

Степанова Л.В. Компьютерное моделирование процессов накопления повреждений в твердых телах с трещинами с помощью пользовательской процедуры UMAT вычислительного комплекса Simulia Abaqus // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 3. – С. 71–86. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.08

Stepanova L.V. Computational simulation of the damage accumulation processes in cracked solids by the user procedure UMAT of Simulia Abaqus. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 3, pp. 71-86. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.08



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.08

УДК 539.42

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ С ТРЕЩИНАМИ С ПОМОЩЬЮ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ UMAT ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА SIMULIA ABAQUS

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
Самара, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 03 июля 2018 г.  
Принята: 17 сентября 2018 г.  
Опубликована: 08 октября 2018 г.

#### Ключевые слова:

тензор поврежденности второго ранга, конечно-элементное решение, пользовательские процедуры комплекса Simulia Abaqus/CAE, процедура UMAT, распределение поврежденности у вершины трещины.

### АННОТАЦИЯ

В настоящей работе представлен опыт использования процедуры UMAT многофункционального комплекса SIMULIA Abaqus, реализующего метод конечных элементов, для описания процессов накопления повреждений в образцах с концентраторами напряжений в материале с определяющими уравнениями, базирующимися на конституциональных уравнениях линейно-упругого изотропного материала и содержащими компоненты тензора поврежденности второго ранга. Определяющие соотношения, включающие компоненты тензора поврежденности, описаны с помощью процедуры UMAT программного комплекса SIMULIA Abaqus и реализованы в Abaqus/Standard. Показано, что распределения напряжений и поврежденности не зависят от способа разбиения образца на конечные элементы и определяются устойчивым образом. Найдены распределения компонент тензора поврежденности у вершины трещины и проанализированы зоны активного накопления повреждений в условиях смешанного нагружения на примере целого ряда задач для тел с различными концентраторами напряжений, трещинами и надрезами в полном диапазоне смешанных форм нагружения от чистого нормального отрыва до нагружений, близких к поперечному сдвигу. Выполнена серия вычислительных экспериментов для пластины с центральной горизонтальной и наклонной трещинами и для полудиска с вертикальной наклонной трещиной (с различными углами наклона надреза к хорде диска) в материале с учетом процессов накопления повреждений и определены конфигурации зон активного накопления повреждений. Показано, что учет процесса накопления повреждений приводит к снижению концентрации напряжений в телах с трещинами и концентраторами напряжений.

© ПНИПУ

© Степанова Лариса Валентиновна – д.ф.-м.н., проф., e-mail: [stepanovlv@samsu.ru](mailto:stepanovlv@samsu.ru), ORCID: 0000-0002-6693-3132.

Larisa V. Stepanova – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: [stepanovlv@samsu.ru](mailto:stepanovlv@samsu.ru), ORCID: 0000-0002-6693-3132.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# COMPUTATIONAL SIMULATION OF THE DAMAGE ACCUMULATION PROCESSES IN CRACKED SOLIDS BY THE USER PROCEDURE UMAT OF SIMULIA ABAQUS

L.V. Stepanova

Samara University, Samara, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 03 July 2018  
Accepted: 17 September 2018  
Published: 08 October 2018

### Keywords:

damage tensor of the second rank, finite element solution, user procedure of Simulia Abaqus/CAE, a UMAT subroutine, damage tensor distribution in the vicinity of the crack tip.

## ABSTRACT

The paper presents the experience of using the user subroutine UMAT for FEM package SIMULIA Abaqus/CAE for damage accumulation processes in the vicinity of the crack. A continuum damage mechanics model based on the constitutive relations of linear elastic isotropic materials with the incorporated damage tensor components is used to describe the material behavior. The material nonlinearity arising from the deformation process is modelled by introducing an anisotropic damage tensor of the second rank into the constitutive equation. The material model is described by means of user procedure UMAT of SIMULIA Abaqus. The finite element (FE) mechanical constitutive model is implemented in Abaqus/Standard via a UMAT routine. Numerical experiments for a large series of cracked specimens have been performed. Computed stress and damage tensor components were found. It is shown that they are not dependent on the FE mesh refinement. Distributions of the damage tensor components in the vicinity of the crack tip in cracked specimens of different configurations under mixed mode loading in a wide range of mixed mode loadings are found. The configurations of active damage accumulation process zone in the cracked specimens are obtained. It is shown that the damage accumulation process has a substantial influence on the stress-strain state in the vicinity of the crack tip and leads to a decrease of the stress concentration in cracked specimens.

© PNRPU

## Введение

В настоящее время разрушение (макроскопическое нарушение сплошности тела в результате воздействия на него внешнего окружения) рассматривается с учетом процессов скрытого разрушения. Исследование скрытого разрушения (зарождение и развитие микродефектов, рассеянных по объему тела) осуществляется с помощью методов и теорий механики поврежденности – динамично развивающегося раздела современной механики деформируемого твердого тела, теоретические основы которой заложены Л.М. Качановым и Ю.Н. Работновым [1–3]. В последнее время большой интерес вызывают вопросы компьютерного моделирования деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций [4–6] и развития численных методов, учитывающих повреждаемость материала конструкции с течением времени, а также описания взаимного влияния эволюции поврежденности и напряженно-деформированного состояния [7–11]. В [7–11] предложена и используется одна из моделей анизотропной поврежденности, экспериментальное подтверждение которой обсуждается в [12–16]. В целом в последнее десятилетие и в самое последнее время вопросам компьютерного моделирования роста трещин и длительного разрушения с использованием различных мер поврежденности посвящается большое количество работ [17–20], появились фундаментальные монографии [21–23], а в 2014 г. вышло в свет второе издание основополагающей книги Ю.Н. Работнова «Ползучесть элементов

конструкций» [24]. Континуальная механика поврежденности исходит из того, что изменение со временем механических свойств материалов феноменологически можно интерпретировать как результат накопления повреждений, различных дефектов, микропор, трещин. Когда повреждения достигают опасного уровня, происходит разрушение. Трещинообразование начинается на самых ранних этапах деформации и связано с ростом имеющихся и возникновением новых суб- и микродефектов. В материале всегда имеется большое число различных дефектов, приводящих к высоким местным напряжениям. Уменьшение прочности (свойства тела сопротивляться воздействиям со стороны внешнего окружения) деформируемых твердых тел часто может быть объяснено скрытым разрушением и микродефектной структурой тела. Таким образом, поскольку повреждения тела существенно влияют на характер его разрушения, становится очевидным, что и механика разрушения, и механика поврежденности призваны решить главную прикладную задачу об оценке запаса прочности твердого тела.

Поэтому сейчас одной из актуальной задач современной механики деформируемого твердого тела и механики разрушения, в частности, является компьютерное имитационное моделирование процессов нелинейного деформирования и разрушения твердых тел под нагрузкой с учетом процессов накопления рассеянных повреждений. Под поврежденностью понимается относительное сокращение вследствие распределенных внутри образца микродефектов эффективной, несущей нагрузку площа-

ди поперечного сечения образца [22]. Деградацию материала можно трактовать как последовательное уменьшение эффективной площади, несущей приложенную нагрузку. Процесс накопления повреждений в твердых телах может быть описан с помощью введенной скалярной или тензорной меры поврежденности [1–3, 22].

В простейшем варианте поврежденность можно описать некоторым скаляром, структурным параметром  $1 \geq \psi \geq 0$  [1]. В начальном состоянии при отсутствии поврежденности  $\psi = 1$ , с течением времени функция  $\psi$  убывает. Функцию  $\psi$  можно интерпретировать как сплошность. Ю.Н. Работнов [2, 3] ввел функцию  $\omega \geq 0$ , равную нулю в начальном состоянии и единице в момент разрушения, которую можно принять за меру охрупчивания. Функцию  $\omega$  естественно назвать поврежденностью, и можно считать, что  $\psi = 1 - \omega$ . Величина  $\omega$  может быть интерпретирована как относительная площадь поперечного сечения, занятая трещинами и вакансиями. Предполагается, что скорость изменения параметра поврежденности  $\dot{\omega}$  зависит от напряжения  $\sigma$  и от поврежденности  $\omega$ . Простейшая гипотеза состоит в том, что  $\dot{\omega}$  есть степенная функция отношения  $\sigma / (1 - \omega)$ . Полученное напряжение  $\sigma_{\text{ист}} = \sigma / (1 - \omega)$  носит название истинного напряжения. Это отношение может быть истолковано как среднее напряжение на площади поперечного сечения, свободной от трещин. Истинное напряжение вводится в определяющие уравнения, построенные для первой и второй стадий ползучести, чтобы описать третий участок кривой ползучести. Впоследствии концепция истинного напряжения была распространена на упругие и пластические деформации [4–6], что позволило учитывать накопления повреждений в условиях упругого нагружения и пластического течения [4–6, 7–9].

В рамках связанной постановки задачи скалярный параметр поврежденности или компоненты тензора поврежденности входят в определяющие соотношения материала [22]. Исторически первой явилась математическая модель Качанова–Работнова [1–3]

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m. \quad (1)$$

В соотношениях (1)  $\dot{\epsilon}_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести;  $s_{ij}$  – девиатор напряжений;  $\psi$  – параметр сплошности;  $\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$  – интенсивность касательных напряжений;  $B, n, A, m$  – константы материала. После пионерских работ Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова [1–3] континуальная механика поврежденности двигалась по пути 1) усложнения определяющих уравнений [4–6], 2) отражения анизотропии, вызванной накоплением повреждений [7–16, 22], 3) решения краевых задач в связках упругость-поврежденность, пластичность-поврежденность и пол-

зучесть-поврежденность [25–31]. Существующие модели поврежденности для изотропных материалов были обобщены для анизотропных линейно-упругих материалов (бетон, горные породы), для функционально-градиентных материалов с переменными по координатам свойствами [32], для композиционных материалов [33–42]. Например, позднее определяющие уравнения модели Качанова–Работнова (1) были обобщены и представлены в форме [43, 44]

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} t^m \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \frac{\sigma_e^x}{\psi^\phi} t^m. \quad (2)$$

В целом закон роста поврежденности при сложном напряженном состоянии можно установить с помощью экспериментов, в которых находятся комбинации напряжений, приводящие к одному и тому же времени до разрушения. Геометрически такие результаты представляются в виде поверхностей в пространстве напряжений [45]. Математически изохронные поверхности напряжений описывают с помощью некоторого скалярного инварианта напряжений  $\Phi(\sigma_1, \sigma_e, \sigma_{kk})$ , где  $\sigma_1$  – максимальное главное напряжение;  $\sigma_e$  – интенсивность напряжений;  $\sigma_{kk}$  – гидростатическое напряжение. В настоящее время изохронную поверхность чаще всего описывают с помощью следующей линейной интерполяции:

$$\Phi = \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_e + (1 - \alpha - \beta) \sigma_{kk}.$$

Решение краевых задач механики деформируемого твердого тела для элементов конструкций, находящихся в реальных эксплуатационных условиях, требует использования многофункциональных комплексов, таких как SIMULIA Abaqus. Однако среди моделей материалов, представленных в конечно-элементном пакете SIMULIA Abaqus, нет возможности прямого учета процесса накопления повреждений. Возможность моделирования сложных сред в пакете SIMULIA Abaqus реализуется с помощью пользовательских процедур, таких как UMAT и VUMAT [17, 44, 46].

