Афанасьева, Е.О. Метод Ритца при дискретной аппроксимации перемещений для расчета плит мостовых сооружений, подкрепленных ребрами различной формы / Е.О. Афанасьева. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.06 // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 1. – С. 82–91.

Perm Polytech Style: Afanaseva E.O. The Ritz Method with Discrete Approximation of Displacements for Analyzing Plates of Bridge Structures Supported by Stiffeners of Various Configurations. *PNRPU Mechanics Bulletin,* 2025, no. 1, pp. 82-91. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.06

пермский политех

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 1, 2025

PNRPU MECHANICS BULLETIN

https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/index

Научная статья

DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.06
УДК

МЕТОД РИТЦА ПРИ ДИСКРЕТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛИТ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

Е.О. Афанасьева

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 18 декабря 2024 г.
Одобрена: 24 марта 2025 г.
Принята к публикации:
28 марта 2025 г.

Ключевые слова:

плита, ребра жесткости, метод Л.В. Канторовича, напряженно-деформированное состояние, функционал, единичная столбчатая функция.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются плиты, подкрепленные ребрами жесткости, два противоположных конца которых закреплены жестко, а два другие свободны. Ребра расположены в одном направлении, параллельно свободным граням плиты. Предложена методика расчета таких конструкций, объединяющая понижение мерности задачи при помощи метода Л. В. Канторовича и метода Ритца при дискретной аппроксимации перемещений. Рассмотрены способы задания ребер жесткости при помощи единичных столбчатых функций. Выявлено, что единичные столбчатые функции являются удобным способом моделирования ребер, в том числе при необходимости учета ребер в краевых условиях. Рассмотрены ребра жесткости в виде короба, тавра, двутавра и сплошного прямоугольного сечения. Приведены их геометрические характеристики, используемые при построении функционала полной потенциальной энергии с учетом их дискретного расположения. Выполнено сравнение результатов расчетов, полученных предложенным методом с решением с помощью метода конструктивной анизотропии при решении краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. В численном эксперименте установлено число конечных элементов по ширине ребра, необходимое и достаточное для решения задачи. Построены графики перемещений центральной части плит, на основе которых сделан вывод, что предложенный метод имеет достаточно хорошую сходимость с методом конструктивной анизотропии. Однако плиты, посчитанные двумя этими способами, деформируются различно, и метод Ритца при дискретной аппроксимации дает более точную картину деформирования: плита меньше деформируется в зоне ребер и больше между ними. Из результатов расчетов можно сделать вывод, что представленный метод является наиболее оптимальным с точки зрения трудоемкости и точности. Однако при отношении суммарной ширины ребер к ширине плиты, равном 1:3 и более, можно использовать метод конструктивной анизотропии, как более простой.

© **Афанасьева Елена Олеговна** – аспирант кафедры информационных систем и технологий,
e-mail: elena.afanaseva2064@gmail.com.

Elena O. Afanaseva – PhD student, Department of Information Systems and Technologies,
e-mail: elena.afanaseva2064@gmail.com.

THE RITZ METHOD WITH DISCRETE APPROXIMATION OF DISPLACEMENTS FOR ANALYZING PLATES OF BRIDGE STRUCTURES SUPPORTED BY STIFFENERS OF VARIOUS CONFIGURATIONS

E.O. Afanaseva

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, St. Petersburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 18 December 2024
Approved: 24 March 2025
Accepted for publication:
28 March 2025

Keywords:

plate, stiffeners, L.V. Kantorovich's method, stress-strain state, functional, unit column function.

ABSTRACT

The article considers plates with stiffeners, the two opposite ends of which are fixed rigidly, and the other two are free. The stiffeners are located in the same direction, parallel to the free edges of the plate. The paper proposes a method for analyzing such structures by combining the reduction of the dimensionality of the problem using the L. V. Kantorovich method and the Ritz method with discrete approximation of displacements. The methods of defining stiffeners using unit column functions are considered. It is revealed that unit column functions are a convenient way to model stiffeners, even when it is necessary to consider stiffeners in boundary conditions. The stiffeners in the shapes of a box, a T-beam, an I-beam and a solid rectangular section are considered. Their geometric characteristics are given, which are used when constructing the functional of the total potential energy taking into account their discrete location. The calculation results obtained by the proposed method are compared with the solution obtained using the structural anisotropy method for the solution of the boundary value problem for ordinary differential equations. In a numerical experiment, the number of finite elements along the stiffener's width is established, which is necessary and sufficient to solve the problem. Graphs of displacements of plate middle zones are printed, on the basis of which it is concluded that the proposed method has a fairly good convergence with the method of structural anisotropy. However, the plates calculated by these two methods deform differently and the Ritz method with discrete approximation gives a more accurate form of deformation: the plate deforms less in the area of the stiffeners and more between them. From the calculation results, it can be concluded that the presented method is the most optimal in terms of labor complexity and accuracy. However, if the ratio of the total width of the stiffeners to the width of the plate is 1:3 or more, the structural anisotropy method can be used as a simpler one.

Введение

Плиты, подкрепленные ребрами жесткости, находят применение во многих сферах инженерной деятельности. Широкое распространение такие конструкции получили среди мостовых сооружений и гражданских зданий и сооружений. Ребристые плиты позволяют перекрывать более значительные пролеты, чем плиты, не имеющие ребер жесткости [1]. Граничные условия в виде жесткого защемления по двум противоположным граням при свободных двух других гранях часто можно встретить при однопролетной схеме работы мостовых конструкций. Среди них можно отметить такие конструктивные системы, являющиеся жестко защемленными ребристыми плитами, как арочные, рамные балочные мосты и путепроводы типа «Бегущая лань» с V-образными опорами [2–5]. В промышленном и гражданском строительстве тоже часто можно встретить плиты, подкрепленные ребрами жесткости. Ребристые перекрытия и покрытия зданий можно назвать классическим решением, обеспечивающим значительную экономию материалов по сравнению с плитами без ребер [6].

