



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.03

УДК 539.3

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

А.О. Ватульян<sup>1</sup>, О.В. Явруян<sup>2</sup>, И.В. Богачев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Ростов-на-Дону, Россия

<sup>2</sup>Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 24 июня 2018 г.  
Принята: 16 октября 2018 г.  
Опубликована: 28 декабря 2018 г.

#### Ключевые слова:

цилиндрический волновод, упругость, радиальная неоднородность, покрытия, обратная задача, идентификация, колебания, итерационный процесс, линеаризация.

### АННОТАЦИЯ

Исследована обратная коэффициентная задача об идентификации свойств радиально неоднородного (в том числе слоистого и с покрытием) упругого цилиндрического изотропного волновода. Для восстановления трех функций – коэффициентов Ляме и плотности, характеризующих переменные свойства изотропного волновода, рассмотрены два режима воздействия на объект, которые возбуждают нормальные и крутильные колебания. Процедура идентификации осуществляется по данным акустического зондирования внешней поверхности цилиндра.

Поставленная задача с помощью интегрального преобразования Фурье по координате, совпадающей с осью волновода, сведена к одномерным задачам относительно осредненных характеристик. Полученные задачи разделены относительно восстанавливаемых функций и позволяют осуществить последовательную идентификацию. Произведена линеаризация разделенных коэффициентных обратных задач. Сформулированы два итерационных процесса, которые позволяют последовательно восстанавливать искомые функции. На каждом шаге итерационных схем решаются соответствующие краевые задачи с помощью метода пристрелки и системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами с помощью методов регуляризации.

Проведен вычислительный эксперимент, моделирующий нормальные и крутильные колебания волновода. В качестве дополнительной информации использованы соответствующие волновые поля, полученные из решения прямой задачи при известных законах неоднородности.

Рассмотрены примеры идентификации законов изменения характеристик волновода, моделирующих наличие неоднородного покрытия на внешней поверхности, характеристики которого могут значительно отличаться от характеристик материала волновода, считающихся в данных экспериментах известными.

Проведен представительный набор вычислительных экспериментов по восстановлению законов изменения искомым механических характеристик – модулей упругости и плотности – для монотонных, немонотонных и кусочно-непрерывных функций.

© ПНИПУ

© Ватульян Александр Ованесович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: [vatulyan@math.rsu.ru](mailto:vatulyan@math.rsu.ru), [vatulyan@aaanet.ru](mailto:vatulyan@aaanet.ru), [ID 0000-0003-0444-4496](https://orcid.org/0000-0003-0444-4496)

Явруян Оксана Вячеславовна – к.ф.-м.н., н.с., [yavruyan@mail.ru](mailto:yavruyan@mail.ru), [ID 0000-0003-3443-0837](https://orcid.org/0000-0003-3443-0837)

Богачев Иван Викторович – к.ф.-м.н., н.с., e-mail: [bogachev89@yandex.ru](mailto:bogachev89@yandex.ru), [ID 0000-0002-4725-5102](https://orcid.org/0000-0002-4725-5102)

Alexander O. Vatulyan – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, e-mail: [vatulyan@math.rsu.ru](mailto:vatulyan@math.rsu.ru), [vatulyan@aaanet.ru](mailto:vatulyan@aaanet.ru), [ID 0000-0003-0444-4496](https://orcid.org/0000-0003-0444-4496)

Oksana V. Yavruyan – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: [yavruyan@mail.ru](mailto:yavruyan@mail.ru), [ID 0000-0003-3443-0837](https://orcid.org/0000-0003-3443-0837)

Ivan V. Bogachev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: [bogachev89@yandex.ru](mailto:bogachev89@yandex.ru), [ID 0000-0002-4725-5102](https://orcid.org/0000-0002-4725-5102)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## IDENTIFICATION OF THE INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL WAVEGUIDE PROPERTIES

A.O. Vatulyan<sup>1</sup>, O.V. Yavruyan<sup>2</sup>, I.V. Bogachev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of I.I. Vorovich, Rostov-on-Don, Russian Federation

<sup>2</sup>Southern Mathematical Institute of VSC RAS and RNO-A, Vladikavkaz, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 24 June 2018  
Accepted: 16 October 2018  
Published: 28 December 2018

#### Keywords:

cylindrical waveguide, elasticity, radial inhomogeneous, coatings, inverse problem, identification, oscillations, iterative process, linearization.

### ABSTRACT

The inverse coefficient problem of properties identification for the radially inhomogeneous (including layered and coated) elastic cylindrical isotropic waveguide is studied. To restore three functions – the Lamé and density coefficients characterizing the variable properties of an isotropic waveguide, two modes of action on an object that excite normal and torsional oscillations are considered. The identification procedure is carried out according to the acoustic sounding of the outer surface of the cylinder.

The problem by the integral Fourier transformation at the coordinate coinciding with the axis of the waveguide is reduced to one-dimensional problems concerning the averaged characteristics. The obtained problems are divided by the unknown functions which allow to realize the serial identification. The linearization of the divided inverse coefficient problems is carried out. Two iterative processes are formulated, which allow to restore the required functions sequentially. At each step of the iterative schemes, the corresponding boundary value problems are solved by the method of adjustment and the system of Fredholm's integral equations of the first kind with smooth kernels by using of regularization methods.

A computational experiment simulating normal and torsional oscillations of the waveguide is conducted. The corresponding wave fields obtained from the solution of the direct problem by the known laws of inhomogeneity are used as additional information.

We study examples of identifying the laws of waveguide characteristics change which model the presence of inhomogeneous coating on the outer surface, which characteristics can significantly differ from those of the waveguide material, which are considered in these experiments to be known.

We perform a representative set of computational experiments to identify the laws of changing the required mechanical characteristics – the modules of elasticity and density – for monotonic, non-monotonic and piecewise continuous functions.

© PNRPU

### Введение

Разработка эффективных схем идентификации неоднородных механических свойств цилиндрических волноводов представляет собой актуальную задачу механики и математического моделирования. Подобные трубчатые элементы имеют широкий спектр применения – от строительной до ресурсотранспортирующей промышленности. Отметим, что возникающие в однородных цилиндрических структурах волновые процессы изучены достаточно подробно [1–5].

Основные трудности, возникающие при решении задачи идентификации физических характеристик неоднородных цилиндрических областей, связаны с разнообразием возможных вариантов неоднородностей, которые могут иметь как локальный (неоднородные включения, дефекты и т.д.), так и распределенный характер (например, продольная или радиальная неоднородность).

Наличие неоднородной структуры значительно усложняет анализ волновых процессов, возникающих в плоских или цилиндрических волноводах, поскольку в отличие от однородного случая не удастся построить явные представления волновых полей в волноводе,

а возникающие при этом дифференциальные операторы представляют собой операторы с переменными коэффициентами [6–14].

Так в работе [8] рассмотрена задача рассеяния звуковой волны радиально-неоднородным полым изотропным цилиндром, окруженным вязкой жидкостью. Построены волновые поля, возникающие как в самом рассеивателе, так и в жидкой среде. Смещения в упругой части волновода представлены в виде рядов Фурье, коэффициенты разложения которых определяются из численного решения системы дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами.

Случай неоднородного полого изотропного цилиндрического волновода исследован в работе [9], в которой осуществлен анализ дисперсионных соотношений с произвольным законом изменения модулей упругости по радиальной координате; влияние на характер дисперсионного множества поля предварительных напряжений (ПН) изучено в работе [10]. Обратная задача идентификации неоднородного поля предварительных напряжений в плоском случае рассмотрена в работе [11]. Разработаны численные схемы реконструкции неоднородного поля ПН на основе анализа амплитудно-частотной характеристики на внешней поверхности при

установившихся колебаниях в режиме частотного и позиционного зондирования.

В работе [12] предложен эффективный подход для дисперсионного анализа трех типов неоднородных волноводов (плоских, цилиндрических), погруженных в акустическую среду. Предлагаемый подход основан на полуаналитическом варианте метода конечного элемента.

Задачи о расчете статического напряженно-деформированного состояния цилиндрических областей (толстостенных труб) с учетом различных вариантов неоднородностей рассмотрены в работе [13]. Показано влияние изменения соотношения толщин слоев однородного и неоднородного материала на значения продольной и окружной деформации на внешней поверхности трубы при действии постоянного внутреннего давления.

Стоит отдельно выделить важный класс обратных задач, связанный с определением механических параметров для цилиндрических волноводов с покрытиями. При этом особый интерес представляет именно задача восстановления свойств упрочняющих или защитных слоев-покрытий. Практический потенциал поверхностных слоев охватывает широкий круг важных инженерно-практических задач, таких как защитная функция объекта от внешнего воздействия (температурные или коррозионные негативные воздействия); ускорение или замедление физических, химических или механических процессов; улучшение акустического фона (в случае рассеивателей с покрытиями). Перечисленные выше аспекты применимости волноводов с покрытиями доказывают актуальность поставленной задачи.

К настоящему времени интерес исследователей направлен в основном на решение прямых задач для цилиндрических волноводов с покрытиями, построение дисперсионных соотношений и механических полей. При этом стоит отметить, что исследования проводятся в нескольких направлениях, в зависимости от способа моделирования покрытия.

