *Mining informational and analytical bulletin*, No. 10, pp. 5-19, 2023.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 22-19-00765 (<https://rscf.ru/project/22-19-00765/>) в Пермском национальном исследовательском политехническом университете.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов равноценен.**

**Financing.** The work was carried out with support of the Russian Science Foundation (Project No. 22-19-00765, <https://rscf.ru/project/22-19-00765/>) in Perm National Research Polytechnic University.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.

**The contribution of the authors is equivalent.**



Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2024.4.08

УДК 539.3

## О ПРИМЕНЕНИИ ШУНТИРОВАННОГО ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТА ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАИЛУЧШИХ ДИССИПАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Н.А. Юрлова, Д.А. Ошмарин, Н.В. Севодина

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

### О СТАТЬЕ

Получена: 20 октября 2023 г.  
Одобрена: 04 октября 2024 г.  
Принята к публикации:  
08 октября 2024 г.

#### Ключевые слова:

электровязкоупругость,  
пьезоэлемент, шунтирующие  
электрические цепи, коэффициент  
демпфирования колебаний,  
коэффициент электромеханической  
связи, собственные частоты и моды  
колебаний, оболочка, численное  
моделирование.

### АННОТАЦИЯ

Работа посвящена исследованию характера зависимости динамических характеристик электро-вязкоупругой системы, представляющей собой кусочно-однородное тело, состоящее из упругих, вязкоупругих, электроупругих (пьезоэлектрических) элементов, а также внешних пассивных электрических цепей, присоединенных к электродированным поверхностям пьезоэлементов, от параметров, определяющих ее геометрическую конфигурацию (размеры и расположение вязкоупругого и пьезоэлектрического элементов, формирующих систему, по отношению к конструкции и друг к другу). В таких системах для демпфирования колебаний реализуются два механизма диссипации энергии: за счет внутреннего трения в вязкоупругих частях и за счет преобразования части энергии механических колебаний в электрическую с последующим ее рассеиванием в электрических цепях. В качестве внешних электрических цепей рассмотрены резистивная ( $R$ ) и последовательная резонансная ( $RL$ ) цепи. Исследование проводилось на основе численного решения задачи о собственных колебаниях для тонкостенной пространственной конструкции – полуцилиндрической оболочки. Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации расположения вязкоупругих и пьезоэлектрических элементов. Найдены варианты компоновки конструкции, которые могут обеспечить наилучшие демпфирующие свойства в некотором диапазоне частот за счет реализации либо механизма внутреннего трения, либо преобразования энергии колебаний пьезоэлементом. В результате проведения серии вычислительных экспериментов получены количественные оценки, демонстрирующие, как изменяются демпфирующие свойства системы при использовании отдельно каждого из рассматриваемых механизмов диссипации энергии колебаний, а также совместно. Сделаны количественные оценки изменения диссипативных свойств оболочки, демонстрирующие, в каких случаях оба механизма диссипации энергии приводят к повышению демпфирующих характеристик электровязкоупругих систем, а в каких – к их снижению.

© Юрлова Наталья Алексеевна – к. ф.-м. н., доц., с. н. с. Отдела комплексных проблем механики деформируемых твердых тел, e-mail: [yurlova@icmm.ru](mailto:yurlova@icmm.ru).

Ошмарин Дмитрий Александрович – к. ф.-м. н., м. н. с. Отдела комплексных проблем механики деформируемых твердых тел ИМСС УрО РАН, e-mail: [oshmarin@icmm.ru](mailto:oshmarin@icmm.ru).

Севодина Наталья Витальевна – к. т. н., н. с. Отдела комплексных проблем механики деформируемых твердых тел, e-mail: [natsev@icmm.ru](mailto:natsev@icmm.ru).

Nataliia A. Yurlova – PhD in Physics and Mathematics, Ass. Professor, Senior Researcher of the Department of Coupled Problems of Solid Mechanics, e-mail: [yurlova@icmm.ru](mailto:yurlova@icmm.ru).

Dmitrii A. Oshmarin – PhD in Physics and Mathematics, Junior Research of the Department of Coupled Problems of Solid Mechanics, e-mail: [oshmarin@icmm.ru](mailto:oshmarin@icmm.ru).

Nataliya V. Sevodina – PhD in Technical Sciences, Researcher of the Department of Coupled Problems of Solid Mechanics, e-mail: [natsev@icmm.ru](mailto:natsev@icmm.ru).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# THE USE OF A SHUNTED PIEZOELECTRIC ELEMENT TO ENSURE THE BEST DISSIPATIVE CHARACTERISTICS OF VISCOELASTIC SHELLS

N.A. Iurlova, D.A. Oshmarin, N.V. Sevodina

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 20 October 2023  
Approved: 04 October 2024  
Accepted for publication:  
08 October 2024

### Keywords:

electroviscoelasticity, piezoelectric element, shunting electrical circuits, vibration damping coefficient, electromechanical coupling coefficient, natural frequencies and modes of vibrations, shell, numerical modeling.

## ABSTRACT

The paper studies the dependence of the dynamic characteristics of an electro-viscoelastic system, which is a piecewise homogeneous body consisting of elastic, viscoelastic, electroelastic (piezoelectric) elements, as well as external passive electrical circuits attached to the electroded surfaces of piezoelectric elements, on the parameters determining its geometric configuration (dimensions and location of viscoelastic and piezoelectric elements, forming the system, in relation to structure and each other). In these systems, two methods of energy dissipation are used to reduce vibration: internal friction in viscoelastic materials and the conversion of mechanical vibration energy into electrical energy which is then dissipated in electrical circuits. Resistive ( $R$ ) and resonant ( $RL$ ) circuits are considered as examples of external electrical circuits. The study was conducted based on a numerical solution to the natural vibration problem for a thin-walled, spatial structure having the form of a semi-cylindrical shell. All possible geometrical configurations for the arrangement of viscoelastic and piezoelectric components were considered. There were found designs that could provide optimal damping properties within a specific frequency range, either via internal friction or by converting vibration energy using a piezoelectric component. As a result of a series of computational experiments, we obtained quantitative estimates demonstrating how the damping properties of the system change when each of the considered vibration energy dissipation mechanisms is used separately or jointly. The obtained quantitative estimates of changes in the dissipative properties of the shell show, in which cases both energy dissipation mechanisms lead to an increase in the damping characteristics of electro-viscoelastic systems, and in which cases they lead to a decrease.

## Введение

Демпфирование мод колебаний тонкостенных конструкций является важной инженерной задачей, для решения которой используются различные подходы, такие как присоединение механических демпферов, покрытие полностью или частично конструкции слоем вязкоупругого материала (полимеры, резина) и т. д. [1–3].

Среди них применение вязкоупругих материалов в качестве дополнительных элементов конструкций широко распространено в космической, авиационной и автомобильной промышленности, обеспечивая надежное пассивное демпфирование колебаний объекта. Однако эффективность применения такого подхода зависит не только от характеристик используемого вязкоупругого материала, но и от его объема, который ограничен зачастую существующими требованиями к весу и размерам исходной конструкции.

Поэтому дальнейшее повышение диссипативных характеристик тонкостенных систем с вязкоупругим слоем требует новых решений. В качестве таковых зачастую рассматривается добавление к вязкоупругим слоям элементов, обеспечивающих при колебаниях дополнительные деформации конструкции, то есть реализующих другой механизм диссипации энергии колебаний. В качестве таких слоев могут выступать либо слои из обычных материалов, не обладающих вязкоупругими свойствами (сталь, алюминий и т. д.), либо из функциональных материалов (сплавы с памятью формы, пьезоэлектрические, электрострикционные и т. д.), наиболь-

шее распространение среди которых получили пьезоэлектрические материалы.

Введение дополнительных элементов из пьезоматериалов позволяет при присоединении к ним внешних электрических цепей существенно увеличить степень демпфирования колебаний либо на заданной частоте, либо в некотором диапазоне частот при минимальных изменениях ее массовых, габаритных и спектральных свойств.

Применение пьезоэлектрических элементов, шунтированных внешними электрическими цепями, является областью smart-технологий, предназначенных для того, чтобы при эксплуатации объект реагировал на внешнее воздействие различной природы и изменял свое механическое поведение требуемым образом (например, демпфируя колебания, вызванные внешними динамическими нагрузками). Это связано, в частности, со все возрастающим использованием конструкций в областях, где доступ к ним для ремонта или обслуживания затруднен, либо вообще невозможен, а срок их эксплуатации желателен иметь максимально большим.

Выделяют две основные стратегии демпфирования колебаний: активную и пассивную. Обе достаточно активно развиваются и, разумеется, имеют определенные достоинства и недостатки. Активные подходы позволяют осуществлять демпфирование колебаний в широком диапазоне частот, подстраиваясь под нивелирование внешнего негативного динамического воздействия на рассматриваемых объект. Однако они требуют дополнительных устройств, реализующих такое воздействие (ак-

туаторов) со своим источником питания, довольно сложной аппаратной реализацией законов управления, учитывающих гистерезис воздействия и отклика, токи смещения и т. п., что сказывается на их массе и размерах и т. д.

Однако и пассивные подходы и в настоящее время не теряют своей актуальности. Учитывая тенденцию во многих областях к миниатюризации объектов, а также трудодоступности для операторов (например, в космосе).