Чаще всего для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) плит используется метод конечных элементов (МКЭ) [7]. Однако численные методы расчета плит и оболочек разнообразны и активно развиваются [8; 9]. Некоторые из методов расчета основаны на разбиении области на элементы (метод конечных элементов [7], метод конечных разностей [10]), другие требуют только узлов (бессеточные методы [11]), третьи можно назвать полуаналитическими (метод дифференциальных квадратур [12]), четвертые позволяют найти точное решение краевой задачи при определенных упрощениях (метод конструктивной анизотропии [13; 14]). Иногда плиту, подкрепленную ребрами, допустимо рассматривать как осесимметричную [15], что можно считать одной из наиболее простых методик расчета.

Метод Л.В. Канторовича достаточно широко используется применительно к плоским плитам [16–19]. Этот метод позволяет понизить мерность задачи и свести двумерный функционал к одномерному, что значительно упрощает расчет. Ранее автором совместно с В.В. Карповым метод Л.В. Канторовича был применен к ребристым плитам [15]. Однако минимум полученного одномерного функционала находился аналитически, при помощи метода конструктивной анизотропии, при котором ребристая плита приводилась к эквивалентной плите постоянной толщины. В данной же статье учитывается дискретное расположение ребер. Поэтому в дополнение к методу Л.В. Канторовича применяется метод Ритца, который часто используется при расчетах плит [20; 21].

Распространенным математическим способом учета дискретного расположения ребер жесткости являются единичные столбчатые функции и дельта-функции [22–25]. Эти функции, включенные в функционал, позволяют учесть местоположение ребер и, при необходимости, изменение их геометрических характеристик по длине. В настоящем исследовании применялись единичные столбчатые функции и анализировалось удобство их применения и сходимость решения с таковым, полученным с помощью метода конструктивной анизотропии при точном решении краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (в дальнейшем будем говорить «ранее полученное решение»).

Целью статьи является разработка оптимальной с точки зрения трудоемкости и при этом точной методики расчета прямоугольных плит, подкрепленных ребрами жесткости и опертых по двум противоположным сторонам. Для этого объединены метод Ритца при дискретной аппроксимации перемещений и метод Канторовича.

Общий вид рассматриваемой плиты

На рис. 1 представлен общий вид рассматриваемой плиты и направления координатных осей. Будем считать, что при $y=0, y=b$ плита жестко закреплена, а при $x=0, x=a$ она свободна. Ребра расположены в одном направлении, параллельно оси $0y$.

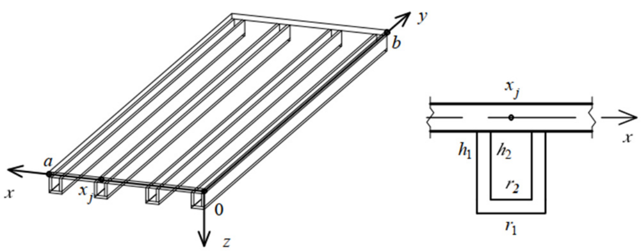


Рис. 1 Общий вид рассматриваемых плит

Fig. 1 General view of the plates under consideration

Функционал полной потенциальной энергии

Рассматриваются жесткие плиты, допускающие малые перемещения, для которых справедлива гипотеза прямых нормалей. Вывод функционала полной потенциальной энергии таких плит выполнен ранее в статье [15], поэтому здесь не приводится. По аналогии с [15], к функционалу полной потенциальной энергии деформации плиты применен метод Л.В. Канторовича. В соответствии с краевыми условиями при $y=0$ и $y=b$ разложение функции прогиба W принято в виде [26; 27]:

$$W(x,y)=f(x)\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right).$$

Здесь W – перемещение плиты в направлении оси z. Запишем финальный вид функционала:

$$E_s=\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\int_0^a\left[a_1\left(f''\right)^2+a_2f^2+a_3f''f+a_4\left(f'\right)^2-2q_2f\right]dx, \quad (1)$$

где

$$a_1=\frac{3b}{8}d_1,\ \ a_2=2\frac{\pi^4}{b^3}d_2,\ \ a_3=-\frac{\pi^2}{2b}d_3,$$

$$a_4=\frac{\pi^2}{2b}d_4,\ \ q_2=\frac{b}{2}q_1,$$

$$d_1=J_x+\frac{h^3}{12},\ \ d_2=J_y+\frac{h^3}{12},\ \ d_3=\mu\left(d_1+d_2\right),$$

$$d_4=2\left(1-\mu\right)\left(J_{xy}+\frac{h^3}{12}\right),\ \ q_1=\frac{1-\mu^2}{E}q.$$

J_x, J_y – моменты инерции сечения ребер в направлениях x и y соответственно $(0\le x\le a,\ \ 0\le y\le b)$, $J_{xy}=\frac{1}{2}\left(J_x+J_y\right)$, E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала плиты, f – неизвестные функции, аппроксимирующие функцию прогибов W, зависящие от x, a – ширина плиты в направлении x, b – длина плиты в направлении y, h – толщина плиты.

Минимизация функционала (1) должна проводиться при краевых условиях при $x=0,\ \ x=a$. Получение краевых условий при $x=0,\ \ x=a$ из условия минимума функционала полной потенциальной энергии приведено в [15]. Они имеют вид:

$$2a_1f''+a_3f=0,\ \ 2a_1f'''+\left(a_3-2a_4\right)f'=0. \quad (2)$$

Типы ребер и их жесткостные характеристики

Ребра расположены вдоль свободных граней плит (ось $0y$) и имеют одинаковые размеры. На рис. 2–5 показаны варианты ребер. Используется уточненный дискретный метод ввода ребер жесткости [14; 28]. Для этого применяются единичные столбчатые функции, равные разности двух единичных функций [14], которые обозначаются $\bar{\delta}\left(x-x_j\right)$.