Одним из способов математического моделирования является представление волновода в виде многослойной структуры, граничным слоем которого является покрытие. В этом случае граничные условия стыковочной зоны задаются как условия полного контакта. Такой способ описания дает возможность точного учета толщин слоев, в частности толщины покрытия. Однако стоит учитывать, что в процессе технического изготовления и дальнейшей эксплуатации возможно появление микродефектов, что может внести расхождения между теоретическими и экспериментальными данными, а также привести к снижению эксплуатационной способности объекта [15–18].

Следующий вариант математического моделирования слоя-покрытия – описание цилиндрического волновода в виде функционально-градиентного материала (ФГМ) с сильно отличающимися значениями соответствующих механических характеристик на границе волновода и покрытия в промежуточном слое, возникающем при спека-

нии подложки и покрытия. В этом случае можно лишь примерно (в процентном соотношении) указать толщину слоя покрытия.

Исследования в этом направлении проведены в работе [19], в которой рассмотрена стационарная задача для неоднородного изотропного цилиндра из ФГМ под действием внутреннего давления. Решена задача о плоском напряженном состоянии. Исследованы зависимости полей напряжений и деформаций от различных законов изменения функций, характеризующих коэффициенты Ляме и Пуассона, которые задавались по законам теории смесей и степенным законам. Показано, что влияние коэффициента Пуассона на результирующие механические поля существеннее, чем коэффициента Ляме, особенно в случае если пограничные значения этой характеристики на внутренней и внешней границах толстого цилиндра сильно различаются. Этот вывод должен быть учтен при эксплуатации цилиндрических элементов конструкций с титановым покрытием, в которых наблюдается сильное отличие между граничными значениями соответствующего коэффициента.

В работе [20] рассмотрено импульсное воздействие на однородный упругий цилиндр с покрытием. Импульсы были сгенерированы по «линейному источнику» импульсным лазером и определялись методом оптического лучевого отклонения, обеспечивающим информацию о распространении импульса бесконтактным способом. Контактная зона покрытие-подложка соответствует «сварному шву», когда покрытие жестко спаяно с подложкой. Экспериментальный образец был изготовлен по следующему принципу: в полую стальную трубу вливается сплав олова и охлаждается до комнатной температуры. Получены дисперсионные соотношения поверхностных акустических волн (ПАВ) и осуществлено сравнение с экспериментальными данными. Был проведен анализ зависимости ПАВ от различных значений толщины покрытия при условии, что длина волны соизмерима с толщиной покрытия.

Для плоских волноводов также разработаны и реализованы эффективные методы анализа волновых полей, возбуждаемых поверхностной нагрузкой. Так, в [21] рассмотрено упругое полупространство с непрерывной зависимостью свойств по глубине. Проанализировано влияние свойств неоднородного покрытия на характер поверхностных акустических волн.

Особое внимание ученых обращено к технической стороне вопроса, в частности к способам и экспериментальным установкам измерения механических полей и их характеристик для объектов с покрытиями. В работе [22] представлена измерительная система и методика обработки полученного сигнала для точного измерения скорости поверхностной волны в упругих цилиндрах с покрытием. Получены и сопоставлены теоретические и экспериментальные данные.

Задачи, связанные с дифракцией волн в волноводных системах с покрытиями, возникают в акустике, гидроакустике, оптике. Изучению влияния покрытия,

его характера и толщины на рассеянные акустические и гидроакустические поля посвящены работы многих отечественных и зарубежных авторов [23–27].

Из работ российских исследователей особое внимание стоит уделить работам Л.А. Толоконникова и его учеников [17–19], в которых исследовалось рассеяние акустических волн для различных типов покрытий цилиндрических волноводов, находящихся в акустической среде. В [17] рассмотрена задача о рассеянии плоской звуковой волны, набегающей на упругий однородный цилиндр, покрытый неоднородным по толщине изотропным упругим слоем. Построены отраженные волновые поля, а также упругие поля смещений в цилиндре и в покрытии. Неоднородные характеристики покрытия представлены в виде степенных рядов. Приведены диаграммы направленности рассеянных полей в дальней зоне, анализ которых подтверждает влияние характера неоднородности и его относительной «волновой» толщины на результирующие рассеянные поля. При этом наличие самого покрытия оказывает существенное влияние на всю картину диаграммы направленности. Аналогичная задача для цилиндрического волновода с неоднородным покрытием, помещенным в плоский волновод с акустически мягкими границами, рассмотрена в [18].

В [23] исследована задача управления пассивным потоком для уменьшения интенсивности звука от двух последовательно расположенных цилиндров с пористым покрытием. В работе доказана эффективность пористой обработки цилиндров для управления потоками вихрей в области зазора между двумя обтекаемыми телами и тем самым для управления аэродинамическим звуком, генерации тонального и широкополосного шума. Представлены численные результаты акустических волн для цилиндров без покрытия и цилиндров с пористым покрытием с разной пористостью и толщиной.

Достаточно большое количество работ посвящено изучению влияния покрытия (однородного и неоднородного, упругого и пьезоупругого) цилиндрических оболочек [28–29] на характер механических и электрических полей.

В настоящей работе рассмотрена задача идентификации неоднородных свойств изотропного цилиндрического волновода. Обратная задача решается на основе анализа данных о полях смещений, полученных в результате двух режимов воздействия на объект исследования – нормальных и крутильных колебаний. Предлагаемая схема позволяет определить три переменные характеристики волновода – коэффициенты Ляме и плотность. Также с применением разработанного подхода рассмотрены два примера идентификации свойств неоднородного покрытия однородного волновода, характеристики которого существенно отличны от характеристик волновода и имеют функционально-градиентный характер.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим обратную коэффициентную задачу об идентификации неоднородных свойств полого изотропного цилиндрического волновода, занимающего область  $\Omega = \{r \in [a, b], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [-\infty, +\infty]\}$ , где  $a, b$  – внутренняя и внешняя границы области, ось волновода совпадает с осью  $Oz$ . Внутренняя граница жестко заземлена. Исследуемая область находится под действием нагрузки  $P$ , приложенной к части внешней поверхности на участке  $\Omega_1 = \{r = b, \varphi \in [0, 2\pi], z \in [z_1, z_2]\}$ . Рассматривается режим установившихся колебаний, т.е.  $\mathbf{P}(t, z) = \mathbf{p}(z)e^{i\omega t}$  (где  $\mathbf{p}(z) = (p_r(z), p_\varphi(z), p_z(z))$ ).

Обратная коэффициентная задача состоит в идентификации неоднородных свойств волновода, которые представляются в виде функций, меняющихся по толщине цилиндрического волновода  $\lambda(r), \mu(r), \rho(r)$ , характеризующих коэффициенты Ляме и плотность среды. Для решения задачи идентификации рассмотрим два режима воздействия на объект исследования.

Первый режим определяется крутильными колебаниями волновода, возбуждаемыми внешней нагрузкой  $\mathbf{p}(z) = (0, p_\varphi(z), 0)$  (Задача 1). При таком режиме колебаний ненулевой компонентой вектора перемещения будет компонента  $u_\varphi = u_\varphi(r, z)$ .

Второй режим соответствует возбуждению в цилиндрическом волноводе нормальных колебаний, которым отвечают вектор внешней нагрузки с компонентами  $\mathbf{p}(z) = (p_r(z), 0, p_z(z))$  и соответствующий вектор перемещений  $\mathbf{u}(r, z) = (u_r(r, z), 0, u_z(r, z))$  (Задача 2).

Ввиду установившегося режима колебаний краевые задачи, описывающие крутильные и нормальные колебания исследуемой области, после отделения временно-го множителя имеют определенный вид.

### Задача 1:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\varphi\varphi,\varphi} + \sigma_{\varphi z,z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} + \rho(r)\omega^2 u_\varphi &= 0, \\ r = a : u_\varphi &= 0, \\ r = b : z \in [z_1, z_2] : \sigma_{r\varphi} &= \begin{cases} p_\varphi(z), & z \in [z_1, z_2], \\ 0, & z \notin [z_1, z_2], \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

причем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0, \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \mu(r)(u_{\varphi,r} - u_\varphi / r), \\ \sigma_{\varphi z} = \sigma_{z\varphi} = \mu(r)u_{\varphi,z}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

**Обратная задача 1** состоит в определении функций  $\mu(r), \rho(r)$  и  $u_\varphi$  по дополнительной информации о поле перемещения, измеренного вдоль внешней границы цилиндрического волновода  $r = b$ , в режиме частотного зондирования.

$$u_\varphi(b, z, \omega) = f_\varphi(z, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (1.3)$$

**Задача 2:**

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \sigma_{rz,z} + \rho(r)\omega^2 u_r = 0,$$

$$\sigma_{rz,r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \sigma_{zz,z} + \rho(r)\omega^2 u_z = 0,$$

$$r = a: u_r = u_z = 0,$$

$$r = b: \sigma_{rr} = \begin{cases} p_r(z), z \in [z_1, z_2], \\ 0, z \notin [z_1, z_2], \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\sigma_{rz} = \begin{cases} p_{rz}(z), z \in [z_1, z_2], \\ 0, z \notin [z_1, z_2], \end{cases}$$

причем

$$\sigma_{rr} = (\lambda(r) + 2\mu(r))u_{r,r} + \lambda(r)\left(\frac{u_r}{r} + u_{z,z}\right),$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \mu(r)(u_{r,z} + u_{z,r}), \quad (1.5)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda(r) + 2\mu(r))\frac{u_r}{r} + \lambda(r)(u_{r,r} + u_{z,z}),$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda(r) + 2\mu(r))u_{z,z} + \lambda(r)\left(\frac{u_r}{r} + u_{r,r}\right).$$

**Обратная задача 2** состоит в нахождении функций  $\lambda(r), \mu(r), \rho(r)$  и  $u_r, u_z$  по дополнительной информации о полях смещений, измеренных на границе  $r = b$  при частотном зондировании.

$$\begin{aligned} u_r(b, z, \omega) &= f_r(z, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \\ u_z(b, z, \omega) &= f_z(z, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Закрывают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [30].