Таким образом, возможность использования для демпфирования колебаний конструкции различных механизмов диссипации энергии колебаний позволяет повышать из демпфирующие свойства. В случае применения вязкоупругих материалов это механизмы внутреннего трения, а в случае применения шунтированных пьезоэлементов – количество механической энергии, преобразованной в электрическую. С помощью внешних пассивных электрических цепей, присоединенных к электродированным поверхностям пьезоэлемента и настроенных на демпфирование заданной моды колебаний конструкций, обеспечивается рассеивание электрической энергии в виде тепла или электромагнитного излучения и тем самым повышение диссипативных свойств исследуемого объекта.

В этом случае пьезоэлементы выступают в качестве преобразователей механической энергии колебаний в электрическую (за счет прямого пьезоэффекта), либо в качестве актуаторов, на которые подается электрический потенциал, вызывающий при колебаниях деформацию пьезоэлемента (за счет обратного пьезоэффекта).

При использовании вязкоупругих материалов в комбинации с шунтированными пьезоэлементами также возможны два сценария: активный и пассивный.

В литературе данные подходы в зависимости от их реализации получили названия демпфирование с помощью активного ограничительного слоя (ACLD – active constrained layer damping) или демпфирование с помощью пассивного ограничительного слоя (PCLD – passive constrained layer damping) [4; 5]. Большинство современных работ, посвященных применению методик ACDL/PCLD, сводятся к рассмотрению отдельных конфигураций элементов, реализующих различные механизмы диссипации энергии, и к исследованиям, касающимся использования различных типов вязкоупругих и пьезоэлектрических материалов [4–14], вариантов компоновки конструкций (как плоских, так и пространственных) демпфирующими устройствами [2; 3; 7; 15–19], а также к выбору наиболее подходящих законов управления [18; 20–22] при активном способе демпфирования колебаний объекта.

При данном подходе, естественно, встает вопрос, как система с уже имеющимся вязкоупругим слоем (покрытием) отреагирует на присоединение пьезоэлемента, где его разместить на конструкции и по отношению к вязкоупругому слою, какие параметры должны быть у шунтирующей электрической цепи для демпфирования заданных мод колебаний полученной модифицированной электро-вязкоупругой конструкции и т. д.

Несмотря на большое количество статей, посвященных данному вопросу ввиду его многогранности и сложности, остаются моменты, требующие изучения. Таким образом, в условиях существующих конструктивных ограничений исследование возможности использования и пьезоэлектрических, и вязкоупругих материалов для обеспечения надежного и эффективного демпфирования требуемых мод колебаний конструкций является актуальным.

Настоящая работа является фрагментом исследований, проводимым на основе решения задачи о собственных колебаниях электровязкоупругих конструкций, связанным с оценкой влияния на показатели демпфирования колебаний вязкоупругой конструкции пьезоэлектрических элементов, к электродированным поверхностям которых присоединены внешние электрические цепи произвольной конфигурации [23; 24]. Анализ эффективности работы пьезоэлемента в системе осуществляется на основе величины коэффициента электромеханической связи [25; 26]. При этом анализ динамических характеристик для электровязкоупругих систем с внешними электрическими цепями проводится с применением алгоритмов, разработанных исполнителями проекта и опубликованных в российских и зарубежных изданиях [14; 23].

Мотивацией данной работы послужило то, что методы демпфирования колебаний, базирующиеся на использовании различных механизмов диссипации энергии, были разработаны независимо друг от друга, и редко сравниваются по эффективности между собой, что подтверждается количеством публикаций по данной теме, среди которых можно отметить работы [27; 28].

Таким образом, целью данной работы является демонстрация эффективности использования пьезоэлементов, шунтированных электрическими цепями, на повышение диссипативных характеристик вязкоупругих конструкций для демпфирования первых, наиболее энергоемких, мод колебаний, реализующихся на низких частотах.

### **Математическая постановка задачи**

Математическая постановка задачи о собственных колебаниях электромеханической системы с распределенными параметрами формулируется с помощью подходов механики сплошных сред. Вариационное уравнение движения записывается на основе соотношений линейной теории упругости, вязкоупругости и квазистатических уравнений Максвелла [29–31]. В результате оно будет иметь вид [32]:

$$\int_{V_{pz}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_{pz} \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_{str}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_{str} \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_{vis}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_{vis} \ddot{u}_i \delta u_i) dV = \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS + \int_{S_{el}} q_e \delta \varphi dS. \quad (1)$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $u_i, D_i, E_i$ , – компоненты векторов перемещений, электрической индукции и напряженности электрического поля;  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – компоненты тензоров напряжений Коши и линейных деформаций;  $\rho_{str}, \rho_{vis}, \rho_{pz}$  – удельные плотности материалов, составляющих рассматриваемой электромеханической системы: кусочно-однородного исходного упругого тела объемом  $V_{str}$ , вязкоупругой части объемом  $V_{vis}$  и пьезоэлектрической части объемом  $V_{pz}$ ; при этом общий объем системы  $V = V_{str} + V_{pz} + V_{vis}$ ;  $S_\sigma$  – часть поверхности всего кусочно-однородного тела объемом  $V$ , на которой заданы поверхностные усилия  $p_i$ ,  $S_{pz} = S_{el} + S_0$  – поверхность пьезоэлектрической части тела, где  $S_{el}$  – электродированная и  $S_0$  – неэлектродированная её фрагменты,  $q_e$  – поверхностная плотность свободных зарядов,  $\varphi$  – электрический потенциал,  $\delta$  – вариация соответствующей переменной.

Считаем, что все элементы кусочно-однородного тела идеально скреплены между собой.

Для всех составляющих кусочно-однородного тела выполняются соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2)$$

Электрическое поле является потенциальным:

$$\varphi_{,j} = -E_j. \quad (3)$$

Физические соотношения для пьезоэлектрической части тела имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}^{pz} \varepsilon_{kl} - \beta_{ijk} E_k \\ D_k &= \beta_{ijk} \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ki} E_i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь  $C_{ijkl}^{pz}$  – компоненты тензора упругих констант пьезоэлемента,  $\beta_{ijk}$  и  $\varepsilon_{ki}$  – компоненты тензоров пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ).

Для изотропного материала упругой части кусочно-однородного тела выполняются следующие физические соотношения:

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij} \right), \quad \sigma = B \vartheta \quad (5)$$

В случае анизотропного материала справедливо:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6)$$

Здесь  $\sigma = \sigma_{jj} / 3$  – среднее напряжение,  $\vartheta$  – объемная деформация,  $G, B$  – модули сдвига и объемного сжатия,  $C_{ijkl}$  – компоненты тензора упругих констант материала конструкции.

Для описания механического поведения материала вязкоупругой части тела используются соотношения линейной наследственной вязкоупругости:

$$s_{ij} = 2\tilde{G} \tilde{e}_{ij}, \quad \sigma = \tilde{B} \vartheta;$$

$$\tilde{G} = G_{Re} + iG_{Im} = G_{Re} \left( 1 + i \frac{G_{Im}}{G_{Re}} \right) = G_{Re} (1 + i\eta_g); \quad (7)$$

$$\tilde{B} = B_{Re} + iB_{Im} = B_{Re} \left( 1 + i \frac{B_{Im}}{B_{Re}} \right) = B_{Re} (1 + i\eta_b).$$

В (7) введены следующие обозначения:  $\sigma = \sigma_{jj} / 3$  – среднее напряжение,  $\vartheta$  – объемная деформация,  $\tilde{G}, \tilde{B}$  – комплексные динамические модули сдвига и объемного сжатия, в общем случае являющиеся функциями частоты колебаний  $\Omega$ ,  $\eta_g, \eta_b$  – соответствующие тангенсы углов механических потерь, значения действительных и мнимых частей комплексных модулей  $G_{Re}, B_{Re}, G_{Im}, B_{Im}$  определяются как:

$$\begin{aligned} G_{Re} &= G_0 \left( 1 - \int_{-\infty}^t H(\tau) \cos(\Omega\tau) dt \right), \\ G_{Im} &= G_0 \int_{-\infty}^t H(\tau) \sin(\Omega\tau) dt, \\ B_{Re} &= B_0 \left( 1 - \int_{-\infty}^t R(\tau) \cos(\Omega\tau) dt \right), \\ B_{Im} &= B_0 \int_{-\infty}^t R(\tau) \sin(\Omega\tau) dt, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $G_0, B_0$  – мгновенные сдвиговые и объемные модули,  $H, R$  – ядра релаксации.

Электрические цепи, состоящие из произвольно соединенных элементов сопротивления ( $R$ ), емкости ( $C$ ) и индуктивности ( $L$ ), подключаются к электродированным поверхностям пьезоэлементов.

При отсутствии внешних источников энергии электрические цепи будут являться внутренними элементами системы (конструкции с пьезоэлементом и шунтирующей цепью), и тогда в уравнение (1) должно быть добавлено слагаемое, которое учитывает сумму всех работ электрического поля с разностью потенциалов  $\pm \varphi$  по перемещению любого возможного заряда на элементах электрической цепи [32]. Таким образом, вариационное уравнение движения электровязкоупругого тела с электрическими цепями примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{V_{pz}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_{pz} \dot{u}_i \delta u_i) dV + \\ & + \int_{V_{str}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_{str} \dot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_{vis}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_{vis} \dot{u}_i \delta u_i) dV + \\ & + \sum_{p=1}^{n_i} \frac{1}{L_p} \iint (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) \delta \varphi dt dt + \\ & + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{R_q} \int (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta \varphi dt + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta \varphi = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\varphi_1^{el} - \varphi_2^{el}$  – разность потенциалов на соответствующем элементе внешней цепи  $el = L_p, R_q, C_r, n_L, n_R, n_C$  – количество индуктивных, резистивных и емкостных элементов соответственно,  $L_p, R_q, C_r$  – значение индуктивности, сопротивления или емкости соответствующего элемента цепи [33; 34]. При этом электрическая цепь является внутренним элементом электровязкоупругой системы.