Вариант I (см. рис. 2).

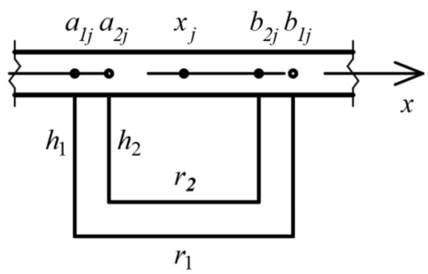


Рис. 2. Ребро коробчатого сечения

Fig. 2. Stiffener in the shape of a box

Моменты инерции для ребра коробчатого сечения:

$$J_x = \sum_{j=1}^{m} \left[J_1 \frac{r_1}{a} \overline{\delta}_1 \left(x - x_j \right) - J_2 \frac{r_2}{a} \overline{\delta}_2 \left(x - x_j \right) \right],$$

$$J_y = \sum_{j=1}^{m} \left[J_1 \overline{\delta}_1 \left(x - x_j \right) - J_2 \overline{\delta}_2 \left(x - x_j \right) \right],$$

$$J_1 = \int_{h/2}^{h/2+h_1} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_{h/2}^{h/2+h_1} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] =$$

$$= \frac{h_1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^2 + \frac{h}{2} \left(h + h_1 \right) \right],$$

$$J_2 = \int_{h/2}^{h/2+h_2} z^2 dz = \frac{h_2}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_2 \right)^2 + \frac{h}{2} \left(h + h_2 \right) \right].$$

Здесь и далее в формулах обозначено:

$$\overline{\delta}_1 \left(x - x_j \right) = U \left(x - a_{1j} \right) - U \left(x - b_{1j} \right),$$

$$\overline{\delta}_2 \left(x - x_j \right) = U \left(x - a_{2j} \right) - U \left(x - b_{2j} \right),$$

$$\overline{\delta}_3 \left(x - x_j \right) = U \left(x - a_{3j} \right) - U \left(x - b_{3j} \right),$$

$$a_{1j} = x_j - \frac{r_1}{2},\ b_{1j} = x_j + \frac{r_1}{2},\ a_{2j} = x_j - \frac{r_2}{2},\ b_{2j} = x_j + \frac{r_2}{2},$$

$$a_{3j} = x_j - \frac{r_3}{2},\ b_{3j} = x_j + \frac{r_3}{2}.$$

Вариант II (см. рис. 3).

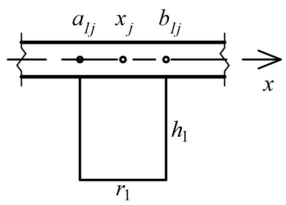


Рис. 3. Ребро сплошного сечения

Fig. 3. Stiffener in the shape of a solid rectangular section

Моменты инерции для ребра сплошного сечения:

$$J_x = \sum_{j=1}^{m} \left[J_1 \frac{r_1}{a} \overline{\delta}_1 \left(x - x_j \right) \right],\ J_y = \sum_{j=1}^{m} \left[J_1 \overline{\delta}_1 \left(x - x_j \right) \right].$$

Вариант III (см. рис. 4).

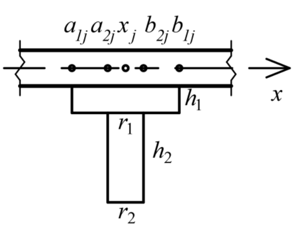


Рис. 4. Ребро таврового сечения

Fig. 4. Stiffener in the shape of a T-beam

Моменты инерции для ребра таврового сечения:

$$J_x = \sum_{j=1}^{m} \left[J_1 \frac{r_1}{a} \overline{\delta}_1 \left(x - x_j \right) + J_2 \frac{r_2}{a} \overline{\delta}_2 \left(x - x_j \right) \right],$$

$$J_y = \sum_{j=1}^{m} \left[J_1 \overline{\delta}_1 \left(x - x_j \right) + J_2 \overline{\delta}_2 \left(x - x_j \right) \right].$$

Вариант IV (см. рис. 5).

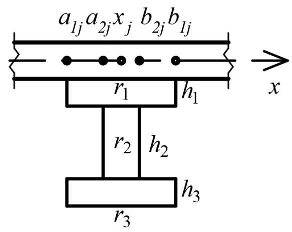


Рис. 5. Ребро двутаврового сечения

Fig. 5. Stiffener in the shape of an I-beam

Моменты инерции для ребра двутаврового сечения:

$$J_x = \sum_{j=1}^{m} \left[J_1 \frac{r_1}{a} \overline{\delta}_1 \left(x - x_j \right) + J_2 \frac{r_2}{a} \overline{\delta}_2 \left(x - x_j \right) + J_3 \frac{r_3}{a} \overline{\delta}_3 \left(x - x_j \right) \right],$$

$$J_y = \sum_{j=1}^{m} \left[J_1 \overline{\delta}_1 \left(x - x_j \right) + J_2 \overline{\delta}_2 \left(x - x_j \right) + J_3 \overline{\delta}_3 \left(x - x_j \right) \right].$$

Для вариантов II – IV:

$$J_1 = \int_{h/2}^{h/2+h_1} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_{h/2}^{h/2+h_1} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] =$$

$$= \frac{h_1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^2 + \frac{h}{2} \left(h + h_1 \right) \right],$$

$$J_2 = \int_{h/2+h_1}^{h/2+h_1+h_2} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_{h/2+h_1}^{h/2+h_1+h_2} =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 \right)^3 - \left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^3 \right] =$$

$$= \frac{h_2}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 \right)^2 + \left(\frac{h}{2} + h_1 \right) \left(h + 2h_1 + h_2 \right) \right],$$

$$J_3 = \int_{h/2+h_1+h_2}^{h/2+h_1+h_2+h_3} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_{h/2+h_1+h_2}^{h/2+h_1+h_2+h_3} =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 \right)^3 - \left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^3 \right] =$$

$$= \frac{h_3}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 + h_3 \right)^2 + \left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 \right) \left(h + 2h_1 + 2h_2 + h_3 \right) \right].$$

Применение метода Ритца при дискретной аппроксимации перемещений (МРДАП) для одномерного функционала

Для минимизации функционала (1) при краевых условиях (2) и нахождения прогиба $W(x)$ применялся метод Ритца при дискретной аппроксимации перемещений. Отрезок $[0, a]$ разбивается на n частей точками x_i, которые будем называть узловыми (рис. 6). Обозначим $x_i - x_{i-1} = \Delta$.

