



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.09

УДК 532.3; 532.5

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ТРУБОПРОВОДА ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

А.Г. Хакимов

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук, Уфа, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 26 июня 2018 г.  
Принята: 18 сентября 2018 г.  
Опубликована: 08 октября 2018 г.

#### Ключевые слова:

трубопровод, несжимаемая жидкость, давление, движение жидкости по трубопроводу, упругая неустойчивость, гидродинамическая неустойчивость, взаимодействие неустойчивостей, статическое нагружение, критическое усилие сжатия.

### АННОТАЦИЯ

В гидроупругих системах может иметь место одновременное проявление упругих и гидродинамических неустойчивостей и их взаимодействие. Рассматривается взаимное влияние изгиба трубопровода, внутреннего и внешнего давления, действия сжимающей силы и течения жидкости с заданной плотностью по трубопроводу. Тонкий упругий трубопровод закреплен на заземленных скользящих опорах, причем опоры не препятствуют течению жидкости внутри трубопровода вдоль его оси. Вне трубопровода находится покоящаяся жидкость. На опорах прогиб и угол поворота равны нулю. Используются допущения о несжимаемости срединной линии трубопровода, идеальности и несжимаемости жидкостей. Трубопровод подвержен продольному сжатию. Малость инерционных сил обуславливается относительно медленным изменением возмущений при медленном изменении внешних воздействий (сил сжатия трубопровода, гидростатических сил, скорости движения жидкости в трубопроводе). Внешние воздействия могут быть как независимыми друг от друга, так и связанными. Статическое взаимное влияние указанных неустойчивостей называется взаимодействием неустойчивостей трубопровода. Получены линеаризованное уравнение изгиба трубопровода и критическое значение сжимающей трубопровод силы, которое представляет собой обобщение классического критического значения сжимающей трубопровод силы в задаче Эйлера за счет действия давлений внутри и вне трубопровода, движения жидкости внутри трубопровода. Изучено статическое взаимодействие неустойчивостей в зависимости от сжимающей трубопровод силы, внутреннего и внешнего давления, скорости движения жидкости. Ввиду большого количества входных параметров может быть выделено множество частных случаев, представляющих самостоятельное значение. Некоторые из них рассмотрены здесь. Найдены области изменения этих параметров, когда происходят стабилизация и дестабилизация прямолинейной формы. Изгибная жесткость трубопровода, растягивающие силы, внешнее гидростатическое давление стабилизируют, а сжимающие силы, внутреннее гидростатическое давление, движение жидкости с любыми скоростями внутри трубопровода дестабилизируют его.

© ПНИПУ

© Хакимов Аким Гайфуллинович – к.ф.-м.н., доц., e-mail: [hakimov@anrb.ru](mailto:hakimov@anrb.ru), ORCID: [0000-0003-4093-5380](https://orcid.org/0000-0003-4093-5380).

Akim G. Khakimov – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher, e-mail: [hakimov@anrb.ru](mailto:hakimov@anrb.ru), ORCID: [0000-0003-4093-5380](https://orcid.org/0000-0003-4093-5380).



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

# INTERACTIONS OF PIPE INSTABILITIES UNDER STATIC LOADING

A.G. Khakimov

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 26 June 2018  
Accepted: 18 September 2018  
Published: 08 October 2018

### Keywords:

pipe, incompressible fluid, pressure, movement of fluid on the pipeline, elastic interaction, hydrodynamic instabilities, interaction instabilities, static loading, critical effort of compression, pipeline, incompressible liquid, pressure, movement of liquid along the pipeline, elastic instability, hydrodynamic instability, interaction of instability, static loading, critical compression force.

## ABSTRACT

Hydroelastic systems can be characterized by a simultaneous manifestation of elastic and hydrodynamic instabilities and their interaction. Mutual effects of pipe bending, internal and external pressures, the action of compression force and fluid with a set density flowing along the pipe are under consideration. A thin elastic pipe is fixed on clamped sliding supports. In this case the supports do not hinder the flow of fluid travelling inside the pipe along its axis. Outside the pipe there is the fluid at rest. At the supports, the pipe bending and rotation angle are equal to zero. Assumptions are made regarding the incompressibility of the pipe midline and also the ideality and incompressibility of the fluids. The pipe is subjected to longitudinal compression. The smallness of inertial forces is conditioned by a relatively slow change of disturbances under slowly changing external effects (compressive forces in the pipe, hydrostatic forces, velocity of fluid motion in the pipe). External effects can be both independent and interconnected with each other. Here, the static mutual influence between those instabilities is called the instability interaction in the pipeline. We have obtained the linearized equation of the pipe bend and the critical value of the force that squeezes the pipe, which represents a generalization of the classical critical value for the static longitudinal compressive force acting on the pipe in the Euler problem due to the action of pressures inside and outside the pipe and the fluid motion inside the pipe. The investigation is focused on static instability interactions depending on the compression force in the pipe, internal and external pressures and fluid velocity. Given the large number of input parameters, it is possible to identify a great number of particular cases being important in their own right. Some of them are considered here. The domains of change for these parameters are determined by the occurrence of stabilization and destabilization of the rectilinear shape. Bending rigidity, tensile forces and external hydrostatic pressure stabilize the pipe. By contrast, compressive forces, internal hydrostatic pressure and fluid movement inside the pipe at any velocity have a destabilizing effect.