**Примечание.** Сформулированные постановки обратных задач и описанная далее методика их решения позволяют исследовать еще один важный класс обратных задач – задачи об идентификации свойств неоднородного покрытия цилиндрических волноводов. Это возможно для случаев, когда покрытие и промежуточный слой между покрытием и волноводом, где может происходить взаимное проникновение материалов, моделируются функционально-градиентным материалом с резким градиентным перепадом характеристик. При этом свойства основного волновода считаются известными.

## 2. Построение схемы решения обратных задач

Применим преобразование Фурье по координате  $z$  к краевым задачам 1 и 2. Введем следующие обозначения трансформант Фурье:

$$\tilde{u}_i(r, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i(r, z, \alpha) e^{i\alpha z} dz,$$

$$\tilde{p}_i(\alpha) = \int_{z_1}^{z_2} p_i(z, \alpha) e^{i\alpha z} dz,$$

$$\tilde{f}_i(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(z, \alpha) e^{i\alpha z} dz, \quad i = r, \varphi, z.$$

Тогда задачи 1 и 2 после несложных преобразований переписуются в компонентах трансформант Фурье.

**Задача 1:**

$$\left( r^3 \mu \left( \tilde{u}_\varphi / r \right)' \right)' + r^2 \tilde{u}_\varphi (\rho \omega^2 - \mu \alpha^2) = 0, \quad (2.1)$$

$$\tilde{u}_\varphi|_{r=a} = 0, \quad \mu \left( \tilde{u}_\varphi / r \right)' \Big|_{r=b} = \tilde{p}_2.$$

Дополнительное условие:  $\tilde{u}_\varphi(b, \alpha, \omega) = \tilde{f}_\varphi(\alpha, \omega)$ .

**Задача 2:**

$$\begin{aligned} & \left( (\lambda + 2\mu) \tilde{u}_r' + \lambda \left( \frac{\tilde{u}_r}{r} - \alpha \tilde{u}_z \right) \right)' + \frac{2\mu}{r} \tilde{u}_r' - \\ & - \frac{2\mu}{r^2} \tilde{u}_r - \mu \alpha \tilde{u}_z' + (\rho \omega^2 - \mu \alpha^2) \tilde{u}_r = 0, \\ & \left( \mu (\alpha \tilde{u}_r + \tilde{u}_z') \right)' + \frac{\mu}{r} (\alpha \tilde{u}_r + \tilde{u}_z') - \\ & - \alpha^2 (\lambda + 2\mu) \tilde{u}_z + \lambda \alpha \left( \tilde{u}_r' + \frac{u_r}{r} \right) + \rho \omega^2 \tilde{u}_z = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\tilde{u}_r|_{r=a} = \tilde{u}_z|_{r=a} = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu) \tilde{u}_r' + \lambda \left( \frac{\tilde{u}_r}{r} - \alpha \tilde{u}_z \right) \Big|_{r=b} = \tilde{p}_r,$$

$$\mu (\alpha \tilde{u}_r + \tilde{u}_z') \Big|_{r=b} = \tilde{p}_{rz}.$$

Дополнительные условия:  $\tilde{u}_r(b, \alpha, \omega) = \tilde{f}_r(\alpha, \omega)$ ,

$$\tilde{u}_z(b, \alpha, \omega) = \tilde{f}_z(\alpha, \omega).$$

Для обезразмеривания задач введем следующие безразмерные переменные и функции:

$$\begin{aligned} r &= \xi b, \quad \mu_* = \mu(r) / \tilde{\mu}_0, \quad \lambda_* = \lambda(r) / \tilde{\mu}_0, \\ \rho_* &= \rho(r) / \tilde{\mu}_0, \quad \tilde{\mu}_0 = \max_{r \in [a, b]} \mu(r), \\ \xi_0 &= a / b, \quad b \tilde{p}_i = \tilde{\mu}_0 P_i, \\ \tilde{u}_r &= b u, \quad \tilde{u}_\varphi = b w, \quad \tilde{u}_z = b v. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В последующих выкладках для удобства записи знак «\*» в обозначениях  $\lambda_*, \mu_*, \rho_*$  будем опускать.

Обезразмеренная **задача 1** запишется как

$$\left( \xi^3 \mu \left( w / \xi \right)' \right)' + \xi^2 b^2 w (\rho \omega^2 - \mu \alpha^2) = 0,$$

$$w|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \mu \left( w / \xi \right)' \Big|_{\xi=1} = P_2, \quad (2.4)$$

$$w(1, \alpha, \omega) = F_\varphi(\alpha).$$

Обезразмеренная **задача 2** переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \left( (\lambda + 2\mu)u' + \lambda \left( \frac{u}{\xi} - \alpha bv \right) \right)' + \frac{2\mu}{\xi} u' - \\ & - \frac{2\mu}{\xi^2} u - \mu \alpha bu' + (\rho \omega^2 - \mu \alpha^2) b^2 u = 0, \\ & \left( \mu(\alpha bu + v') \right)' + \frac{\mu}{\xi} (\alpha bu + v') - \\ & - \alpha^2 b^2 (\lambda + 2\mu) v + \lambda b \alpha \left( u' + \frac{u}{\xi} \right) + \rho \omega^2 b^2 v = 0, \\ & u|_{\xi=\xi_0} = v|_{\xi=\xi_0} = 0, \\ & \left. \left( (\lambda + 2\mu)u' + \lambda \left( \frac{u}{\xi} - \alpha bv \right) \right) \right|_{\xi=1} = \\ & = P_1, \quad \left. \mu(\alpha bu + v') \right|_{\xi=1} = P_3, \\ & u(1, \alpha, \omega) = F_r(\alpha), \quad v(1, \alpha, \omega) = F_z(\alpha). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для дальнейшего исследования задач (2.4), (2.5) осуществим следующее преобразование, представив поля смещения в виде разложения по степеням параметра преобразования  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2, \\ w &= w_0 + \alpha w_1 + \alpha^2 w_2, \quad v = v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2, \\ P_j &= P_j^{(0)} + \alpha P_j^{(1)} + \alpha^2 P_j^{(2)}, \quad j = 1, 2, 3, \\ F_i &= f_i^{(0)} + \alpha f_i^{(1)} + \alpha^2 f_i^{(2)}, \quad i = r, \varphi, z. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Сформируем операторные коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\alpha$ . Отметим, что для решения поставленной обратной задачи достаточно будет рассмотреть задачу, которая соответствует нулевой степени параметра  $\alpha$ , т.е. относительно средних функций нулевого порядка.

$$\alpha^0 : \begin{cases} \left( \xi^3 \mu (w_0/\xi)' \right)' + \xi^2 b^2 \omega^2 \rho w_0 = 0, \\ w_0|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \left. \mu (w_0/\xi)' \right|_{\xi=1} = P_2^0, \\ w_0(1, \omega) = f_\phi^0(\omega). \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\alpha^0 : \begin{cases} \left( (\lambda + 2\mu)u_0' + \lambda \frac{u_0}{\xi} \right)' + \frac{2\mu}{\xi} u_0' - \frac{2\mu}{\xi^2} u_0 + \rho \omega^2 b^2 u_0 = 0, \\ \left( \mu v_0' \right)' + \frac{\mu}{\xi} v_0' + \rho \omega^2 b^2 v_0 = 0, \\ u_0|_{\xi=\xi_0} = v_0|_{\xi=\xi_0} = 0, \\ \left. (\lambda + 2\mu)u_0' + \lambda \frac{u_0}{\xi} \right|_{\xi=1} = P_1^{(0)}, \quad \left. \mu v_0' \right|_{\xi=1} = P_3^{(0)}, \\ u_0(1, \omega) = f_r^0(\omega), \quad v_0(1, \omega) = f_z^0(\omega). \end{cases} \tag{2.8}$$

Заметим, что в задачу (2.7) входят только две восстанавливаемые функции  $\mu(r)$  и  $\rho(r)$ , а в задачу (2.8) входят все три неизвестные функции. Поэтому даль-

нейшее исследование сводится к их поэтапному восстановлению.