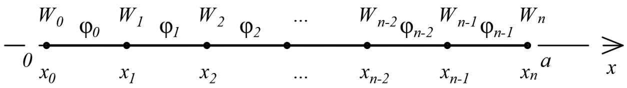


Рис. 6. Разбиение отрезка $[0, a]$ узловыми точками

Fig. 6. Partition of the segment $[0, a]$ by nodal points

Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ по аналогии с методом конечных элементов будем называть конечными элементами (КЭ). На каждом конечном элементе функция $W(x)$ аппроксимировалась многочленом третьей степени:

$$\varphi_i(x) = b_{0,i} + b_{1,i}x + b_{2,i}x^2 + b_{3,i}x^3. \tag{3}$$

Из непрерывности прогибов $W(x)$ и углов поворотов $W'(x)$ в узловых точках для примыкающих к узлу конечных элементов получается зависимость функций $\varphi_i(x)$ от перемещений и углов поворотов. Эти условия записываются в виде:

$$\varphi_i(x_{i-1}) = W_{i-1},\ \ \varphi_i'(x_{i-1}) = W_{i-1}',\ \ \varphi_i(x_i) = W_i,\ \ \varphi_i'(x_i) = W_i'.$$

Для формирования системы линейных алгебраических уравнений, из решения которой находятся все W_i и W_i', находятся производные от функционала (1) по W_i и W_i', и приравниваются нулю. Эта операция проводится для каждого внутреннего узла x_i. Внутренних узлов будет $n-1$, то есть уравнений будет $2n-2$. Недостающие уравнения получаются при использовании двух краевых условий в точках $x = 0$, $x = a$.

Краевые условия при дискретной аппроксимации перемещений

Так как в коэффициентах $a_1 - a_4$ уравнений (2) содержатся единичные столбчатые функции, а сами краевые условия (2) задаются не в интегральной форме, то жесткостные характеристики ребер в (2) задаются с использованием следующих предпосылок:

– если элемент ребра (стенка или полка) попадает в крайнюю точку отрезка $[0, a]$, в которой рассматриваются граничные условия, то жесткостные характеристики этого элемента учитываются при составлении уравнений (рис. 7, *a*);

– если элемент ребра не попадает в соответствующую точку, то его характеристики не учитываются (рис. 7, *b*).

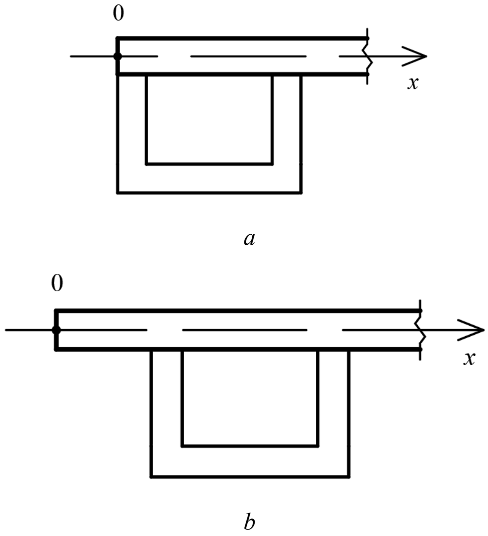


Рис. 7. Ребра у края плиты

Fig. 7. Stiffener at the edge of the plate

Из краевых условий (2) получаются четыре недостающие уравнения. Производные в краевых условиях (2) получаются путем дифференцирования функций (3).

Учет ребер при помощи единичных столбчатых функций

В функционале (1) коэффициенты $d_1 - d_4$ и соответственно $a_1 - a_4$ зависят от обобщенных функций. Поэтому элементы функционала можно разделить на зависящие от ребер и не зависящие. Таким образом, функционал (1) можно представить в виде:

$$E_s = \int_0^a \left[A_0(f) - 2q_2 f + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_k(f)\bar{\delta}_k\left(x - x_j\right) \right] dx, \tag{4}$$

где $A_0(f)$ – оператор функции f, включающий в себя элементы обшивки; $A_k(f)$ – операторы функции f, зависящие от ребер, m – количество ребер, n – количество входящих в моменты инерции параметров J_1, J_2, J_3.

При использовании единичных столбчатых функций $\bar{\delta}\left(x - x_j\right)$ интеграл на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, если он пересекает участок, определяющий ребро j, $[a_{1,j}, b_{1,j}]$, в функционале (4) примет следующий вид:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} A_k(f)\bar{\delta}_k\left(x - x_j\right)dx = \int_{a_{1,j}}^{a_{2,j}} A_k(f)dx.$$

Если отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ и $[a_{1,j}, b_{1,j}]$ не пересекаются, то

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} A_1(f)\bar{\delta}_1\left(x - x_j\right)dx = 0.$$

На рис. 8 крестообразной штриховкой показана область пересечения конечного элемента и единичной столбчатой функции ребра.

