



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.10

УДК 004.94: 621.01

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ НЕОДНОРОДНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ СКАНИРОВАНИЯ

А.А. Пыхалов^{1,2}, В.Л. Зыонг², В.Г. Толстиков²

¹Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

²Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 27 сентября 2018 г.

Принята: 09 ноября 2018 г.

Опубликована: 28 декабря 2018 г.

Ключевые слова:

математическое моделирование, сканирование, деформируемое твердое тело, растровое изображение, метод конечных элементов, неоднородность механических характеристик материала, индивидуальность геометрии.

АННОТАЦИЯ

Представлены комплекс математических методов и их компьютерная реализация, предназначенные для получения и исследования реальной картины изменения механических характеристик (модуля упругости) и геометрии деформируемых твердых тел (ДТТ) на основе сканирования, с дальнейшим использованием этих данных при построении их конечно-элементных (КЭ) моделей и анализе напряженно-деформированного состояния (НДС). Представленное исследование наиболее актуально для ДТТ сложной (индивидуальной) геометрической формы с ярко выраженными свойствами неоднородности механических характеристик материала.

Сканирование ДТТ проводится компьютерным томографом (КТ). В результате его работы формируется пакет растровых изображений сечений исследуемого тела. Дальнейший этап исследования определяется анализом пиксельной характеристики полученных растровых изображений на предмет построения индивидуальной геометрии ДТТ и распределения в нем механических характеристик.

Контур внешней геометрии и геометрии внутренней структуры ДТТ в сечении строится на основе двух этапов: первый является предварительным и необходим для выделения в сечениях области определения как самого тела, так и областей в нем с ярко выраженными изменениями механических характеристик. На втором этапе проводится уточнение геометрии контуров на основе метода исследования градиентов изменения индексов цвета пикселей.

Определение поля изменения механических характеристик осуществляется посредством вычисления весовых коэффициентов, получаемых на основе двух параметров: математического ожидания изменения индекса цвета пикселей в пакете сечений ДТТ, а также результатов натурального испытания на растяжение (сжатие) стандартных образцов, то есть осредненных данных о механических характеристиках материала ДТТ.

В качестве объекта исследования использованы ДТТ из костной ткани в виде фрагмента бедренной кости, зуба человека в челюсти и зуба с композитной пломбой в челюсти. Представленный выбор ДТТ не принципиален, но обусловлен следующими обстоятельствами: высокая степень неоднородности материала кости и индивидуальность её геометрии, а также высокий уровень развития технологии сканирования КТ в медицине и технике.

Результаты анализа НДС КЭ-моделей реальных ДТТ, полученные с учетом неоднородности механических характеристик материала и индивидуальности геометрии, позволяют выйти на более высокий уровень реалистичности математической КЭ-модели относительно реального объекта, а также доказывают эффективность и точность использования представленной технологии в реальных условиях проектирования, изготовления и работы конструкций.

© ПНИПУ

© Пыхалов Анатолий Александрович – д.т.н., проф., email: pykhalov_aa@mail.ru, [ID 0000-0002-7780-6948](https://orcid.org/0000-0002-7780-6948)

Зыонг Ван Лам – асп., email: bright1388@mail.ru, [ID 0000-0001-5605-1323](https://orcid.org/0000-0001-5605-1323)

Толстиков Виталий Геннадьевич – асп., email: tolstikovvg@mail.ru, [ID 0000-0002-8140-2946](https://orcid.org/0000-0002-8140-2946)

Anatolii A. Pyhalov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: pikhalov_aa@irgups.ru, [ID 0000-0002-7780-6948](https://orcid.org/0000-0002-7780-6948)

Van Lam Duong – PhD Student, email: bright1388@mail.ru, [ID 0000-0001-5605-1323](https://orcid.org/0000-0001-5605-1323)

Vitalii G. Tolstikov – PhD Student, email: tolstikovvg@mail.ru, [ID 0000-0002-8140-2946](https://orcid.org/0000-0002-8140-2946)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

CONSTRUCTION AND ANALYSIS OF FINITE-ELEMENT MODELS OF INHOMOGENEOUS DEFORMABLE SOLIDS BASED ON SCANNING

A.A. Pykhalov^{1,2}, V.L. Duong², V.G. Tolstikov²

¹Irkutsk State University of Railway Transport, Irkutsk, Russian Federation

²Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 September 2018

Accepted: 09 November 2018

Published: 28 December 2018

Keywords:

mathematical modeling, scanning, deformable solid, raster image, finite element method, inhomogeneity of material mechanical, the individuality of the geometry.

ABSTRACT

The paper presents a set of mathematical methods and its computer implementation aimed at studying the real change in mechanical characteristics (elastic modulus) and the geometry of deformable solids based on scanning. Later these data will be used in constructing the finite element (FE) models and analyzing the stress-strain state (SSS). The presented research is important for deformable solids of complex (individual) geometric shapes and pronounced properties of inhomogeneity of the material mechanical characteristics.

The scanning of the deformable solids is carried out by a computer tomography (CT). As a result of this work we prepared a package of raster images of sections of the investigated body. The further stage of the investigation is determined by analyzing the pixel color characteristics of the resulting raster images for the construction of an individual geometry of deformable solids and the distribution of mechanical characteristics in it.

The contour of the external geometry and geometry of the internal structure of deformable solids in the cross-section is constructed based on two stages. The first stage is the preliminary one; and is necessary for the determination in the sections of the domain, both of the body itself and of the regions in it with pronounced changes in the mechanical characteristics. At the second stage, the geometry of the contours is refined, formed based on the method of studying the gradients of the change in the pixel color indices.

The determination of the field of the change in mechanical characteristics is carried out by calculating the weight coefficients obtained on the basis of two parameters: the mathematical expectation of a change in the pixel color index in the package of sections of deformable solids; as well as the results of a full-scale test on the tensile (compression) of standard samples, that is, the averaged data on the mechanical properties of the material of deformable solids.

We studied the deformable solids from bone tissue, in the form of a fragment of the femur, a human tooth in the jaw and a tooth with a composite seal in the jaw. The presented choice of deformable solids is not principled, but is caused by the following circumstances: a high degree of heterogeneity of bone material and its geometry, as well as a high level of development of CT scanning technology in medicine and engineering.

The analysis results of the SSS of the obtained FE models of real deformable solids, obtained taking into account the inhomogeneity of the mechanical characteristics of the material and the individuality of the geometry, allow us to reach a higher level realization of the mathematical finite element model with respect to the real object, and also prove efficiency and accuracy of the presented technology in real working conditions (design and manufacturing) of structures.

© PNRPU

Введение

В современных научно-исследовательских и опытно-конструкторских работах все активнее развивается практика математического моделирования объектов методом конечных элементов (МКЭ), который позволяет решать широкий спектр задач и, в частности, эффективно проводить анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) твердых тел. Развитие представленного математического моделирования направлено на получение конечно-элементной (КЭ) модели деформируемого твердого тела (ДТТ), максимально соответствующей реальному объекту, что напрямую зависит от задания в модели геометрических параметров и механических характеристик.

Определение этих характеристик в КЭ-модели ДТТ в современной практике предполагает допущения, вызванные, например, их осреднением, что в итоге оказывает влияние на точность результатов использования (анализа) математической модели. То есть традиционно механические характеристики ДТТ определяются на основе результатов испытания стандартных образцов, что и приводит к использованию в КЭ-модели их осредненных значений. Тогда как в пределах детали и даже образца наблюдается существенная неоднородность (рис. 1) механических характеристик материала. Представленные упрощения в модели реальных изделий (ДТТ) могут привести к неточной оценке их надежности и долговечности.