Рассмотрим обратные коэффициентные задачи (2.7) и (2.8). Они являются существенно нелинейными, в связи с чем для их решения проведем процедуру линеаризации, представив неизвестные функции в виде суммы двух функций – начального приближения (с индексом 0) и поправки относительно начального приближения (с индексом 1):

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0^{(0)} + \varepsilon u_0^{(1)}, \quad v_0 = v_0^{(0)} + \varepsilon v_0^{(1)}, \quad w_0 = w_0^{(0)} + \varepsilon w_0^{(1)}, \\ \rho &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1, \quad \mu = \mu_0 + \varepsilon \mu_1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Выписывая коэффициенты перед одинаковыми степенями параметра линеаризации  $\varepsilon$ , получим следующие линеаризованные задачи.

**Задача 1:**

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \left( \xi^3 \mu_0 (w_0^{(0)}/\xi)' \right)' + \xi^2 b^2 \omega^2 \rho_0 w_0^{(0)} = 0, \\ w_0^{(0)}|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \left. \mu_0 (w_0^{(0)}/\xi)' \right|_{\xi=1} = P_2^0. \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \left( \xi^3 \mu_0 (w_0^{(1)}/\xi)' + \xi^3 \mu_1 (w_0^{(0)}/\xi)' \right)' + \\ + \xi^2 b^2 \omega^2 (\rho_0 w_0^{(1)} + \rho_1 w_0^{(0)}) = 0, \\ w_0^{(1)}|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \left. \mu_0 (w_0^{(1)}/\xi)' + \mu_1 (w_0^{(0)}/\xi)' \right|_{\xi=1} = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

**Задача 2:**

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \left( (\lambda_0 + 2\mu_0)u_0^{(0)'} + \lambda_0 \frac{u_0^{(0)}}{\xi} \right)' + \frac{2\mu_0}{\xi} u_0^{(0)'} - \\ - \frac{2\mu_0}{\xi^2} u_0^{(0)} + \rho_0 b^2 \omega^2 u_0^{(0)} = 0, \\ \left( \xi \mu_0 v_0^{(0)'} \right)' + \rho_0 \omega^2 b^2 \xi v_0^{(0)} = 0, \\ u_0^{(0)}|_{\xi=\xi_0} = v_0^{(0)}|_{\xi=\xi_0} = 0, \\ \left. (\lambda_0 + 2\mu_0)u_0^{(0)'} + \lambda_0 \frac{u_0^{(0)}}{\xi} \right|_{\xi=1} = P_1^{(0)}, \\ \left. \mu_0 v_0^{(0)'} \right|_{\xi=1} = P_3^{(0)}. \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \left( (\lambda_0 + 2\mu_0)u_0^{(1)'} + \lambda_0 \frac{u_0^{(1)}}{\xi} + (\lambda_1 + 2\mu_1)u_0^{(0)'} + \lambda_0 \frac{u_0^{(0)}}{\xi} \right)' + \\ + \frac{2\mu_0}{\xi} u_0^{(1)'} + \frac{2\mu_1}{\xi} u_0^{(0)'} - \frac{2\mu_0}{\xi^2} u_0^{(1)} - \frac{2\mu_1}{\xi^2} u_0^{(0)} + \\ + \omega^2 b^2 (\rho_0 u_0^{(1)} + \rho_1 u_0^{(0)}) = 0, \\ \left( \xi \mu_0 v_0^{(1)'} + \xi \mu_1 v_0^{(0)'} \right)' + \omega^2 b^2 \xi (\rho_0 v_0^{(1)} + \rho_1 v_0^{(0)}) = 0, \\ u_0^{(0)}|_{\xi=\xi_0} = v_0^{(0)}|_{\xi=\xi_0} = 0, \\ \left. (\lambda_0 + 2\mu_0)u_0^{(1)'} + \lambda_0 \frac{u_0^{(1)}}{\xi} + (\lambda_1 + 2\mu_1)u_0^{(0)'} + \lambda_0 \frac{u_0^{(0)}}{\xi} \right|_{\xi=1} = \\ = 0, \quad \left. \mu_0 v_0^{(1)'} + \mu_1 v_0^{(0)'} \right|_{\xi=1} = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Решение прямых задач (2.10) и (2.12) относительно функции  $w_0^{(0)}$  и  $u_0^{(0)}, v_0^{(0)}$  при известных (заданных в дискретном наборе точек или в явном виде) функциях  $\mu_0(\xi), \rho_0(\xi), \lambda_0(\xi)$  ввиду переменности коэффициентов возможно лишь численно с привлечением конечно-разностных схем, метода пристрелки или путем сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с последующим его решением. В настоящей работе используется метод пристрелки [31].

Для решения обратной коэффициентной задачи построим итерационные процессы, на каждом шаге которых решаются системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода относительно поправок к восстанавливаемым функциям.

Для получения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода умножим дифференциальное уравнение (2.10) на  $w_0^{(1)}/\xi$ , а дифференциальное уравнение (2.11) на  $w_0^{(0)}/\xi$ , проинтегрируем по  $\xi$  в пределах  $[\xi_0, 1]$  и вычтем из первого выражения второе; с учетом граничных условий, а также дополнительного условия получаем следующее интегральное уравнение (ИУ):

$$\int_{\xi_0}^1 \left[ \mu_1 \xi^2 \left( \left( w_0^{(0)}/\xi \right)' \right)^2 - \rho_1 \omega^2 \xi^2 \left( w_0^{(0)} \right)^2 \right] d\xi = P_2^0 \left( w_0^{(0)} - f_\varphi^{(0)} \right). \quad (2.14)$$

Далее, умножим второе дифференциальное уравнение (2.12) на  $v_0^{(1)}$ , и второе дифференциальное уравнение (2.13) на  $v_0^{(0)}$ , затем проинтегрируем по  $\xi$  в пределах  $[\xi_0, 1]$  и вычтем из первого выражения второе, с учетом граничных условий и дополнительного условия получаем второе ИУ:

$$\int_{\xi_0}^1 \left[ \mu_1 \xi \left( v_0^{(0)} \right)' \right]^2 - \rho_1 \omega^2 \xi \left( v_0^{(0)} \right)^2 \right] d\xi = P_3^0 \left( v_0^{(0)} - f_z^{(0)} \right). \quad (2.15)$$

Таким образом, получили два ИУ Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами относительно функций поправок  $\mu_1(\xi), \rho_1(\xi)$ . Решение ИУ (2.12) и (2.13) ввиду их некорректности возможно с привлечением методов регуляризации, например метода А.Н. Тихонова [32]. Заметим, что ядра ИУ заданы лишь численно и согласно итерационной схеме, описанной ранее в [33–35], дополняются результатами численных решений прямых задач (2.10) при заданных начальных значениях  $\mu_0, \rho_0$  с последующей корректировкой соответствующих функций на каждом шаге итерации.

В результате работы итерационной схемы на первом этапе получены значения неизвестных функций  $\mu(\xi)$  и  $\rho(\xi)$  в наборе точек. Полученный результат далее используется при решении обратной задачи восстановления функции  $\lambda(\xi)$ .

Для формулировки интегрального уравнения относительно поправки  $\lambda_1(\xi)$  неизвестной функции  $\lambda(\xi)$  умножим первое дифференциальное уравнение (2.12) на  $u_0^{(1)}$ , а первое дифференциальное уравнение (2.13) на  $u_0^{(0)}$ , затем проинтегрируем каждое по  $\xi$  в пределах  $[\xi_0, 1]$  и вычтем из первого выражения второе. В результате получим третье ИУ Фредгольма 1-го рода с гладким ядром

$$\int_{\xi_0}^1 \left[ \lambda_1 \left( \left( \xi u_0^{(0)} \right)' \right)^2 / \xi \right] d\xi = P_1^0 \left( u_0^{(0)} - f_r^{(0)} \right). \quad (2.16)$$

Полученное ИУ позволяет построить итерационный процесс восстановления третьей функции  $\lambda(\xi)$  на втором этапе.

### 3. Вычислительные эксперименты

В соответствии с предложенным подходом были проведены вычислительные эксперименты по восстановлению неизвестных безразмерных функций  $\mu(r)$ ,  $\rho(r)$  и  $\lambda(r)$  полого цилиндрического волновода с помощью разработанных итерационных схем.

Начальное приближение строилось в классах линейных и постоянных функций, определяющихся из условия минимума функционала невязки на построенном по априорной информации компактном множестве. Выход из итерационного процесса во всех экспериментах производился либо по числу итераций ( $N = 20$ ), либо по условию величины невязки при  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Внутренний безразмерный радиус волновода  $\xi_0$  в первых двух экспериментах (примеры 1–2) полагался равным 0,2, в третьем (пример 3) рассматривался случай тонкостенного цилиндра,  $\xi_0 = 0,8$ .

Далее приведены примеры восстановления функций различного характера монотонности. На графиках сплошной линией обозначена восстанавливаемая функция, пунктиром – начальное приближение, точками – восстановленная функция.

**Пример 1.** Случай монотонно возрастающих квадратичных законов изменения неоднородных характеристик волновода  $\mu(r) = 0,5 + 0,5r^2$ ,  $\rho(r) = 0,4 + 0,35r^2$ ,  $\lambda(r) = 0,4 + 0,7r^2$ .

Начальные приближения найдены в виде  $\mu_0(r) = 0,4 + 0,55r$ ,  $\rho_0(r) = 0,35 + 0,35r$ ,  $\lambda_0(r) = 0,7$ .