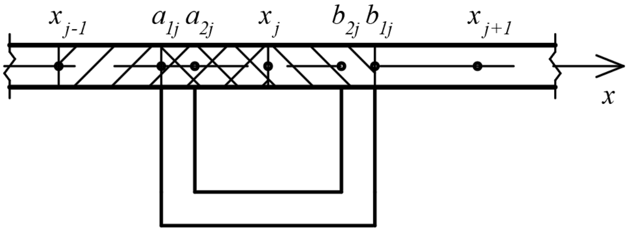


Рис. 8. Пересечение конечного элемента и ребра

Fig. 8. Intersection of a finite element and a stiffener

Было рассмотрено два способа вычисления жесткостных характеристик ребер. Покажем на примере ребер варианта I:

- Тип 1. Интегралы, образованные каждой столбчатой функцией, вычислялись в соответствии с пределами интегрирования этой функции:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[A_1(f)\overline{\delta}_1\left(x-x_j\right) - A_2(f)\overline{\delta}_2\left(x-x_j\right) \right] dx =$$

$$= \int_{a_{1,j}}^{x_j} A_1(f)dx - \int_{a_{2,j}}^{x_j} A_2(f)dx.$$

- Тип 2. Пределы интегрирования образованных столбчатыми функциями одного ребра интегралов выбираются по максимальной ширине элемента (чаще всего это ширина полки). Учет ширины остальных элементов (стенка, нижняя полка) осуществляется при помощи отношения ширины элемента к наибольшей ширине. Интеграл примет вид:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[A_1(f)\overline{\delta}_1\left(x-x_j\right) - A_2(f)\overline{\delta}_2\left(x-x_j\right) \right] dx =$$

$$= \int_{a_{1,j}}^{x_j} A_1(f)dx - \int_{a_{1,j}}^{x_j} \frac{r_2}{r_1} A_2(f)dx.$$

Численный эксперимент

Для апробации методики рассматривались конкретные размеры плиты, материал и нагрузка. Общий вид такой плиты был показан на рис. 1. Исходные данные: $a = 6$ м, $b = 40$ м, $h = 0{,}2$ м, $q = 10^{-2}$ МПа (240 т на всю плиту), $E = 4{\cdot}10^4$ МПа, $\mu = 0{,}2$. Плита в направлении оси $0y$ равномерно подкреплена четырьмя ребрами одинакового размера, причем крайние ребра являются контурными (см. рис. 7, *а*), поэтому в краевых условиях учитывалась их жесткость. Площадь поперечного сечения всех ребер одинаковая и равна 0,15 м^2. В табл. 1 указаны геометрические характеристики ребер. Разбиение отрезка $[0, a]$ на конечные элементы выполнялось таким образом, чтобы узлы попадали в крайнюю и центральную точку ребер.

В табл. 2 приведены перемещения в центре плиты с ребрами коробчатого сечения, полученные в результате расчета. В табл. 3 приведены перемещения в центре плиты с ребрами сплошного сечения, полученные в результате расчета.

В табл. 4 приведены перемещения в центре плиты с ребрами таврового сечения, полученные в результате расчета. В табл. 5 приведены перемещения в центре плиты с ребрами двутаврового сечения, полученные в результате расчета.

Таблица 1

Геометрические характеристики ребер

Table 1

Geometric characteristics of stiffeners

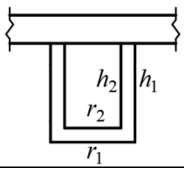
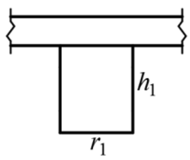
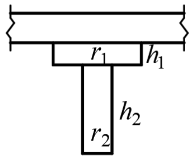
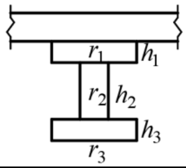
Номер варианта	I	II	III	IV
Графическое отображение				
Размеры ребер	$h_1 = 0{,}6$ м $h_2 = 0{,}5$ м $r_1 = 0{,}5$ м $r_2 = 0{,}3$ м	$h_1 = 0{,}5$ м $r_1 = 0{,}3$ м	$h_1 = 0{,}1$ м $h_2 = 0{,}75$ м $r_1 = 0{,}75$ м $r_2 = 0{,}1$ м	$h_1 = 0{,}1$ м $h_2 = 0{,}5$ м $h_3 = 0{,}1$ м $r_1 = 0{,}5$ м $r_2 = 0{,}1$ м $r_3 = 0{,}5$ м

Таблица 2

Ребро коробчатого сечения (Вариант I)

Table 2

Stiffener in the shape of a box (Version 1)

Количество КЭ по ширине ребра	Всего элементов по ширине	Перемещение в центре плиты, мм		Ранее полученное решение, мм	Относительная разница с ранее полученным решением, %	
		Тип 1	Тип 2		Тип 1	Тип 2
2	24	-3,15	70,26	64,87	104,8	6,1
4	48	-0,17	68,80		100,3	3,8
6	72	69,24	68,35		4,5	3,2
8	96	68,83	68,12		3,9	2,8
10	120	68,59	67,99		3,5	2,6
20	240	68,11	67,76		2,8	2,3
40	480	68,35	68,08		3,2	2,8

Таблица 3

Сплошное прямоугольное ребро (Вариант II)

Table 3

Stiffener in the shape of a solid rectangular section (Version 2)

Количество КЭ по ширине ребра	Всего элементов по ширине	Перемещение в центре плиты, мм		Ранее полученное решение, мм	Относительная разница с ранее полученным решением, %	
		Тип 1	Тип 2		Тип 1	Тип 2
2	24	114,7	114,7	64,87	6,2	6,2
4	48	113,4	113,4		5,0	5,0
6	72	113,0	113,0		4,6	4,6
8	96	112,8	112,8		4,4	4,4
10	120	112,7	112,7		4,3	4,3
20	240	112,6	112,6		4,3	4,3
40	480	119,8	119,8		10,9	10,9

Таблица 4

Тавровое ребро (Вариант III)

Table 4

Stiffener in the shape of a T-beam (Version 3)