Решение задачи о собственных колебаниях при однородных граничных условиях отыскивается в виде

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad \varphi(x, t) = \bar{\varphi}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}. \quad (10)$$

Здесь  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  – комплексная собственная частота колебаний, где  $\omega_R$  характеризует собственную частоту, а  $\omega_I$  – скорость затухания колебаний,  $\bar{u}_i(\mathbf{x}), \bar{\varphi}_i(\mathbf{x})$  – собственные формы колебаний.

Принимая во внимание вид решения (10), вариационное уравнение (9) для задачи о собственных колебаниях электровязкоупругого тела при наличии электрических цепей примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{V_{str}} (\bar{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - \rho_{str} \omega^2 \bar{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_{vis}} (\bar{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - \rho_{vis} \omega^2 \bar{u}_i \delta u_i) dV + \\ & + \int_{V_{pz}} (\bar{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - \bar{D}_i \delta E_i - \rho_{pz} \omega^2 \bar{u}_i \delta u_i) dV - \\ & - \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{\omega^2 L_p} (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) \delta \varphi + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{i\omega R_q} (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta \varphi + \\ & + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta \varphi = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть собственные колебания вязкоупругого тела происходят с медленно меняющимися амплитудами и начальные возмущения не влияют на поведение системы в дальнейшем, тогда можно определить компоненты комплексных динамических модулей  $G_{Re}, G_{Im}, B_{Re}, B_{Im}$  из соотношений (8) заменой частоты  $\Omega$  на  $\omega_{Re}$ . В рамках данной работы принято, что составляющие комплексных динамических модулей вязкоупругого материала тела не зависят от частоты колебаний в пределах некоторого диапазона частот, ограниченного окрестностью рассматриваемой собственной или резонансной частоты.

Численная реализация поставленной задачи осуществляется методом конечных элементов [35]. При выборе алгоритма решения алгебраической проблемы собственных значений необходимо учитывать большую размерность алгебраической задачи, а также возможность решения алгебраической проблемы комплексных собственных значений. Подробно математическая постановка задачи и алгоритм ее численной реализации приведены в работах [31–33; 36].

### Объект и ход исследований

Определим влияние параметров вязкоупругого слоя, пьезоэлектрических элементов и внешних электрических цепей на диссипативные свойства конструкции.

В качестве объекта исследования рассматривается жестко защемленная по торцам и свободно опертая по образующим тонкостенная полуцилиндрическая оболочка, представленная на рис. 1, а.

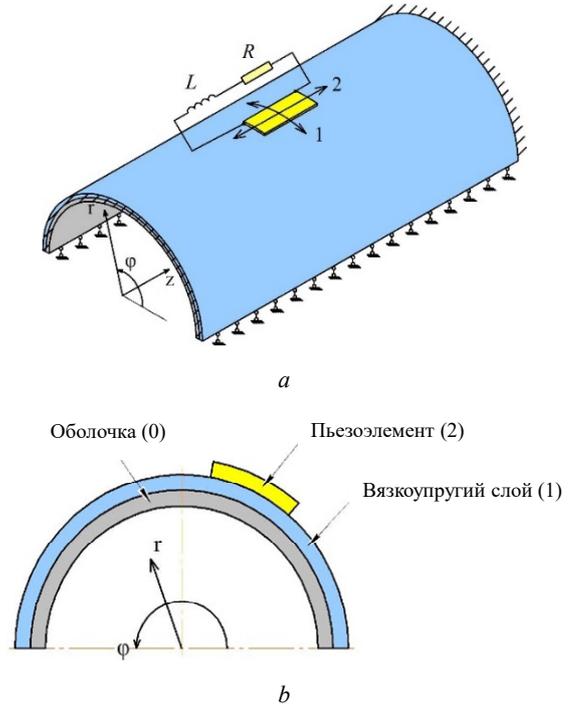


Рис. 1. Расчетная схема оболочки (а) и схема расположения слоев (б)

Fig. 1. Computational sketch for the shell (a) and the layout of the layers (b)

Оболочка размерами  $l_{str} = 300$  мм,  $R_{str} = 76$  мм,  $h_{str} = 0.75$  мм выполнена из упругого изотропного материала, модуль Юнга которого  $E_{str} = 1,96 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu_{str} = 0,3$  и плотность  $\rho_{str} = 7700$  кг/м<sup>3</sup>. Индексом *str* обозначена принадлежность параметра к оболочке.

Вязкоупругий слой покрывает всю внешнюю или внутреннюю поверхность оболочки. Материал вязкоупругого элемента характеризуется мгновенными модулем сдвига  $G_0 = 6,71 \cdot 10^8$  Па и модулем объемного сжатия  $B_0 = 3,33 \cdot 10^{10}$  Па, удельной плотностью  $\rho_{vis} = 1200$  кг/м<sup>3</sup>, тангенсами углов механических потерь  $\delta_G = \delta_B = 0,2$ . Толщина вязкоупругого слоя принята 0,25 мм, что составляет 1/3 от толщины оболочки. Индексом *vis* обозначена принадлежность параметра к вязкоупругому слою оболочки.

Для большинства известных вязкоупругих материалов наблюдается ярко выраженная зависимость их механических свойств от частоты внешнего возбуждения. В рамках данного исследования рассматривается влияние различных механизмов диссипации энергии на примере только одной моды колебаний. Изменение резонансной частоты, соответствующей данной моде ко-

лебаний, при изменении конфигурации системы (добавление вязкоупругих и пьезоэлектрических элементов) не превышает 5 % (относительно частоты конструкции без дополнительных элементов), что позволяет принять допущение о постоянстве механических свойств в пределах данного частотного диапазона.

Пьезоэлемент выполнен из пьезокерамики PZT-4 с физико-механическими характеристиками, приведенными в работе [32], с поляризацией в направлении оси  $z$ . Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы.

Пусть сначала пьезоэлектрический элемент расположен в центре поверхности оболочки, при этом его центр тяжести находится в точке с координатами  $z_{pz}=150$  мм,  $\varphi_{pz}=90^\circ$  (см. рис. 1, *a*). Исходный размер пьезоэлемента составляет 10 мм по длине и  $10^\circ$  по угловой координате, что соответствует 13,3 мм при развертке его в плоскость. Затем размеры элемента увеличиваются путем растягивания его по углу  $\varphi$  с шагом  $10^\circ$  до полного огибания оболочки (до образования полукольца), после чего – вдоль оболочки по оси  $z$  с шагом 25 мм.

Принято, что границы вязкоупругого слоя и пьезоэлектрического элемента свободны, то есть заделка по торцам оболочки и свободное опирание ее граней не распространяется на них.

Пьезоэлемент располагается либо на наружной, либо на внутренней поверхности оболочки. Для удобства дальнейшего изложения на рис. 1, *b*, приведено схематичное обозначение каждого из элементов системы. При этом введены следующие обозначения: оболочка – 0, вязкоупругий слой – 1, пьезоэлемент – 2. Таким образом, рассмотрены следующие варианты компоновки электровязкоупругой системы: 012, 210, 102, 201. Учет появления слоев с различными свойствами ведется от внутренней поверхности оболочки.

Решением задачи о собственных колебаниях являются собственные частоты, которые будут вещественными для оболочки без вязкоупругого слоя и комплексными при наличии вязкоупругого слоя и/или пьезоэлемента, шунтированного электрической цепью. Коэффициенты демпфирования колебаний определяются по формуле [37]:

$$\xi_j = (\omega_{lm})_j / (\omega^0)_j, \quad (12)$$

где  $j$  – номер,  $(\omega_{lm})_j$  – мнимая,  $(\omega^0)_j$  – действительная части  $j$ -й собственной частоты колебаний исходной упругой оболочки без пьезоэлемента и без вязкоупругого слоя.

При этом необходимо учитывать, как геометрические параметры (размеры и расположение относительно вязкоупругого слоя на поверхности оболочки) сказываются на проявлении пьезоэлементом способности преобразовывать механическую энергию колебаний в электрическую.

Влияние геометрических параметров компоновки электровязкоупругой системы оценивается по величине

параметра, характеризующего долю механической энергии, преобразованной пьезоэлементом, в электрическую. В качестве такого параметра принят обобщенный коэффициент электромеханической связи [25], определяемый по формуле

$$K = \sqrt{\frac{(|\omega_{o/c}|)^2 - (|\omega_{s/c}|)^2}{(|\omega_{s/c}|)^2}}, \quad (13)$$

где  $\omega_{o/c}$ ,  $\omega_{s/c}$  – собственные частоты колебаний конструкции с пьезоэлементом в режиме холостого хода (*open circuit* – *o/c*) и в режиме короткого замыкания (*short circuit* – *s/c*). Режим *o/c* реализуется в случае, когда одна из электродированных поверхностей пьезоэлемента заземлена (потенциал на ней равен нулю). При режиме *s/c* на обеих электродированных поверхностях задан нулевой потенциал. Значения собственных частот колебаний  $\omega_{o/c}$ ,  $\omega_{s/c}$  определяются решением задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел.

Формы колебаний цилиндрических оболочечных конструкций характеризуются числом длин полуволн, укладываемых в продольном направлении оболочки ( $n$ ) и числом длин полуволн в окружном направлении ( $m$ ). В настоящей работе исследования проведены для моды колебаний упругой исходной оболочки без дополнительных элементов, реализующейся на собственной частоте  $(\omega^0) = 896,84$  и характеризующейся параметрами  $m = 4$ ;  $n = 1$  (рис. 2). Данная мода выбрана в силу того, что все эффекты проявляются на ней наиболее наглядно.