В ходе анализа АЧХ для каждого из этапов для восстановления были выбраны соответственно частотные диапазоны  $k \in [2, 6.2]$  и  $k \in [5.5, 8.2]$ , для первого этапа потребовалось 11 итераций, для второго 6 итераций. Погрешность не превосходит 3%. На рис. 1 и 2 представлены результаты восстановления для первого и второго этапов соответственно.

**Пример 2.** Случай немонотонных законов изменения неоднородных характеристик волновода:

$$\mu(r) = 0.5 + 0.5 \sin(\pi(r + 0.15)),$$

$$\rho(r) = 0.4 + 0.35 \sin(\pi(r - 0.2)),$$

$$\lambda(r) = 0.8 + 0.25 \cos(2\pi(r - 0.1)).$$

Начальные приближения найдены в виде  $\mu_0(r) = 1 - 0.4r$ ,  $\rho_0(r) = 0.45 + 0.35r$ ,  $\lambda_0(r) = 0.7$ .

Для восстановления были выбраны частотные диапазоны  $k \in [2.4, 5.38]$  и  $k \in [5.5, 8.5]$ , потребовалось 9 и 5 итераций соответственно (рис. 3–4). Погрешность не превосходит 8%.

**Пример 3.** Случай монотонных и немонотонных законов изменения неоднородных характеристик волновода:  $\mu(r) = 1.2 - 0.05e^{3r^2}$ ,  $\rho(r) = 0.1 + 0.07e^{2r^2}$ ,  $\lambda(r) = 0.8 + 0.25 \cos(2\pi(r - 0.1))$ .

Начальные приближения найдены в виде  $\mu_0(r) = 3.3 - 3r$ ,  $\rho_0(r) = 1.1r - 0.5$ ,  $\lambda_0(r) = 0.8$ .

Для восстановления были выбраны частотные диапазоны  $k \in [2.2, 5.5]$  и  $k \in [12, 14]$ , потребовалось 7 и 5 итераций соответственно (рис. 5–6). Погрешность не превосходит 8%.

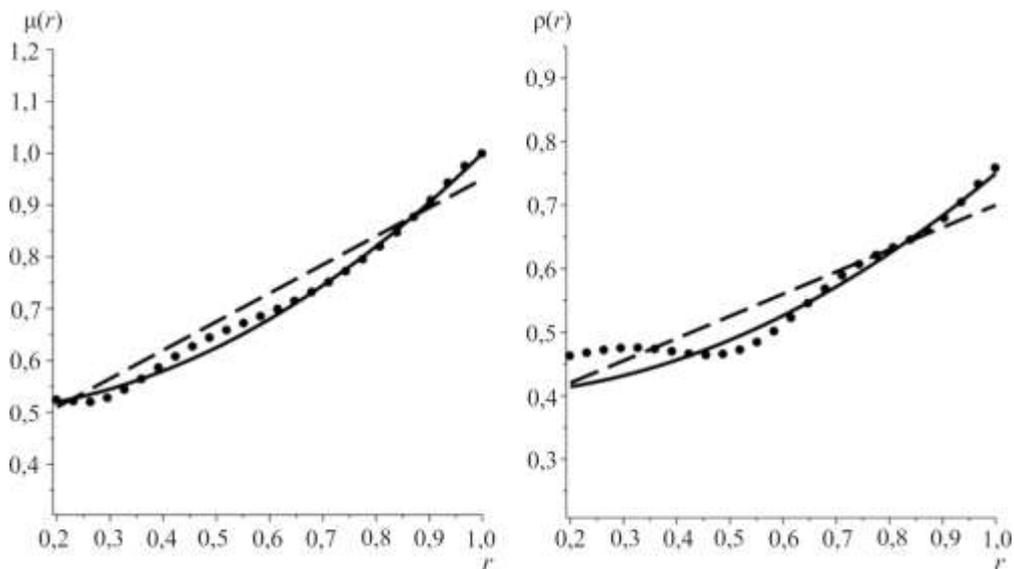


Рис. 1. Восстановление монотонных функций  $\mu(r)$  и  $\rho(r)$  на первом этапе  
 Fig.1. Restoring monotonous functions  $\mu(r)$  and  $\rho(r)$  at the first stage

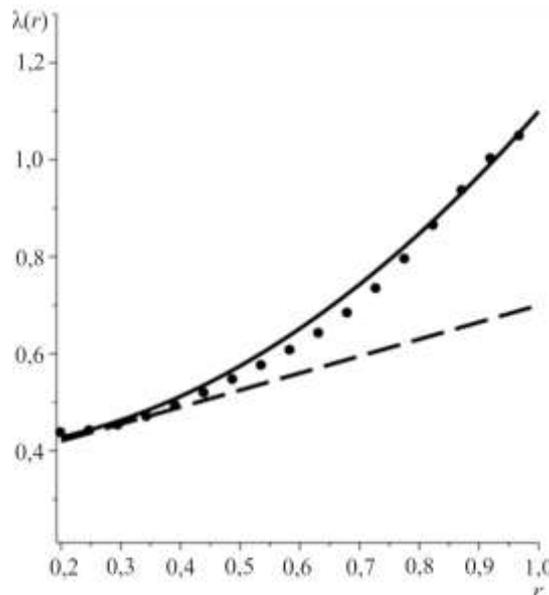


Рис. 2. Восстановление монотонной функции  $\lambda(r)$  на втором этапе  
 Fig. 2. Restoring monotonous functions  $\lambda(r)$  at the second stage

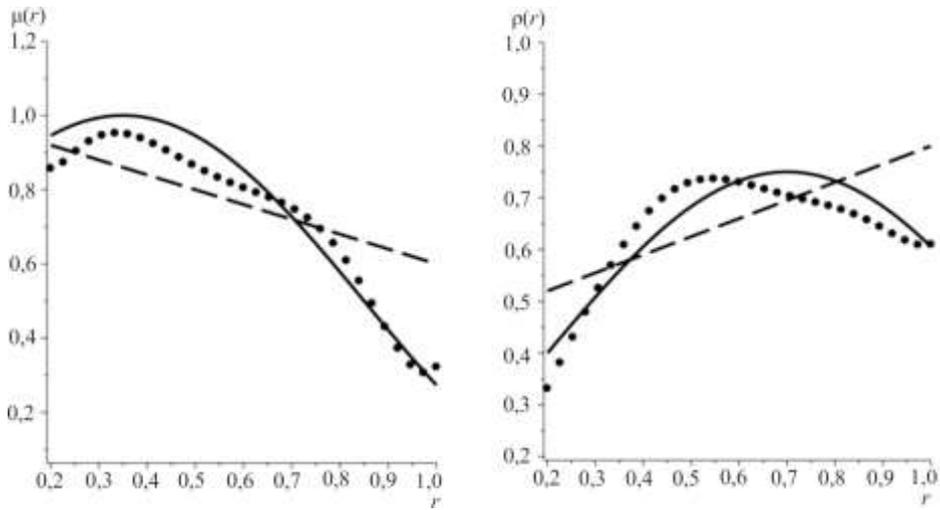


Рис. 3. Восстановление немонотонных функций  $\mu(r)$  и  $\rho(r)$  на первом этапе  
 Fig. 3. Restoring unmonotonous functions  $\mu(r)$  and  $\rho(r)$  at the first stage

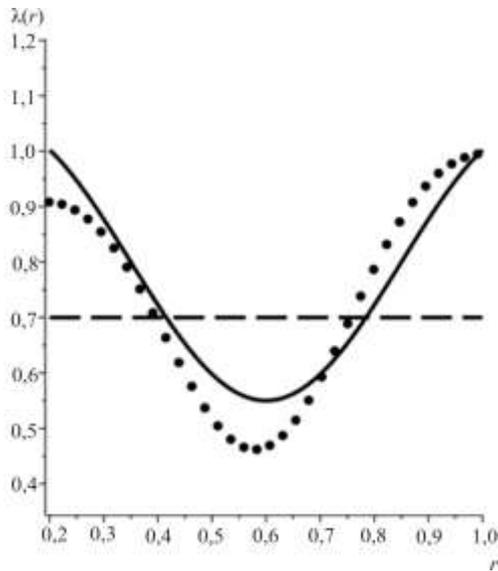


Рис. 4. Восстановление немонотонной функции  $\lambda(r)$  на втором этапе  
 Fig. 4. Restoring unmonotonous function  $\lambda(r)$  at the second stage