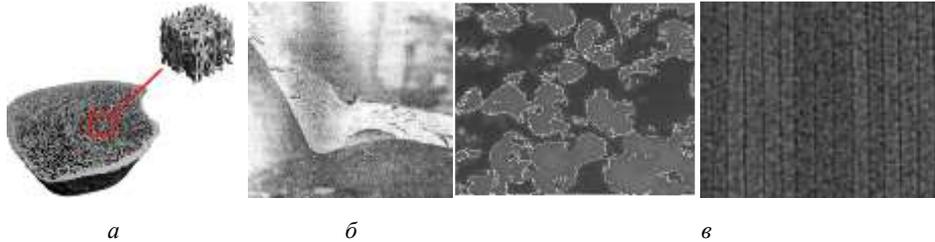


Рис. 1. Примеры материалов с неоднородной структурой: *a* – костная ткань [1]; *b* – металл; *c* – композиционный материал
 Fig. 1. Examples of materials with heterogeneous structure: *a* – bone; *b* – metal; *c* – composite material

1. Материалы и методы исследования

Для решения представленной проблемы, построения и анализа НДС КЭ-моделей реальных ДТТ, в настоящей работе предлагается использовать технологию сканирования [2], которая может быть построена на *любом физическом принципе* (рентгеновский, акустический, радиационный и др.) с получением в результате цифрового изображения в некотором наборе сечений изучаемого ДТТ. В настоящее время, например, интенсивно развивается и используется сканирование компьютерным томографом (КТ).

Однако на пути реализации этого подхода, определения реального изменения механических характеристик материала ДТТ и его индивидуальной геометрии стоит проблема разработки комплекса математических методов и алгоритмов компьютерной реализации, позволяющих использовать технологию КТ-сканирования.

Общая блок-схема алгоритма построения КЭ-моделей реальных ДТТ с использованием технологии КТ-сканирования представлена на рис. 2.

На начальном этапе (см. рис. 2, *блок 1*) проводится предварительная оценка неоднородности структуры и геометрии изучаемого ДТТ по параметрам: степень неоднородности структуры и механических характеристик; особенность и степень нерегулярности геометрии, наличие контактирующих тел, внешние условия, обзор данных натуральных испытаний и др.

В зависимости от результатов предварительной оценки изучаемого ДТТ проводятся выбор типа КТ (рис. 3) и формирование настроек (рис. 2, *блок 2*) процесса сканирования [3, 4, 5]. Важными настройками для получения необходимого результата являются только некоторые. К ним относятся: шаг сканирования, основное и дополнительные направления сканирования, размер и тип формата полученных данных сканирования, которые формируются в виде растровых изображений сечений ДТТ (см. рис. 2, *блок 3*). Каждое из этих изображений сохраняется в памяти компьютера в виде матрицы индексов цвета (см. рис. 2, *блок 4*).

На рис. 4 представлено определение системы координат пакета растровых изображений и способ выделения области изучаемого объекта на изображении. Для примера выбрано изображение сечения бедренной кости человека, в котором индексы цвета изменяются от 0 (абсолютно черный цвет) до 255 (абсолютно белый цвет).

Геометрия сечения определяется, как внешним контуром, так и контурами внутренней структуры материала в нем (см. рис. 2, *блок 5*). Для реализации их построения используются два этапа. На первом из них, проводится выделение областей с ярко выраженными изменениями механических характеристик. Оно осуществляется с использованием математических функций «0–1» и «0–1–2». Его целью является построение предварительных контуров в сечении (внешней геометрии и внутренней структуры) и определение временного центра тяжести в них (рис. 5). Линия контура определяется координатами пикселей на краях областей.

На втором этапе относительно контуров, полученных на первом этапе, проводится уточнение геометрии внешнего контура и внутренних контуров структуры материала в сечении. Оно осуществляется с использованием метода исследования градиентов изменения индексов цвета пикселей [6, 7, 8].



Рис. 2. Общая блок-схема математического моделирования ДТТ с неоднородными механическими характеристиками материала и геометрий на основе сканирования

Fig. 2. Flowchart of mathematical modeling of deformable solid body with heterogeneous mechanical properties of the material and geometry based on scanning



Рис. 3. Медицинский (а) и промышленный (б) томографы и пакет растровых изображений, полученных при сканировании ДТТ
 Fig. 3. Medical (a) and industrial (b) tomography and a package of raster images obtained by scanning deformable solids

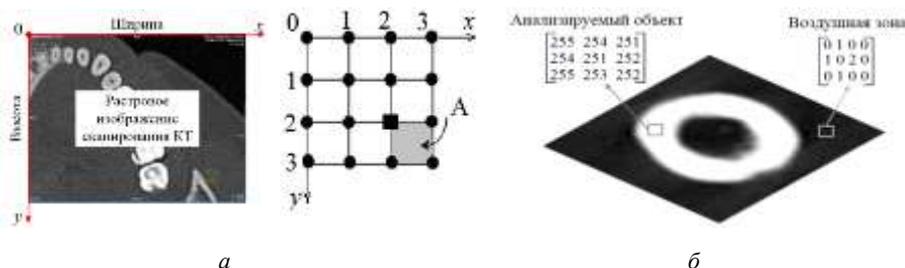


Рис. 4. Система координат растрового изображения (а) и выделение в нем области исследования (б)
 Fig. 4. The coordinate system of the raster image (a) and the field of investigation in it (b)

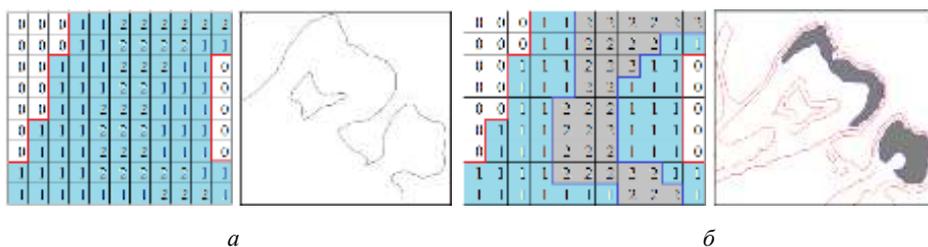


Рис. 5. Предварительное построение контура геометрии и внутренней структуры ДТТ с помощью специальных математических функций «0–1» (а) и «0–1–2» (б)
 Fig. 5. Preliminary construction of the geometry contour of deformable solids and its internal structure with special mathematical functions "0–1" (a) and "0–1–2" (b)

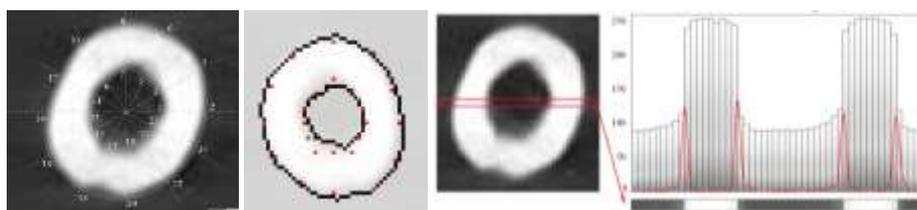


Рис. 6. Уточнение контура геометрии ДТТ и его внутренней структуры на основе исследования градиента изменения индекса цвета
 Fig. 6. The contour refinement of deformable solids geometry and its internal structure based on the color index change gradient

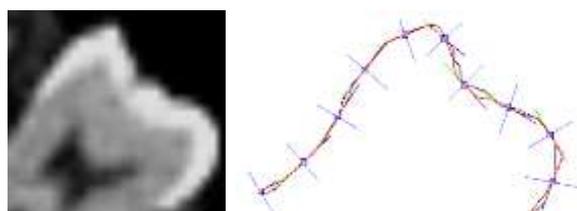


Рис. 7. Исследование изменения градиента по лучам, перпендикулярным предварительной геометрии
 Fig. 7. Investigation of the gradient variation along the rays perpendicular to the preliminary geometry

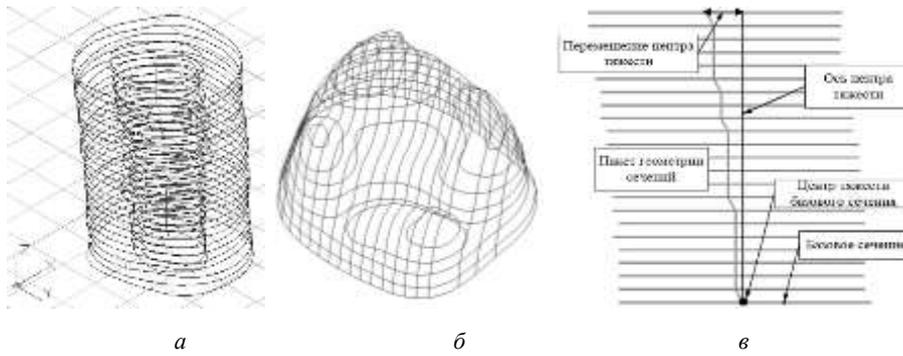


Рис. 8. Каркасная модель ДТТ бедренной кости (а) и верхней части зуба человека (б);
корректировка центров тяжести сечений (в)
Fig. 8. Frame model of a deformable solid body (bones (a) and upper part of a human tooth (b));
correction of the gravity centers of the sections (c)

Контур сечения может иметь как симметричный, так и произвольный вид. Исследование градиента изменения индексов цвета пикселей производится на отрезках, перпендикулярных предварительному контуру сечения (рис. 6, 7).