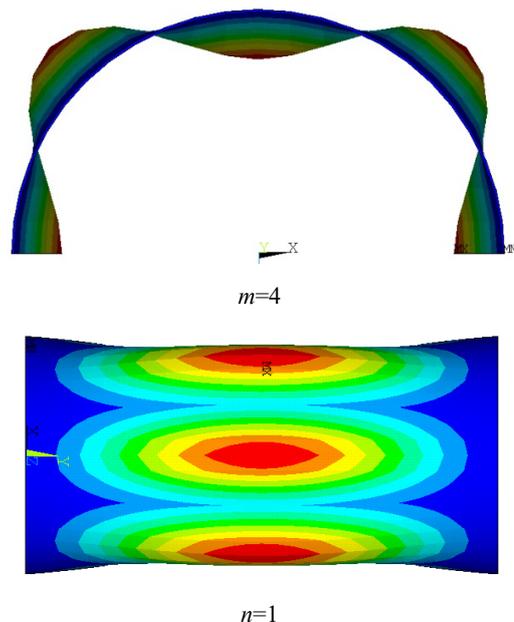


Рис. 2. Форма колебаний упругой оболочки, характеризующая рассматриваемую моду

Fig.2. The shape of the elastic shell vibrations characterizing the mode under consideration

### Динамические характеристики электровязкоупругой конструкции

Рассмотрим следующие возможные варианты конфигурации электро-вязкоупругой оболочки, реализующиеся при присоединении пьезоэлемента к оболочке, покрытой вязкоупругим слоем: 012, 102, 201, 210. Проанализируем демпфирующие свойства такой конструкции на основе решения задачи о собственных колебаниях электровязкоупругих тел.

На рис. 3 приведены картины распределения коэффициента демпфирования колебаний  $\xi_{mn}$  для рассматриваемой моды колебаний вязкоупругой оболочки при изменении размеров вязкоупругого слоя при отсутствии пьезоэлемента, а на рис. 4 – при его наличии и реализации режима холостого хода.

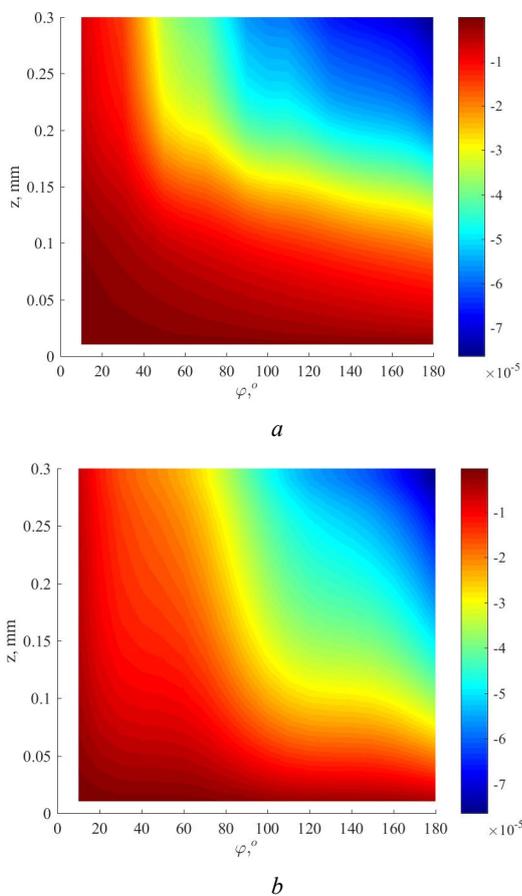


Рис. 3. Распределение коэффициента демпфирования колебаний  $\xi_{mn}$  вязкоупругой оболочки вариантов: 01 (a) и 10 (b) при изменении размеров вязкоупругого слоя

Fig. 3. Distribution of values of the vibration damping coefficient  $\xi_{mn}$  of the viscoelastic shell variants: 01 (a) and 10 (b) when changing the size of the viscoelastic layer

Результаты, приведенные на рис. 3 и 4, демонстрируют, что в данном случае при определенных размерах вязкоупругого слоя и пьезоэлемента, либо при их сочетаниях, степень демпфирования колебаний электровязкоупругой системы может как увеличиться, так и снизиться, по сравнению с использованием только одного из них.

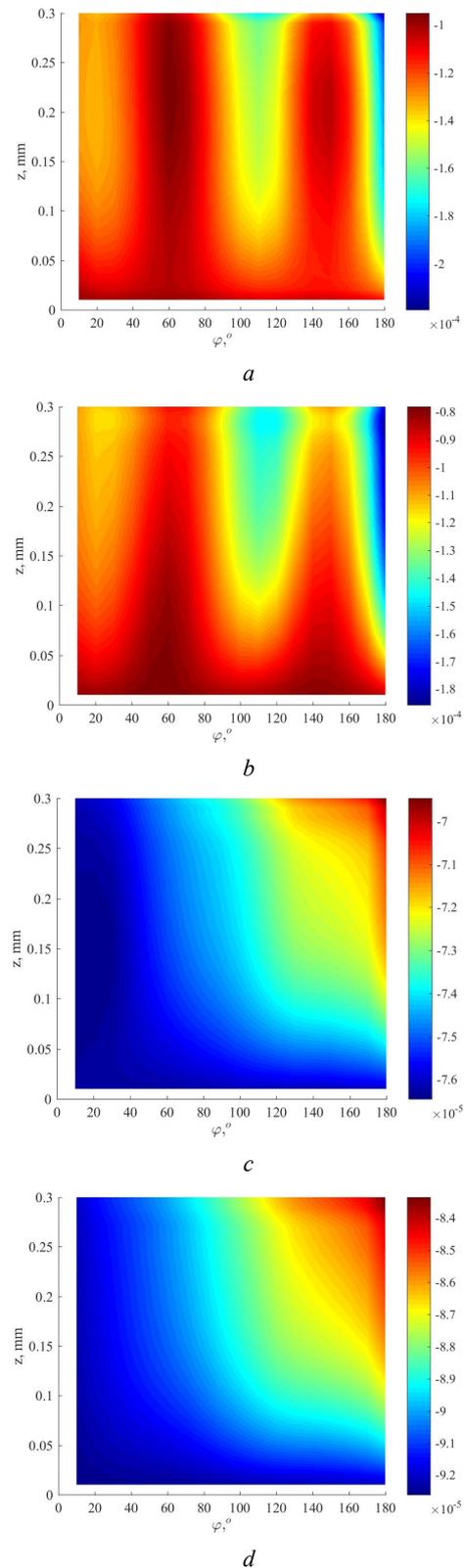


Рис. 4. Распределение коэффициента демпфирования колебаний системы  $\xi_{mn}$  в режиме холостого хода для конфигураций электровязкоупругой системы: (a) 012; (b) 210; (c) 102; (d) 201 при изменении размеров пьезоэлемента

Fig. 4. Distribution of the damping coefficient  $\xi_{mn}$  of the system in the open circuit mode for electro-viscoelastic system configurations: (a) 012; (b) 210; (c) 102; (d) 201 when changing the size of the piezoelectric element

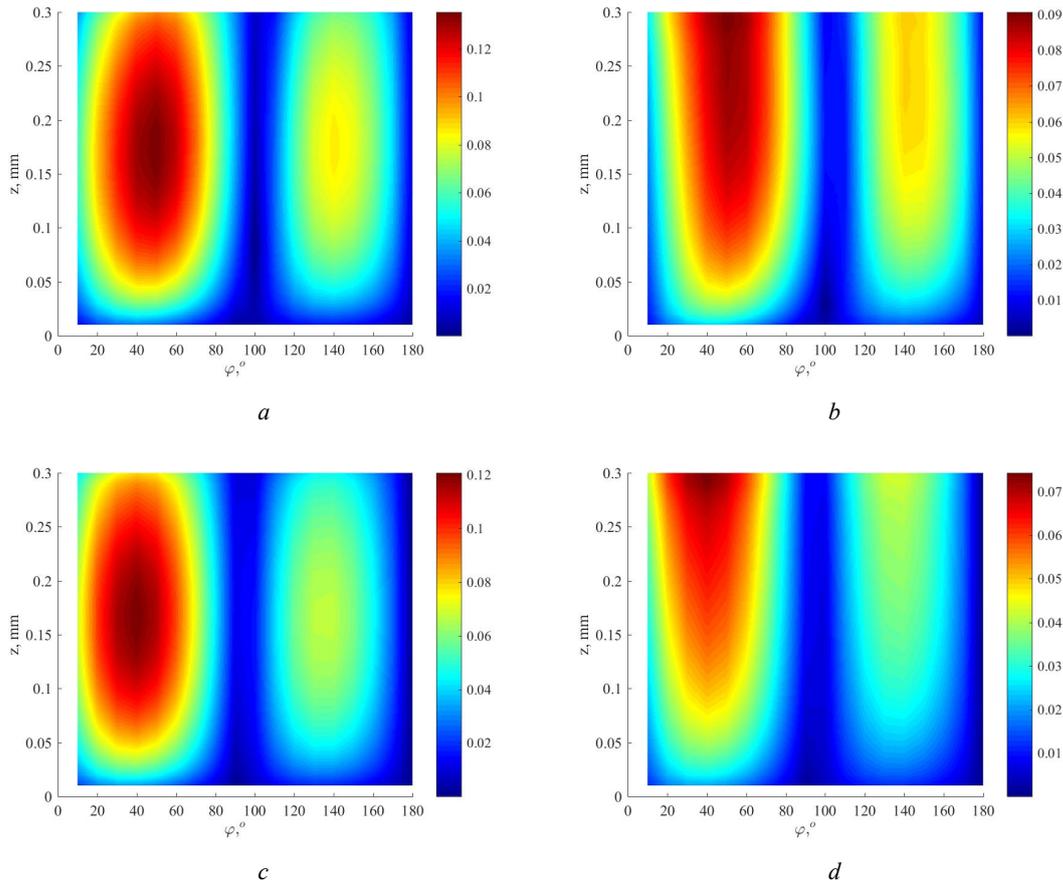


Рис. 5. Распределение коэффициента электромеханической связи  $K$  электровязкоупругой оболочки при изменении размеров пьезоэлемента: (a) 012; (b) 210; (c) 102; (d) 201

Fig. 5. Distribution of the electromechanical coupling coefficient  $K$  of the electro-viscoelastic shell when changing the size of the piezoelectric element: (a) 012; (b) 210; (c) 102; (d) 201

Важно отметить, что для конфигураций 102 и 201 значения коэффициентов демпфирования тем выше, чем меньше размеры пьезоэлемента, но при этом их величина оказывается ниже, чем для конфигураций 012 и 210 при тех же самых его размерах.