© PNRPU

## Введение

В гидроупругих системах одновременно происходит взаимодействие упругих и гидродинамических неустойчивостей. Вопросам статического и динамического поведения продольно сжатого упругого элемента, контактной границы жидкостей с разными плотностями и скоростями движения посвящены многочисленные исследования. Укажем лишь на первоисточники [1–4] и на некоторые монографические и обзорные работы [5–8].

Теория статической неустойчивости тонкостенных оболочек и пластин получила развитие в связи с созданием объектов надводного и подводного флота, нефтехимии, аэрокосмической техники, а теория неустойчивости контактной границы жидкостей – для объяснения некоторых природных явлений и описания процессов в технических системах. Малость инерционных сил обуславливается относительно медленным изменением возмущений при медленном изменении внешних воздействий (сил сжатия трубопровода, гидростатических сил, скорости движения жидкости в трубопроводе). Взаимодействие гидродинамических неустойчивостей с учетом капиллярных сил впервые было рассмотрено в [3]. В дальнейшем были учтены сжимаемость и вязкость жидкостей, вихреобразование и другие нелинейные эффекты [8]. Внешние воздействия могут быть как независимыми друг от друга, так и связанными [9]. Об-

зор работ по теме приводится в [9, 10]. Численный метод решения задачи о статической неустойчивости пластины в сверхзвуковом потоке газа и неустойчивости трубопровода рассматривается в [11, 12]. Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии представлено в [13]. Изучению продольной устойчивости трубопроводов посвящено много работ. Отметим фундаментальные работы [14–16], в которых рассмотрены все основные случаи возможной потери трубопроводом устойчивости в минеральных грунтах и выполнены аналитические и экспериментальные исследования в данном направлении. В перечисленных и других работах авторы несколько по-разному трактуют потерю трубопроводом устойчивости с различных позиций, как качественно, так и количественно, поясняют факт его возможного появления [14]. Например, в [17] приведен анализ литературных источников, откуда следует, что в одних работах [18–21] уравнение продольно-поперечного изгиба трубопровода имеет вид, отличный от уравнения, приведенного в [22–23]. Также отметим, что по трубопроводу прокачивается огромная масса продукта с достаточно большой скоростью, и этот фактор также влияет на его устойчивость [24–25]. Отметим актуальность исследования проблемы статического взаимодействия неустойчивостей трубопровода. Магистральные нефте-

газопроводы в Западной Сибири и на севере европейской части России начали строить примерно с середины 60-х годов прошлого века. С самого начала проектировщики, строители и эксплуатационники столкнулись с двумя серьезными проблемами: прокладкой трубопроводов на многолетнемерзлых грунтах и на болотах [14]. За последующие 40 с лишним лет десятки организаций и сотни исследователей работали над этими проблемами, но окончательного решения в приемлемой для практики степени не получено и до настоящего времени. Несмотря на видимую простоту конструкции, выполнить расчет подземного магистрального трубопровода на прочность, общую устойчивость в продольном направлении и против всплытия очень сложно в силу его большой протяженности и криволинейного пространственного расположения в неоднородной грунтовой среде с переменными характеристиками [14]. В целом по ОАО «Газпром» протяженность всплывших участков составляла на 1999 год еще многие сотни километров, причем прирост плавающих газопроводов составлял 40–60 км в год, по другим данным – до 100 км в год. Следует отметить важную деталь: новые плавающие участки и арки выброса появляются как на вновь построенных газопроводах, так и на уже отремонтированных и давно эксплуатируемых. Этот факт позволяет сделать вывод, что процесс взаимодействия с грунтом трубопровода, особенно с учетом его протяженности и многообразия изменений граничных условий во времени, исследован еще недостаточно. Многие предприятия также активно работали над устранением последствий всплытия, не обращая, однако, должного внимания на исследование самих причин появления таких участков [14].

Здесь статическое взаимное влияние указанных неустойчивостей называется взаимодействием неустойчивостей трубопровода.

### 1. Постановка задачи

Тонкий упругий трубопровод закреплен на заземленных скользящих опорах, расположенных на расстоянии  $L$  друг от друга, причем опоры не препятствуют течению жидкости с плотностью  $\rho_i$  и скоростью  $U_i$  внутри трубопровода вдоль его оси (рис. 1). Вне трубопровода находится покоящаяся жидкость с плотностью  $\rho_e$ . На скользящих опорах прогиб и угол поворота равны нулю. Ускорение  $G$  направлено перпендикулярно к оси трубопровода. Предполагается несжимаемость срединной линии трубопровода, идеальность и несжимаемость жидкостей. Трубопровод сжимается продольной силой  $P$ . Если рассматривать поведение трубопровода в области нескольких пролетов, то способ приложения силы к трубопроводу и создания течения жидкости внутри трубопровода можно не конкретизировать [9].