В настоящей работе представлен опыт использования процедуры UMAT для описания процессов накопления повреждений в образцах с концентраторами напряжений в материале с определяющими уравнениями, базирующимися на конституциональных уравнениях линейно-упругого изотропного материала и включающими компоненты тензора поврежденности второго ранга [7–11]. В работе найдены распределения поврежденности у вершины трещины и проанализированы зоны активного накопления повреждений в условиях смешанного нагружения на примере целого ряда задач для тел с различными концентраторами напряжений и разрезами в полном диапазоне смешанных форм нагружения. Выполнена серия вычислительных экспериментов для диска с вертикальной наклонной трещиной (с различными углами наклона надреза к хорде диска) в материале с учетом процессов накопления повреждений.

### 1. Определяющие уравнения материала с включенными компонентами тензора поврежденности второго ранга

Для учета эффектов анизотропии был предложен целый ряд математических моделей [7–16, 21, 22]. Одна из них – модель для боросиликатного стекла, основанная на введении тензорной меры поврежденности [7–16]. Определяющие уравнения материала в общем случае имеют вид

$$\sigma_{ij} = [K_{ijkl}^e(T) + K_{ijkl}^d(T)](\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{th}), \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;  $K_{ijkl}^e(T)$  – компоненты тензора упругих модулей, в общем случае зависящих от температуры;  $K_{ijkl}^d(T)$  – компоненты тензора упругих модулей, обусловленные накоплением повреждений;  $\varepsilon_{ij}^{th}$  – температурные деформации. Компоненты тензора упругих модулей  $K_{ijkl}^e(T)$  вычисляются как классические компоненты тензора упругих модулей линейно-упругого изотропного материала

$$K_{ijkl}^e = \lambda(T)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(T)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}), \quad (4)$$

где  $\lambda(T)$ ,  $\mu(T)$  – постоянные Ламе. Компоненты тензора упругих модулей  $K_{ijkl}^d(T)$ , обусловленные накоплением повреждений и учитывающие данный процесс, вычисляются с помощью соотношений [7–11]

$$K_{ijkl}^d = C_1(T)(\delta_{ij}D_{kl} + \delta_{kl}D_{ij}) + C_2(T)(\delta_{jk}D_{il} + \delta_{il}D_{jk}), \quad (5)$$

где  $D_{ij}$  – компоненты тензора поврежденности;  $C_i(T)$ ,  $i=1,2$  – константы материала, определяемые экспериментально. Предполагается, что  $0 \leq D_{ij} \leq 1$ .

Оригинальная модель анизотропной поврежденности (3)–(5) была предложена для боросиликатного стекла [10] и развита в [11]. Модель анизотропной поврежденности (3)–(5), как показано в [8], хорошо описывает растрескивание стекла при вдавливании штампа, что подтверждается экспериментальными данными, приведенными в [13, 14]. Подробное изложение экспериментальной процедуры исследования процессов растрескивания и локализации поврежденности приведено в [8]. Уравнения (3)–(5) изначально пред-

ложены для описания процессов деформирования вязкоупругого тела, переходящего в стеклообразное состояние при понижении температуры. В [8–10, 12–14] показано, что модель может быть обобщена на случай произвольного стекла путем выбора параметров модели. Главным преимуществом используемой модели является ее широкое экспериментальное подтверждение для различных классов материалов и условий разрушения [14–16]. Также одним из преимуществ данной модели является ее простота и возможность использования в расчетном комплексе SIMULIA Abaqus, в отличие от моделей, представленных уравнениями (1) и (2), для которых требуется написание достаточно сложной процедуры интегрирования кинетического уравнения по времени. В силу указанной причины находят широкое распространение модели поврежденности с алгебраическими уравнениями, описывающими поврежденность [38, 47]. В целях упрощения математической модели (3)–(5) можно предположить, что недиагональные компоненты тензора поврежденности равны нулю, а нормальные компоненты определяются выражениями

$$D_{ii} = \begin{cases} 0 & \sigma_i \leq \sigma_{th}, \\ \frac{\sigma_i - \sigma_{th}(T)}{\sigma_c(T) - \sigma_{th}(T)} & \sigma_{th} < \sigma_i < \sigma_c, \\ 1 & \sigma_i \geq \sigma_c, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\sigma_i$ ,  $i=1,2,3$  – главные напряжения;  $\sigma_{th}$ ,  $\sigma_c$  – пороговое и критическое значения напряжений соответственно. При напряжениях ниже порогового значения  $\sigma_{th}$  накопления повреждений не происходит. Если главное напряжение  $\sigma_i$ ,  $i=1,2,3$  достигает критического значения  $\sigma_c$ , то материал считается полностью поврежденным,  $D_{ii} = 1$ . Если поврежденность вызывается касательными напряжениями в плоскости, то компоненты тензора поврежденности вычисляются с помощью соотношений [7, 9, 10]

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & \sigma_{ij} \leq \sigma_{th}, \\ \frac{\sigma_{ij} - \sigma_{th}(T)}{\sigma_c(T) - \sigma_{th}(T)} & \sigma_{th} < \sigma_{ij} < \sigma_c, \\ 1 & \sigma_{ij} \geq \sigma_c, \end{cases} \quad (7)$$

В развернутой форме определяющие уравнения материала (3)–(5) принимают вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + 2D_{11}(C_1 + C_2) & & & & & \\ \lambda + C_1(D_{11} + D_{22}) & \lambda + 2\mu + 2D_{22}(C_1 + C_2) & & & & \\ \lambda + C_1(D_{11} + D_{33}) & \lambda + C_1(D_{22} + D_{33}) & \lambda + 2\mu + 2D_{33}(C_1 + C_2) & & & \\ 0 & 0 & 0 & \mu & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{matrix} SYM \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Определяющие соотношения (2)–(8), учитывающие анизотропный характер поврежденности, соответствуют подходу, предложенному для описания процессов накопления поврежденности и разрушения композиционных материалов в [35]. Подробные обзоры современной научной литературы, посвященной проблематике описания процессов накопления поврежденности и разрушения, могут быть найдены в [36–38].

Определение значений материальных констант  $C_1$  и  $C_2$  в уравнениях (3)–(8) представляет собой нетривиальную задачу, требующую выполнения целого ряда экспериментов. Тем не менее для простых случаев можно воспользоваться следующими соображениями. В случае двухосного растяжения квадратной пластины можно принять, что компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  обращаются в нуль, когда  $D_{11} = D_{22} = 1, 0$ , в то время как для плоской задачи справедливо  $D_{33} = 0$ . Для данного нагружения в силу симметрии должно выполняться  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon$ :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0 = \{2(\lambda + \mu) + 2(C_1 + C_2)\}\varepsilon + \{\lambda + C_1\}\varepsilon_{33}, \quad (9)$$

$$\sigma_{33} = 0 = \{2(\lambda + C_1)\}\varepsilon + \{\lambda + 2\mu\}\varepsilon_{33}. \quad (10)$$

Из полученных равенств можно найти значения материальных констант  $C_1 = 2\mu$  и  $C_2 = -3\mu$ . В вычислениях, приведенных ниже, используется именно этот выбор констант. В [9] указывается и альтернативный

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2D_{rr}C & \lambda + C_1(D_{rr} + D_{\theta\theta}) & \lambda + C_1(D_{rr} + D_{zz}) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + C_1(D_{rr} + D_{\theta\theta}) & \lambda_1 + 2D_{\theta\theta}C & \lambda + C_1(D_{\theta\theta} + D_{zz}) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + C_1(D_{rr} + D_{zz}) & \lambda + C_1(D_{\theta\theta} + D_{zz}) & \lambda_1 + 2D_{zz}C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \frac{C_2(D_{zz} + D_{\theta\theta})}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu + \frac{C_2(D_{rr} + D_{zz})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu + \frac{C_2(D_{rr} + D_{\theta\theta})}{2} \end{pmatrix}$$

где приняты обозначения  $\lambda_1 = \lambda + 2\mu$ ,  $C = C_1 + C_2$ .

Постоянные материала определяются из следующих условий. Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}$  и  $\sigma_{r\theta}$  обращаются в нуль, когда компоненты тензора поврежденности достигают своего критического значения  $D_{rr} = 1, D_{\theta\theta} = 1, D_{zz} = 1$ . В условиях трехосного растяжения  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ . Тогда должны выполняться два условия

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = [\lambda + 2\mu + 2(C_1 + C_2)]\varepsilon + 2(\lambda + 2C_1)\varepsilon = 0,$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = (\mu + C_2)\varepsilon = 0.$$

Откуда легко найти значения материальных постоянных:  $C_1 = -0,5\mu$ ,  $C_2 = -\mu$ . Таким образом, выбор зна-

выбор констант  $C_1 = \mu$ ,  $C_2 = -1,5\mu$ , используемый в оригинальной работе [10], в которой два параметра модели находятся из условия обращения в нуль компоненты  $\sigma_{11}$ , когда для одноосного растяжения плоского образца  $D_{11} = 1$  в направлении оси  $x_1$ .

В [7] тензорная мера поврежденности применяется для описания разрушения боросиликатного стекла в условиях трехосного растяжения. Согласно уравнениям (6) компоненты тензора поврежденности связываются с главными напряжениями и с направлениями главных осей тензора напряжений. Авторы апеллируют к экспериментальным данным [8] и замечают, что в условиях температурного нагружения, рассматриваемого ими, нагружение является строго пропорциональным и в центральной части цилиндрического образца реализуется трехосное растяжение с главными осями, совпадающими с осями цилиндрической системы координат. Поэтому определяющие уравнения формулируются в цилиндрической системе координат:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{pmatrix} \quad (11)$$

чений материальных постоянных представляет собой нетривиальную задачу и должен осуществляться в каждом случае отдельно, исходя из рассматриваемой задачи.

## 2. Пользовательская процедура UMAT МКЭ-пакета Simulia Abaqus

В настоящем параграфе будут приведены конечно-элементные решения задач о трещинах в среде с поврежденностью в связанной постановке (упругость–поврежденность). Определяющие соотношения (3)–(7) описаны в многоцелевом расчетном комплексе Simulia Abaqus с помощью пользовательской процедуры UMAT. Пользовательские процедуры многофункцио-

нального расчетного комплекса Simulia Abaqus позволяют ввести в рассмотрение материалы, отсутствующие в стандартном наборе материальных моделей классического пакета Abaqus/CAE. Все конечно-элементные решения получены для определяющих уравнений (3)–(7). Интерес представляет оценка взаимного влияния эволюции напряженно-деформированного состояния в образце и процесса накопления повреждений, в особенности у вершины трещины или надреза. Первой задачей является задача о всестороннем и одноосном растяжении пластины с центральным круговым отверстием в среде с поврежденностью. Затем рассматриваются задачи определения напряженно-деформированного состояния и поврежденности у вершин трещин в условиях нормального отрыва и смешанного нагружения.