В целом изменение значений  $\xi_{min}$  при увеличении размеров пьезоэлемента для электроупругой конструкции не превышает 10 %, в то время как при его присоединении к вязкоупругому слою это различие может достигать 200 %.

То есть можно добиться существенного увеличения степени демпфирования колебаний только за счет присоединения пьезоэлемента к вязкоупругому слою, а не к поверхности упругой конструкции, и за счет изменения его размеров.

Рассмотрим, как изменение конфигурации электровязкоупругой системы и размеров пьезоэлемента влияет на количество механической энергии колебаний, преобразованной в электрическую, характеризующееся коэффициентом электромеханической связи  $K$ . Распределения значений  $K$  для различных вариантов компоновки системы представлены на рис. 5. Общий анализ полученных изображений показал, что они позволяют опре-

делить и размеры пьезоэлемента, целесообразные для его применения.

Таким образом, присоединение пьезоэлемента к вязкоупругой конструкции приводит не только к изменению значений коэффициентов демпфирования и коэффициентов электромеханической связи, но и может приводить как к возрастанию, так и к снижению степени демпфирования колебаний электровязкоупругой системы.

### Влияние подключения внешних электрических цепей на диссипативные характеристики электровязкоупругой системы

В работе [25] N.W. Hagood и A. Von Flotow констатировали, что присоединение к пьезоэлементу резистивной (содержащей только элемент сопротивления  $R$ ) электрической цепи равносильно покрытию поверхности оболочки вязкоупругим слоем. То есть это окажет влияние в разной степени на демпфирование всех мод колебаний. В случае же присоединения резонансной  $RL$ -цепи демпфирование возможно только одной моды колебаний, которая реализуется на той же частоте, что

и собственная частота колебательного контура, формируемого элементами внешней электрической цепи. Значение же собственной частоты такого колебательного контура определяется величинами индуктивности и сопротивления электрической цепи, а также ёмкости самого пьезоэлемента.

Таким образом, для повышения степени демпфирования колебаний рассматриваемой оболочки основной задачей становится поиск параметров элементов электрической цепи. Для резистивной электрической цепи – это сопротивление  $R$ , для резонансной электрической цепи – сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$ . Их можно отыскать двумя способами:

1. Определить по формулам, полученным на основе соотношений, приведенных в работе [16]:

$$L_j^{opt} = \frac{1}{C_j (\omega_{s/c}^j)^2 (1 + K_j^2)^2};$$

$$R_j^{opt} = \frac{2K_j}{C_j (\omega_{s/c}^j) \sqrt{(1 + K_j^2)^3}}; \quad (14)$$

$$C_j = C_0 (1 - K_j^2),$$

здесь  $C_j$  – внутренняя ёмкость пьезоэлемента, соответствующая его ёмкости при  $j$ -м резонансе,  $C_0$  – статическая ёмкость пьезоэлемента;  $K_j$  – коэффициент электромеханической связи;  $R_j^{opt}$  и  $L_j^{opt}$  – оптимальные сопротивление и индуктивность шунтирующей цепи для демпфирования  $j$ -й моды колебаний соответственно;  $\omega_{o/c}^j, \omega_{s/c}^j$  –  $j$ -е собственные частоты колебаний конструкции с пьезоэлементом в режиме холостого хода (*open circuit* – *o/c*) и при коротком замыкании (*short circuit* – *s/c*).

2. Воспользоваться подходом, представленным в [34] и основанном на решении задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними пассивными электрическими цепями. Суть его заключается в поиске максимального значения мнимой части комплексной собственной частоты колебаний (показателя демпфирования) заданной моды в области изменения параметров  $R$  и  $L$  шунтирующей пьезоэлемент электрической цепи. Для численной реализации решения задачи о собственных колебаниях используется метод Мюллера [38]. Проанализируем демпфирование рассматриваемой моды колебаний (с параметрами  $m=4, n=1$ ) оболочки, имеющей в своем составе и вязкоупругий слой, и пьезоэлемент, к электродированным поверхностям которого присоединена резистивная или резонансная электрическая цепь.

При этом внешние ёмкостные элементы в составе шунта не рассматриваются, поскольку пьезоэлемент в режиме колебаний сам по себе является ёмкостным элементом, в результате чего присоединение к нему дополнительной ёмкости не оказывает существенного

влияния на диссипативные характеристики системы по сравнению с другими элементами электрической цепи.

**Резистивная R-цепь.** Сначала рассмотрим электроупругую оболочку, у которой отсутствует вязкоупругий слой. Полученные оптимальные значения сопротивления  $R$  электрической цепи, шунтирующей пьезоэлементы различной величины, представлены в табл. 1.

Анализируя результаты, можно сделать вывод, что увеличение размера пьезоэлемента, к электродированным поверхностям которого подключена резистивная электрическая цепь, в 6 раз (от 50×20 мм до 150×40 мм) снижает требуемую величину сопротивления в 5,71 раза и увеличивает коэффициент демпфирования колебаний в 3,45 раза.

Поскольку необходимо определить максимальные возможности данного способа повышения диссипативных свойств оболочки, то в дальнейших расчетах размер пьезоэлемента принят наибольшим из рассмотренных – 150×40 мм.

Таблица 1

Оптимальные значения сопротивления  $R$ -цепи при различных размерах пьезоэлемента при отсутствии вязкоупругого слоя

Table 1

Optimal values of the resistance of the  $R$ -circuit at different sizes of the piezoelectric element in the absence of a viscoelastic layer

Параметр	Размер пьезоэлемента, мм			
	150×40	150×20	50×40	50×20
$R, \text{ Ом}$	940	1810	2770	5360
$\xi_{piezo}$	$4,70 \cdot 10^{-3}$	$2,85 \cdot 10^{-3}$	$2,19 \cdot 10^{-3}$	$1,36 \cdot 10^{-3}$

Далее покроем внешнюю поверхность электроупругой оболочки вязкоупругим слоем и рассмотрим, как повлияют на величину требуемого сопротивления электрической цепи параметры вязкоупругого слоя. Для этого толщина вязкоупругого слоя ( $t$ ) увеличивалась в 3 раза (до величины, равной толщине самой оболочки), а значения тангенса потерь вязкоупругого материала ( $\delta$ ) – в 10 раз.

Оценить это влияние позволяют результаты, представленные в табл. 2.

Таблица 2

Оптимальные значения сопротивления  $R$ -цепи при различных размерах материала вязкоупругого слоя

Table 2

Optimal values of the resistance of the  $R$ -circuit at different sizes of the viscoelastic layer material

Параметр	$t = t_0,$ $\delta = \delta_0$	$t = t_0,$ $\delta = 10\delta_0$	$t = 2t_0,$ $\delta = \delta_0$	$t = 3t_0,$ $\delta = \delta_0$	$t = 2t_0,$ $\delta = 10\delta_0$	$t = 3t_0,$ $\delta = 10\delta_0$
	$R, \text{ Ом}$	865	839	821	865	863

Здесь индекс 0 относится к первоначальному значению соответствующего параметра

Видно, что наличие вязкоупругого слоя дополнительно снижает величину требуемого сопротивления внешней электрической цепи (с 940 Ом до 865 Ом). При этом наибольшее снижение до 15 % (821 Ом) наблюдается в случае удвоения его толщины, что составляет 2/3 толщины оболочки. Дальнейшее увеличение толщины вязкоупругого слоя до толщины оболочки возвращает требуемую величину сопротивления практически до значения, соответствующего толщине вязкоупругого слоя равной 1/3 толщины оболочки.

Использование вязкоупругого материала с высоким значением тангенса потерь ( $\delta = 10\delta_0$ ) снижает требуемое значение сопротивления внешней электрической цепи в пределах 5 %, но если при таких параметрах вязкоупругого материала увеличивать его толщину, то практическое отсутствие изменения требуемого оптимального сопротивления (менее 1 %) может свидетельствовать, что на демпфирование первых, наиболее энергоёмких, мод колебаний оболочки с помощью пьезоэлемента, шунтированного резистивной  $R$ -цепью, вязкоупругий слой практически не влияет.

Проиллюстрируем данное утверждение численно. В табл. 3 приведены значения коэффициента демпфирования рассматриваемой моды колебаний вязкоупругой оболочки конфигурации 01 в зависимости от толщины вязкоупругого слоя и тангенса потерь вязкоупругого материала.