Более подобное описание представленного метода определения контуров геометрии показано в работах [6, 9, 10] и реализовано посредством специально разработанной программы [11, 12] обработки и идентификации растровых изображений сканирования КТ ДТТ. Полученные контуры всех сечений ДТТ объединяются для создания каркасной модели (рис. 8, а, б) относительно направления КТ-сканирования. Расстояние между сечениями равно шагу сканирования.

Центр тяжести сечений (рис. 8, в) чаще всего не является вертикальной осью каркасной модели. При необходимости, например при изучении чистого сжатия или растяжения, проводится корректировка положения центров тяжести сечений по осям используемой системы координат.

Дальнейшая работа общего алгоритма (см. рис. 2, блок б) связана с тем, что каркасная модель ДТТ используется для генерации сетки его КЭ-модели [9, 13]. В зависимости от степени регулярности геометрии ДТТ используются два метода генерации сетки:

1. Регулярность геометрии при переходе от каркасной к КЭ-модели позволяет использовать КЭ типа гексаэдр (HEX) напрямую.

2. В случае нерегулярности геометрии переход от каркасной к КЭ-модели осуществляется с дополнительным построением объёмной модели твердотельной геометрии ДТТ, и чаще всего используется КЭ типа тетраэдр (TET).

Процесс генерации сетки КЭ-модели проводится в программном комплексе пре- и постпроцессора MSC Patran [13, 14, 15].

Для определения механических характеристик материала в узлах и конечных элементах (см. рис. 2, блок 7) используются подходы, предложенные в работах [1, 6, 9,

16], с помощью специальной программы [11, 12]. Последовательно выполняются следующие действия:

- вычисляется весовой коэффициент для определения модуля упругости относительно значения индекса цвета пикселей;
- совмещаются узлы сетки КЭ-модели с координатами пикселей;
- определяются механические характеристики материала узлов и элементов КЭ-модели;
- осуществляется преобразование структуры данных в виде файла *.pcl для возможности использования в КЭ-модели [16, 17, 18, 19].

Предполагается, что зависимость между индексами цветов пикселей и механическими характеристиками является линейной, что впоследствии подтверждается через оценку сходимости результатов расчета с результатами эксперимента. Таким образом, значение весового коэффициента модуля упругости определяется по формуле

$$k_E = \frac{E_{on}}{n_{cp}}, \quad (1)$$

где E_{on} – среднее значение модуля упругости, полученное на образцах стандартных испытаний; n_{cp} – среднее значение индекса цвета относительно всех сечений.

Наиболее точным является определение среднего значения индексов цветов n_{cp} на основе математического ожидания для всех сечений по формуле

$$n_{cp} = \sum_i n_i p_i(n_i), \quad (2)$$

где n_i – значение индексов цветов; $p_i(n_i)$ – вероятность появления n_i .

Совмещение узлов сетки КЭ-модели с координатами пикселей (рис. 9) и определение индексов цвета в узлах КЭ-модели ДТТ проводятся на основе интерполяции узла относительно сечений каркасной модели (рис. 10). В целом различаются два случая:

1. Если узлы КЭ-модели лежат в плоскости какого-либо сечения каркасной модели, то узлу присваивается индекс цвета, полученный посредством математического ожидания относительно соседних с узлом пикселей (рис. 9), согласно формуле

$$n_{P_i} = \sum_{j=1}^4 n_j \frac{d_j}{\sum_{k=1}^4 d_k}, \quad (3)$$

где n_j – значение индексов цветов ближайших к узлу пикселей; d_j, d_k – расстояния до центров тяжести, ближайших к узлу 4 пикселей.

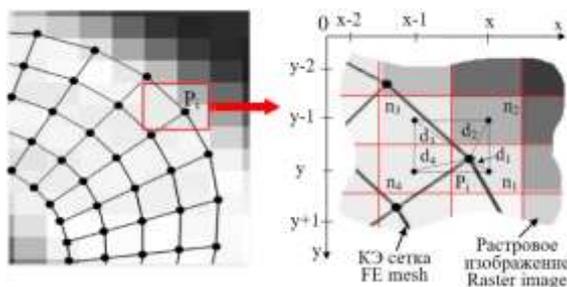


Рис. 9. Определение значения индекса цвета в узле КЭ-модели
Fig. 9. Determining the color index value in the FE model node

2. Если узлы КЭ-модели лежат между сечениями (рис. 10, а), то дополнительно, производится процедура линейной интерполяции относительно сечений, между которыми находится рассматриваемый узел (рис. 10, б). На рис. 10 представлен самый общий случай интерполяции по прямой наклонной к продольной оси каркасной модели сканируемого ДТТ. То есть завершающая

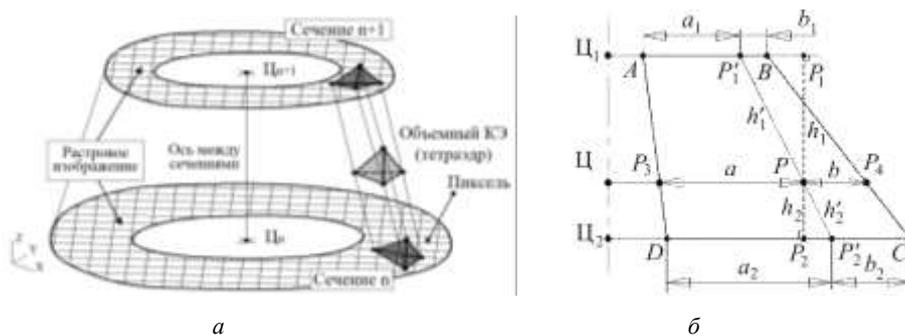


Рис. 10. Интерполяция по прямой наклонной к оси Z
Fig. 10. Interpolation in a straight line inclined to the Z axis

формула [9] определения индекса цвета n_P в узле P на основе интерполяции имеет вид

$$n_P = k_1 n_{P_1} + k_2 n_{P_2}. \quad (4)$$

В определении модуля упругости каждого конечного элемента КЭ-модели относительно номеров индексов цвета, полученных в узлах КЭ-модели, используется среднее арифметическое значение индексов цвета его узлов:

$$E_j = k_E \frac{\sum_{i=1}^q n_i}{q}, \quad (5)$$

где k_E – весовой коэффициент модуля упругости, определяемый по формуле (1); n_i – индекс цвета i -го узла; q – число узлов в конечном элементе. Более подробно данный метод представлен в работах [1, 9, 16], его алгоритмизация реализована в виде специальной программы [11, 12].

Результатом выполнения всех предыдущих этапов (рис. 2, блоки 1–7) является КЭ-модель (рис. 11, 12), в которой представлено поле изменения модуля упругости как основной механической характеристики ДТТ и индивидуальность его геометрии.

Дальнейшее построение КЭ-модели (см. рис. 2, блок 8) связано с заданием в ней граничных условий закрепления, внешней нагрузки и условий контактного взаимодействия ДТТ. После чего производится анализ КЭ-модели (см. рис. 2, блок 9).