Количество КЭ по ширине ребра	Всего элементов по ширине	Перемещение в центре плиты, мм		Ранее полученное решение, мм	Относительная разница с ранее полученным решением, %	
		Тип 1	Тип 2		Тип 1	Тип 2
2	24	4,76	78,69	64,87	94,0	0,5
4	48	87,36	80,75		10,4	2,1
6	72	88,48	81,45		11,8	3,0
8	96	88,90	81,80		12,4	3,4
10	120	89,24	82,01		12,8	3,7
20	240	90,28	82,44		14,1	4,2
40	480	90,78	82,51		14,8	4,3

Таблица 5

Двутавровое ребро (Вариант IV)

Table 5

Stiffener in the shape of an I-beam (Version 4)

Количество КЭ по ширине ребра	Всего элементов по ширине	Перемещение в центре плиты, мм		Ранее полученное решение, мм	Относительная разница с ранее полученным решением, %	
		Тип 1	Тип 2		Тип 1	Тип 2
2	24	5,60	61,52	64,87	90,5	5,0
4	48	61,05	60,88		4,2	3,9
6	72	60,94	60,68		4,0	3,6
8	96	60,88	60,58		3,9	3,4
10	120	60,90	60,52		3,9	3,3
20	240	58,28	60,41		0,5	3,1
40	480	61,55	60,97		5,0	4,0

На рис. 9 и 10 показано сравнение прогибов центральной части плиты вдоль оси $0x$, полученных методом конструктивной анизотропии и предложенным в статье методом.

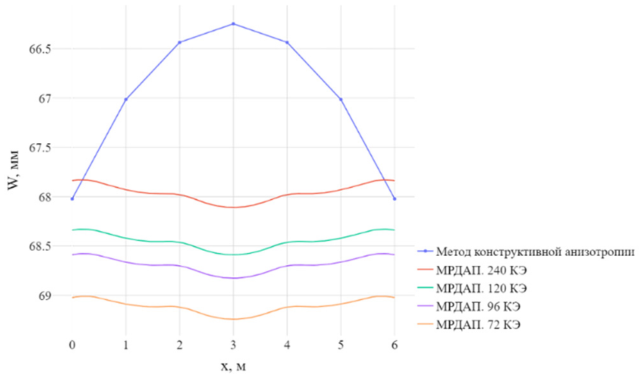


Рис. 9. Сравнение с методом конструктивной анизотропии. Ребра: Вариант 1, тип решения 1

Fig. 9. Comparison with the constructive anisotropy method. stiffeners: Version 1, solution type 1

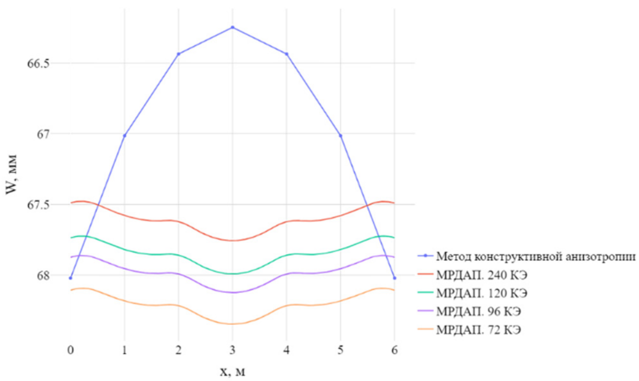


Рис. 10. Сравнение с методом конструктивной анизотропии. Ребра: Вариант 1, тип решения 2

Fig. 10. Comparison with the constructive anisotropy method. Stiffeners: Version 1, solution type 2

Обсуждение и заключение

Разработана методика расчета ребристых плит, подкрепленных по двум противолежащим сторонам.

На основе вычислительного эксперимента с четырьмя видами ребер различной конфигурации можно сделать следующие выводы.

В рассмотренном численном эксперименте оптимальное количество КЭ по ширине ребра равно 6, при этом общее число КЭ на отрезке 6 м при разных видах ребер разное, но не менее 48 для ребер таврового сечения и не более 120 для ребер сплошного сечения.

Во всех случаях отмечается небольшое (порядка 2–5 %) расхождение решения, полученное предложенным в статье методом от ранее полученного решения (метод конструктивной анизотропии). Здесь на 6 м длины отрезка интегрирования приходится 4 м контакта ребер с обшивкой. Следовательно, при отношении суммарной ширины ребер к ширине плиты a, равном 1:3 и более, можно использовать метод конструктивной анизотропии.

На рис. 9 и 10 видно, что характер деформаций в направлении оси $0x$ при расчетах методом конструктивной анизотропии и методом дискретной аппроксимации перемещений отличаются. Наибольший прогиб при расчете методом конструктивной анизотропии достигается на краю плиты. При расчете методом дискретной аппроксимации максимальный прогиб в центре. Это объясняется тем, что при расчетах методом конструктивной анизотропии плита деформируется как гладкая, имеющая эквивалентную ребристой жесткость. При использовании метода дискретной аппроксимации плита имеет максимальные прогибы в центре, между ребрами, что больше соответствует действительной работе конструкции.

Было рассмотрено два типа вычисления жесткостных характеристик ребер. По первому типу, когда ребра коробчатого вида, в виде двутавра и тавра, только первая единичная функция при $x = 0$ не равна нулю, а остальные равны нулю, поэтому неверно будут заданы краевые условия и в результате решение получается с ошибкой. По второму типу жесткостные характеристики контурных ребер учитываются верно, поэтому при разбиении ребра на две части решение сразу начинает сходиться к точному.

Библиографический список

1. Байков, В.Н. Железобетонные конструкции. Общий курс / В.Н. Байков, Э.Е. Сигалов. – М.: Стройиздат, 1984. – 728 с.

2. Корнеев, М.М. Стальные мосты. Теоретическое и практическое пособие по проектированию / М.М. Корнеев. – Киев: ЗАТ «ВІПОЛ», 2003. – 547 с.

3. Chen, W.-F. Bridge engineering handbook, Second Edition: Superstructure Design / W.-F. Chen, L. Duan. – Taylor & Francis Group, 2014. – 716 p.