### 2.1. Распределение поврежденности в пластине с центральным круговым отверстием

В качестве первого образца была выбрана пластина с центральным круговым отверстием под действием 1) всестороннего и 2) одноосного растяжения в материале с определяющими уравнениями (3)–(7). На рис. 1 и 2 показаны распределения поврежденности в пластине с круговым вырезом в условиях всестороннего и одноосного растяжения для определяющих уравнений с включенным тензором поврежденности.

Из рис. 1 и 2 видно, что максимальные значения поврежденности достигаются на контуре кругового выреза в случае всесторонне растягиваемой пластины и в точках кругового отверстия, лежащих на оси ординат. Поскольку распределения поврежденности, полученные в ходе конечно-элементного эксперимента, соответствуют известным экспериментальным результатам [48, 49], рассматриваемая материальная модель была использована для решения более сложных задач, для анализа зон активного накопления повреждений у вершины трещины.

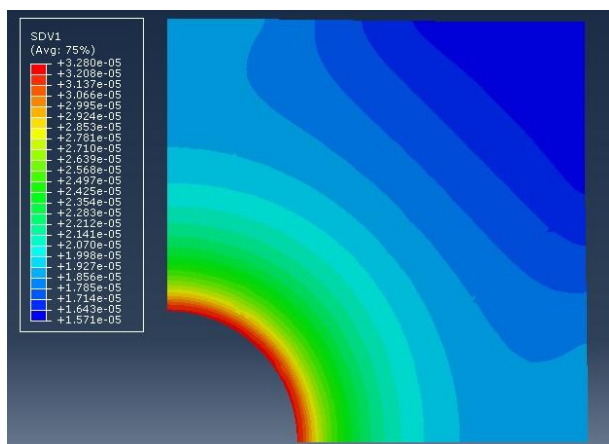


Рис. 1. Распределение компоненты тензора поврежденности  $D_{11}$  в пластине с центральным круговым отверстием под действием всестороннего растяжения  
 Fig. 1. Distribution of damage tensor component  $D_{11}$  in the plate under equi-biaxial tension of the specimen

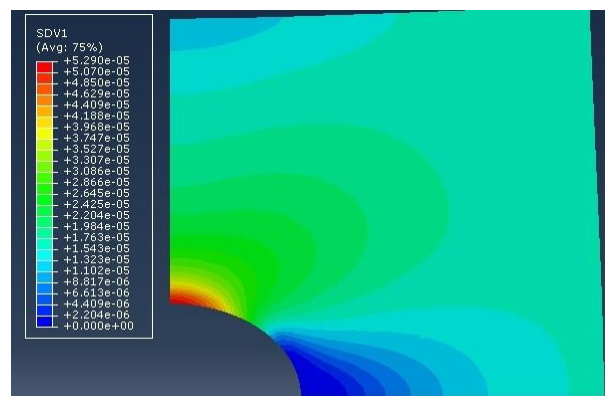


Рис. 2. Распределение компоненты тензора поврежденности  $D_{11}$  в пластине с центральным круговым отверстием под действием одноосного растяжения по оси  $x_1$   
 Fig. 2. Distribution of damage tensor component  $D_{11}$  in the plate for uniaxial tension of the specimen

### 2.2. Растяжение пластины с центральной трещиной в среде с поврежденностью

Особый интерес представляет определение конфигурации зон накопления повреждений у вершины трещины. Несмотря на достаточно богатый опыт работы с пользовательскими процедурами пакета SIMULIA Abaqus, накопленный исследователями в нашей стране и за рубежом [17–20, 32, 46, 50, 51], позволяющий моделировать широкий класс материалов с инкорпорированными скалярной и тензорной мерой поврежденности, отсутствуют результаты вычислений, показывающих процессы накопления повреждений вблизи кончика трещины, и их систематичный анализ. В силу указанных причин можно остановиться на простой модели пластины с центральной трещиной. Типичная схема разбиения области, окружающей трещины, показана на рис. 3.

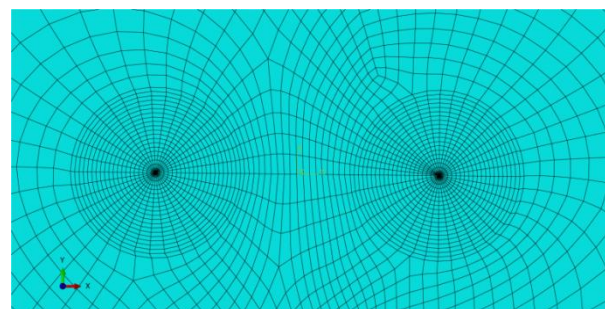


Рис. 3. Пример конечно-элементного разбиения пластины на конечные элементы: вершины трещины окружают сингулярные элементы  
 Fig. 3. Details of finite element mesh pattern for the simulation the plate with a horizontal central crack and two crack tips with singular elements

Модель анизотропной поврежденности с включенными компонентами тензора поврежденности в определяющие уравнения линейно-упругого материала была применена для оценки зон активного накопления повреждений

у вершин трещины. На рис. 4–8 приведены результаты вычислений. На рис. 4–7 показаны распределения напряжений в пластине без учета процесса накопления повреждений (слева) и с учетом поврежденности материала (справа). Компоненты тензора поврежденности показаны на рис. 8. Из рис. 4–7 видно, что накопление повреждений приводит к снижению значений всех компонент тензора напряжений. Таким образом, влияние поврежденности в материале приводит к снижению особенности поля напряжений вблизи вершины трещины. На рис. 8, *a* и *b* при-

ведены распределения компонент тензора поврежденности  $D_{11}$  и  $D_{22}$  в пластине, связанные с максимальным и минимальным главными напряжениями.

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{2}.$$

В данном расчете компонента  $D_{33}$  связана со средним главным напряжением  $\sigma_3 = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ .

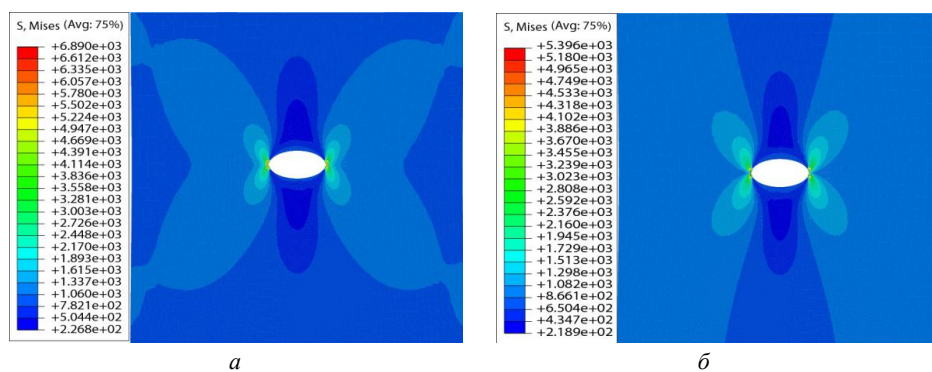


Рис. 4. Распределение интенсивности напряжений в пластине без учета накоплений повреждений (*a*) и с учетом накопления повреждений (*b*)

Fig. 4. Distribution of stress intensities in the plate with no consideration of damage accumulation (*a*), and with the consideration of damage accumulation (*b*)

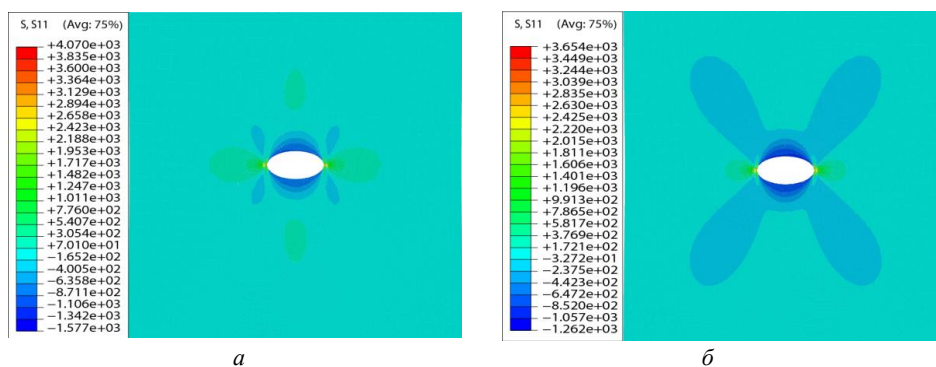


Рис. 5. Распределение компоненты напряжений  $\sigma_{11}$  в пластине без учета накоплений повреждений (*a*) и с учетом накопления повреждений (*b*)

Fig. 5. Distribution of stress component  $\sigma_{11}$  in the plate with no consideration of damage accumulation (*a*), with the consideration of damage accumulation (*b*)

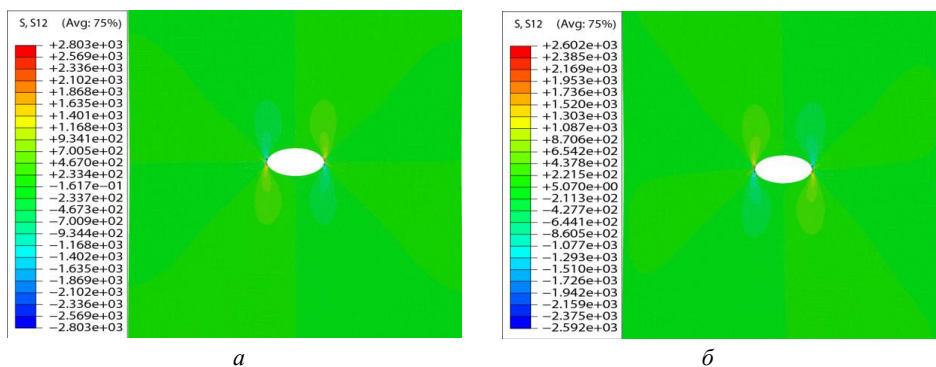


Рис. 6. Распределение компоненты напряжений  $\sigma_{12}$  в пластине без учета накоплений повреждений (*a*) и с учетом накопления повреждений (*b*)

Fig. 6. Distribution of stress component  $\sigma_{12}$  in the plate with no the consideration of damage accumulation (*a*), with the consideration of damage accumulation (*b*)