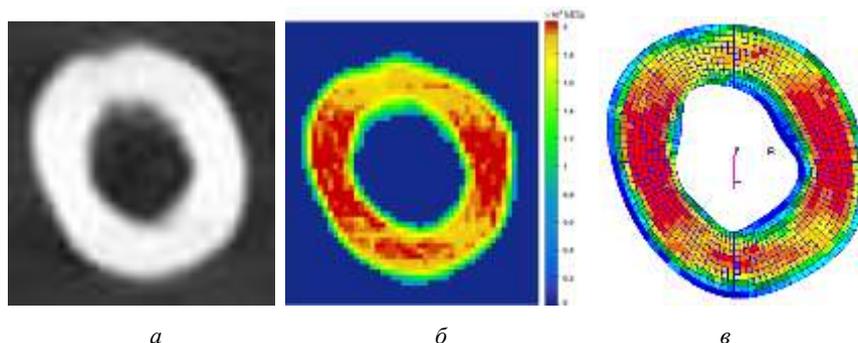


Рис. 10. Интерполяция по прямой наклонной к оси Z
Fig. 10. Interpolation in a straight line inclined to the Z axis

Рис. 11. Распределение неоднородности модуля упругости: *a* – растровое изображение сканирования; *b* – изменение индексов цвета в сечении; *c* – изменение модуля упругости в сечении в КЭ-модели
 Fig. 11. Inhomogeneity distribution of the elasticity modulus: *a* – raster scan image; *b* – change of color indices in the section; *c* – change in modulus of elasticity in cross section in the FE model

На рис. 11 представлены: растровое изображение сканирования в сечении (рис. 11, *a*); изменение значений (неравномерность) индексов цвета (рис. 11, *b*) и полученное на их основе поле изменения модуля упругости в сечении КЭ-модели (рис. 11, *c*).

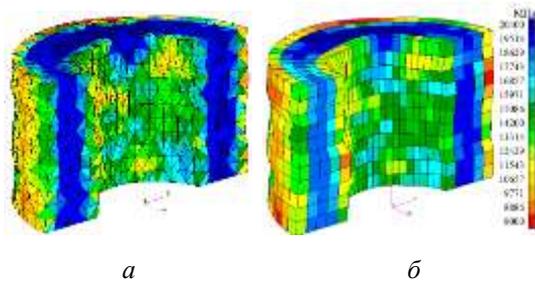


Рис. 12. Распределение величины модуля упругости в объемных КЭ-моделях: *a* – КЭ типа тетраэдр; *b* – КЭ типа гексаэдр
 Fig. 12. The distribution of the modulus of elasticity in FE models: *a* – model with tetrahedron; *b* – model with hexahedron

На рис. 12 представлено изменение модуля упругости в объемной КЭ-модели ДТТ в виде фрагмента бедренной кости человека с использованием конечных элементов типа тетраэдр (рис. 12, *a*) и гексаэдр (рис. 12, *b*). Анализируя результаты, представленные на рис. 11 и 12, необходимо отметить, что область сечения имеет условно две зоны: силовую, где E изменяется от $1,7E4$ до $2,1E4$ МПа, и несиловую, где E изменяется от $0,8E4$ до $1,7E4$ МПа.

На рис. 13 и 14 представлено доказательство достоверности результатов разработанного математического моделирования относительно данных натурального эксперимента [20, 21, 22, 23, 24].

На рис. 13, *a* представлен принцип вырезания образцов из фрагмента реальной бедренной кости человека, используемых для исследования их механических характеристик, главным образом модуля упругости. Образцы вырезаются по главным осям: вертикальной (осевой) – 1, окружной (тангенциальной) – 2 и радиальной – 3 с размерами $3,5 \times 3,5 \times 10$ мм. Вдоль этих осей

и проводится исследование. Также представлен образец для уточнения механических характеристик в осевом направлении (на рис. 13, *a*, слева).

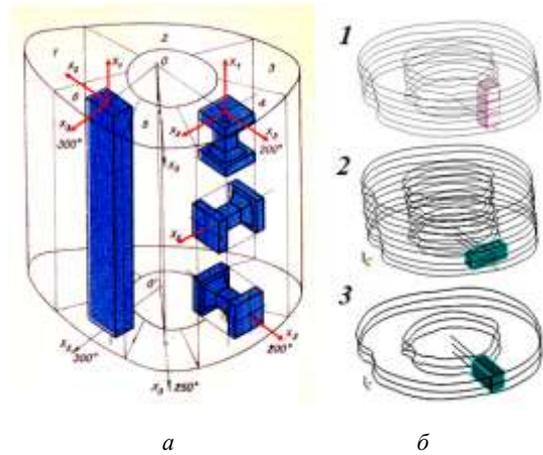


Рис. 13. Ориентация образцов по осям: 1 – вертикальной (осевой); 2 – окружной; 3 – радиальной
 Fig. 13. Orientation of samples: 1 – axial; 2 – circumferential; 3 – radial

На рис. 13, *b* представлены аналогичные по геометрическим размерам виртуальные образцы, вырезанные из КЭ-модели.

Результаты исследования представлены на рис. 14 в виде доказательства точности и сходимости (рис. 14, *a*) численного решения МКЭ [9, 25] относительно данных натурального эксперимента. Результаты показывают (рис. 14, *b*), что, для достижения необходимой точности численного решения МКЭ требуется КЭ-сетка плотностью 3 и более конечных элемента на 1 мм. Также результат показывает, что свойство неоднородности механических характеристик материала ДТТ может быть отражено набором конечных элементов, каждый из которых со своим модулем упругости и изотропной структурой материала.

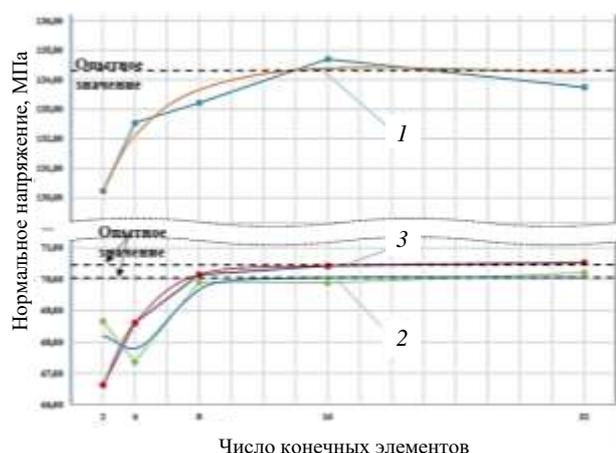
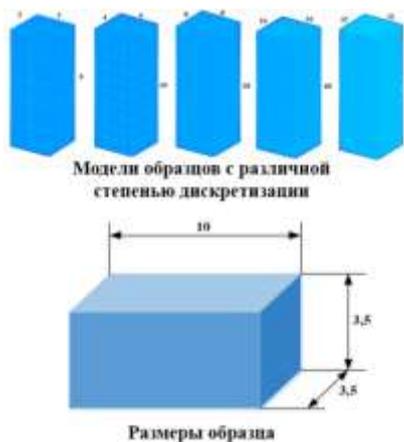


Рис. 14. График сходимости нормального напряжения в центре образцов, в направлениях:
1 – осевом; 2 – окружном; 3 – радиальном

Fig. 14. Convergence graph of normal stress in the center of the sample in:
1 – axial; 2 – circumferential; 3 – radial

2. Построение и анализ НДС КЭ-моделей реальных ДТТ

В качестве примера исследования НДС реальных ДТТ используются следующие объекты: зуб человека в челюсти и его зуб в челюсти с композитной пломбой. Представленный выбор объектов исследования *не принципиален*, но обусловлен двумя основными обстоятельствами: *высокой степенью неоднородности механических характеристик* материала кости с индивидуальной её геометрией, а также *высоким уровнем развития технологии и качества сканирования КТ* в медицине и технике.

Также важным преимуществом представленного объекта исследования является то, что в практике изучения механических характеристик костной ткани человека существует достаточно большое количество результатов натуральных испытаний [20, 21, 26, 27, 28, 29] (экспериментальных опытов).

На рис. 15, в представлен вид сечения зуба человека в челюсти с его внутренней структурой, включающей области: эмаль, дентин, пористый канал и др [30]. На растровом изображении сканирования эти области обозначены (рис. 15, а, б) и имеют свои диапазоны изменения индексов цвета: эмаль (191–255), дентин (70–190), пористое волокно каналов (16–69).