4. Barker, R.M. Design of highway bridges. An LRFD Approach. Third Edition / R.M. Barker, J.A. Puckett. – United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 2013. – 528 p.

5. Chatterjee, S. The design of modern steel bridges. Second edition / S. Chatterjee. – Blackwell Science Ltd, 2003. – 207 p.

6. Кононов, Ю.И. Железобетонные и каменные конструкции. Сборное железобетонное ребристое перекрытие / Ю.И. Кононов, М.Ю. Кононова. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. – 71 с.

7. Zarei, M.R. On the free vibrations of joined grid-stiffened composite conical-cylindrical shells / M. Zarei, G.H. Rahimi, M. Hemmatnezhad // Thin-Walled Structures. – 2021. – Vol. 161. – P. 107465. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107465.

8. Sayyad, A.S. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results / A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal // Composite Structures. – 2015. – Vol. 129. – P. 177–201. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.04.007.

9. Singhatanadgid, P. The Kantorovich method applied to bending, buckling, vibration, and 3D stress analyses of plates: A literature review / P. Singhatanadgid, T. Singhanart // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2019. – Vol. 26, no 2. – P. 170–188. DOI: 10.1080/15376494.2017.1365984.

10. Замалиев, Ф.С. К расчету сталежелезобетонных плит подкрепленных ребрами / Ф.С. Замалиев, Э.Г. Биккинин // Известия КГАСУ. – 2014. – № 3(29). – С. 27–31.

11. Gu, Y.T. A Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Formulation for Static and Free Vibration Analyses of Thin Plates / Y.T. Gu, G.R. Liu // Computer Modeling in Engineering & Sciences. – 2001. – No 2(4). – P. 463–476. DOI: https://DOI.org/10.3970/cmes.2001.002.463.

12. Karami, G. Application of a new differential quadrature methodology for free vibration analysis of plates / G. Karami, P. Malekzadeh // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2003. – Vol. 56, no 6. – P. 847–868. DOI: 10.1002/nme.590

13. Karpov, V.V. Structural anisotropy method for shells with orthogonal stiffeners / V.V. Karpov, A.A. Semenov // Structures. – 2021 – Vol. 34. – P. 3206–3221. DOI: 10.1016/j.istruc.2021.09.027

14. Модели деформирования строительных конструкций и методы их расчета / В.В. Карпов [и др.]. – М.: Издательский дом АСВ, 2022. – 466 с.

15. Карпов, В.В. Напряженно-деформированное состояние плиты, подкрепленной ребрами различной конфигурации / В.В. Карпов, Е.О. Афанасьева // Вестник гражданских инженеров. – 2024. – № 4. – С. 35–43. DOI: 10.23968/1999-5571-2024-21-4-35-43

16. Chen Chang, D. A Generalized Kantorovich method and its application to free in-plane plate vibration problem / D. Chen Chang, Wang Gang, N.M. Wereley // Applicable Analysis. – 2001. – Vol. 80, no 3–4. – P. 477–491. DOI: 10.1080/00036810108841006

17. Fallah, A. Free vibration analysis of symmetrically laminated fully clamped skew plates using extended Kantorovich method / A. Fallah, M.H. Kargarnovin, M.M. Aghdam // Key Engineering Materials. – 2011. – Vol. 471–472. – P. 739–744. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.471-472.739

18. Ike, C.C. Kantorovich variational method for the flexural analysis of CSCS Kirchhoff-Love plates / C.C. Ike, B.O. Mama // Mathematical Models in Engineering. – 2018. – Vol. 4, no 1. – P. 29–41. DOI: 10.21595/mme.2018.19750

19. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method) / A.D. Tebyakin [et al.] // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. – 2022. – Vol. 22, no 4. – P. 494–505. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505

20. Jafari, A.A. Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods / A.A. Jafari, M. Bagheri // Thin-Walled Structures. – 2006. – Vol. 44, no 1. – P. 82–90. DOI: 10.1016/j.tws.2005.08.008

21. Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners / M. Talebitooti [et al.] // Archive of Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 80, no 3. – P. 201–215. DOI: 10.1007/s00419-009-0311-4

22. Semenov, A.A. Refined discrete method for calculating stiffened orthotropic shells / A.A. Semenov // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2022. – No 4. – P. 90–102. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.4.09

23. Karpov, V.V. Refined model of stiffened shells / V.V. Karpov, A.A. Semenov // International Journal of Solids and Structures. – 2020. – Vol. 199. – P. 43–56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019

24. Бакулин, В.Н. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами кусочно-постоянной толщины, при действии осевой нагрузки / В.Н. Бакулин, А.Я. Недбай // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. – 2020. – Т. 495, № 1. – С. 39–45. DOI: 10.31857/S268674002006005X

25. Карпов, В.В. Уравнения в смешанной форме для ребристых оболочек общего вида и методика их решения / В.В. Карпов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 2. – С. 116–134. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.09

26. Fariborz, S.J. Application of the extended Kantorovich method to the bending of variable thickness plates / S.J. Fariborz, A. Pourbohloul // Computers & Structures. – 1989. – Vol. 31, no 6. – P. 957–965.

27. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – 5-е изд. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

28. Семенов, А.А. Прочность и устойчивость подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций в задачах статики и динамики: дис. … д-ра техн. наук. – СПб.: СПбГАСУ, 2023. – 383 с.

References

1. Bajkov V.N., Sigalov E.E. Zhelezobetonnye konstrukcii. Obshchij kurs. [Reinforced concrete structures. General course] Moscow.: Strojizdat, 1984. 728 p.

2. Korneev M.M. Stal'nye mosty. Teoreticheskoe i prakticheskoe posobie po proektirovaniyu. [Steel bridges. A theoretical and practical guide to design]. Kiev: ZAT «VIPOL», 2003. 547 p.

3. Chen W.-F., Duan L. Bridge engineering handbook, Second Edition: Superstructure Design. Taylor & Francis Group, 2014. 716 p.