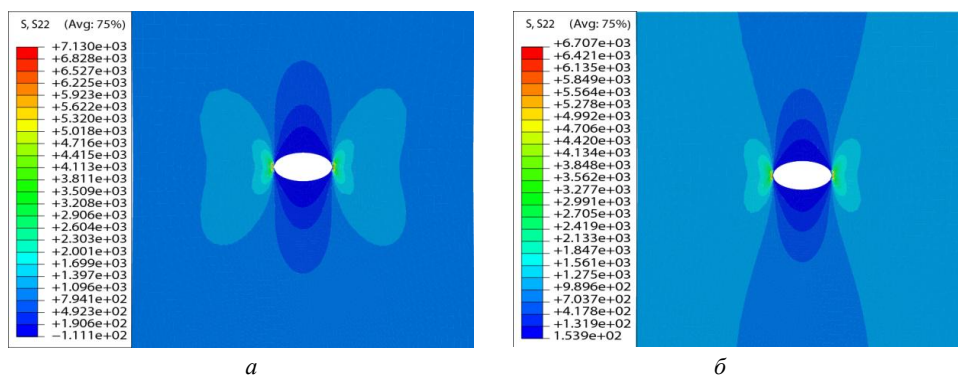


Рис. 7. Распределение компоненты напряжений  $\sigma_{22}$  в пластине без учета накопления повреждений (а) и с учетом накопления повреждений (б)

Fig. 7. Distribution of stress component  $\sigma_{22}$  in the plate: in the plate with no the consideration of damage accumulation (a), with the consideration of damage accumulation (b)

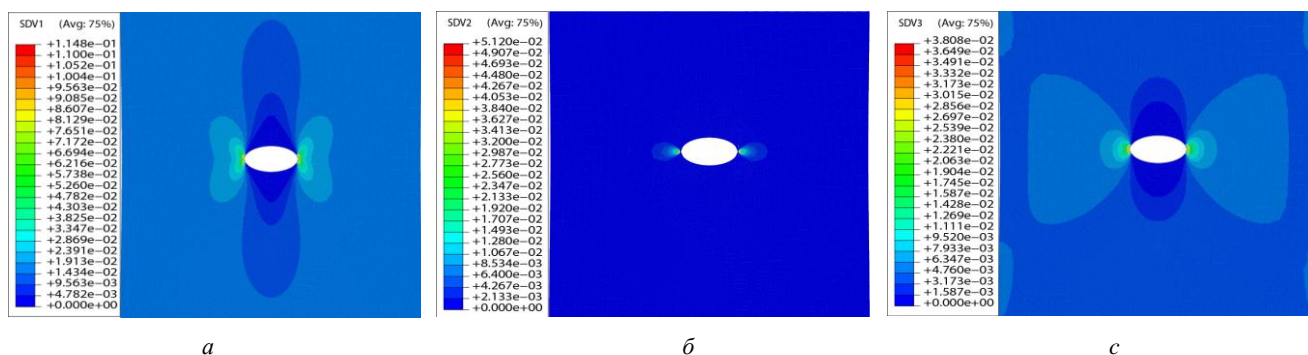


Рис. 8. Распределение компонент тензора поврежденности: а – распределение компоненты  $D_{11}$ ; б – распределение компоненты  $D_{22}$ ; в – распределение компоненты  $D_{33}$

Fig. 8. Distribution of damage tensor components: a – is the distribution of damage component  $D_{11}$ ; b – is damage component  $D_{22}$  distribution; c – is damage component  $D_{33}$  distribution

### 2.3. Распределение поврежденности у вершин наклонной трещины в растягиваемой пластине

Для моделирования смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования в работе была выполнена серия конечно-элементных расчетов для наклонной трещины в растягиваемой по оси ординат пластине.

На рис. 9–11 показаны распределения компонент тензора поврежденности для наклонной под углом  $\alpha = 45^\circ$  трещины. На рис. 12–16 приведены распределения интенсивности напряжений и компонент тензора напряжений в пластине с наклонной трещиной без учета накопления повреждений (слева) и с учетом накопления повреждений (справа). Сравнение результатов расчетов для неповрежденного и поврежденного материалов показало, что учет процессов накопления повреждений приводит к снижению значений компонент тензора напряжений и интенсивности касательных напряжений в образцах с концентраторами напряжений, что хорошо согласуется с аналитическими и численными решениями краевых задач о трещинах

[25, 26]: учет процесса накопления повреждений приводит к ослаблению или полному устранению особенности поля напряжений у вершины трещины в изотропных линейно-упругих телах.

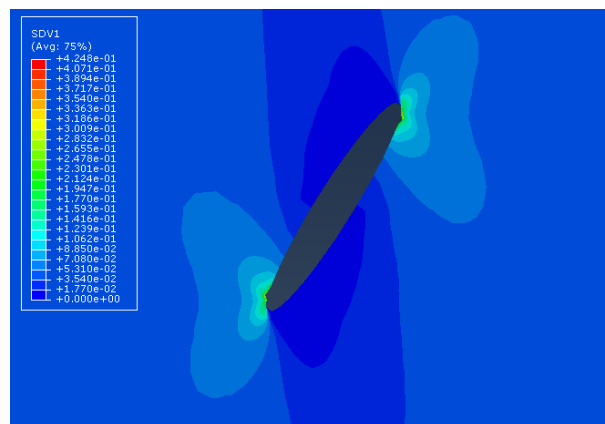


Рис. 9. Распределение компоненты тензора поврежденности  $D_{11}$  в растягиваемой пластине  
Fig. 9. Damage tensor component  $D_{11}$  distribution in the cracked plate under tension



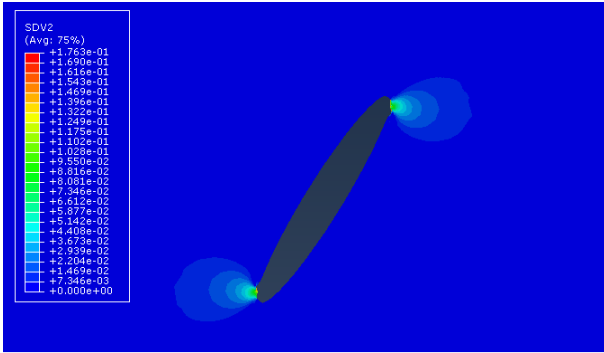


Рис. 10. Распределение компоненты тензора поврежденности  $D_{22}$  в растягиваемой пластине  
 Fig. 10. Damage tensor component  $D_{22}$  distribution in the cracked plate under tension

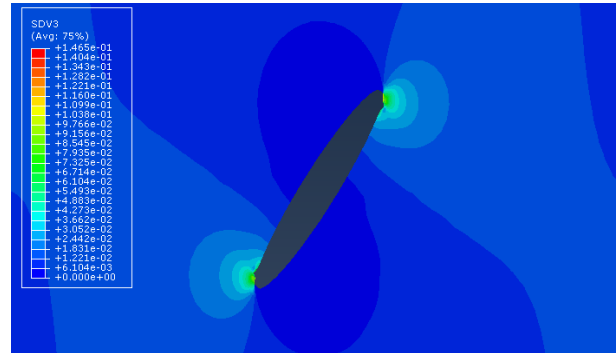
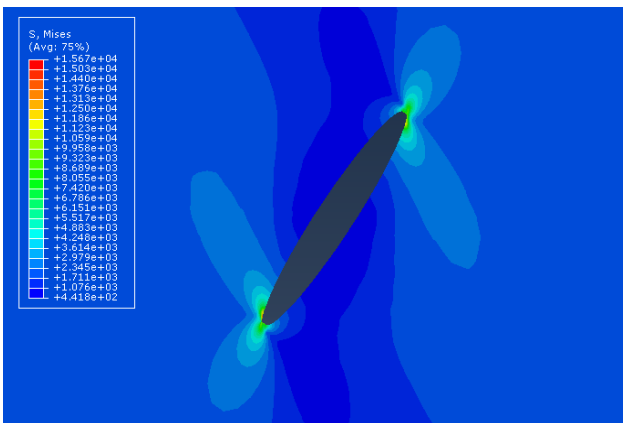
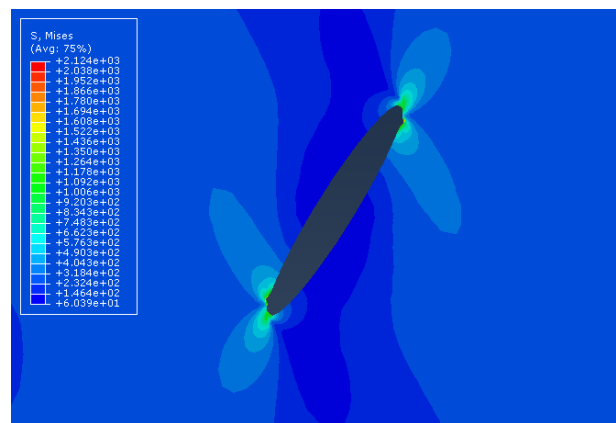


Рис. 11. Распределение компоненты тензора поврежденности  $D_{33}$  в растягиваемой пластине с наклонной трещиной  
 Fig. 11. Damage tensor component  $D_{33}$  distribution in the cracked plate under tension

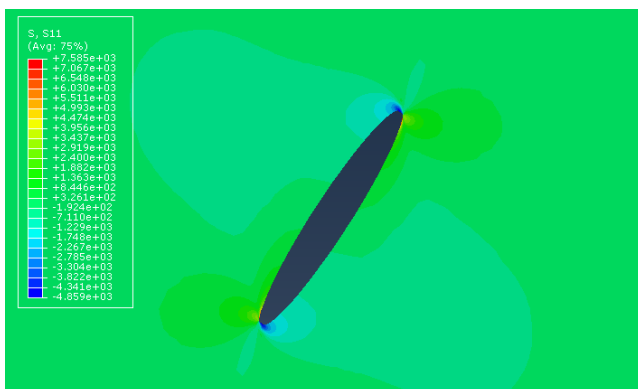


*a*

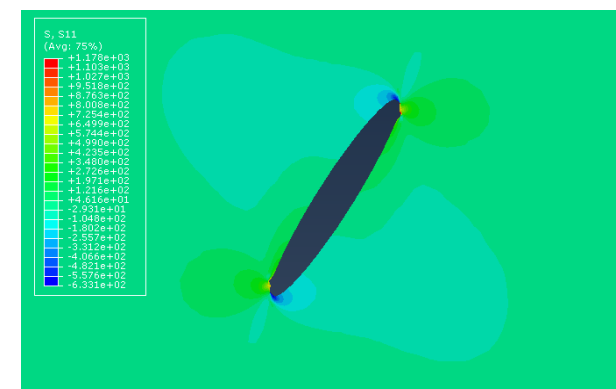


*б*

Рис. 12. Распределение интенсивности напряжений в пластине с наклонной трещиной без учета накопления повреждений (*a*) и с учетом накопления повреждений (*б*)  
 Fig. 12. Distribution of stress intensities in the plate with an inclined crack: with no consideration of damage accumulation (*a*), and with the consideration of damage accumulation (*b*)



*a*



*б*

Рис. 13. Распределение компоненты напряжений  $\sigma_{11}$  в пластине без учета накопления повреждений (*a*) и с учетом накопления повреждений (*б*)  
 Fig. 13. Stress component  $\sigma_{11}$  distribution in the plate: with no consideration of damage accumulation (*a*), and with the consideration of damage accumulation (*b*)