Для построения индивидуальной геометрии зуба (рис. 16) используется каркасная модель, которая состоит из 60 горизонтальных сечений (образец 1) и 31 вертикального сечения (образец 2). Это усложнение объясняется тем, что ДТТ в виде зуба человека в челюсти имеет высокий уровень нерегулярности геометрических параметров.

На основе каркасной модели зуба строится трехмерная геометрическая модель, которая используется для генерации объемной сетки КЭ-модели с применением конечных элементов типа тетраэдр.

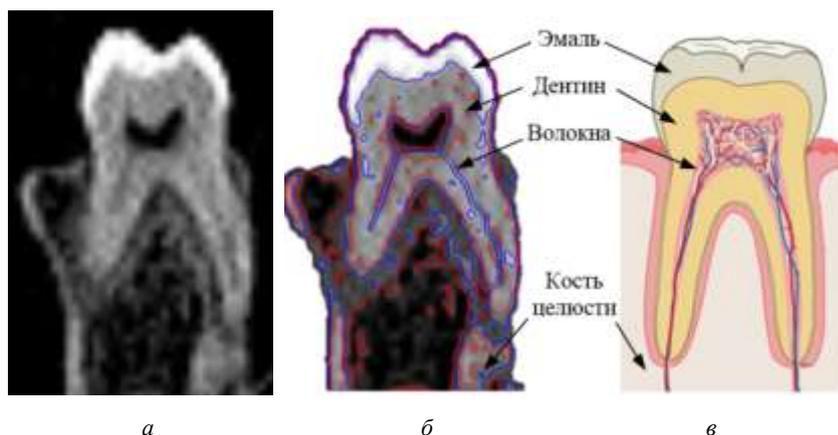


Рис. 15. Структура механических характеристик ДТТ в виде зуба человека:
а – исходное растровое изображение КТ-сканирования;
б – результат его обработки; в – эскиз структуры зуба человека
Fig. 15. Structure of mechanical characteristics of deformable solids in the form of a human tooth: а – the initial raster image of the CT scan;
б – the result of its processing; в – sketch of the human tooth structure

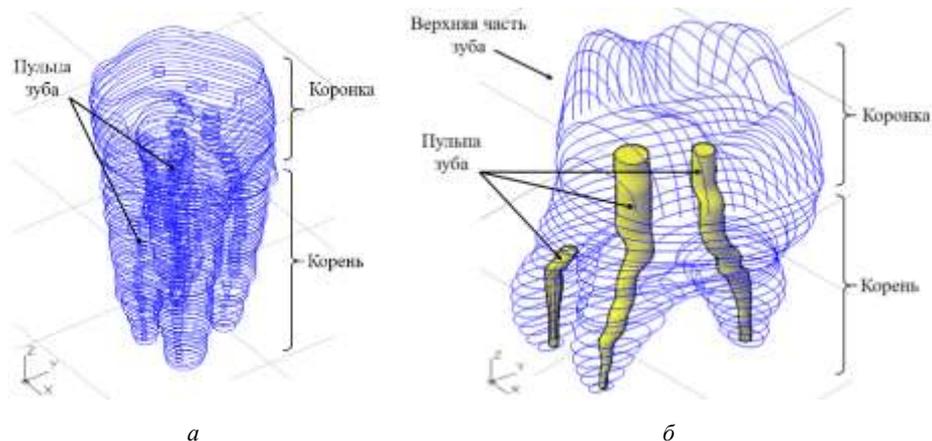


Рис. 16. Каркасная модель зубов человека: *a* – образец 1; *b* – образец 2; построены на основе обработки растровых изображений их сканирования КТ
 Fig. 16. A frame model of human teeth, based on the processing of raster images of their scanning CT

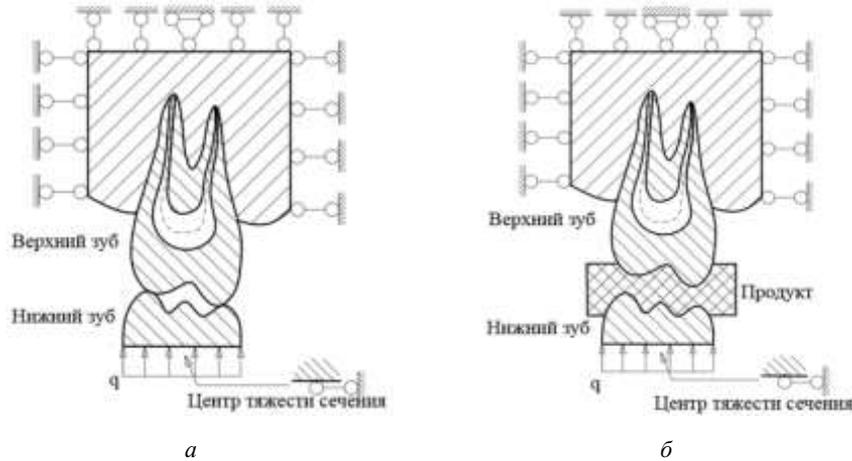


Рис. 17. Схема контактного взаимодействия КЭ-модели зуба: *a* – без продукта; *b* – с продуктом
 Fig. 17. Scheme of contact interaction of tooth FE model: *a* – without product; *b* – with product

На рис. 17 представлена расчетная схема анализа НДС зуба человека в челюсти с граничными условиями и внешней нагрузкой. Кроме этих параметров, на схеме дополнительно представлены условия для решения задачи контактного взаимодействия зубов «без продукта» (рис. 17, *a*) и «с продуктом» (рис. 17, *b*).

На рис. 18 представлено поле изменения свойств материала в модели в виде распределения величины модуля упругости в его объемной КЭ-модели. Это распределение полностью соответствует общим представлениям о структуре свойств материала зуба.

Ниже, на рис. 19 и 20, представлены результаты анализа НДС КЭ-моделей зуба человека в челюсти в виде распределения эквивалентных напряжений (показаны в некотором срединном сечении). Эти результаты представлены *в сравнении*: на рис. 19, *b* и рис. 20, *b* приведены напряжения при использовании моделирования структуры механических характеристик, полученных на

основе сканирования; на рис. 19, *в* и рис. 20, *в* приведены напряжения при использовании осреднения механических характеристик в КЭ-модели.

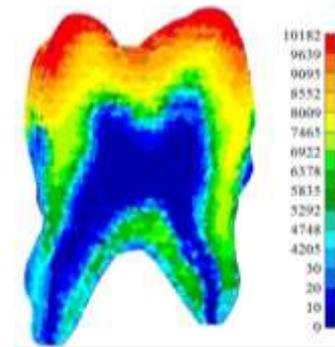


Рис. 18. Трехмерная КЭ-модель зуба с распределением механических характеристик материала (модуля упругости)
 Fig. 18. Three-dimensional of FE model with the distribution of mechanical characteristics of the material (elastic modulus)

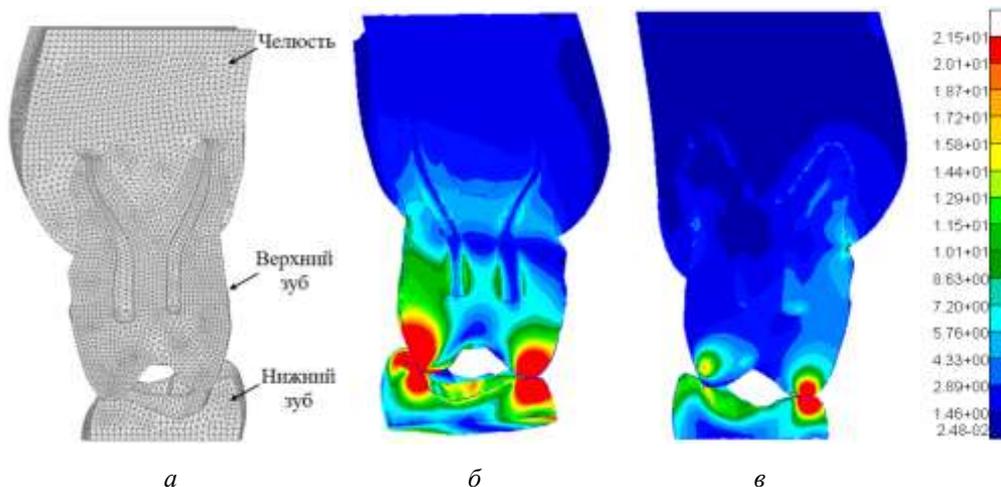


Рис. 19. Результат анализа НДС – эквивалентное напряжение КЭ-модели зуба (а) с учетом реального изменения механических характеристик материала (б) и без учета этого изменения (усредненного значения) (в)
 Fig. 19. The result of stress-strain state analysis – equivalent stress of FE model tooth (a) based on actual changes in the material and mechanical characteristics (b) and without this change (averaged value) (c)