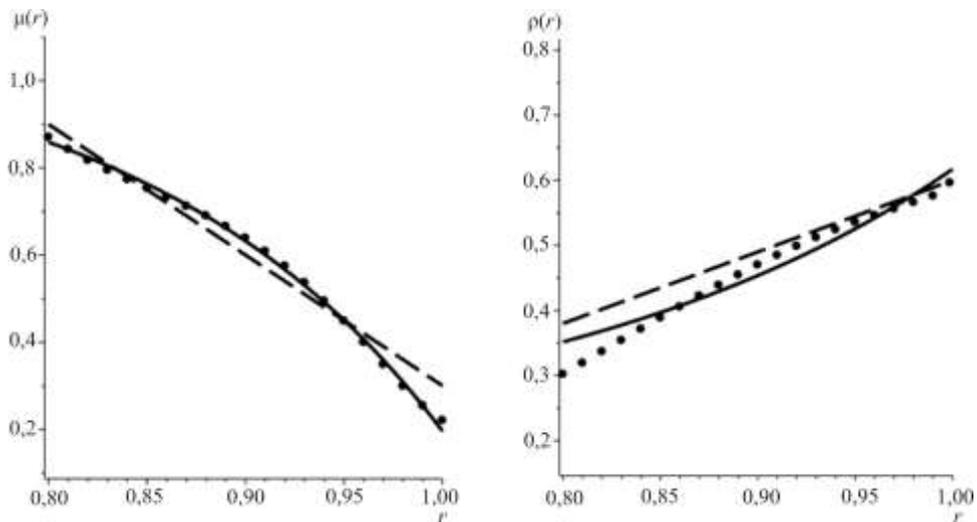


Рис. 5. Восстановление функций  $\mu(r)$  и  $\rho(r)$  для тонкостенного волновода на первом этапе  
 Fig. 5. Restoring functions  $\mu(r)$  and  $\rho(r)$  for a thin-walled waveguide at the first stage

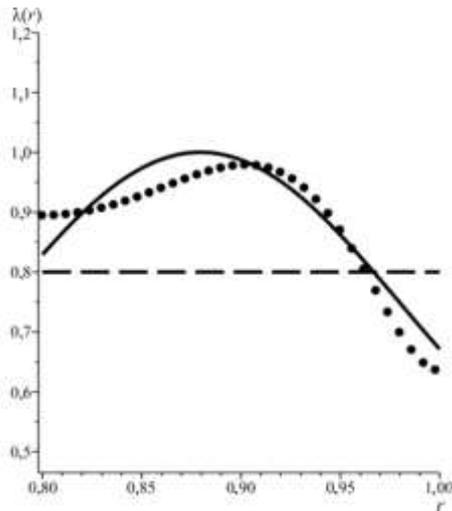


Рис. 6. Восстановление функции  $\lambda(r)$  для тонкостенного волновода на втором этапе  
 Fig. 6. Restoring function  $\lambda(r)$  for a thin-walled waveguide at the second stage

Заметим, что функция, характеризующая плотность, восстанавливается хуже, чем параметры Ламе. В особенности это касается окрестности внутреннего радиуса. Также для тонкостенных волноводов восстановление характеристик производится с большей погрешностью, чем для толстостенных.

Далее представлены результаты экспериментов по восстановлению параметров Ламе и плотности неоднородного функционально-градиентного покрытия, нанесенного на цилиндрический волновод и рассматривающегося как его составная часть, на основе описанной схемы. При этом предполагалось, что характеристики основного волновода известны, и требуется определить неизвестные характеристики самого покрытия и промежуточной зоны проникновения материала покрытия в основной материал (промежуточного слоя), которое может быть вызвано особенностями технологического процесса (например, спекания, оплавления). Толщина слоя, свойства которого требуется определить (зоны идентификации), состоит из толщины самого покрытия и толщины промежуточного слоя и, как правило, приблизительно известна, исходя из априорных данных и характеристик технологического процесса нанесения и закрепления покрытия. При этом в промежуточном слое обычно наблюдается существенный градиентный скачок характеристик при переходе от основного материала к материалу неоднородного покрытия.

Для приведенных ниже примеров 4 и 5 внутренний радиус волновода полагался равным  $a = 0.5$ . Толщина зоны идентификации, отложенной от внешнего радиуса, полагалась равной 0,1, и изложенная выше схема доработана с учетом необходимости восстановления искомых функций-характеристик лишь в зоне идентификации  $r \in (0.9, 1]$ . В ней же производился поиск начальных приближений в классе констант.

**Пример 4.** Случай упрочняющего покрытия:

$$\mu(r) = \begin{cases} 0.2, & r \in [0.5, 0.9], \\ 10(r - 0.88), & r \in (0.9, 1], \end{cases}$$

$$\rho(r) = \begin{cases} 0.15, & r \in [0.5, 0.9], \\ 10(0.5r - 0.87), & r \in (0.9, 1], \end{cases}$$

$$\lambda(r) = \begin{cases} 0.4, & r \in [0.5, 0.9], \\ 10(0.9r - 0.77), & r \in (0.9, 1]. \end{cases}$$

Начальные приближения найдены в виде

$$\mu_0(r) = \begin{cases} 0.2, & r \in [0.5, 0.9], \\ 0.7, & r \in (0.9, 1], \end{cases}$$

$$\rho_0(r) = \begin{cases} 0.15, & r \in [0.5, 0.9], \\ 0.4, & r \in (0.9, 1], \end{cases}$$

$$\lambda_0(r) = \begin{cases} 0.4, & r \in [0.5, 0.9], \\ 0.9, & r \in (0.9, 1]. \end{cases}$$

Для восстановления были выбраны частотные диапазоны  $k \in [2.82, 7.1]$  и  $k \in [9.4, 18.6]$ , потребовалось 12 и 7 итераций соответственно (рис. 7–8).

**Пример 5.** Случай низкомодульного покрытия:

$$\mu(r) = \begin{cases} 1, & r \in [0.5, 0.9], \\ 0.6 - 0.4th(75r - 70), & r \in (0.9, 1], \end{cases}$$

$$\rho(r) = \begin{cases} 0.9, & r \in [0.5, 0.9], \\ 0.65 - 0.25th(75r - 70), & r \in (0.9, 1], \end{cases}$$

$$\lambda(r) = \begin{cases} 1.5, & r \in [0.5, 0.9], \\ 1 - 0.5th(75r - 70), & r \in (0.9, 1]. \end{cases}$$

Начальные приближения найдены в виде

$$\mu_0(r) = \begin{cases} 1, & r \in [0.5, 0.9], \\ 0.65, & r \in (0.9, 1], \end{cases}$$

$$\rho_0(r) = \begin{cases} 0.9, & r \in [0.5, 0.9], \\ 0.65, & r \in (0.9, 1], \end{cases}$$

$$\lambda_0(r) = \begin{cases} 1.5, & r \in [0.5, 0.9], \\ 1.05, & r \in (0.9, 1]. \end{cases}$$

Для восстановления были выбраны частотные диапазоны  $k \in [4.1, 8.8]$  и  $k \in [7.7, 18.5]$ , потребовалось 14 и 7 итераций соответственно (рис. 9–10).

Погрешность идентификации характеристик покрытия в обоих примерах не превосходит 12 % на границах зоны идентификации и 6 % внутри этой зоны.

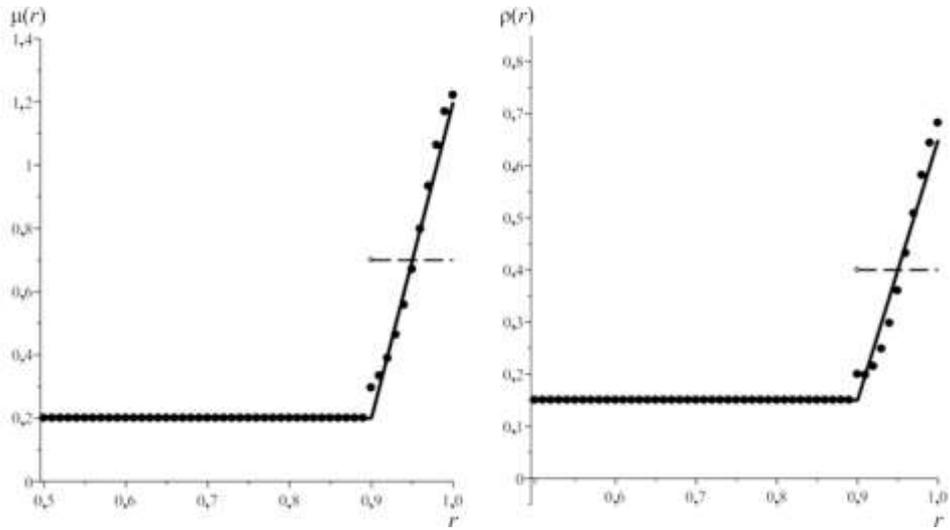


Рис. 7. Восстановление функций  $\mu(r)$  и  $\rho(r)$  для упрочняющего покрытия на первом этапе  
Fig. 7. Restoring functions  $\mu(r)$  and  $\rho(r)$  for a strengthening coating at the first stage

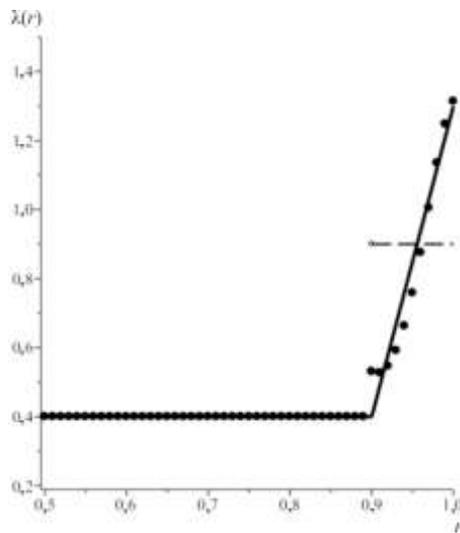


Рис. 8. Восстановление функции  $\lambda(r)$  для упрочняющего покрытия на втором этапе  
Fig. 8. Restoring function  $\lambda(r)$  for a strengthening coating at the second stage