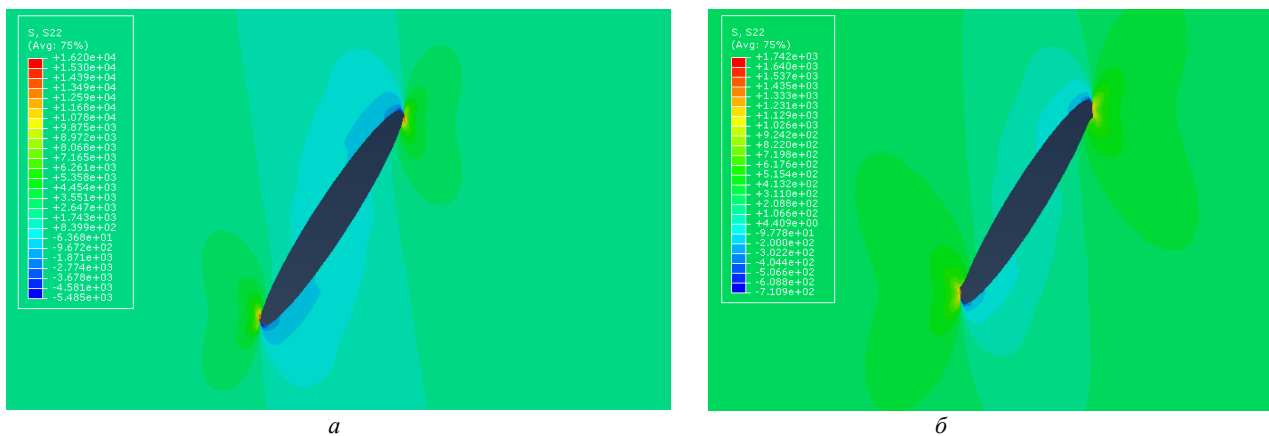


Рис. 14. Распределение компоненты напряжений  $\sigma_{22}$  в пластине без учета накоплений повреждений (а) и с учетом накопления повреждений (б)

Fig. 14. Stress component  $\sigma_{22}$  distribution: with no consideration of damage accumulation (a), and with the consideration of damage accumulation (b)

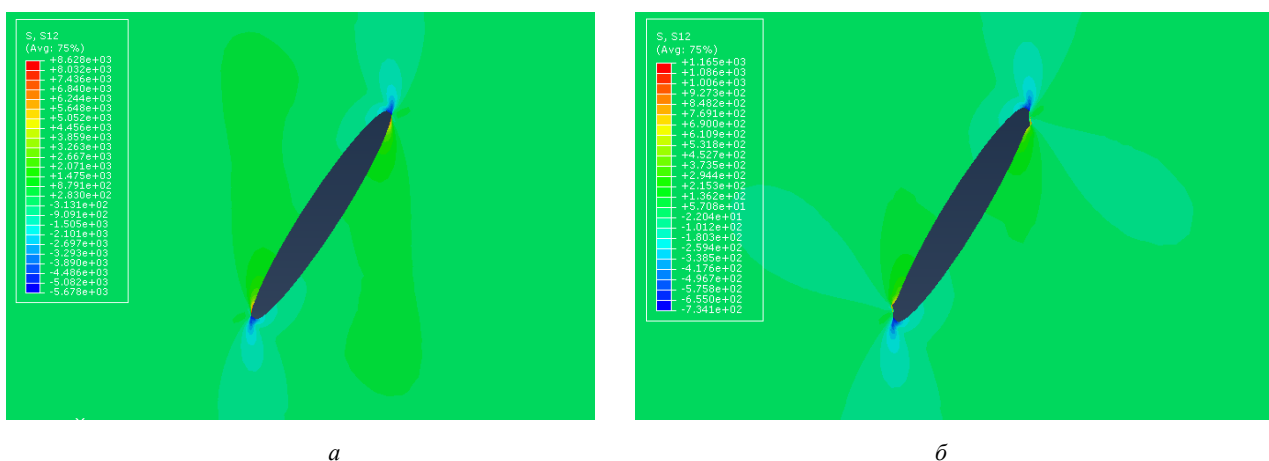


Рис. 15. Распределение компоненты напряжений  $\sigma_{12}$  в пластине без учета накоплений повреждений (а) и с учетом накопления повреждений (б)

Fig. 15. Stress component  $\sigma_{12}$  distribution: with no consideration of damage accumulation (a), and with the consideration of damage accumulation (b)

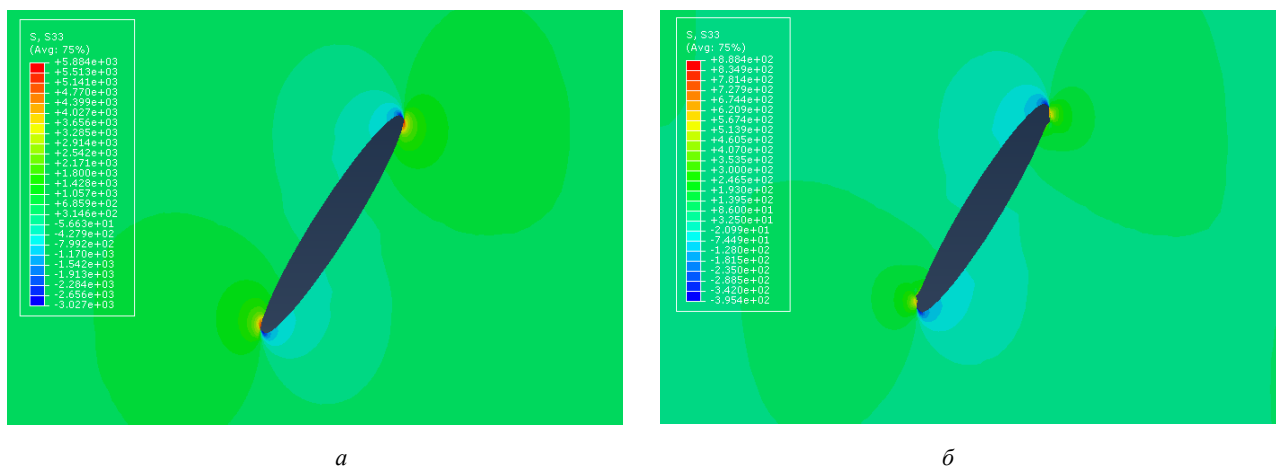


Рис. 16. Распределение компоненты напряжений  $\sigma_{33}$  в пластине без учета накоплений повреждений (а) и с учетом накопления повреждений (б)

Fig. 16. Stress component  $\sigma_{12}$  distribution: with no consideration of damage accumulation (a), and with the consideration of damage accumulation (b)

#### 2.4. Распределение поврежденности у вершины надреза в полудиске

Одним из часто рассматриваемых образцов является полудиск с вертикальным и наклонным надрезом [52–55]. Геометрия образца и система приложенных нагрузок показана на рис. 17.

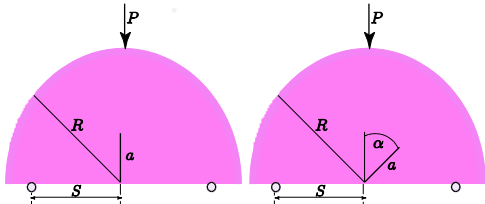


Рис. 17. Схематичное изображение образцов с надрезом для исследования нормального отрыва (а) и смешанного нагружения (б)  
 Fig. 17. General configuration of the semicircular bend (SCB) specimen with a cut for Mode I loading (a) and Mixed Mode loadings (b)

На рис. 17 приняты следующие обозначения:  $P$  – приложенная нагрузка;  $a$  – длина выреза;  $R$  – радиус диска;  $\alpha$  – угол наклона надреза. Меняя угол наклона надреза  $\alpha$  к вертикали, можно менять вид смешанного нагружения от нормального отрыва до нагружений, близких к поперечному сдвигу. В работе выполнена большая серия вычислительных экспериментов на трехточечный изгиб диска с надрезом в полном диапазоне значений угла  $\alpha$ . Результаты вычислений показаны на рис. 18–26. На примере данной конфигурации была исследована зависимость распределения напряжений и поврежденности от вида разбвения, что является характерной особенностью задач механики поврежденности [22]. Проведенные расчеты не показали такой зависимости, и полученные распределения компонент тензора поврежденности (рис. 18–21), и компонент тензора напряжений (рис. 22–26) не зависят от способа разбвения, от вида конечных элементов. В ходе вычислений были

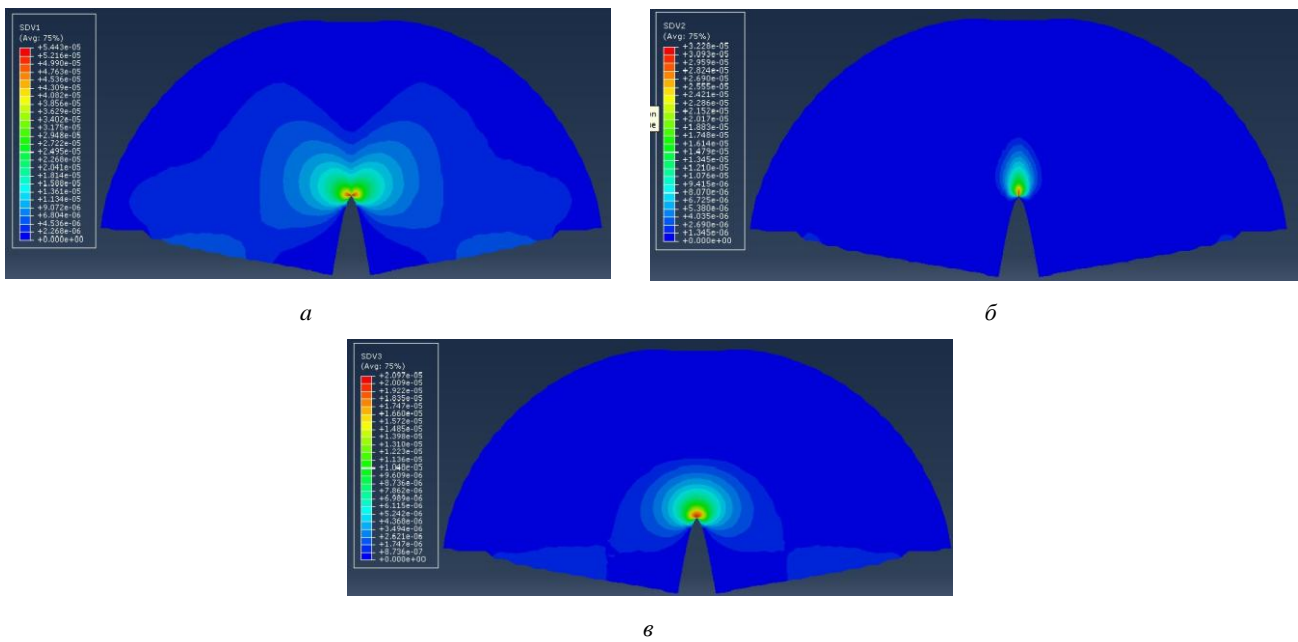


Рис. 18. Распределение компонент тензора поврежденности в диске с надрезом (нормальный отрыв): а – распределение компоненты  $D_{11}$ ; б – распределение компоненты  $D_{22}$ ; в – распределение компоненты  $D_{33}$   
 Fig. 18. Distribution of the anisotropic damage tensor components: a – is damage tensor component  $D_{11}$ ; b – is damage tensor component  $D_{22}$ ; c – is damage tensor component  $D_{33}$ .