Таблица 3

Значения коэффициента демпфирования колебаний вязкоупругой конструкции при наличии пьезоэлемента, шунтированного  $R$ -цепью, и при его отсутствии

Table 3

Values of the vibration damping coefficient of a viscoelastic structure in the presence of a piezoelectric element shunted by an  $R$ -circuit and in its absence

Параметр	$t = t_0,$ $\delta = \delta_0$	$t = 2t_0,$ $\delta = \delta_0$	$t = 3t_0,$ $\delta = \delta_0$	$t = t_0,$ $\delta = 10\delta_0$	$t = 2t_0,$ $\delta = 10\delta_0$	$t = 3t_0,$ $\delta = 10\delta_0$
$\xi_{vis}$	$9,26 \cdot 10^{-3}$	$9,26 \cdot 10^{-4}$	$2,50 \cdot 10^{-4}$	$4,85 \cdot 10^{-4}$	$2,50 \cdot 10^{-3}$	$4,85 \cdot 10^{-3}$
$\xi_{pz+vis}$	$4,78 \cdot 10^{-3}$	$4,80 \cdot 10^{-3}$	$5,00 \cdot 10^{-3}$	$5,92 \cdot 10^{-3}$	$7,77 \cdot 10^{-3}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$

Анализируя результаты, приведенные в табл. 3, можно констатировать, что пьезоэлемент, шунтированный  $R$ -цепью, даже с малыми первоначальными размерами обеспечивает коэффициент демпфирования колебаний системы на 2 порядка выше, чем вязкоупругий слой, полностью покрывающий оболочку. Сопоставимый уровень степени демпфирования колебаний при использовании одного из элементов с различными механизмами диссипации энергии начинает проявляться только при параметрах вязкоупругого слоя с толщиной, в 2 раза превышающей исходную, и иметь тангенс потерь вязкоупругого материала на порядок выше:  $t_{vis} = t = 2t_0 = 0,5$ ,  $\delta = 10\delta_0 = 2$ .

Подобное соотношение эффективности применения двух различных механизмов диссипации энергии может

свидетельствовать о том, что в случае наличия и вязкоупругого слоя, и шунтированного резистивной цепью пьезоэлектрического элемента суммарное демпфирование первых мод колебаний электровязкоупругой оболочки будет определяться значениями демпфирующих свойств, реализующихся за счет преобразования пьезоэлементом механической энергии колебаний в электрическую с последующим ее рассеиванием во внешней электрической цепи в виде тепла и электромагнитного излучения.

**Резонансная  $RL$ -цепь.** Аналогичная серия расчетов проведена для последовательной резонансной  $RL$ -цепи. Найденные оптимальные параметры сопротивления ( $R$ ) и индуктивности ( $L$ ) электрической цепи для различных размеров пьезоэлемента приведены в табл. 4.

Таблица 4

Оптимальные значения сопротивления и индуктивности последовательной  $RL$ -цепи при отсутствии вязкоупругого слоя

Table 4

Optimal values of resistance and inductance of a sequential  $RL$ -circuit in the absence of a viscoelastic layer

Параметр	Размер пьезоэлемента, мм			
	150×40	150×20	50×40	50×20
$R$ , Ом	250	385	515	788
$L$ , Гн	0,160	0,319	0,487	0,947
$\xi_{pz}$	$6,81 \cdot 10^{-2}$	$5,31 \cdot 10^{-2}$	$4,67 \cdot 10^{-2}$	$3,68 \cdot 10^{-2}$

Видно, что увеличение размеров пьезоэлемента снижает требуемые величины сопротивления в 3,15 раза и индуктивности в 5,9 раза. Также в табл. 4 представлены оценки максимально возможных значений коэффициентов демпфирования  $\xi_{pz}$  для оболочки только с пьезоэлементом и  $RL$ -цепью при отсутствии вязкоупругого слоя.

Данные, приведенные в табл. 4, демонстрируют, что при увеличении площади пьезоэлемента в 6 раз коэффициент демпфирования колебаний увеличивается в 1,85 раза.

Далее в расчетах аналогично размеры пьезоэлемента приняты 150×40 мм, так как такие размеры обеспечивают наибольшие значения коэффициента демпфирования рассматриваемой моды колебаний.

В табл. 5 приведены значения оптимальных параметров резонансной последовательной  $RL$ -цепи, а также соответствующие значения коэффициентов демпфирования, найденных для оболочки при наличии:

- только пьезоэлемента, шунтированного резонансной цепью ( $\xi_{pz}$ );
- только вязкоупругого слоя ( $\xi_{vis}$ );
- и пьезоэлемента, шунтированного электрической цепью, и вязкоупругого слоя ( $\xi_{pz+vis}$ ).

При этом изменяются толщина вязкоупругого слоя в 3 раза и в 10 раз тангенс потерь вязкоупругого материала.

Результаты, приведенные в табл. 3 и 5, демонстрируют, что при использовании шунтирующей последовательной  $RL$ -цепи различие в эффективности рассматриваемых механизмов диссипации энергии колебаний оказывается еще более существенным.

Коэффициенты демпфирования колебаний, обусловленные действием механизмов диссипации энергии колебаний отдельно и совместно при различных параметрах вязкоупругого слоя и при наличии  $RL$ -цепи

Table 5

Vibration damping coefficients caused by the action of mechanisms of dissipation of vibration energy separately and jointly at different parameters of the viscoelastic layer and in the presence of an  $RL$ -circuit

Параметр	$t = t_0,$ $\delta = \delta_0$	$t = 2t_0,$ $\delta = \delta_0$	$t = 3t_0,$ $\delta = \delta_0$	$t = t_0,$ $\delta = 10\delta_0$	$t = 2t_0,$ $\delta = 10\delta_0$	$t = 3t_0,$ $\delta = 10\delta_0$
$R, \text{ Ом}$	239	228	218	240	234	225
$L, \text{ Гн}$	0,151	0,146	0,142	0,151	0,146	0,143
$\xi_{pz}$	$6,60 \cdot 10^{-2}$	$6,60 \cdot 10^{-2}$	$6,60 \cdot 10^{-2}$	$6,60 \cdot 10^{-2}$	$6,60 \cdot 10^{-2}$	$6,60 \cdot 10^{-2}$
$\xi_{vis}$	$9,26 \cdot 10^{-5}$	$2,50 \cdot 10^{-4}$	$4,85 \cdot 10^{-4}$	$9,26 \cdot 10^{-4}$	$2,50 \cdot 10^{-3}$	$4,85 \cdot 10^{-3}$
$\xi_{pz+vis}$	$6,57 \cdot 10^{-2}$	$6,51 \cdot 10^{-2}$	$6,46 \cdot 10^{-2}$	$6,65 \cdot 10^{-2}$	$6,77 \cdot 10^{-2}$	$6,86 \cdot 10^{-2}$

Максимально возможное повышение диссипативных свойств системы при добавлении вязкоупругого элемента к электромеханической системе с шунтированным  $RL$ -цепью пьезоэлементом составляет всего 4 % при значениях параметров вязкоупругого слоя, в 3 раза больших по толщине, чем принятое изначально, и при использовании материала с тангенсом потерь с характеристиками  $\delta_G = \delta_B = 2$  – на порядок выше, чем у рассматриваемого материала.

При этом при использовании материала вязкоупругого слоя с тангенсом потерь  $\delta < 10\delta_0$  при шунтировании пьезоэлемента  $RL$ -цепью в ряде случаев ситуацию можно даже ухудшить, поскольку наблюдается незначительное (около 1–2 %) снижение коэффициентов демпфирования колебаний.

## Заключение

В рамках данной работы рассмотрена проблема повышения диссипативных свойств оболочечной конструкции, покрытой вязкоупругим слоем, за счет дополнения ее пьезоэлементом, шунтированным электрической цепью. При этом если слой из вязкоупругого материала обеспечивает демпфирование колебаний за счет механизма внутреннего трения, то пьезоэлемент преобразует механическую энергию колебаний в электрическую, которая затем рассеивается в виде тепла и электромагнитного излучения во внешних электрических цепях произ-

вольной конфигурации, подключаемых к его электродированным поверхностям. Таким образом, при формировании электровязкоупругой конструкции на демпфирующие характеристики такой конструкции влияют различные механизмы диссипации энергии колебаний.

В ходе исследования рассмотрены все возможные варианты размещения пьезоэлемента на конструкции относительно вязкоупругого слоя, а также два типа электрических цепей: резистивная ( $R$ -цепь) и последовательная резонансная ( $RL$ -цепь).

Продемонстрировано, как при модификации исходной конструкции изменяются собственные частоты и коэффициенты демпфирования первых мод колебаний, коэффициенты электромеханической связи пьезоэлемента в зависимости от его размера и параметры внешних электрических цепей в зависимости от характеристик вязкоупругого слоя.

Численно проиллюстрировано, что на демпфирование первых мод колебаний тонкостенной оболочки наибольшее влияние оказывает пьезоэлемент, шунтированный электрической цепью. Показано, что вклад каждого из них не является простым суммированием, а зависит от ряда различных факторов, а также в каких случаях использование обоих механизмов диссипации энергии приводит к существенному повышению диссипативных характеристик электровязкоупругой системы, а в каких усложнять конструкцию введением в нее дополнительных элементов с этой целью нецелесообразно.