Сила  $P$ , давления внутри и вне трубопровода  $p_i$ ,  $p_e$  и скорость  $U_i$  изменяются независимо друг от друга. Интенсивность их возрастания от нуля будем считать

такой, чтобы инерционные силы в системе были малы. При  $P=0$ ,  $U_i=0$ ,  $p_i=0$ ,  $p_e=0$  трубопровод имеет малое отклонение от оси  $x$  в виде

$$w_0 = W_{0n} \sin^2 n\beta x, \quad \beta = \pi/L, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

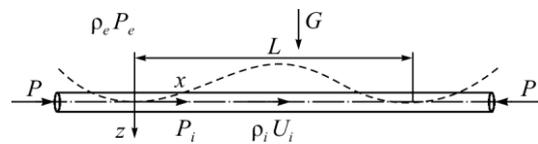


Рис. 1. Расчетная схема трубопровода (опоры не показаны)

Fig. 1. The computation scheme of the pipe (the supports are not shown)

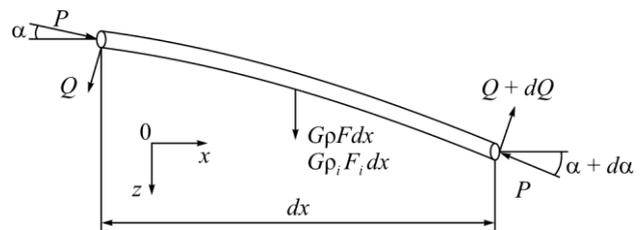


Рис. 2. Схема действия сил на тонкий упругий трубопровод при его изгибе в плоскости  $xz$

Fig. 2. The scheme of forces acting on a thin elastic pipeline under bending in the plane of  $xz$

При этом остаточные напряжения в нем отсутствуют, например, в результате отжига трубопровода [9]. Сумма проекций на ось  $z$  всех сил, действующих на элемент длиной  $dx$  (рис. 2), рассчитывается следующим образом [9, 10]:

$$\begin{aligned} & Q \cos \alpha - (Q + dQ) \cos(\alpha + d\alpha) + P \sin \alpha - \\ & - P \sin(\alpha + d\alpha) + [p_i F_i - p_e (F + F_i)] \sin \alpha - \\ & - [p_i F_i - p_e (F + F_i)] \sin(\alpha + da) + G(\rho F + \rho_i F_i) dx - \\ & - G \rho_e (F + F_i) dx - q dx - \rho_i U_i^2 k dx = 0, \end{aligned}$$

где  $Q$  – перерезывающая сила;  $q$  – интенсивность распределенной выталкивающей силы;  $k$  – кривизна осевой линии трубопровода;  $\rho$ ,  $h$ ,  $F$  – плотность, толщина стенки и площадь поперечного сечения трубопровода;  $F_i$  – площадь сечения в свету трубопровода. Давления внутри и вне трубопровода определяются по формулам

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i0} + G \rho_i (w_0 + w), \\ p_e &= p_{e0} + G \rho_e (w_0 + w), \quad p_{e0} = p_0 + G \rho_e H. \end{aligned}$$

Здесь  $p_0$  – давление на поверхности жидкости на высоте  $H$  от трубопровода;  $p_{i0}$ ,  $p_{e0}$  – давления жидкости внутри и вне трубопровода на расчетной глубине. Из уравнения моментов в том же приближении следует  $Q dx - dM = 0$ , где в выражение изгибающего момента  $M = D d^2 w / dx^2$  не входит  $w_0$  ввиду указанного выше предположения об отсутствии напряжений до начала внешних воздействий. Принимая в линейной задаче  $\cos \alpha = 1$ ,  $\sin(\alpha + d\alpha) = \alpha + d\alpha$  и учитывая  $\alpha = d(w_0 + w) / dx$ ,  $d\alpha =$

$= (d^2(w_0 + w)/dx^2)dx$ , получаем уравнение изгиба трубопровода относительно текущего прогиба  $w(x)$  [26–29]

$$\begin{aligned} D \frac{d^4 w}{dx^4} + \{ P + [p_{i0} + G\rho_i(w_0 + w)]F_i - \\ - [p_{e0} + G\rho_e(w_0 + w)](F + F_i) + \rho_i F_i U_i^2 \} \frac{d^2(w_0 + w)}{dx^2} = \\ = G(\rho F + \rho_i F_i) - G\rho_e(F + F_i) - q, \\ D = EJ, F_i = \pi R_i^2, F = \pi[(R_i + h)^2 - R_i^2], \\ J = \pi[(R_i + h)^4 - R_i^4]/4, \end{aligned}$$

где  $E, R_i$  – модуль упругости, внутренний радиус поперечного сечения трубопровода. В состоянии равновесия

$$G(\rho F + \rho_i F_i) - G\rho_e(F + F_i) - q = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} D \frac{d^4 w}{dx^4} + [P + p_{i0}F_i - p_{e0}(F + F_i) + \rho_i F_i U_i^2] \frac{d^2(w_0 + w)}{dx^2} = \\ = G[-\rho_i F_i + \rho_e(F + F_i)](w_0 + w) \frac{d^2(w_0 + w)}{dx^2}. \end{aligned}$$