проведены расчеты на различных сетках: менялось количество конечных элементов сетки и сравнивались значения искомых величин (компонент тензоров напряжений и поврежденности) в совпадающих точках. Сравнение результатов показало, что измельчение сетки не ведет к изменению вычисленных значений для полей напряжений и поврежденности.

Распределение компонент тензора поврежденности в образце с наклонным под углом надрезом  $\alpha = 30^\circ$  показано на рис. 19–21.

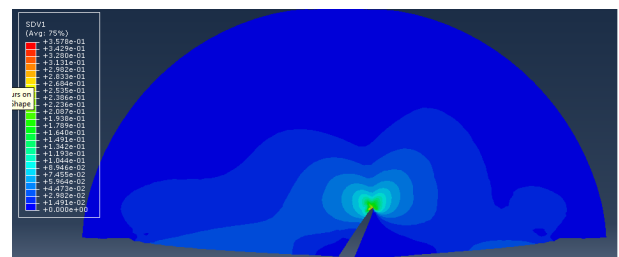


Рис. 19. Распределение компоненты тензора поврежденности  $D_{11}$   
 Fig. 19. Distribution of the anisotropic damage tensor component  $D_{11}$

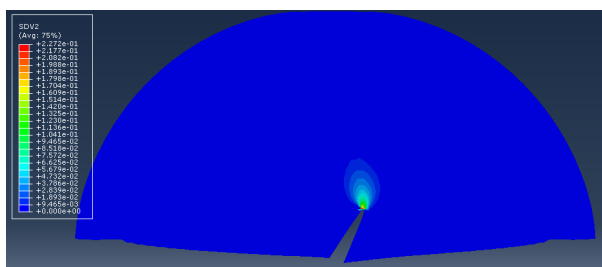


Рис. 20. Распределение компоненты  $D_{22}$

Fig. 20. Distribution of the anisotropic damage tensor component  $D_{22}$

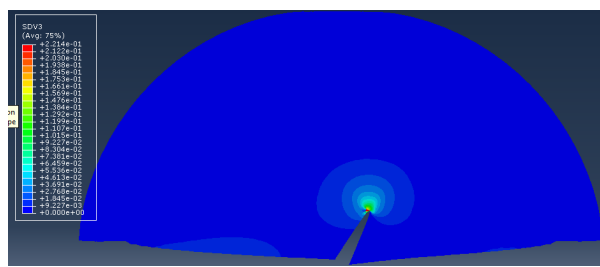
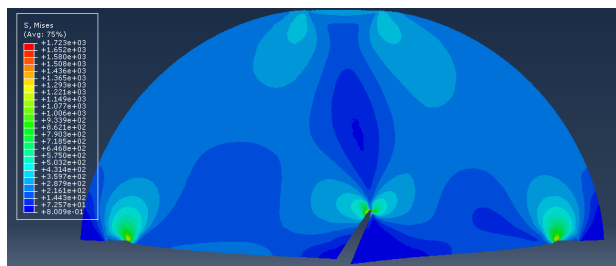
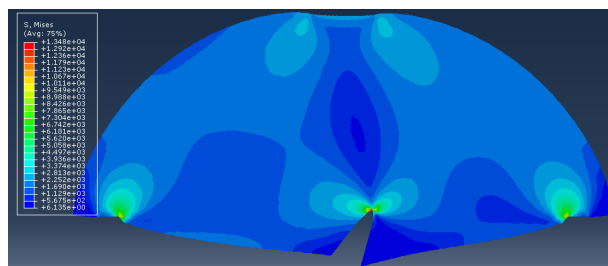


Рис. 21. Распределение компоненты  $D_{33}$

Fig. 21. Distribution of the anisotropic damage tensor component  $D_{33}$



*a*



*b*

Рис. 22. Распределение интенсивности напряжений в полудиске с наклонным надрезом без учета процесса накопления повреждений (*a*) и с учетом процесса накопления повреждений (*b*)

Fig. 22. Distribution of the Mises equivalent stress in the SCB specimen with an inclined cut with no consideration of damage accumulation process (*a*) and with the consideration of damage accumulation processes (*b*)

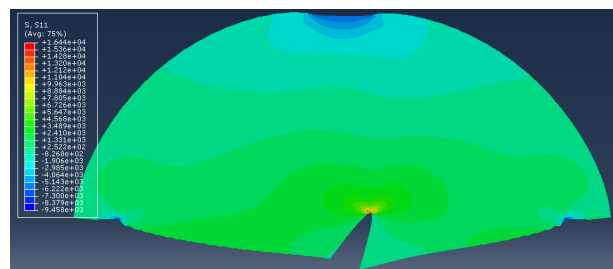


Рис. 23. Распределение компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}$  в полудиске с наклонным под углом  $\alpha = 45^\circ$  надрезом

Fig. 23. Distribution of the stress tensor component  $\sigma_{11}$  in the SCB specimen with an inclined cut with an angle of  $\alpha = 45^\circ$

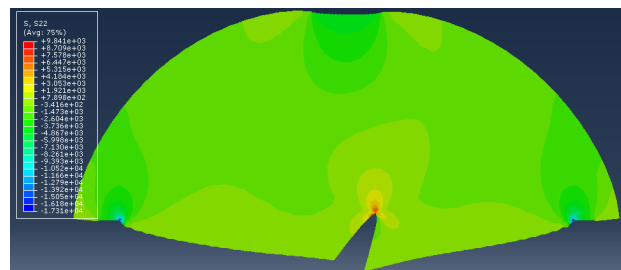
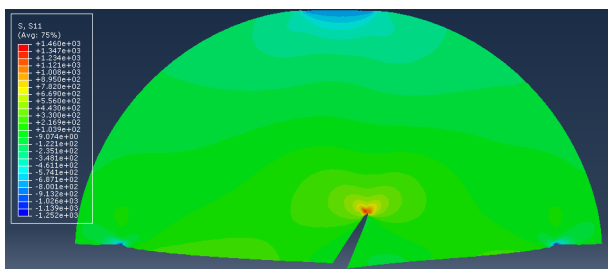


Рис. 24. Распределение компоненты тензора напряжений  $\sigma_{22}$  в полудиске с наклонным под углом  $\alpha = 45^\circ$  надрезом

Fig. 24. Distribution of the stress tensor component  $\sigma_{22}$  in the SCB specimen with an inclined angle of  $\alpha = 45^\circ$

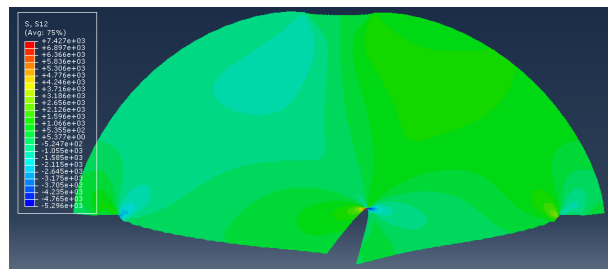
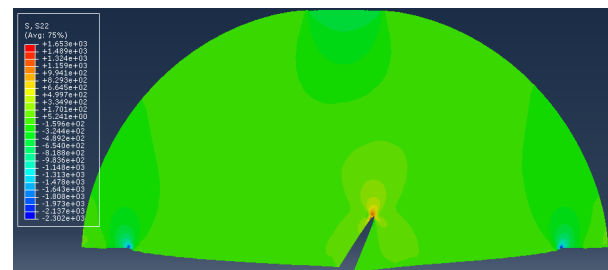
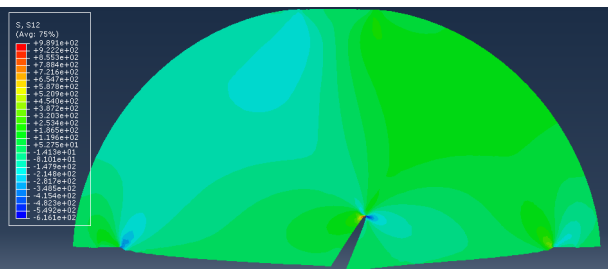


Рис. 25. Распределение компоненты тензора напряжений  $\sigma_{12}$  в полудиске с наклонным под углом  $\alpha = 45^\circ$  надрезом

Fig. 25. Distribution of the stress tensor component  $\sigma_{12}$  in the SCB specimen with an inclined angle of  $\alpha = 45^\circ$



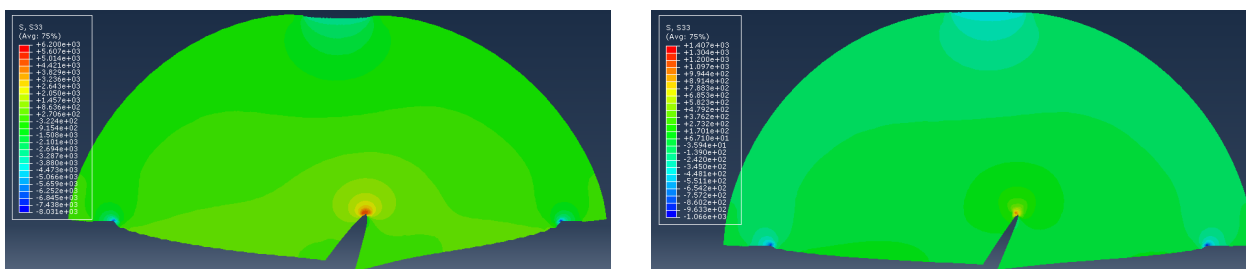


Рис. 26. Распределение компоненты тензора напряжений  $\sigma_{33}$  в полудиске с наклонным под углом  $\alpha = 45^\circ$  надрезом

Fig. 26. Distribution of the stress tensor component  $\sigma_{33}$  in the SCB specimen with an inclined angle of  $\alpha = 45^\circ$

### Выводы и обсуждение результатов

В настоящей работе описана и реализована процедура расчета поля анизотропной поврежденности в образцах с трещинами посредством моделирования определяющих уравнений связанной постановки задачи в связке упругость–поврежденность с помощью модели анизотропной поврежденности. В конечно-элементном комплексе SIMULIA Abaqus с помощью пользовательской процедуры UMAT реализована математическая модель материала с включенными компонентами тензора поврежденности второго ранга. Учтен анизотропный характер накопления повреждений в образцах с различной геометрией и различными системами нагрузок: рассмотрены пластина с центральной горизонтальной и наклонной трещиной и полудиск с вертикальным и наклонными надрезами. Получены и проанализированы зоны активного накопления повреждений вблизи кончика трещины и надреза для целой серии экспериментальных образцов с дефектами в условиях смешанного нагружения в полном диапазоне смешанных форм деформирования от чистого нормального отрыва до нагружений, близких к поперечному сдвигу. На основании проведенных расчетов для различных образцов с трещинами и надрезами показано, что накопление поврежденности приводит к снижению уровня напряжений вблизи вершины трещины, что хорошо согласуется с имеющимися аналитическими и численными решениями.