4. Barker R.M., Puckett J.A. design of highway bridges. An LRFD Approach. Third Edition. United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 2013. 528 p.

5. Chatterjee S. The design of modern steel bridges. Second edition. Blackwell Science Ltd, 2003. 207 p.

6. Kononov Yu.I., Kononova M.Yu. Zhelezobetonnye i kamennye konstrukcii. Sbornoe zhelezobetonnoe rebristoe perekrytie. [Reinforced concrete and masonry structures. Precast reinforced concrete ribbed slabs]. Saint Petersburg: Politekhnicheskii. universitet, 2013. 71 p.

7. Zarei M., Rahimi G.H., Hemmatnezhad M. On the free vibrations of joined grid-stiffened composite conical-cylindrical shells. Thin-Walled Structures, 2021, vol. 161, pp. 107465. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107465.

8. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results. Composite Structures, 2015, vol. 129, pp. 177–201. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.04.007.

9. Singhatanadgid P., Singhanart T. The Kantorovich method applied to bending, buckling, vibration, and 3D stress analyses of plates: A literature review. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2019, vol. 26, no 2, pp. 170–188. DOI: 10.1080/15376494.2017.1365984.

10. Zamaliev F.S., Bikkinin E.G. K raschetu stalezhelezobetonnyh plit podkreplennyh rebrami. [For the calculation of reinforced steel concrete slabs stiffened with ribs]. News KSUAE, 2014, no 3(29), pp. 27–31.

11. Gu Y.T., Liu G.R. A Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Formulation for Static and Free Vibration Analyses of Thin

Plates. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2001, no 2(4), pp. 463–476. DOI: https://DOI.org/10.3970/cmes.2001.002.463.

12. Karami G., Malekzadeh P. Application of a new differential quadrature methodology for free vibration analysis of plates. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, vol. 56, no 6, pp. 847–868. DOI: 10.1002/nme.590.

13. Karpov V.V., Semenov A.A. Structural anisotropy method for shells with orthogonal stiffeners. Structures, 2021, vol. 34, pp. 3206–3221. DOI: 10.1016/j.istruc.2021.09.027.

14. Karpov V.V. et al. Modeli deformirovaniya stroitel'nyh konstrukcij i metody ih rascheta. [Models of deformation of building structures and methods of their calculation]. Moscow: Izdatel'skij dom ASV, 2022. 466 p.

15. Karpov V.V, Afanaseva E.O. Stress-strain state of a plate supported by ribs of different configuration. Bulletin of Civil Engineers, 2024, no 4, pp. 35–43. DOI: 10.23968/1999-5571-2024-21-4-35-43.

16. Chen Chang D., Gang Wang, Wereley N.M. A Generalized Kantorovich method and its application to free in-plane plate vibration problem. Applicable Analysis, 2001, vol. 80, no 3–4, pp. 477–491. DOI: 10.1080/00036810108841006.

17. Fallah A., Kargarnovin M.H., Aghdam M.M. Free vibration analysis of symmetrically laminated fully clamped skew plates using extended Kantorovich method. Key Engineering Materials, 2011, vol. 471–472, pp. 739–744. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.471-472.739.

18. Ike C.C., Mama B.O. Kantorovich variational method for the flexural analysis of CSCS Kirchhoff-Love plates. Mathematical Models in Engineering, 2018, vol. 4, no 1, pp. 29–41. DOI: 10.21595/mme.2018.19750.

19. Tebyakin A.D. et al. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method). Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, no 4, pp. 494–505. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505.

20. Jafari A.A., Bagheri M. Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods. Thin-Walled Structures, 2006, vol. 44, no 1, pp. 82–90. DOI: 10.1016/j.tws.2005.08.008.

21. Talebitooti M. et al. Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners. Archive of Applied Mechanics, 2010, vol. 80, no 3, pp. 201–215. DOI: 10.1007/s00419-009-0311-4.

22. Semenov A.A. Refined discrete method for calculating stiffened orthotropic shells. PNRPU Mechanics Bulletin, 2022, no 4, pp. 90–102. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.4.09.

23. Karpov V.V., Semenov A.A. Refined model of stiffened shells. International Journal of Solids and Structures, 2020, vol. 199, pp. 43–56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019.

24. Bakulin V.N., Nedbaj A.Ya. Dinamicheskaya ustojchivost' cilindricheskoj obolochki, podkreplennoj prodol'nymi rebrami kusochno-postoyannoj tolshchiny, pri dejstvii osevoj nagruzki. [Dynamic stability of a cylindrical shell reinforced by longitudinal ribs of a piecewise-constant thickness under axial loading]. Doklady Physics, 2020, vol. 495, no 1, pp. 39–45. DOI: 10.31857/S268674002006005X.

25. Karpov V.V. Mixed form equations for ribbed shells of a general type and their solutions. PNRPU MECHANICS BULLETIN, 2019, no 2, pp. 116–134. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.09.

26. Fariborz S.J., Pourbohloul A. Application of the extended Kantorovich method to the bending of variable thickness plates. Computers & Structures, 1989, vol. 31, no 6, pp. 957–965.

27. Kantorovich L.V., Krylov V.I. Priblizhennye metody vysshego analiza. 5-e izd. [Approximate methods of advanced analysis. 5th edition] Leningrad.: Fizmatgiz, 1962. 708 p.

28. Semenov A.A. Prochnost' i ustojchivost' podkreplennyh ortotropnyh obolochechnyh konstrukcij v zadachah statiki i dinamiki: Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni doktora tekhnicheskih nauk. [Strength and stability of stiffened orthotropic shell structures in problems of statics and dynamics]. Doctor's degree dissertation. Saint Petersburg, 2023. 383 p.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Вклад автора 100 %.

Funding. The study was not supported by sponsorship.
Conflict of interest. The author declare no conflict of interest.
The contribution of the author is 100 %.