Линеаризованное уравнение записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} D \frac{d^4 w}{dx^4} + [P + p_{i0}F_i - \\ - p_{e0}(F + F_i) + \rho_i F_i U_i^2] \frac{d^2(w_0 + w)}{dx^2} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

## 2. Изгиб трубопровода

Примем частное решение уравнения (2) в виде

$$w = W_n \sin^2 n\beta x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Подставляя (1), (3) в уравнение (2), получаем отношение амплитуды текущего прогиба к амплитуде начального прогиба в виде

$$\begin{aligned} \frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{R_n}{P_E(n^2\beta)^2 - R_n}, \\ P_E = 4D\beta^2 = \frac{4\pi^2 EJ}{L^2}, R_n = \\ = [P + p_{i0}F_i - p_{e0}(F + F_i) + \rho_i F_i U_i^2](n\beta)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $P_E$  – критическое значение статической продольной сжимающей силы на трубопровод ( $n = 1$ ). Из (4) видно, что прогиб тем больше, чем больше величина осевого усилия сжатия трубопровода  $P$ , давление внутри трубопровода  $p_{i0}$ , скоростной напор внутри трубопровода  $\rho_i U_i^2$  и меньше критическое значение статической продольной сжимающей силы на трубопровод  $P_E$ , плотность жидкости вне трубопровода  $\rho_e$ , давление вне трубопровода  $p_{e0}$ . При

$$R_n = P_E(n^2\beta)^2 \quad (5)$$

прогиб в рассматриваемом линейном приближении растет неограниченно. Здесь  $R_n$  представляет собой критическую комбинацию внешних воздействий  $P, p_{i0}, p_{e0}, \rho_i U_i^2$  для системы с заданными параметрами материалов и размерами  $E, \rho_i, h, L, R_i$ . С возрастанием внешних воздействий рост прогиба (4) происходит наиболее быстро при  $n = 1$ . Указанная критическая комбинация внешних воздействий по (4) является минимальной при  $n = 1$ .

## 3. Частные случаи

Ввиду большого количества входных параметров может быть выделено множество частных случаев, представляющих самостоятельное значение. Рассмотрим некоторые из них.

1. Из (4) получаем критическое значение сжимающей трубопровод силы

$$P_{cr} = P_E n^2 - p_{i0}F_i + p_{e0}(F + F_i) - \rho_i F_i U_i^2, \quad (6)$$

которое представляет собой обобщение классического критического значения в задаче Эйлера за счет учета давлений внутри и вне трубопровода  $p_{i0}, p_{e0}$ , скоростного напора внутри трубопровода  $\rho_i U_i^2$ . Из выражения (6) следует, что критическая сжимающая сила  $P_{cr}$  может быть отрицательной или при осевых усилиях растяжения в трубопроводе он может потерять устойчивость. В статье [30] отмечается, что увеличение внутреннего давления и уменьшение внешнего давления в трубопроводе может привести к отрицательной эквивалентной осевой силе, меньшей, чем критическая сила Эйлера. Видно, что увеличение давления и скоростного напора внутри трубопровода  $p_{i0}, \rho_i U_i^2$ , уменьшение изгибной жесткости  $EJ$  трубопровода, внешнего давления  $p_{e0}$  приводят к уменьшению критического значения силы  $P$ . Например, в статье [31] отмечено, что работы по строительству магистральных газопроводов в заболоченной местности, как правило, производятся зимой, а ввод газопровода в работу осуществляется летом. В результате этого происходит однократное удлинение уже в первый весенне-летний период эксплуатации. Но на практике удлинение носит систематический характер. В [14, 32] отмечается влияние переменного давления на процесс удлинения трубопровода. На сегодняшний момент можно считать общепринятым, что процесс удлинения в конечном счете способствует появлению неустойчивости геометрической формы. Таким образом, происходит сезонное изменение усилия сжатия трубопровода, которое может достигать критического значения. Здесь не рассматривается изменение силы  $P$  за счет температуры окружающей среды, температуры транспортируемого продукта.