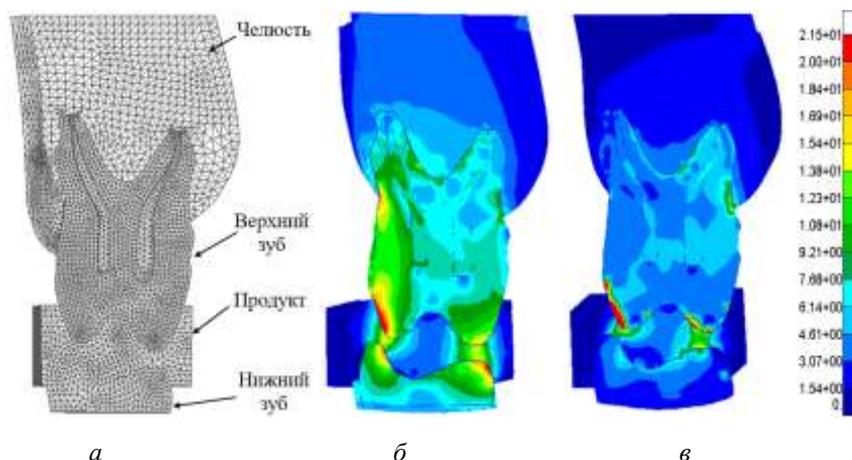


Рис. 20. Результат анализа НДС – эквивалентное напряжение КЭ-модели зуба с продуктом (а) с учетом реального изменения механических характеристик материала (б) и без учета этого изменения (усредненного значения) (в)
 Fig. 20. The result of stress-strain state analysis – equivalent stress of FE model tooth with product (a) based on actual changes in the material and mechanical characteristics (b) and without this change (averaged value) (c)

Результаты анализа НДС моделей (рис. 19, б; рис. 20, б) с учетом моделирования неоднородности механических характеристик материала показывают, что максимумы напряжений наблюдаются в точках контакта на вершинах зубных бугров. Большую часть нагрузки воспринимают эмаль и часть дентина зуба. Пульпа, которая располагается во внутренней части зуба, практически не воспринимает нагрузку. Картина распределения напряжений соответствует реальной работе зуба, когда нагрузка воспринимается эмалью и дентином.

Без учета моделирования неоднородности значений механических характеристик материала (рис. 19, в; рис. 20, в) с использованием их осреднения анализ НДС ДТТ показывает некорректную картину распределения напряжений. В частности, качественная картина совпадает, например, в виде концентрации напряжений в местах контакта между зубами. Однако количественная картина величин напряжений в области зубов не

характеризует их работу как некоторую систему деформируемого тела (эмаль – дентин – пористая ткань).

3. Построение и анализ НДС КЭ-модели зубов человека с композитной пломбой в контакте

Пломба в стоматологии используется для заполнения в зубе полости, возникшей в результате его повреждения. Она способствует восстановлению его нормальной функции. С технической (инженерной) точки зрения пломба является одним из составляющих элементов сборной конструкции и может изготавливаться из материалов широкого класса: амальгамы, пластмассы, керамики, металла и др. Наибольший интерес на современном этапе развития этих материалов представляют пломбы, изготовленные из композитов на полимерной армированной основе, не уступающих по механическим характеристикам и прочности эмали естественного зуба [31, 32, 33, 34].

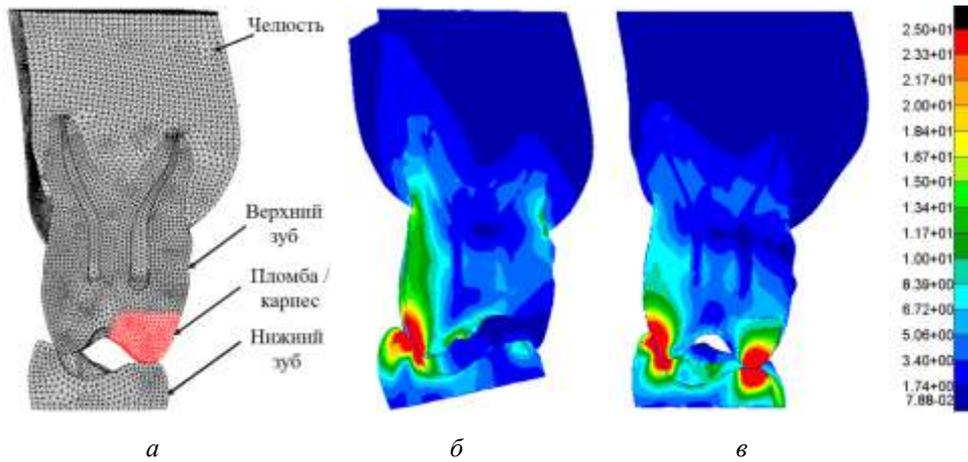


Рис. 21. Результат анализа НДС КЭ-модели зуба: *а* – трехмерная модель зуба с композитной пломбой; *б* – с повреждением, *в* – с пломбой

Fig. 21. Result of the stress-strain state analysis FE model tooth: *a* – three-dimensional tooth model with a composite seal; *b* – with damage, *c* – with a filling

Композитный материал отличает способность противостоять значительным вертикальным и горизонтальным нагрузкам, при этом его прочность на сжатие колеблется от 220 до 450 МПа. В представленном расчете для пломбы используется материал Grandio с модулем упругости 13910 МПа.

Для моделирования повреждения (например, в виде кариеса) используется геометрия пломбы (рис. 21, *а*), для которой задается материал с очень низким модулем упругости, что практически исключает этот материал из работы деформируемого тела.

Результаты анализа представлены на рис. 21, *б*, *в*. В первом случае (рис. 21, *б*), рассматривается вариант верхнего зуба с повреждением эмали. Картина напряжений показывает, что часть зуба с повреждением не воспринимает нагрузку.

После замены поврежденной части зуба пломбой из композитного материала результат анализа (рис. 21, *в*) показывает, что распределение напряжений в зубе практически соответствует распределению напряжений в здоровом зубе (см. рис. 19, *б*), что свидетельствует о восстановлении функциональности зуба.

Библиографический список

1. Accuracy of high resolution in vivo micro magnetic resonance imaging for measurements of microstructural and mechanical properties of human distal tibial bone / X.S. Liu [et al.] // Journal of Bone and Mineral Research. – 2010. – Vol. 25. – No. 9. – P. 2039–2050.
2. Пат. № 2542918, Рос. Федерация, МПК G06T 1/00 A61B 6/00. Способ определения значений модуля упругости и его распределения в конструктивных элементах, обладающих неопределёнными свойствами прочности / А.А. Пыхалов, В.П. Пашков, И.Н. Зотов, М.С. Кувин; заявитель и патентообладатель ФГБОУ ВПО «ИрГТУ»; заявл. 30.10.2013; опубл. 27.02.2015. Бюл. № 6.
3. Марусина М.Я., Казначеева А.О. Современные виды томографии: учеб. пособие. – СПб: Изд-во СПбГУ ИТМО, 2006. – 132 с.

Заключение

Представленный комплекс математических методов моделирования интерпретации растровых изображений сканирования КТ позволяет проводить построение КЭ-моделей для любых сложных структур механических характеристик материала реальных ДТТ и их индивидуальной геометрии.