## Библиографический список

1. Kumar, A. Passive Constrained Layer Damping: A State of the Art Review / A. Kumar, R.K. Behera // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2019. – Vol. 653. – art. No. 012036. DOI: 10.1088/1757-899X/653/1/012036
2. Nashif, A.D. Vibration Damping / A.D. Nashif, D.I.G. Jones, J.P. Henderson. – Wiley, 1985. – 453 p.
3. Sun, C.T. Vibration Damping of Structural Elements / C.T. Sun, Y.P. Lu. – Prentice-Hall, 1995. – 372p.
4. Stanway, R. Active constrained-layer damping: A state-of-the-art review Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I / R. Stanway, J.A. Rongong, N.D. Sims // Journal of

Systems and Control Engineering. – 2003. – Vol. 217, no 6. – P. 437–456. DOI: 10.1177/095965180321700601

5. Trindade, M.A. Hybrid Active-Passive Damping Treatments using Viscoelastic and Piezoelectric Materials: Review and Assessment / M.A. Trindade, A. Benjeddou // Journal of Vibration and Control. – 2002. – Vol. 8, no. 6. – P. 699–745. DOI: 10.1177/1077546029186

6. Sahoo, S.R. Active damping of geometrically nonlinear vibrations of smart composite plates using elliptical SCLD treatment with fractional derivative viscoelastic layer / S.R. Sahoo, M.C. Ray // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2019. – Vol. 78. – art. No. 103823. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2019.103823

7. Sahoo, S.R. Active control of laminated composite plates using elliptical smart constrained layer damping treatment / S.R. Sahoo, M.C. Ray // *Composite Structures*. – 2019. – Vol. 211. – P. 376–389. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.12.004
8. Ватульян, А.О. К исследованию колебаний цилиндра с вязкоупругим покрытием / А.О. Ватульян, В.В. Дударев // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2021. – Т. 14, № 3. – P. 312–321. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.3.26
9. Park, C.H. Modeling of a Hybrid Passive Damping System / C.H. Park, S.J. Ahn, H.C. Park // *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2005. – Vol. 19, no. 1. – P. 127–135. DOI: 10.1007/BF02916111
10. Trindade, M.A. Optimization of passive constrained layer damping treatments applied to composite beams / M.A. Trindade // *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2007. – Vol. 4, no. 1. – P. 19–38.
11. Vibration Control of Beams with Active Constrained Layer Damping / F.-M. Li, K. Kishimoto, Y.-S. Wang, Z.-B. Chen, W.-H. Huang // *Smart Materials and Structures*, 2008. – Vol. 17, no. 6, art. No. 065036. DOI: 10.1088/0964-1726/17/6/065036
12. Trindade, M.A. Optimization of Active-Passive Damping Treatments using Piezoelectric and viscoelastic Materials / M.A. Trindade // *Smart Materials and Structures*. – 2007. – Vol. 16. – P. 2159–2168. DOI: 10.1088/0964-1726/16/6/018
13. Vibration Control of Plate by Active and Passive Constrained Layer Damping / S. Meena, N. Kumar, S.P. Singh, B.C. Nakra // *Advances in vibration engineering*. – 2009. – Vol. 8(4). – P. 345–356.
14. Gupta, A. An actively constrained viscoelastic layer with the inclusion of dispersed graphite particles for control of plate vibration / A. Gupta, S. Panda, R.S. Reddy // *Journal of Vibration and Control*. – 2020. – Vol. 27, no. 17–18. – P. 2152–2163. DOI: 10.1177/1077546320956533
15. Mead, D.J. The Forced Vibration of a Three-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions / D.J. Mead, S. Markus // *Journal of Sound and Vibration*. – 1969. – Vol. 10, no. 2. – P. 163–175. DOI: 10.1016/0022-460X(69)90193-X
16. Design of an Active Damping System for Vibration Control of Wind Turbine Towers / H. Bai, Y. Aoues, J.-M. Cherfils, D. Lemosse // *Infrastructures*. – 2021. – Vol. 6, no. 11. – art. No. 162. DOI: 10.3390/infrastructures6110162
17. Vinyas, M. Influence of active constrained layer damping on the coupled vibration response of functionally graded magneto-electro-elastic plates with skewed edges / M. Vinyas, D. Harursampath, T. Nguyen-Thoi // *Defence Technology*. – 2020. – Vol. 16, no. 5. – P. 1019–1038. DOI: 10.1016/j.dt.2019.11.016
18. Active Vibration Control of Composite Cantilever Beams / Z. Huang, F. Huang, X. Wang, F. Chu // *Materials (Basel)*. – 2022. – Vol. 16, no. 1. – art. No. 95. DOI: 10.3390/ma16010095
19. Modeling and topology optimization of cylindrical shells with partial CLD treatment / R.Z. Zhu, X.N. Zhang, S.G. Zhang, Q.Y. Dai, Z.Y. Qin, F.L. Chu // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2022. – Vol. 220. – art. No. 107145. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107145
20. Vibration Control of an Aero Pipeline System with Active Constraint Layer Damping Treatment / J. Zhai, J. Li, D. Wei, P. Gao, Y. Yan, Q. Han // *Applied Sciences*. – 2019. – Vol. 9, no. 10. – art. No. 2094. DOI: 10.3390/app9102094
21. Yang, Q. Development of Multi-Staged Adaptive Filtering Algorithm for Periodic Structure-Based Active Vibration Control System / Q. Yang, K. Lee, B. Kim // *Appl. Sci.* – 2019. – Vol. 9. – art. No. 611. DOI: 10.3390/app9030611
22. Panda, S. A design of active constrained layer damping treatment for vibration control of circular cylindrical shell structure / S. Panda, A. Kumar // *Journal of Vibration and Control*. – 2016. – Vol. 24, no. 24. – P. 5811–5841. DOI: 10.1177/1077546316670071
23. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data / N.A. Iurlova, D.A. Oshmarin, N.V. Sevodina, M.A. Iurlov // *International Journal of Smart and Nano Materials*. – 2019. – Vol. 10, no. 2. – P. 156–176. DOI: 10.1080/19475411.2018.1542356
24. Численный алгоритм поиска компоновок электроупругих тел с внешними электрическими цепями для получения наилучших демпфирующих характеристик / Н.А. Юрлова, Д.А. Ошмарин, Н.В. Севодина, М.А. Юрлов // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2020. – № 3. – С. 108–124. DOI: perm.mech/2020.3.11
25. Hagood, N.W. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks / N.W. Hagood, A. Von Flotow // *Journal of Sound and Vibration*. – 1991. – Vol. 146, no. 2. – P. 243–268. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90762-9
26. Trindade, M.A. Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures: critical evaluation and optimization / M.A. Trindade, A. Benjeddou // *Mech. Adv. Mater. Struct.* – 2009. – Vol. 16, no. 3. – P. 210–223. DOI: 10.1080/15376490902746863
27. Comparison of passive damping treatments based on constrained viscoelastic layers and multi-resonant piezoelectric networks / B. Lossouarn, L. Rouleau, R. Darleux, J.-F. Deü // *Journal of Structural Dynamics*. – 2021. – Vol. 1. – P. 30–48. DOI: 10.25518/2684-6500.63
28. Effects of viscoelastic bonding layer on performance of piezoelectric actuator attached to elastic structure / I.A. Ali, M.A. Alazwari, M.A. Eltaher, A.A. Abdelrahman // *Mater. Res. Express*. – 2022. – Vol. 9. – art. No. 045701. DOI: 10.1088/2053-1591/ac5cae
29. Партон, В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 471 p.
30. Карнаухов, В.Г. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т. 4: Электротермовязкоупругость / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок. – Киев: Наукова Думка, 1988. – 316 с.
31. Analysis of dissipative properties of electro-viscoelastic bodies with shunting circuits on the basis of numerical modelling of natural vibrations / V. Matveenko, N. Iurlova, D. Oshmarin, N.V. Sevodina // *Acta Mech.* – 2023. – Vol. 234. – P. 261–276. DOI: 10.1007/s00707-022-03193-8
32. Задача о собственных колебаниях электро-вязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации / В.П. Матвеев, Д.А. Ошмарин, Н.В. Севодина, Н.А. Юрлова // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 476–485. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.40
33. Matveenko, V.P. Damping of vibrations of smart-systems incorporating piezoelectric elements and shunt circuits with parameters derived from the models of continuum and discrete mechanics / V.P. Matveenko, N.A. Iurlova, D.A. Oshmarin // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2023. – P. 1–11. DOI: 10.1080/15376494.2023.2241134

34. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations / V.P. Matveenko, N.A. Iurlova, D.A. Oshmarin, N.V. Sevodina, M.A. Iurlov // *International Journal of Smart and Nano Materials*. – 2018. – Vol. 9, no. 2. – P. 135–149. DOI: 10.1080/19475411.2018.1461144
35. Zienkiewicz, O.C. The finite element method: Its Basis and Fundamentals. – 6th ed. / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. – Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2000. – 802 p.
36. Kligman, E.P. Natural Vibration Problem of Viscoelastic Solids as Applied to Optimization of Dissipative Properties of Constructions / E.P. Kligman, V.P. Matveenko // *Journal of Vibra-*

- tion and Control*. – 1997. – Vol. 3, no. 1. – P. 87–102. DOI: 10.1177/107754639700300
37. Weaver, Jr.W. Vibration problems in engineering, 5th ed. / Jr.W. Weaver, S.P. Timoshenko, D.H. Young. – Wiley, 1990. – 497 p.
38. Матвеевко, В.П. Приложения метода Мюллера и принципа аргумента к задачам на собственные значения в механике деформируемого твердого тела / В.П. Матвеевко, М.А. Севодин, Н.В. Севодина // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2014. – Vol. 7, no. 3. – P. 331–336. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.32