2. Если осевое усилие сжатия трубопровода  $P$ , внешнее давление  $p_{e0}$ , скоростной напор внутри трубопровода  $\rho_i U_i^2$  равны нулю, то из (6) получаем критическое значение внутреннего давления  $p_{i0}$  [27, 33],

$$p_{i0cr} = P_E n^2 / F_i.$$

В примере [33] показано, что под действием внутреннего давления трубка теряет устойчивость так же, как под действием критической сжимающей силы Эйлера, хотя сжимающая трубку сила равна нулю. Почему происходит потеря устойчивости в этом случае, пояснено в [27]. Чаще всего искривление трубопровода связывается со степенью обводненности как основной причиной. Как отмечено в работе [31], в [34] приведен статистический анализ местоположения 99 арочных выбросов, который позволил установить, что опасными с точки зрения потери проектного положения являются участки трубопровода, проложенные на первых 50 км от выхода из компрессорной станции (КС) (76 выбросов), далее от 50-го до 80-го км произошло 15 выбросов, на участке от 80-го км до следующей КС в полностью обводненных траншеях произошло 8 выбросов. Из этого следует, что на удаленном от КС участке, где влияние скачков давления значительно ниже, снижено и число искривлений трубопровода, несмотря на полную обводненность этих участков. Таким образом, результат работы хорошо согласуется с экспериментальными данными, которые указывают на необходимость рассмотрения механизмов искривления, связанных не только с обводненностью грунта [31]. Но отметим также, что с удалением от КС уменьшается давление внутри трубопровода. Это приводит к увеличению запаса устойчивости трубопровода по внутреннему давлению  $n_{pi}$ :

$$n_{pi} = p_{i0cr} / p_{i0},$$

что тоже соответствует наблюдениям [14, 34].

3. Если осевое усилие сжатия трубопровода  $P$ , внешнее давление  $p_{e0}$  равны нулю, то из (6) получаем критическую комбинацию плотности  $\rho_i$ , давления  $p_{i0}$  и скорости движения  $U_i$  жидкости, при которой отклоненная от прямолинейной форма является состоянием равновесия [35, 36]:

$$(P_{i0} + \rho_i U_i^2)_{cr} = \frac{P_E}{F_i} = \frac{4\pi^2 D}{F_i L^2} = \frac{4\pi D}{R_i^2 L^2}.$$

4. Когда внутреннее и внешнее давления  $p_{i0}$ ,  $p_{e0}$  равны нулю, то из (6) получаем критическое значение силы осевого усилия сжатия  $P$ :

$$P_{cr} = P_E n^2 - \rho_i F_i U_i^2.$$

5. В случае однородной покоящейся жидкости ( $U_i = 0$ ) из (6) следует

$$[p_{i0} F_i - p_{e0} (F + F_i)]_{cr} = P_E n^2 - P.$$

6. При внутреннем давлении  $p_{i0}$ , равном нулю, и однородной покоящейся жидкости  $U_i = 0$  из (6) следует критическое отрицательное давление вакуума вне трубопровода:

$$-p_{e0cr} = (P_E n^2 - P) / (F + F_i).$$

7. Из (6) следует критическое значение скоростного напора внутри трубопровода

$$(\rho_i F_i U_i^2)_{cr} = P_E n^2 - P - p_{i0} F_i + p_{e0} (F + F_i).$$

8. Когда осевое усилие сжатия трубопровода  $P$ , внутреннее и внешнее давления  $p_{i0}$ ,  $p_{e0}$  равны нулю, то из вышеприведенной формулы получаем критическое значение скоростного напора внутри трубопровода [25, 33]:

$$(\rho_i F_i U_i^2)_{cr} = P_E n^2.$$

8 а. Из предыдущей формулы и (4) следует критическое значение скорости течения по трубопроводу при  $n = 1$ :

$$(U_i)_{cr} = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{EJ}{\rho_i F_i}}.$$

8 б. Из предыдущей формулы следует критическое значение плотности жидкости внутри трубопровода при  $n = 1$ :

$$(\rho_i)_{cr} = \frac{4\pi^2 EJ}{L^2 U_i^2 F_i}.$$

8 в. При допущении  $h / (2R_i) \ll 1$  можно принять  $J = \pi R_i^3 h$ , тогда из предыдущей формулы следует критическое значение толщины стенки трубопровода при  $n = 1$ :

$$h_{cr} = \frac{\rho_i L^2 U_i^2}{4\pi^2 E R_i}.$$

9. Если трубопровод подвержен всестороннему давлению жидкости, осевое усилие сжатия трубопровода  $P$ , внутреннее давление  $p_{i0}$ , скоростной напор внутри трубопровода  $\rho_i U_i^2$  равны нулю,  $p_{e0} = p_0 + G \rho_e H$ , то согласно (6) имеет место абсолютная устойчивость начальной формы трубопровода при любом значении давления окружающей однородной жидкости ( $W_{0n} + W_n < W_{0n}$ ):

$$W_{0n} + W_n = W_{0n} P_E / [(P_E + p_{e0} (F + F_i) n^2)].$$

Таким образом, при увеличении внешнего гидростатического давления трубопровод выпрямляется, причем в наибольшей мере по гармонике  $n = 1$ . На этом эффекте основаны некоторые технологические операции в камерах с высоким давлением [9].

10. Если изгибная жесткость трубки  $D = 0$ , то трубка не может работать на сжатие. При выполнении условия  $p_{i0} > p_{e0}$  трубка не сминается.