### Библиографический список

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – С. 26–31.
2. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 5–7.
3. Работнов Ю.Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1991. – 196 с.
4. Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. – М.: Изд-во МФТИ, 2008. – 215 с.
5. Kukudzhyanov V.N. Numerical Continuum Mechanics. – Berlin: De Gruyter, 2012. – 425 p.
6. Кукуджанов В.Н. Связанные модели упругопластичности и поврежденности и их интегрирование // Изв. РАН. МТТ. – 2006. – № 6. – С. 103–135.

На основании проведенных вычислительных экспериментов можно заключить, что, по всей видимости, развитие практических приложений механики поврежденности будет идти по пути разработки комплексов вычислительных программ, позволяющих: 1) оценить напряженно-деформированное состояние и поле повреждений в элементах конструкции; 2) определить конфигурацию зон локализаций необратимых деформаций и зон активного накопления повреждений, что даст возможность оптимизировать массогабаритные характеристики элементов конструкций. Реализация имитационного (компьютерного) моделирования на основе экспериментальных и теоретических исследований для модельных и используемых в теплоэнергетике, авиа- и автомобилестроении элементов конструкций позволит выработать и сформулировать критерии разрушения, учитывающие изменение свойств материала в процессе работы элемента конструкции, дать современные варианты ремонтных технологий.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-08-00571).

### Acknowledgements

The work has been carried out with the financial support from the Russian Foundation for Basic Research (Grant № 16-08-00571).

7. Fracture of a borosilicate glass under triaxial tension / V. Doquet, N. Ben Ali, A. Constantinescu, X. Boutillon // Mechanics of Materials. – 2013. – Vol. 57. – P. 15–29.
8. Experimental and numerical study of crack healing in a nuclear glass / V. Doquet, N. Ben Ali, E. Chabert, F. Bouyer // Mechanics of Materials. – 2015. – Vol. 80. – P. 145–162.
9. Modeling of thermal shock-induced damage in a borosilicate glass / M. Dube, V. Doquet, A. Constantinescu, D. George, Y. Remond, S. Ahzi // Mechanics of Materials. – 2010. – Vol. 42. – P. 863–872.
10. Sun X., Khaleel M.A. Modeling of glass fracture damage using continuum damage mechanics–static spherical indentation // International Journal of Damage Mechanics – 2004. – Vol. 13. – P. 263–284.
11. Sun X., Khaleel M.A., Davies R.W. Modeling of stone-impact resistance of monolithic glass ply using continuum damage

- mechanic // International Journal of Damage Mechanics. – 2005. – Vol. 14. – P. 165–178.
12. Computational modeling of static indentation – induced damage in glass / J. Ismail, F. Zairi, M. Nait-Abdelaziz, Z. Azari // Computational Materials Science. – 2008. – Vol. 42. – P. 407–415.
13. Analysis of damage in laminated automotive glazing subjected to simulated head impact / S. Zhao, L.R. Dharani, L. Chai, S. Barbat // Engineering Failure Analysis. – 2006. – Vol. 13. – P. 582–597.
14. Damage interaction and angle effects on the erosion behavior of soda-lime-silica glass / Q. Jiang, J. Ismail, F. Zairi, M. Nait-Abdelaziz, Z. Qu, Z. Azari, X. Liu // International Journal of Damage Mechanics. – 2017.
15. Experimental and numerical investigations on erosion damage in glass by impact of small-sized particles / J. Ismail, Zaïri Fahmi, M. Nait-Abdelaziz, S. Bouzid, Z. Azari // Wear. – 2011. – Vol. 271. – P. 817–826.
16. Damage mechanisms in bioactive glass matrix composites under uniaxial compression / Q. Jiang, J. Ismail, F. Zairi, Z. Qu, X. Liu, F. Zairi // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2018. – Vol. 79. – P. 264–272.
17. Извеков О.Я., Крупеник А.М. Решение связанных задач континуального разрушения термо- и пороупругих сред в SIMULIA ABAQUS [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.thesis.com/software/abaqus/abaqus-exp.php>.
18. Извеков О.Я., Кондауров В.И. Модель пористой среды с упругим трещиноватым скелетом // Изв. РАН. Физика Земли. – 2009. – № 4. – С. 31–42.
19. Кондауров В.И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды. – М.: Изд-во МФТИ, 2007. – 310 с.
20. Извеков О.Я., Кондауров В.И. О рассеянном разрушении пористых материалов с хрупким скелетом // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 3. – С. 164–187.
21. Voyiadjis G.Z. Handbook of Damage Mechanics. Nano to Macro Scale for Materials and Structures. – Dordrecht: Springer, 2014. – 1000 p.
22. Murakami S. Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. – Dordrecht: Springer, 2012. – 423 p.
23. Dormieux L., Kondo D. Micromechanics of Fracture and Damage (Mechanical Engineering and Solid Mechanics: Micromechanics Set). – Hebeken: Wiley-ISTE, 2016. – 312 p.
24. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 2014. – 752 с.
25. Степанова Л.В., Игонин С.А. Параметр поврежденности Ю.Н. Работнова и описание длительного разрушения: результаты, современное состояние, приложение к механике трещин // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56, № 2(330). – С. 133–145.
26. Степанова Л.В. О собственных значениях в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями// Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 1(287). – С. 173–180.
27. Степанова Л.В., Яковлева Е.М. Асимптотика собственных значений нелинейной задачи на собственных значениях, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях смешанного нагружения // Сиб. журн. вычислительной математики. – 2016. – Т. 19, № 2. – С. 207–222.
28. Stepanova L., Yakovleva E. Stress-strain state near the crack tip under mixed-mode loading: Asymptotic approach and numerical solutions of nonlinear eigenvalue problems// AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1785. – 030030.
29. Степанова Л.В., Адылина Е.М. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения// Журнал прикладной механики и технической физики. – 2014. – Т. 55, № 5 (327). – С. 181–194.
30. Степанова Л.В., Яковлева Е.М. Смешанное деформирование пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 3. – С. 129–162.
31. Stepanova L., Mironova E. Intermediate Asymptotic behavior of the stress and damage fields in the vicinity of the mixed-mode crack tip under creep regime // Ceur Workshop Proceedings. – 2017. – Vol. 1904. – P. 141–150.
32. Моделирование локально-функциональных свойств материала, поврежденного полями дефектов / Е.В. Ломакин, С.А. Лурье, П.А. Белов, Л.Н. Рабинский // Докл. Акад. наук. – 2017. – Т. 472, № 3. – С. 282–285.
33. Wen Z.X., Hou N.X., Yue Z.F. Creep damage and crack initiation behaviour of nickel-base single crystalline superalloys compact tension specimen with a void ahead of crack tip // Materials Science and Engineering A. – 2009. – Vol. 510-511. – P. 284–288.
34. Development of a new nonlinear numerical material model for woven composite materials accounting for permanent deformation and damage / O. Cousigne, D. Moncayo, D. Coutellier, P. Camanho, H. Naceur, S. Hampel // Composite Structures. – 2013. – Vol. 106. – P. 601–614.
35. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. – М.: Наука: Физматлит, 1997. – 288 с.
36. Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.С. Поврежденность и разрушение: обзор экспериментальных работ // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 3. – С. 11–24.
37. Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.С. Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 4. – С. 68–87.
38. Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.С. Поврежденность и разрушение: модели, основанные на физических теориях пластичности // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 6. – С. 12–23.
39. Barbero E.J., Shahbazi M. Determination of material properties for ANSYS progressive damage analysis of laminated composites // Composite Structures. – 2017. – Vol. 176. – P. 768–779.
40. Wan Y., Sun B., Gu B. Multi-scale structure modeling of damage behaviors of 3D orthogonal woven composite materials subject to quasi-static and high strain rate compressions // Mechanics of Materials. – 2016. – Vol. 94. – P. 1–25.
41. Van Dongen B., Van Oostrum A., Zarouchas D. A blended continuum damage and fracture mechanics method for progressive damage analysis of composite structures using XFEM // Composite Structures. – 2018. – Vol. 184. – P. 512–522.
42. Jin W., Arson C. Nonlocal enrichment of a micromechanical damage model with tensile softening: Advantages and limitations // Computers and Geotechnics. – 2018. – Vol. 94. – P. 196–206.
43. Meng Q., Wang Z. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review // Engineering Fracture Mechanics. – 2016.
44. Fengxia Q. Abaqus implementation of creep failure in polymer matrix composites with transverse isotropy. – Ph. D. Thesis. 2005. – 90 p.
45. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир, 1986. – 360 с.

46. Vershinin V.V. A correct form of Bai-Wierzbicki plasticity model and its extension for strain rate and temperature dependence // *International Journal of Solids and Structures*. – 2017. – Vol. 126–127. – P. 150–162.

47. Gao Z., Zhang L., Yu W. A nonlocal continuum damage model for brittle fracture // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2018. – Vol. 189. – P. 481–500.

48. Hyakutake H., Yamamoto T. Damage near the notch root of notched FRP plates in static load-evaluation of damage by luminance-measuring system // *Transactions on Engineering Sciences*. – 1996. – Vol. 13. – P. 417–424.

49. Strength degradation and stress analysis of composite plates with circular, square and rectangular notches using digital image correlation / A. Khechari, A. Tati, B. Guerira, A. Guettala, P.M. Mohite // *Composite Structures*. – 2018. – Vol. 185. – P. 699–715.

50. Saeedi M.R., Morovvati M.R., Alizadeh-Vaghasloo Y. Experimental and numerical study of mode-I and mixed-mode fracture of ductile U-notched functionally graded materials // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2018. – P. 1–33.

## References

1. Kachanov L.M. O vremeni razrusheniia v usloviakh polzuchesti [On creep rupture time]. *Izvestiia akademii nauk SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, 1958, pp. 26-31.

2. Rabotnov Y.N. O mekhanizme dlitel'nogo razrusheniia [On a mechanism of delayed failure] *Moscow, Izdatel'stvo Akademii nauk SSSR. Voprosy prochnosti materialov i konstruktsii*, 1959, pp. 5-7.

3. Rabotnov Y.N. Izbrannye trudy. Problemy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela [Selected works. Problems of Solid Mechanics]. *Moscow, Nauka*, 1991, 196 p.

4. Kukudzhanov V.N. Kompiuternoe modelirovanie deformirovaniia, povrezhdaemosti i razrusheniia neuprugikh materialov i konstruktsii [Computer modeling of deformation, damage and fracture of non-elastic materials and structures]. *Moscow, Moskovskii fiziko-tekhnicheskii institut*, 2008, 215 p.

5. Kukudzhanov V.N. Numerical Continuum Mechanics. *Berlin, De Gruyter*. 2012, 425 p.

6. Kukudzhanov V.N. Sviazannye modeli uprugoplastichnosti i povrezhdennosti i ikh integrirovaniie [Couple models of elastoplasticity and damage and their integration]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2006, no.6, pp. 103–135.