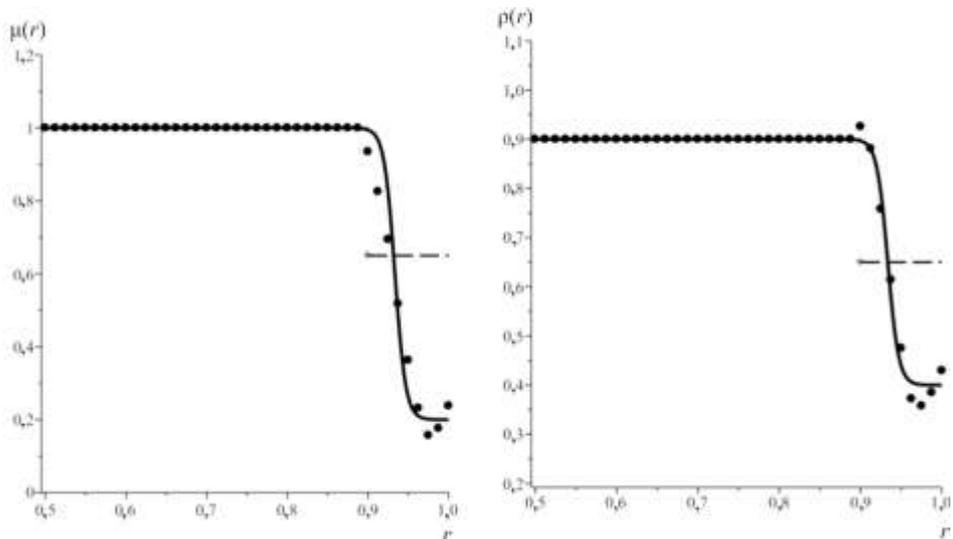


Рис. 9. Восстановление функций  $\mu(r)$  и  $\rho(r)$  для низко модульного покрытия на первом этапе  
Fig. 9. Restoring functions  $\mu(r)$  and  $\rho(r)$  for a low-module coating at the first stage

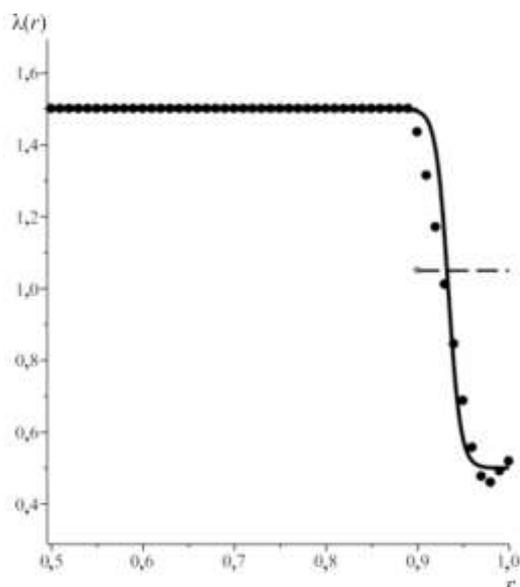


Рис. 10. Восстановление функции  $\lambda(r)$  для низко модульного покрытия на втором этапе  
 Fig. 10. Restoring function  $\lambda(r)$  for a low-module coating at the second stage

### Библиографический список

1. Панфилов И.А., Устинов Ю.А. Колебания и волны в цилиндре с винтовой анизотропией // Акустический журнал. – 2010. – Т. 56, № 6. – С. 759–766.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
3. Моисеенко И.А., Троян Р.Р. Нормальные волны в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с сечением в форме кольцевого сектора // МТТ. – 2006. – Вып. 36. – С. 127–133.
4. Baba S., Keles I. A Novel Approach to Forced Vibration Behavior of Thick-Walled Cylinders // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2015. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2015.04.015.
5. Marchuk A.V., Gnedash S.V., Levkovskii S.A. Free and Forced Vibrations of Thick-Walled Anisotropic Cylindrical Shells // International Applied Mechanics. – 2017. – Vol. 53. – No. 2. – P. 181–195.
6. Безруков А.В., Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. Рассеяние звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акустический журнал. – 1986. – Т. 32, № 6. – С. 762–766.
7. Ахмедов, Н. К. Распространение крутильных волн в радиально-слоистом цилиндрическом волноводе // Изв. Рос. акад. наук. Сер. Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 114–123.
8. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным упругим полым цилиндром в вязкой жидкости // Изв. ТГУ. Естественные науки. – 2009. – Вып. 1. – С. 61–70.
9. Ватульян А.О., Моргунова А.В. Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами // Акустический журнал. – 2015. – № 3. – С. 295–301.
10. Ватульян А.О., Юров В.О. Волновые процессы в полом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений // ПМТФ. – 2016. – № 4. – С. 182–191.
11. Identification of inhomogeneous residual stress state in elastic cylinder within the framework of plane strain / I.V. Boga-

### Заключение

Таким образом, в результате применения предложенной схемы идентификации неоднородных свойств волновода удается с достаточно неплохой точностью восстановить три функции: коэффициенты Ляме и плотность, что подтверждает работоспособность предлагаемого подхода. Также отметим, что разработанная схема оказалась применимой для идентификации характеристик функционально-градиентных покрытий, нанесенных на волновод, имеющих существенно отличные физические свойства.

### Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке РФФ (код проекта 18-11-00069).

### Acknowledgements

The work was partly supported by the Russian Science Foundation (Project ID 18-11-00069).

- chev, V.V. Dudarev, R.D. Nedin, A.O. Vatulyan // Advanced Materials Research. – 2014. – Vol. 996. – P. 404–408.
12. Vaziri Astaneh A., Guddati M.N. Dispersion analysis of composite acousto-elastic waveguides // Composites Part B: Engineering. – 2017. – Vol. 130. – P. 200–216. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.07.040.
13. Роганова Н.А., Шарафутдинов Г.З. Об идентификации механических свойств неоднородных материалов // Изв. РАН. МТТ. – 2012. – № 4. – С. 89–96.
14. Jabbari M., Nejad M.Z., Ghannad M. Thermo-elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylindrical pressure vessels with variable thickness under mechanical loading // International Journal of Engineering Science. – 2015. – No. 96. – P. 1–18.
15. Назаров С.А. Асимптотика частот упругих волн, захваченных малой трещиной в цилиндрическом волноводе // МТТ. – 2010. – № 6. – С. 112–122.
16. Bischoff S., Schaal C., Gaul L. Efficient wavescattering analysis for damaged cylindrical waveguides // Journal of Sound and Vibration. – 2014. – Vol. 333. – No. 18. – P. 4203–4213.
17. Karimi M., Ghassemi A. Torsion analysis of a hollow cylinder with an orthotropic coating weakened by multiple cracks // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2017. – No. 90. – P. 110–121.
18. Hassani A.R., Faal R.T. Torsion analysis of cracked circular bars actuated by a piezoelectric coating // Smart Materials and Structures. – 2016. – No. 25. – P. 125–130.
19. Investigation of the dispersion relations of surface acoustic waves propagating on a layered cylinder / U. Kawald, C. Desmet, W. Lauriks, C. Glorieux, J. Thoen // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1996. – Vol. 99. – No. 2. – P. 926–930.
20. Mohammadi M., Saha G.C., Akbarzadeh A.H. Elastic field in composite cylinders made of functionally graded coatings // International Journal of Engineering Science. – 2016. – Vol. 101. – P. 156–170.

21. Surface waves in materials with functionally gradient coatings / E.V. Glushkov, N.V. Glushkova, S.I. Fomenko, C. Zhang // *Acoustical Physics*. – 2012. – Vol. 58. – No. 3. – P. 339–353.

22. Cylindrical Rayleigh surface waves on a layer-coated cylinder measured by PVDF transducer and defocusing measurement method / Chun-I Lin, Yan Lu, Cunfu Heb, Guorong Song, Yung-Chun Lee // *NDT & E International*. – 2015. – Vol. 74. – P. 43–49.

23. Tandem cylinder aerodynamic sound control using porous coating / Hanru Liu, Mahdi Azarpeyvand, Jinjia Wei, Zhiguo Qu // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Vol. 334 – P. 190–201.

24. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // *Прикладная математика и механика*. – 2011. – Т. 75. – Вып. 5. – С. 850–857.

25. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // *Изв. ТГУ. Естественные науки*. – 2013. – Вып. 3. – С. 202–208.

26. Толоконников Л.А. Моделирование дискретно-слоистого покрытия упругого цилиндра радиально-неоднородным слоем в задаче рассеяния звука // *Изв. ТГУ. Естественные науки*. – 2014. – Вып. 2 – С. 194–202.

27. Абзалимов Р.Р., Ахтямов А. М. Диагностика и виброзащита трубопроводных систем и хранилищ. – Уфа: Изд-во Уфим. гос. нефт. техн. ун-та, 2016. – 118 с.

## References

1. Panfilov I.A., Ustinov Y.A. Kolebaniya i volny v cilindre s vintovoi anizotropiei [Vibrations and waves in a cylinder with a helical anisotropy] *Acoustical Physics*, 2010, vol. 56, no. 6, pp. 759-766.

2. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugih telah [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies] *Kiev, Nauk. dumka*, 1981, 284 p.

3. Moiseenko I.A., Troyan R.R. Normal'nye volny v transversal'no-izotropnom cilindricheskom volnovode s secheniem v forme kol'cevogo sektora [Normal waves in a transversally isotropic cylindrical waveguide with a cross section in the form of an annular sector]. *Mekhanika tverdogo tela*, 2006, Vol. 36, pp.127-133.

4. Baba S., Keles I. A Novel approach to forced vibration behavior of thick-walled cylinders. *International journal of pressure vessels and piping*, 2015, DOI: 10.1016/j.ijpvp.2015.04.015.

5. Marchuk A. V., Gnedash S. V., Levkovskii S. A. Free and Forced Vibrations of Thick-Walled Anisotropic Cylindrical Shells. *International Applied Mechanics*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 181-195.

6. Bezrukov A.V., Prihod'ko V.Yu., Tyutekin V.V. Rasseyanie zvukovykh voln uprugimi radial'no-sloistymi cilindricheskimi telami [Scattering of sound waves by elastic radial-layered cylindrical bodies]. *Acoustical Physics*, 1986, vol. 32, no. 6, pp. 762-766.

7. Ahmedov N.K. Rasprostranenie krutil'nykh voln v radial'no-sloistom cilindricheskom volnovode [Propagation of torsional waves in a radially layered cylindrical waveguide]. *RSA. MSB*, 2008, no. 2, pp.114-123.

8. Romanov A.G., Tolokonnikov L.A. Rasseyanie ploskoj zvukovoy volny neodnorodnym uprugim polym cilindrom v vyazkoj zhidkosti [Scattering of a plane sound wave by an inhomogeneous elastic hollow cylinder in a viscous liquid]. *Izvestiya TSU. Natural science*, 2009, vol. 1, pp. 61-70.

9. Vatulyan A.O., Morgunova A.V. Issledovanie dispersionnykh svoystv cilindricheskikh volnovodov s peremennymi svoystvami [Study of the dispersion properties of cylindrical waveguides with

28. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Влияние неоднородного покрытия на прохождение звука через упругую оболочку // *Изв. ТГУ. Естественные науки*. – 2013. – Вып. 3. – С. 179–192.

29. Sofiyev A.H. The vibration and buckling of sandwich cylindrical shells covered by different coatings subjected to the hydrostatic pressure // *Composite Structures*. – 2014. – Vol. 117. – P. 124–134.

30. Ворович И.И., Бабешко В.В. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1989. – 320 с.

31. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

32. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

33. Bogachev I.V., Yavruyan O.V., Vatulyan A.O. Identifying the Elastic Properties of an Inhomogeneously Thick Layer // *Acoustical Physics. Classical Problems of Linear Acoustics and Wave Theory*. – 2011. – Vol. 57. – No. 6. – P. 741–748.

34. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer // *International Journal of Solids and Structures*. – 2014. – Vol. 51 – No. 12. – P. 2238–2243.

35. Concerning Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder / I.V. Bogachev, R.D. Nedin, A.O. Vatulyan, O.V. Yavruyan // *ZAMM: Z. angew. Math. Mech.* – 2017. – Vol. 97. – No. 3. – P. 358–364.

variable properties]. *Acoustical Physics. Classical problems of linear acoustics and wave theory*, 2015, no. 3, pp. 295-301.

10. Vatulyan A.O., Yurov V.O. Volnovye processy v polom cilindre v pole neodnorodnykh predvaritel'nykh napryazhenij [Wave processes in a hollow cylinder in an inhomogeneous prestress field]. *Journal of applied mechanics and technical physics*, 2016, no. 4, pp. 182-191.

11. Bogachev I.V., Dudarev V.V., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Identification of inhomogeneous residual stress state in elastic cylinder within the framework of plane strain. *Advanced materials research*, 2014, vol. 996, pp. 404-408.

12. Vaziri Astaneh A., Guddati M.N. Dispersion analysis of composite acousto-elastic waveguides. *Composites Part B: Engineering*, 2017, Vol. 130, pp. 200-216. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.07.040.

13. Roganova N.A., Sharafutdinov G.Z. Ob identifikatsii mekhanicheskikh svoystv neodnorodnykh materialov [On the identification of mechanical properties of heterogeneous materials]. *Mechanics of Solids*, 2012, no. 4, pp. 89-96.

14. Jabbari M., Nejad M. Z., Ghannad M. Thermo-elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylindrical pressure vessels with variable thickness under mechanical loading. *International Journal of Engineering Science*, 2015, no. 96, pp. 1-18.

15. Nazarov S.A. Asimptotika chastot uprugih voln, zahvachennykh maloj treshchinoj v cilindricheskom volnovode [Asymptotics of elastic wave frequencies captured by a small crack in a cylindrical waveguide]. *Mechanics of Solids*, 2010, no. 6, pp. 112-122.

16. Bischoff S., Schaal C., Gaul L. Efficient wavescattering analysis for damaged cylindrical waveguides // *Journal of Sound and Vibration*, 2014, vol. 333, no. 18, pp. 4203-4213.

17. Karimi M., Ghassemi A. Torsion analysis of a hollow cylinder with an orthotropic coating weakened by multiple cracks. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2017, no. 90, pp. 110-121.

18. Hassani A.R., Faal R.T. Torsion analysis of cracked circular bars actuated by a piezoelectric coating. *Smart Materials and Structures*, 2016, no. 25, pp. 125-130.

19. Kawald U., Desmet C., Lauriks W., Glorieux C., Thoen J. Investigation of the dispersion relations of surface acoustic waves propagating on a layered cylinder. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1996, vol. 99, no 2, pp. 926-930.
20. Mohammadi M., Saha G.C., Akbarzadeh A.H. Elastic field in composite cylinders made of functionally graded coatings. *International Journal of Engineering Science*, 2016, vol. 101, pp. 156-170.
21. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Fomenko S.I., Zhangb C. Surface waves in materials with functionally gradient coatings. *Acoustical Physics*, 2012, vol. 58, no. 3, pp. 339-353.
22. Chun-I Lin, Yan Lu, Cunfu Heb, Guorong Song, Yung-Chun Lee Cylindrical Rayleigh surface waves on a layer-coated cylinder measured by PVDF transducer and defocusing measurement method. *NDT & E International*, 2015, vol. 74, pp. 43-49.
23. Hanru Liu, Mahdi Azarpeyvand, Jinjia Wei, Zhiguo Qu Tandem cylinder aerodynamic sound control using porous coating. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, vol. 334, no. 18, pp. 190-201.
24. Romanov A.G., Tolokonnikov L.A. Rasseyanie zvukovykh voln cilindrom s neodnorodnym uprugim pokrytiem [Scattering of sound waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, Vol. 75, no. 5, pp. 850-857.
25. Tolokonnikov L.A. Difrakciya cilindricheskikh zvukovykh voln na cilindre s neodnorodnym uprugim pokrytiem [Diffraction of cylindrical sound waves on a cylinder with a non-uniform elastic coating]. *Izvestiya TSU. Natural science*, 2013, no. 3, pp. 202-208.
26. Tolokonnikov L.A. Modelirovanie diskretno-sloistogo pokrytiya uprugogo cilindra radial'no-neodnorodnym sloem v zadache rasseyaniya zvuka [Simulation of discrete-layered coating of an elastic cylinder by a radially inhomogeneous layer in the sound scattering problem]. *Izvestiya TSU. Natural science*, 2014, no. 2, pp. 194-202.
27. Abzalimov R.R., Ahtyamov A. M. Diagnostika i vibrozashchita truboprovodnykh sistem i hranilishch [Diagnostics and vibration protection of pipeline systems and storage facilities]. *Ufa state oil technical University*, 2016, 118 p.
28. Ivanov V.I., Skobel'cyn S.A. Vliyanie neodnorodnogo pokrytiya na prohozhdenie zvuka cherez upruguyu obolochku [Effect of non-uniform coating on the passage of sound through the elastic shell]. *Izvestiya TSU. Natural science*, 2013, no. 3, pp. 179-192.
29. Sofiyev A.H. The vibration and buckling of sandwich cylindrical shells covered by different coatings subjected to the hydrostatic pressure. *Composite Structures*, 2014, vol. 117, pp. 124-134.
30. Vorovich I.I., Babeshko V.V. Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey [Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains]. *Moscow, Nauka*, 1989, 320 p.
31. Kalitkin N.N. CHislenyye metody [Numerical methods]. *Moscow, Nauka*, 1978, 512 p.
32. Tihonov A.N., Arsenin V.YA. Metody resheniya nekorrektnykh zadach. [Methods of ill-posed problems solving]. *Moscow, Nauka*, 1986, 288 p.
33. Bogachev I.V., Yavruyan O.V., Vatulyan A.O. Identifying the elastic properties of an inhomogeneously thick layer. *Acoustical Physics. Classical problems of linear acoustics and wave theory*, 2011, vol. 57, no 6, pp. 741-748.
34. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, no. 12, pp. 2238-2243.
35. Bogachev I.V., Nedin R.D., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Concerning Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder. *ZAMM: Z. angew. Math. Mech.* 2017, vol. 97, no. 3, pp. 358-364.