Полученные результаты позволяют анализировать устойчивость трубопроводных систем и тонкостенных трубок. Учет взаимодействия неустойчивостей трубопровода и жидкостей позволяет выявить важные свойства гидроупругой системы в рамках принятой модели. В частных случаях получаются обобщения критериев

Эйлера, Гельмгольца, Релея и их парных взаимодействий для трубопровода. В целом изгибная жесткость трубопровода, растягивающие силы, внешнее гидростатическое давление стабилизируют, т.е. начальная форма трубопровода является устойчивой, а сжимающие силы, внутреннее гидростатическое давление, движение жидкости с любыми скоростями внутри трубопровода дестабилизируют его, т.е. начальная форма трубопровода является неустойчивой. Динамическое взаимодействие рассмотренных неустойчивостей представляет собой предмет отдельного исследования.

Результаты работы могут найти применение в анализе статической устойчивости трубопроводов, шлан-

гов, трубок, микротрубок, находящихся под действием различных вышеперечисленных факторов.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №18-01-00150).

## Acknowledgements

The work was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 18-01-00150).

## Библиографический список

1. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или Решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. – М.–Л.: Гостехиздат, 1934. – 600 с.
2. Helmholtz H. On discontinuous fluid motions // *Phil. Mag.* – 1868. – Vol. 36. – No. 4. – P. 337–346.
3. Kelvin W. Hydrokinetic solutions and observations // *Phil. Mag.* – 1871. – Vol. 42. – No. 4. – P. 362–377.
4. Rayleigh J.W.S. Investigations on the character of the equilibrium of an incompressible fluid of variable density // *Proc. London Math. Soc.* – 1883. – Vol. 14. – P. 170–177.
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
6. Kull H.J. // *Phys. Reports.* – 1991. – Vol. 206. – No. 5. – P. 197–325.
7. Лебо И.Г., Тишкин В.Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза методами математического моделирования. – М.: Физматлит, 2006. – 304 с.
8. Drazin H.G. *Introduction to hydrodynamic stability.* – Cambridge University Press, 2002. – 288 p.
9. Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей Эйлера, Гельмгольца, Релея // *ЖТФ.* – 2018. – Т. 63, № 2. – С. 163–167.
10. Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей в гидроупругой системе // *ПММ.* – 2016. – Т. 80. – Вып. 5. – С. 566–579.
11. Вельмисов П. А., Киреев С. В. Численный метод решения задачи о статической неустойчивости пластины в сверхзвуковом потоке газа // *Тр. Средневолж. мат. общ-ва.* – 2004. – Т. 6, № 1. – С. 166–170.
12. Вельмисов П.А., Киреев С.В. Численный метод решения задачи о статической неустойчивости трубопровода // *Вестн. Ульян. гос. техн. ун-та.* – 2005. – № 1 (29). – С. 17–20.
13. Киреев С.В. Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии // *Прикладная математика и механика.* – Ульяновск, 2007. – № 7. – С. 147–158.
14. Димов Л.А., Богушевская Е. М. Магистральные трубопроводы в условиях болот и обводненной местности. – М.: Горная книга: Изд-во Моск. гос. горн. ун-та, 2010. – 391 с.
15. Ясин Э.М., Черников В.И. Устойчивость подземных трубопроводов. – М.: Недра, 1968. – 120 с.
16. Айнбиндер, А. Б., Камерштейн А. Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. – М.: Недра, 1982. – 343 с.
17. Гумеров К.М., Сильвестров С.А. К оценке продольной устойчивости магистрального трубопровода // *Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов.* – 2017. – Вып. 1 (107). – С. 60–68.
18. Бабин Л.А., Быков Л.И., Волохов В.Я. Типовые расчёты по сооружению трубопроводов. – М.: Недра, 1979. – 176 с.
19. Бородавкин П.П., Березин В.Л. Сооружение магистральных трубопроводов. – М.: Недра, 1977. – 407 с.
20. Дифференциальные уравнения равновесия трубопровода, неоднородного по кривизне / Ф.М. Мугаллимов, Р.Р. Багманов, А.К. Гумеров, И.Ф. Мугаллимов // *Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов.* – 2015. – Вып. 3 (101). – С. 88–96.
21. Чучкалов М.В., Гумеров К.М. Моделирование напряженного состояния подземного трубопровода с учетом грунтовых изменений // *Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья.* – 2014. – № 2. – С. 3–6.
22. Коробков Г.Е., Зарипов Р.М., Шаммазов И.А. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопроводов и резервуаров в осложненных условиях. – СПб.: Недра, 2009. – 410 с.
23. Петров И.П., Спиридонов В.В. Надземная прокладка трубопроводов. – М.: Недра, 1973. – 472 с.
24. Ashley H. and Haviland G. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid // *Journal of Applied Mechanics.* – 1950. – No. 17. – P. 229–232.
25. Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // *Инж. сб.* – 1951. – № 10. – С. 169–170.
26. Dowell E.H., Ilgamov M. A. *Studies in nonlinear aeroelasticity.* – New York – London – Tokyo: Springer-Verlag, 1988. – 456 p.
27. Ilgamov M.A. *Static problems of hydroelasticity.* – М.: Физматлит, 1998. – 208 p.
28. Светлицкий В.А. *Механика стержней. Т. 2.* – М.: Высшая школа, 1987. – 304 с.
29. Mote C.D. A study of band saw vibrations // *J. Franklin Inst.* – June 1965. – Vol. 279. – No. 6. – P. 430–444.
30. Zifeng Li. Using the Fictitious Force to Judge the Stability of Pipe String is Wrong // *The Open Petroleum Engineering Journal.* – 2013. – No. 6. – P. 57–60.