Результаты решения контактной задачи взаимодействия ДТТ также подтверждают точность и надежность применения представленной технологии КЭ-моделирования на основе сканирования реальных ДТТ с учетом неоднородности механических характеристик материала и индивидуальности геометрии.

Разработанная технология математического моделирования может быть применена для любых физических принципов сканирования, таких как рентгеновский, ультразвуковой, лазерный и др., и для любых типов материалов, когда полученная в результате сканирования информация сформирована в виде цифрового (растрового) изображения.

4. Хофер М. Компьютерная томография. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Медицинская литература, 2011. – 232 с.
5. Рентгеновская компьютерная томография: руководство для врачей / под ред. проф. Г.Е. Труфанкова и к.м.н. С.Д. Рудя. – СПб.: Фолиант, 2008. – 1200 с.
6. Зыонг В.Л., Пыхалов А.А. Математическое моделирование и автоматизация обработки изображений сканирования твердых деформируемых тел с неоднородными свойствами материала и геометрии для построения их конечно-элементных моделей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2017. – № 2 (54). – С. 30–39.
7. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения: пер. с англ. Ю.Н. Субботина; под ред. С.Б. Стечкина. – М.: Мир, 1972. – 319 с.

8. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия: применение в проектировании и на производстве: пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
9. Зыонг В.Л., Пыхалов А.А., Татарникова С.Р. Интерполяция геометрии и неоднородности материала деформируемых тел при построении их объемных моделей методом конечных элементов на основе сканирования компьютерным томографом // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование.* – 2017. – № 3 (55). – С. 10–18.
10. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. The Theory of Splines and Their Applications: Mathematics in Science and Engineering: A Series of Monographs and Textbooks // Elsevier Science. – 2016. – Vol. 38. – 296 p.
11. Свид. о гос. регистр. программы для ЭВМ № 2017661241 РФ. Математическое моделирование для автоматизации обработки результатов сканирования деформируемых тел твердых тел сложной геометрической формы с неоднородными механическими характеристиками для построения их конечно-элементных моделей / А.А. Пыхалов, В.Л. Зыонг; от 06/10/2017.
12. Свид. о гос. регистр. программы для ЭВМ № 2018615239 РФ. Математическое моделирование обработки результатов сканирования деформируемых твердых тел для построения геометрии их конечно-элементных моделей / А.А. Пыхалов, В.Л. Зыонг; от 03/05/2018.
13. Пыхалов А.А., Милов А.Е. Контактная задача статического и динамического анализа сборных роторов турбомашин: монография. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2007. – 192 с.
14. Рыбников Е.К., Володин С.В., Соболев Р.Ю. Инженерные расчеты механических конструкций в системе MSC Patran – MSC Nastran: учеб. пособие. Ч. I. – М., 2003. – 130 с.
15. Рыбников Е.К., Володин С.В., Соболев Р.Ю. Инженерные расчеты механических конструкций в системе MSC Patran – MSC Nastran: учеб. пособие. Ч. II. – М., 2003. – 174 с.
16. Пыхалов А.А., Зыонг В.Л., Белозерцева О.П. Математическое моделирование для компьютерной обработки сканирования твердых деформируемых тел при построении и анализе их конечно-элементных моделей // *Вестник ИрГТУ.* – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 93–111.
17. PATRAN 2017 doc finite element modeling. Copyright 2017 MSC Software Corporation.
18. PATRAN 2017 doc pcl customization. Copyright 2017 MSC Software Corporation.
19. PATRAN 2017 doc pcl reference. Copyright 2017 MSC Software Corporation.
20. Утенькин А.А., Свешникова А.А. Биомеханические свойства компактного вещества кости // *Архив анатомии, гистологии и эмбриологии.* – 1971. – № 10, – С. 45–50.
21. Утенькин А.А., Свешникова А.А. Упругие свойства костной компактной ткани как анизотропного материала // *Проблемы прочности.* – 1971. – № 3. – С. 40–44.
22. Кнетс И.В., Саулгозис Ю.Ж., Янсон Х.А. Деформативность и прочность компактной костной ткани при растяжении // *Механика полимеров.* – 1974. – № 3. – С. 501–506.
23. Кнетс И.В., Пфафрод Г.О., Саулгозис Ю.Ж. Деформирование и разрушение твердых биологических тканей. – Рига: Зинатне, 1980. – 319 с.
24. Кнетс И.В., Регирер С.А. Некоторые современные проблемы биореологии // *Реология: тр. Всесоюз. школы по реологии.* – Новосибирск, 1977. – С. 194–205.
25. Пыхалов А.А., Пашков В.П., Зыонг В.Л. Исследование точности численного решения методом конечных элементов анализа напряженно-деформированного состояния образцов из костной ткани на основе данных компьютерного томографа и натурального эксперимента // *Вестник ИрГТУ.* – 2017. – Т. 21, № 4. – С. 47–56.
26. Зайцев Д.В., Панфилов П.Е. Прочностные свойства дентина и эмали зубов человека при одноосном сжатии // *Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естественные и технические науки.* – 2016. – Т. 21, № 3. – С. 802–804.
27. Zaytsev D. Correction of some mechanical characteristics of human dentin under compression considering the shape effect // *Materials Science and Engineering C.* – 2015. – Vol. 49. – P. 101–105.
28. Zaytsev D. Mechanical properties of human enamel under compression: On the feature of calculations // *Materials Science and Engineering C.* – 2016. – Vol. 62. – P. 518–523.
29. Gurjeet Singh, Harjinder Singh Er. Study and Comparison of Various Techniques of Image Edge Detection // *Journal of Engineering Research and Applications.* – 2014. – Vol. 4. – Iss. 3 (Version 1). – P. 908–912.
30. Строение зуба [Электронный ресурс]. – URL: <http://crest-3d.ru/2010/10/stroenie-zuba/> (дата обращения: 2017).
31. Evaluation of mechanical properties of Z250 composite resin light-cured by different methods / C.O. Andresa, C.S. Mário Alexandre, C.S. Lourenço [et al] // *J. Appl. OralSci.* – 2005. – Vol. 13. – No. 4 Bauru Oct./Dec.
32. Kugel G. Direct and indirect adhesive restorative materials: a review // *American journal of dentistry.* – 2000. – Vol. 13. – P. 35–40.
33. Nuray A., Tam Laura E., McComb D. Flow, strength, stiffness and radiopacity of flowable resin composites // *Journal-Canadian Dental Association.* – 2003. – No. 69(8). – P. 516–521.
34. Comparative analysis of the shrinkage stress of composite resins / R.A. Pereira, P.A. Araújo, J.C. Casteñeda-Espinosa, R.F.L. Mondelli // *Journal of Applied Oral Science.* – 2008. – No. 16(1). – P. 30–34.

References

1. Liu X.S. et al. Accuracy of high resolution in vivo micro magnetic resonance imaging for measurements of microstructural and mechanical properties of human distal tibial bone. *Journal of Bone and Mineral Research*, 2010, vol. 25, no. 9, pp. 2039–2050.
2. Pykhalov A.A., Pashkov V.P., Zotov I.N., Kuvin M.S. Sposob opredeleniya znachenii modulya uprugosti i ego raspredeleniya v konstruktivnykh elementakh, obladayushchikh neopredelennymi svoystvami prochnosti [A method for determining the values of the modulus of elasticity and its distribution in structural elements with indefinite strength properties]. *Patent RF no. 2542918, MPK G06T 1/00 A61B 6/00; patent applicant and holder is FSBEI HE ISTU*; applied Oct. 30, 2013; published Feb. 27, 2015. Bull. no. 6.
3. Marusina M.YA., Kaznacheeva A.O. Sovremennyye vidy tomografii [Modern Tomography Types]. *Saint Petersburg, SPbGU ITMO.* 2006, 132 p.