7. Doquet V., Ben Ali N., Constantinescu A., Boutillon X. Fracture of a borosilicate glass under triaxial tension. *Mechanics of materials*, 2013, vol. 57, pp. 15-29.

8. Doquet V., Ben Ali N., Chabert E., Bouyer F. Experimental and numerical study of crack healing in a nuclear glass. *Mechanics of Materials*, 2015, vol. 80, pp. 145-162.

9. Dube M., Doquet V., Constantinescu A., George D., Remond Y., Ahzi S. Modeling of thermal shock-induced damage in a borosilicate glass. *Mechanics of Materials*, 2010, vol. 42, pp. 863-872.

10. Sun X., Khaleel M.A. Modeling of glass fracture damage using continuum damage mechanics—static spherical indentation. *International Journal of Damage Mechanics*, 2004, vol. 13, pp. 263–284.

11. Sun X., Khaleel M.A., Davies R.W. Modeling of stone-impact resistance of monolithic glass ply using continuum damage mechanics. *International Journal of Damage Mechanics*, 2005, vol. 14, pp. 165–178.

12. Ismail J., Zairi F., Nait-Abdelaziz M., Azari Z. Computational modeling of static indentation – induced damage in glass. *Computational Materials Science*, 2008, vol. 42, pp. 407-415.

51. Ломакин Е.В., Федулов Б.Н. Растяжение полосы, ослабленной вырезами с круговым основанием, в условиях плоской деформации из материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. – 2013. – № 4. – С. 80–87.

52. Fakhri M., Haghghat Kharrazi E., Aliha M.R.M. Mixed mode tensile – In plane shear fracture energy determination for hot mix asphalt mixtures under intermediate temperature conditions // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2018. – Vol. 192. – P. 98–113.

53. Malikova L., Vesely V., Seitl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria // *International Journal of Fatigue*. – 2016. – Vol. 89. – P. 99–107.

54. Mirsayar M.M., Razmi A., Berto F. Tangential strain-based criteria for mixed-mode I/II fracture toughness of cement concrete // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2017. – P. 1–9.

55. EMTSN criterion for evaluating mixed mode I/II crack propagation in rock materials / M.M. Mirsayar, A. Razmi, M.R.M. Aliha, F. Berto // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2018. – Vol. 190. – No. 1. – P. 186–197.

13. Zhao S., Dharani L.R., Chai L., Barbat S., Analysis of damage in laminated automotive glazing subjected to simulated head impact. *Engineering Failure Analysis*, 2006, vol. 13, pp. 582-597.

14. Jiang Q., Ismail J., Zairi F., Nait-Abdelaziz M., Azari Z., Liu X. Damage interaction and angle effects on the erosion behavior of soda-lime-silica glass. *International Journal of Damage Mechanics*. 2017.

15. Ismail J., Zaïri Fahmi, Naït-Abdelaziz M., Bouzid S., Azari Z. Experimental and numerical investigations on erosion damage in glass by impact of small-sized particles. *Wear*. 2011, vol. 271, pp. 817-826.

16. Jiang Q., Ismail J., Zairi F., Qu Z., Liu X., Zairi F. Damage mechanisms in bioactive glass matrix composites under uniaxial compression. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2018, vol. 79, pp. 264-272.

17. Izvekov O.Ya., Krupenik A.M. Reshenie sviazannykh zadach kontinual'nogo razrusheniia termo- i porouprugikh sred v simulia ABAQUS [Solutions of coupled problems of continuum fracture of porous and poro-elastic media in SIMULIA ABAQUS]/<http://www.thesis.com/software/abaqus/abaqus-exp.php>.

18. Izvekov O.Ya., Kondaurov V.I. Model poristoi sredy s uprugim treshchinovatyim skeletom [Model of a porous medium with an elastic fractures skeleton]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Fizika Zemli*, 2009, no. 4, pp. 31-42.

19. Kondaurov V.I. Mekhanika i termodinamika nasyshchennoi poristoi sredy [Mechanics and thermodynamics of a saturated porous medium]. *Moscow, Moskovskii fiziko-tekhnicheskii institut*, 2007, 310 p.

20. Izvekov O.Ya., Kondaurov V.I. o rasseiannom razrushenii poristykh materialov s khrupkim skeletom [Scattered fracture of porous materials with brittle skeleton]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2010, no. 3, pp. 164-187.

21. Voyiadjis G.Z. Handbook of Damage Mechanics. Nano to Macro Scale for Materials and Structures. *Dordrecht, Springer*, 2014, 1000 p.

22. Murakami S. Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. *Dordrecht, Springer*, 2012, 423 p.

23. Dormieux L., Kondo D. Micromechanics of Fracture and Damage (Mechanical Engineering and Solid Mechanics: Micro-mechanics Set). *Hebeken, Wiley-ISTE*, 2016, 312 p.

24. Rabotnov Y.N. Polzuchest elementov konstruksii [Creep in structures]. *Moscow, Nauka*, 2014, 752 p.
25. Stepanova L.V., Igonin S.A. Rabotnov damageparameter and description of delayed fracture: Results, current status, application to fracture mechanics, and prospects. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, Vol. 56(2), pp. 282-292.
26. Stepanova L.V. Eigenvalues of the antiplane-shear crack problem for a power-law material. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, Vol. 49(1), pp. 142-147.
27. Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotics of eigenvalues of the nonlinear eigenvalue problem arising from the near mixed-mode crack-tip stress-strain field problems. *Numerical Analysis and Applications*, 2016, vol. 9(2), pp. 159-170.
28. Stepanova L., Yakovleva E. Stress-strain state near the crack tip under mixed-mode loading: Asymptotic approach and numerical solutions of nonlinear eigenvalue problems. *AIP Conference Proceedings*, 2016, vol. 1785, 030030.
29. Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack under mixed loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55(5), pp. 885-895.
30. Stepanova, L.V., Yakovleva, E.M. Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014. no.3, pp. 129-162.
31. Stepanova L., Mironova E. Intermediate Asymptotic behavior of the stress and damage fields in the vicinity of the mixed-mode crack tip under creep regime. *Ceur Workshop Proceedings*, 2017, vol. 1904, pp. 141-150.
32. Lomakin E.V. Lurie S.A., Belov P.A., Rabinskii L.N. Modeling of the locally-functional properties of the material damaged by fields of defects. *Doklady Physics*, 2017, vol. 62, no.1, pp. 46-49.
33. Wen Z.X., Hou N.X., Yue Z.F. Creep damage and crack initiation behaviour of nickel-base single crystalline superalloys compact tension specimen with a void ahead of crack tip. *Materials Science and Engineering A*, 2009, vol. 510-511, pp. 284-288.
34. Cousigne O., Moncayo D., Coutellier D., Camanho P., Naceur H., Hampel S. Development of a new nonlinear numerical material model for woven composite materials accounting for permanent deformation and damage. *Composite Structures*, 2013, vol. 106, pp. 601-614.
35. Wildemann V.E., Sokolkin Y.V., Tashkinov A.A. Mekhanika neuprugogo deformirovaniia i razrusheniia kompozitsionnykh materialov [Mechanics of nonelastic deformation and fracture of composite materials]. *Moscow, Nauka, Fizmatlit*, 1997, 288 p.
36. Volegov P.S., Gribov D.S., Trusov P.V. Damage and fracture: review of experimental studies. *Physical mesomechanics*, 2015, vol. 18, no. 3, pp. 11-24.
37. Volegov P.S., Gribov D.S., Trusov P.V. Damage and fracture: classical continuum theories. *Physical mesomechanics*, 2015, vol. 18, no.4, pp. 68-87.
38. Volegov P.S., Gribov D.S., Trusov P.V. Damage and fracture: crystal plasticity models. *Physical mesomechanics*, 2015, vol. 18, no. 6, pp. 12-23.
39. Barbero E.J., Shahbazi M. Determination of material properties for ANSYS progressive damage analysis of laminated composites. *Composite Structures*, 2017, vol. 176, pp. 768-779.
40. Wan Y., Sun B., Gu B. Multi-scale structure modeling of damage behaviors of 3D orthogonal woven composite materials subject to quasi-static and high strain rate compressions. *Mechanics of Materials*, 2016, vol. 94, pp. 1-25.
41. Van Dongen B., Van Oostrum A., Zarouchas D. A blended continuum damage and fracture mechanics method for progressive damage analysis of composite structures using XFEM. *Composite Structures*, 2018, vol. 184, pp. 512-522.
42. Jin W., Arson C. Nonlocal enrichment of a micromechanical damage model with tensile softening: Advantages and limitations. *Computers and Geotechnics*, 2018, vol. 94, pp. 196-206.
43. Meng Q., Wang Z. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review. *Engineering Fracture Mechanics*, 2016.
44. Fengxia Ouyang Abaqus implementation of creep failure in polymer matrix composites with transverse isotropy. *Ph. D. Thesis*. 2005, 90 p.
45. Boyle J.T., Spence J. Stress analysis for creep. *London, Butterworths*, 1986, 360 p.
46. Vershinin V.V. A correct form of Bai-Wierzbicki plasticity model and its extension for strain rate and temperature dependence. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, vol. 126-127, pp. 150-162.
47. Gao Z., Zhang L., Yu W. A nonlocal continuum damage model for brittle fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, vol. 189, pp. 481-500.
48. Hyakutake H., Yamamoto T. Damage near the notch root of notched FRP plates in static load-evaluation of damage by luminance-measuring system. *Transactions on Engineering Sciences*, 1996, vol. 13, pp. 417- 424.
49. Khechari A., Tati A., Guerira B., Guettala A., Mohite P.M. Strength degradation and stress analysis of composite plates with circular, square and rectangular notches using digital image correlation. *Composite Structures*, 2018, vol. 185, pp. 699-715.
50. M.R. Saeedi, M.R. Morovvati, Y. Alizadeh-Vaghasloo Experimental and numerical study of mode-I and mixed-mode fracture of ductile U-notched functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, pp.1-33.
51. Lomakin E.V., Fedulov B.N. Plane strain extension of a strip made of a material with stress state type dependent properties and weakened by cuts with circular base. *Mechanics of Solids*, 2013, vol. 48, no. 2, pp. 424-430.
52. Fakhri M., Haghight Kharrazi E., Aliha M.R.M. Mixed mode tensile – In plane shear fracture energy determination for hot mix asphalt mixtures under intermediate temperature conditions. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, vol. 192, pp. 98-113.
53. Malikova L., Vesely V., Seitl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria. *International Journal of Fatigue*, 2016, vol. 89, pp. 99-107.
54. Mirsayar M.M., Razmi A., Berto F. Tangential strain-based criteria for mixed-mode I/II fracture toughness of cement concrete. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2017, pp. 1-9.
55. Mirsayar M.M., Razmi A., Aliha M.R.M., Berto F. EMTSN criterion for evaluating mixed mode I/II crack propagation in rock materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, vol. 190, no. 1, pp. 186-197.