31. Прогнозирование и оценка опасности нарушения геометрической формы газопровода [Электронный ресурс] / К.С. Воронин, С.М. Дудин, М.Ю. Земенкова, Н.Н. Закиров, А.А. Гладенко // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 2-3. – С. 32. – URL: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_25026606\\_12812173.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_25026606_12812173.pdf) (дата обращения: 07.06.2018).

32. Воронин К.С. Изгиб трубопровода как результат неустойчивости, вызванной колебаниями давления газа в процессе его транспортировки // Естественные и технические науки. – 2011. – № 6 (56). – С. 298–301.

## References

1. Euler L. Metod nakhozheniia krivykh linii, obladaiushchikh svoistvami maksimuma libo minimuma ili reshenie izoperimetriceskoi zadachi, vziatoi v samom shirokom smysle [A method for finding curved lines enjoying properties of maximum or minimum, or solution of isoperimetric problems in the broadest accepted sense]. *Moscow-Leningrad, Gostekhizdat*, 1934, 600 p.

2. Helmholtz H. On discontinuous fluid motions. *Phil. Mag.*, 1868, Vol. 36, No. 4, pp. 337-346.

3. Kelvin W. Hydrokinetic solutions and observations. *Phil. Mag.*, 1871, vol. 42, no. 4, pp. 362-377.

4. Rayleigh J.W.S. Investigations on the character of the equilibrium of an incompressible fluid of variable density. *Proc. London Math. Soc.*, 1883, vol. 14, pp. 170-177.

5. Volmir A.S. Ustoichivost' deformiruemykh sistem [Stability of deformable systems]. *Moscow, Nauka*, 1967, 984 p.

6. Kull H.J. *Phys. Reports*, 1991, vol. 206, no 5, pp. 197-325.

7. Lebo I.G., Tishkin V.F. Issledovanie gidrodinamicheskoi neustoichivosti v zadachakh lazernogo termoiadernogo sinteza metodami matematicheskogo modelirovaniia [Investigation of hydrodynamic instabilities in laser fusion problems by mathematical simulation techniques]. *Moscow, Fizmatlit*, 2006, 304 p.

8. Drazin H.G. Introduction to hydrodynamic stability. *Cambridge University Press*, 2002, 288 p.

9. Ilgamov M.A. Interactions between the Euler, Helmholtz and Rayleigh instabilities. *Technical Physics*, 2018, vol. 63, no. 2, pp. 155-159. DOI: 10.1134/S1063784218020160

10. Ilgamov M.A. The interaction of instabilities in a hydroelastic system. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, vol. 80, no. 5, pp. 400-408. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.02.007

11. Velmisov P.A., Kireev S.V. Chislennyi metod resheniia zadachi o staticheskoi neustoichivosti plastiny v sverkhzvukovom potoke gaza [Numerical solution of the problem on static instability of a plate in supersonic gas flow]. *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva – Proceedings of the Middle Volga Mathematical Society*, 2004, vol. 6, no. 1, pp. 166-170.

12. Velmisov P.A., Kireev S.V. Chislennyi metod resheniia zadachi o staticheskoi neustoichivosti truboprovoda [Numerical method for solving the problem on static instability of a pipeline]. *Vestnik Ul'ianovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Ul'ianovsk State Technical University*, 2005, no. 1 (29), pp. 17-20.

13. Kireev S.V. Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh staticheskoi neustoichivosti uprugikh elementov konstruktssii pri aerogidrodinamicheskom vozdeistvii [Mathematical modelling in static instability problems of elastic design elements under aerohydrodynamic impact]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*

33. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

34. Курганова И.Н. Теоретическое обоснование результатов натурного обследования газопроводов в непроектном положении // Надежность газопроводных конструкций / ВНИИ-ГАЗ. – М., 1990. – С. 147–155.

35. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. – М.: Наука, 1969. – 184 с.

36. Ильгамов М.А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН, МТТ. – 2017. – № 6. – С. 1–14.

(*Ul'ianovsk*) – *Applied Mathematics and Mechanics (Ul'ianovsk)*, 2007, no. 7, pp. 147-158.

14. Dimov L.A., Bogushevskaja E. M. Magistral'nye truboprovody v usloviiah bolot i obvodnennoi mestnosti [Main pipelines in the conditions of swamps and watered areas]. *Moscow, Gornaia kniga*, 2010, 391 p.

15. Yasin E.M., Chernikin V.I. Ustoichivost' podzemnykh truboprovodov [Stability of underground pipelines]. *Moscow, Nedra*, 1968, 120 p.