4. Hofer M. Komp'yuternaya tomografiya 3-e izd., pererab. i dop. [Computer tomography 3 ed]. *Moscow, Medicinskaya literatura*, 2011, pp. 232.
5. Trufankova G.E., Rudya S.D. Rentgenovskaya komp'yuternaya tomografiya. Rukovodstvo dlya vrachej. [X-ray computed tomography. A guide for doctors]. *Saint Petersburg, OOO «Izdatel'stvo FOLI-ANT»*, 2008, 1200 p.
6. Zyong V.L., Pykhalov A.A. Matematicheskoe modelirovanie i avtomatizaciya obrabotki izobrazhenij skanirovaniya tverdyh deformiruemyh tel s neodnorodnymi svojstvami materiala i geometrii dlya postroeniya ih konechno ehlementnyh modelej [Mathematical modeling and scanned images processing automation of the solids with inhomogeneous material and geometry for constructing their finite-element models]. *Modern technologies, System analysis, Modeling*, 2017, no. 2(54), pp. 30-39.
7. Alberg Dzh., Nil'son E.H., Uolsh Dzh. Teoriya splajnov I eyo prilozheniya [Spline theory and its applications]. *Moscow, Mir*, 1972, 319 p.
8. Foks A., Pratt M. Vychislitel'naya geometriya primenenie v proektirovanii i na proizvodstve [Computational geometry application in design and production]. *Moscow, Mir*, 1982, 304 p.
9. Zyong V.L., Pyhalov A.A., Tatarnikova S.R. Interpoliatsiya geometrii i neodnorodnosti materiala deformiruemyh tel pri postroenii ih ob'emnyh modelej metodom konechnykh ehlementov na osnove skanirovaniya komp'yuternym tomografom [Interpolation of geometry and inhomogeneity of material of deformable solids when constructing their 3d models with the finite elements method based on the computer tomograph scanning]. *Modern technologies, System analysis, Modeling*, 2017, no. 3(55), pp. 10-18.
10. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. The Theory of Splines and Their Applications. *Mathematics in Science and Engineering: A Series of Monographs and Textbooks, Elsevier Science*, 2016, vol. 38, 296 p.
11. Pykhalov A.A., Zyong V.L. Matematicheskoe modelirovanie dlya avtomatizatsii obrabotki rezul'tatov skanirovaniya deformiruemyh tverdyh tel slozhnoj geometrich-eskoj formy s neodnorodnymi mekhanicheskimi karakteristikami dlya postroeniya ih konechno-ehlementnyh modelej [Mathematical modeling for automating the processing of scan-ning results for deformable solids of complex geometric shapes with inhomogeneous mechanical characteristics for constructing their finite element models]. Certificate no. 2017661241, 2017.
12. Pyhalov A.A., Zyong V.L. Matematicheskoe modelirovanie obrabotki rezul'tatov skanirovaniya deformiruemyh tverdyh tel dlya postroeniya geometrii ih konechno-ehlementnyh modelej [Mathematical modeling of processing of scanning results of deformable solids for constructing the geometry of their finite element models] Certificate no. 2018615239, 2018.
13. Pykhalov A.A., Milov A.E. Kontaktnaya zadacha staticheskogo i dinamicheskogo analiza sbornyh rotorov tur-bomashin [Contact task of static and dynamic analysis of rotor assembly turbomachines]. *Irkutsk National Research Technical University*, 2007, 192p.
14. Rybnikov E.K., volodin S.V., Sobolev R.YU. Inzhenernye raschety mekhanicheskikh konstrukcij v sisteme MSC Patran – MSC Nastran Uchebnoe posobie. Chast' I. [Engineering calculations of mechanical structures in the system MSC Patran – MSC Nastran]. *Moscow*, 2003, 130 p.
15. Rybnikov E.K., volodin S.V., Sobolev R.YU. Inzhenernye raschety mekhanicheskikh konstrukcij v sisteme MSC Patran – MSC Nastran Uchebnoe posobie. CHast' II. [Engineering calculations of mechanical structures in the system MSC Patran – MSC Nastran]. *Moscow*, 2003, 174 p.
16. Pyhalov A.A., Zyong V.L., Belozerceva O.P. Matematicheskoe modelirovanie dlya komp'yuternoj obrabotki skanirovaniya tverdyh deformiruemyh tel pri postroenii i analize ih konechno-ehlementnyh modelej [Mathematical modeling for computer processing of solid deformable bodies scanning in the construction and analysis of their finite element models]. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2018, vol. 22, no. 3, pp. 93-111.
17. PATRAN 2017 doc finite element modeling. Copyright 2017 MSC Software Corporation.
18. PATRAN 2017 doc pcl customization. Copyright 2017 MSC Software Corporation.
19. PATRAN 2017 doc pcl reference. Copyright 2017 MSC Software Corporation.
20. Uten'kin A.A., Sveshnikova A.A. Biomekhanicheskie svojstva kompaktnogo veshchestva kosti [Biomechanical properties of compact bone material]. *Arhiv anatomii, gistologii i ehmbriologii*, 1971, no. 10, pp. 45-50.
21. Uten'kin A.A., Sveshnikova A.A. Uprugie svojstva kostnoj kompaktnoj tkani kak anizotropnogo materiala [Elastic properties of bone compact tissue as anisotropic material]. *Problemy prochnosti*, 1971, no. 3. pp. 40-44.
22. Knets I.V., Saulgozis Yu.Zh., Yanson H.A. Deformativnost' i prochnost' kompaktnoj kostnoj tkani pri rastyazhenii [Deformability and durability of compact bone tissue in tension]. *Mekhanika polimerov*, 1974, no. 3, pp. 501-506.
23. Knets I.V., Pfafrod G.O., Saulgozis Yu.Zh. Deformirovanie i razrushenie tyvordykh biologicheskikh tkanej [Deformation and destruction of solid biological tissues], *Riga, Zinatne*, 1980, 319 p.
24. Knets I.V., Regirer S.A. Nekotorye sovremennye problem bioreologii [Some modern problems of biorheology]. *Novosibirsk*, 1977, pp. 194-205.
25. Pykhalov A.A., Pashkov V.P., Zyong V.L. Issledovanie tochnosti chislennogo resheniya metodom konechnykh elementov analiza napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya obraztsov iz materialov s neodnorodnoi strukturoi na osnove dannykh komp'yuternogo tomografa i naturnogo eksperimenta [Investigation of the accuracy of numerical solution by the finite element method for analyzing the stress-strain state of samples from materials with an inhomogeneous structure on the basis of data from a computer tomograph and a full-scale experiment]. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 47-56.
26. Zajcev D.V., Panfilov P.E. Prochnostnye svojstva dentina i ehmalii zubov cheloveka pri odnoosnom szhatii [Strength properties of dentin and enamel of human teeth under uniaxial compression]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2016, vol. 21. no. 3, pp. 802-804.
27. Zaytsev D. Correction of some mechanical characteristics of human dentin under compression considering the shape effect. *Materials Science and Engineering C*, 2015, vol. 49, pp. 101-105.
28. Zaytsev D. Mechanical properties of human enamel under compression: On the feature of calculations. *Materials Science and Engineering C*, 2016, vol. 62, pp. 518-523.
29. Gurjeet Singh, Harjinder Singh Er. Study and Comparison of Various Techniques of Image Edge Detection. *Journal of Engineering Research and Applications*, 2014, vol. 4, iss. 3 (Version 1), pp. 908-912.
30. Stroenie zuba [Structure of the tooth]. *Electronic resource* [<http://crest-3d.ru/2010/10/stroenie-zuba/>]. Access Date: 2017..
31. Andresa C.O., Mário Alexandre C.S., Lourenço C.S. and other Evaluation of me-chanical properties of Z250 composite

resin light-cured by different methods. *Journal of Applied Oral Science. J. Appl. OralSci*, 2005, vol. 13, no. 4 Bauru Oct./Dec.

32. Kugel G. Direct and indirect adhesive restorative materials: a review. *American journal of dentistry*, 2000, vol. 13, pp. 35-40.

33. Nuray A., Tam Laura E., McComb Dorothy Flow, strength, stiffness and radiopaci-ty of flowable resin composites. *Journal-Canadian Dental Association*, 2003, no. 69(8), pp. 516-521.

34. Pereira R.A., Araújo P.A., Casteñeda-Espinosa J.C., Mondelli R.F.L. Comparative analysis of the shrinkage stress of composite resins. *Journal of Applied Oral Science*, 2008, no. 16(1), pp. 30–34.