## References

1. Kumar A., Behera R.K. Passive Constrained Layer Damping: A State of the Art Review. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, Vol. 653, art. No. 012036. doi: 10.1088/1757-899X/653/1/012036
2. Nashif A.D., Jones D.I.G., Henderson J.P. Vibration Damping. Wiley, 1985. – 453p.
3. Sun C.T., Lu Y.P. Vibration Damping of Structural Elements. Prentice-Hall, 1995, 372p.
4. Stanway R., Rongong J.A., Sims N.D. Active constrained-layer damping: A state-of-the-art review Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I. *Journal of Systems and Control Engineering*, 2003, Vol. 217, No 6, pp. 437-456. doi: 10.1177/095965180321700601
5. Trindade M.A., Benjeddou A. Hybrid Active-Passive Damping Treatments using Viscoelastic and Piezoelectric Materials: Review and Assessment. *Journal of Vibration and Control*, 2002, Vol. 8, No. 6, pp. 699-745. doi: 10.1177/1077546029186
6. Sahoo S.R., Ray M.C. Active damping of geometrically nonlinear vibrations of smart composite plates using elliptical SCLD treatment with fractional derivative viscoelastic layer. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2019, Vol. 78, art. No. 103823. doi: 10.1016/j.euromechsol.2019.103823
7. Sahoo S.R., Ray M.C. Active control of laminated composite plates using elliptical smart constrained layer damping treatment. *Composite Structures*, 2019, Vol. 211, pp. 376-389. doi: 10.1016/j.compstruct.2018.12.004
8. Vatulyan A.O., Dudarev B.B. K issledovaniyu kolebanij cilindra s vyzakouprugim pokrytiem [A study of vibrations of a cylinder with a viscoelastic coating]. *Computational Continuum Mechanics*, 2021, Vol. 14, No. 3, pp. 312–321. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.3.26>
9. Park C.H., Ahn S.J., Park H.C. Modeling of a Hybrid Passive Damping System. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2005, Vol. 19, No. 1, pp. 127-135. doi: 10.1007/BF02916111
10. Trindade M.A. Optimization of layer damping treatments applied to composite beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2007, No 4, 19-38.
11. Li F.-M., Kishimoto K., Wang Y.-S., Chen Z.-B., Huang W.-H. Vibration Control of Beams with Active Constrained Layer Damping. *Smart Materials and Structures*, 2008, Vol. 17, No. 6, art. No. 065036. doi: 10.1088/0964-1726/17/6/065036
12. Trindade M.A. Optimization of Active-Passive Damping Treatments using Piezoelectric and viscoelastic Materials. *Smart Materials and Structures*, 2007, Vol. 16, 2159-2168. doi: 10.1088/0964-1726/16/6/018
13. Meena S., Kumar N., Singh S.P., Nakra B.C. Vibration Control of Plate by Active and Passive Constrained Layer Damping. *Advances in vibration engineering*, 2009, Vol. 8, No. 4, pp. 345-356.
14. Gupta A., Panda S., Reddy R.S. An actively constrained viscoelastic layer with the inclusion of dispersed graphite particles for control of plate vibration. *Journal of Vibration and Control*, 2020, Vol. 27, No. 17-18, pp. 2152–2163. doi: 10.1177/1077546320956533
15. Mead D.J., Markus S. The Forced Vibration of a Three-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 1969, Vol. 10, No. 2, pp.163-175. doi: 10.1016/0022-460X(69)90193-X
16. Bai H., Aoues Y., Cherfils J.-M., Lemosse D. Design of an Active Damping System for Vibration Control of Wind Turbine Towers. *Infrastructures*, 2021, Vol. 6, No. 11, art. No. 162. doi: 10.3390/infrastructures6110162
17. Vinyas M., Harursampath D., Nguyen-Thoi T. Influence of active constrained layer damping on the coupled vibration response of functionally graded magneto-electro-elastic plates with skewed edges. *Defence Technology*, 2020, Vol. 16, No.5, pp. 1019-1038. doi: 10.1016/j.dt.2019.11.016.
18. Huang Z, Huang F, Wang X, Chu F. Active Vibration Control of Composite Cantilever Beams. *Materials (Basel)*. 2022, Vol. 16, No. 1, art. No. 95. doi: 10.3390/ma16010095
19. Zhu R.Z., Zhang X.N., Zhang S.G., Dai Q.Y., Qin Z.Y., Chu F.L. Modeling and topology optimization of cylindrical shells with partial CLD treatment. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2022, Vol. 220, art. No. :107145. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107145
20. Zhai J, Li J, Wei D, Gao P, Yan Y, Han Q. Vibration Control of an Aero Pipeline System with Active Constraint Layer Damping Treatment. *Applied Sciences*, 2019, Vol. 9, No. 10, art. No. 2094. doi: 10.3390/app9102094
21. Yang Q., Lee K., Kim B. Development of Multi-Staged Adaptive Filtering Algorithm for Periodic Structure-Based Active Vibration Control System. *Applied Sciences*, 2019, Vol. 9, No. 3, art. No. 611. Doi: 10.3390/app9030611
22. Panda S., Kumar A. A design of active constrained layer damping treatment for vibration control of circular cylindrical shell structure. *Journal of Vibration and Control*. 2016, Vol. 24, No. 24, pp. 5811–5841. doi:10.1177/1077546316670071
23. Iurlova N.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlov M.A. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2019, Vol. 10, No. 2, pp. 156-176. doi: 10.1080/19475411.2018.1542356
24. Iurlova N.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlov M.A.. Chislennyj algoritm poiska komponovok elektrouprugih tel s vneshnimi elektricheskimi cepyami dlya polucheniya nailuchshih dempfiruyushchih harakteristik [Numerical search algorithm for layouts of electroelastic bodies with external electrical circuits to

obtain the best damping characteristics]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, No. 3, pp.108-124. doi: 10.15593/perm.mech/2020.3.11

25. Hagood N., Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks, *Journal of Sound and Vibration*, 1991, Vol. 146, No. 2, pp. 243-268. doi: 10.1016/0022-460X(91)90762-9

26. Trindade M.A., Benjeddou A. Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures: critical evaluation and optimization. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2009, Vol. 16, No. 3, pp.210–223. doi: 10.1080/15376490902746863

27. Lossouarn B., Rouleau L., Darleux R., Deü J.-F. Comparison of passive damping treatments based on constrained viscoelastic layers and multi-resonant piezoelectric networks. *Journal of Structural Dynamics*. 2021, Vol. 1, pp.30-48. doi: 10.25518/2684-6500.63

28. Ali I.A., Alazwari M.A., Eltaher M.A., Abdelrahman A.A. Effects of viscoelastic bonding layer on performance of piezoelectric actuator attached to elastic structure. *Mater. Res. Express*, 2022, Vol. 9, art. No. 045701. doi: 10.1088/2053-1591/ac5cae

29. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Electro-magneto-elasticity: Piezo-electrics and Electrically Conductive Solids. New York, Gordon and Breach Science Publishers Ltd., 1988, 503p.

30. Karnauhov V.G., Kirichok I.F. Механика sviazannykh polei v elementakh konstruksii. (v 5 T.); T.4: Elektrotermoviyazkoupругost' [The mechanics of coupled fields in structural elements. (in 5 V.); V.4: Electrothermoviscoelasticity]. Kiev: Nauk. dumka. 1988. 316 s.

31. Matveenko V., Iurlova N., Oshmarin D., Sevodina N.V. Analysis of dissipative properties of electro-viscoelastic bodies with shunting circuits on the basis of numerical modelling of natural vibrations. *Acta Mech.*, 2023, Vol. 234, pp. 261–276. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03193-8>

32. Matveenko V.P., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Yurlova N.A. Problem on natural vibrations of electroviscoelastic bodies with external electric circuits and finite element relations for its implementation. *Computational Continuum Mechanics*, 2016, Vol 9, No. 4, pp. 476-485. doi: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.40

33. Matveenko V.P., Iurlova N.A., Oshmarin D.A. Damping of vibrations of smart-systems incorporating piezoelectric elements and shunt circuits with parameters derived from the models of continuum and discrete mechanics. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023, pp.1–11. <https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2241134>

34. Matveenko V.P., Iurlova N.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlov M.A. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations. *International Journal of Smart and Nano Materials*. 2018, Vol. 9, No. 2, pp. 135-149. doi: 10.1080/19475411.2018.1461144

35. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: Its Basis and Fundamentals, 6th ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2000, 802 p.

36. Matveyenko V.P., Kligman E.P. Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions. *Journal of Vibration and Control*. 1997, Vol. 3 (1), pp. 87-102. doi: 10.1177/107754639700300107

37. Weaver Jr., W., Timoshenko, S.P. and Young, D.H. Vibration problems in engineering, 5th edition. Wiley, 1990, 497 p.

38. Matveenko V., Sevodin M., Sevodina N. Applications of Muller's method and the argument principle to eigenvalue problems in solid mechanics. *Computational Continuum Mechanics*. 2014, Vol.7, No.3, pp. 331-336. doi: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.32

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 124020700047-3 «Комплексные исследования в задачах деформационного мониторинга, аэроупругости, интеллектуальных конструкций, термомеханики».

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов равноценен.**

**Financing.** The work was carried out within the framework of the state assignment on topic No. 124020700047-3 “Comprehensive research in the problems of deformation monitoring, aeroelasticity, intelligent structures, thermomechanics”.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflict of interest.

**The contribution of the authors is equivalent.**