16. Ainbinder A.B., Kamershtein A.G. Raschet magistral'nykh truboprovodov na prochnost' i ustoichivost' [The calculation of main pipelines for strength and stability]. *Moscow, Nedra*, 1982, 343p.

17. Gumerov K.M., Sil'vestrov S.A. K otsenke prodol'noi ustoichivosti magistral'nogo truboprovoda [To the assessment of main pipeline longitudinal stability]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefii i nefteproduktov – Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products*, 2017, No. 1 (107), pp. 60-68.

18. Babin L.A., Bykov L.I., Volokhov V.Ia. Tipovye raschety po sooruzheniiu truboprovodov [Routine calculations in pipeline construction]. *Moscow, Nedra*, 1979, 176 p.

19. Borodavkin P.P., Berezin V.L. Sooruzhenie magistral'nykh truboprovodov [Construction of main pipelines]. *Moscow, Nedra*, 1977, 407 p.

20. Mugallimov F.M., Bagmanov R.R., Gumerov A.K., Mugallimov I.F. Differentsial'nye uravneniia ravnovesiia truboprovoda, neodnorodnogo po krivizne [Differential balance equations for pipeline of non-uniform bending] *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefii i nefteproduktov – Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products*, 2015, No. 3 (101), pp. 88-96.

21. Chuchkalov M.V., Gumerov K.M. Modelirovanie napryazhennogo sostoyaniia podzemnogo truboprovoda s uchedom gruntovykh izmeninii [Modeling of the stress state of an underground pipeline with account for soil changes]. *Transport i khranenie nefteproduktov i uglevodorodnogo syr'ya – Transport and Storage of Petroleum Products and Hydrocarbons*, 2014, no. 2, pp. 3-6.

22. Korobkov G.E., Zaripov R.M., Shammazov I.A. Chislennoe modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoiianiia i ustoichivosti truboprovodov i rezervuarov v oslozhnennykh usloviiah [Numerical modeling of the stress-strain state and stability of pipelines and tanks in complicated operating conditions]. *Saint Petersburg, Nedra*, 2009, 410 p.

23. Petrov I.P., Spiridonov V.V. Nadzemnaia prokladka truboprovodov [Aboveground laying pipelines]. *Moscow, Nedra*, 1973, 472 p.

24. Ashley H. and Haviland G. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. *Journal of Applied Mechanics*, 1950, no. 17, pp. 229-232.
25. Feodosiev V.I. O kolebaniakh i ustoychivosti trubyy pri protekaniy cherez nee zhidkosti [On pipe vibrations and stability with fluid flowing inside]. *Inzhenernyi sbornik – Collected Papers on Engineering*, 1951, no. 10, pp. 169-170.
26. Dowell E.H., Ilgamov M.A. Studies in nonlinear aeroelasticity. *New York-London-Tokyo, Springer-Verlag*, 1988, 456 p.
27. Ilgamov M.A. Static problems of hydroelasticity. *Moscow, Fizmatlit*, 1998, 208 p.
28. Svetlitsky V.A. Mekhanika sterzhnei [Mechanics of rods]. *Moscow, Vysshaya shkola*, 1987, vol. 2, 304 p.
29. Mote C.D. A study of band saw vibrations. *J. Franklin Inst.*, June 1965, vol. 279, no. 6, pp. 430-444.
30. Zifeng Li. Using the Fictitious Force to Judge the Stability of Pipe String is Wrong. *The Open Petroleum Engineering Journal*, 2013, no. 6, pp. 57-60.
31. Prognozirovaniye i otsenka opasnosti narusheniya geometricheskoy formy gazoprovoda [Forecasting and evaluation of gas pipelines geometric forms breach hazard]. K.S. Voronin [et al]. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya – Modern Problems of Science and Education*, 2015, no. 2-3, p. 32, available at: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_25026606\\_12812173.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_25026606_12812173.pdf)
32. Voronin K.S. Izgib truboprovoda kak rezul'tat neustoychivosti, vyzvannoy kolebaniyami davleniya gaza v protsesse ego transportirovki [Pipeline bending as a result of instability caused by pressure oscillations when transporting the gas]. *Estestvennyye i tekhnicheskyye nauki – Natural and Technical Sciences*, 2011, no. 6 (56), pp. 298-301.
33. Feodosiev V.I. Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected problems on the strength of materials]. *Moscow, Nauka*, 1973, 400 p.
34. Kurganova I.N. Teoreticheskoye obosnovaniye rezul'tatov naturnogo obsledovaniya gazoprovodov v neproektnom polozhenii [The theoretical justification of the results of full-scale survey of gas pipelines in the non-project situation]. *Reliability of gas pipeline constructions. Moscow, VNIIGAZ*, 1990, pp. 147-155.
35. Ilgamov M.A. Kolebaniya uprugikh obolochek, soderzhashchikh zhidkost' i gaz [Oscillations of elastic shells containing liquid and gas]. *Moscow, Nauka*, 1969, 184 p.
36. Ilgamov M.A. Dynamics of a pipeline under the action of internal shock pressure. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 663-674. DOI: 10.3103/S0025654417060061