



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.14

УДК 539.374

## ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ НЕУПРУГОСТИ

**В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев**

Московский политехнический университет, Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 03 июля 2018 г.

Принята: 17 сентября 2018 г.

Опубликована: 28 декабря 2018 г.

#### Ключевые слова:

ресурс, неупругость, изотропное и анизотропное упрочнение, возврат механических свойств, накопление повреждений, охрупчивание и залечивание, материальные функции, базовый эксперимент, идентификация и верификация.

### АННОТАЦИЯ

Рассматриваются основные положения и уравнения прикладной теории неупругости, относящейся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении. Прикладная теория неупругости является простейшим инженерным вариантом теории неупругости, который может использоваться для практических расчетов выработанного и остаточного ресурса материала конструкций высоких параметров в условиях повторности и длительности воздействия термо-механических нагрузок. Тензор скоростей деформаций представлен в виде суммы тензоров скоростей упругой и неупругой деформаций, т.е. здесь нет условного разделения неупругой деформации на деформации пластичности и ползучести. Упругая деформация следует обобщенному закону Гука. Вводится поверхность нагружения, которая изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Для радиуса поверхности нагружения (изотропное упрочнение) формулируется эволюционное уравнение, обобщенное на неизотермическое нагружение и процессы возврата механических свойств при отжиге. Смещение поверхности нагружения (анизотропное упрочнение) описывается на основе эволюционного уравнения с трехчленной структурой, обобщенного на неизотермическое нагружение и процессы снятия микронапряжений (смещения) при обжиге. Для определения тензора скоростей неупругой деформации используется ассоциированный (градиентальный) закон течения. Для жестких (заданы деформации) и мягких (заданы напряжения) режимов нагружения получены выражения для определения скорости накопленной неупругой деформации. Сформулированы условия упругого и неупругого состояний. Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводится кинетическое уравнение накопления повреждений, где в качестве энергии, расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия, равная работе микронапряжений на поле неупругих деформаций. Здесь это кинетическое уравнение обобщено на неизотермическое нагружение и процессы охрупчивания и залечивания повреждений. Выделяются материальные функции, замыкающие прикладную теорию неупругости, формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций. Рассматривается пример определения материальных функций по результатам базового эксперимента и приводятся материальные функции для нержавеющей стали 12Х18Н9 в диапазоне температур от 20 до 650 °С. Далее дается перечень экспериментов и конструкционных сталей и сплавов, на которых была проведена верификация прикладной теории неупругости в условиях пластического и неупругого (вязкопластического) деформирования, изотермического и неизотермического, простого и сложного нагружений. В заключение обсуждается область применимости прикладной теории неупругости.

© ПНИПУ

© Бондарь Валентин Степанович – д.ф.-м.н. проф., зав. каф., e-mail: [tm@mami.ru](mailto:tm@mami.ru).

Абашев Дмитрий Рустамович – к.ф.-м.н., доц., e-mail: [tm@mami.ru](mailto:tm@mami.ru), [ID 0000-0002-1626-0662](https://orcid.org/0000-0002-1626-0662)

**Valentin S. Bondar** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department, e-mail: [tm@mami.ru](mailto:tm@mami.ru).

**Dmitry R. Abashev** – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

e-mail: [tm@mami.ru](mailto:tm@mami.ru), [ID 0000-0002-1626-0662](https://orcid.org/0000-0002-1626-0662)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## APPLIED THEORY OF INELASTICITY

V.S. Bondar, D.R. Abashev

Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

## ARTICLE INFO

Received: 03 July 2018  
 Accepted: 17 September 2018  
 Published: 28 December 2018

## Keywords:

resource, inelasticity, isotropic and anisotropic hardening, return of mechanical properties, accumulation of damage, embrittlement and healing, material functions, basic experiment, identification and verification.

## ABSTRACT

We consider the main features and equations of the applied theory of inelasticity relating to the class of flow theories with combined hardening. The applied theory of inelasticity is the simplest engineering version of the theory of inelasticity; and can be used for calculations of the worked out and residual resource of high-performance structural materials under repeated and long-term thermomechanical loads. The strain rate tensor is represented as the sum of the elastic and inelastic strain tensors, i.e. here there is no conditional separation of inelastic deformation by deformation of plasticity and creep. The elastic deformation follows the generalized Hooke's law. A loading surface is introduced that isotropically expands or reduces and displaces during loading. For the radius of the loading surface (isotropic hardening), an evolutionary equation is generalized to nonisothermal loading and restoration of mechanical properties during annealing. The displacement of the loading surface (anisotropic hardening) is described through the evolution equation with a three-member structure, generalized to non-isothermal loading and the back stresses removal (displacement) during firing. To determine the rate tensor of inelastic deformation, the associated (gradient) flow law is used. For rigid (given deformations) and soft (given stresses) loading regimes, expressions are obtained to determine the rate of the accumulated inelastic deformation. Conditions of elastic and inelastic states are formulated. To describe the nonlinear processes of damage accumulation, the kinetic equation of damage accumulation is introduced, where the energy equal to the work of back stresses on the field of inelastic deformations is assumed as the energy spent on creation of damages in the material. Here this kinetic equation is generalized to nonisothermal loading and processes of embrittlement and healing of damages. The material functions closing the applied theory of inelasticity are singled out; the basic experiment and the material functions identification method are formulated. An example of determining the material functions from the basic experiment results is considered and material functions for 12X18H9 stainless steel in the temperature range from 20 °C to 650 °C are given. Further we give a list of experiments and structural steels and alloys on which the applied inelasticity theory was verified under plastic and inelastic (viscoplastic) deformations, isothermal and nonisothermal, simple and complex loadings. In conclusion, we discuss the application of the theory of inelasticity.

© PNRPU

## Введение

Вопросам построения прикладных вариантов теорий термовязкопластичности и неупругости посвящено большое количество работ. Основные направления построения теорий и обширную библиографию по этому вопросу можно найти в монографиях, обзорах и отдельных работах А.А. Ильюшина [1, 2], В.В. Новожилова [3], Ю.Н. Работнова [4], И.А. Биргера [5], В.С. Бондаря [6–9], Р.А. Васина [10], Ю.И. Кадашевича [3], Л.М. Качанова [11], Ю.Г. Коротких, И.А. Волкова и Л.А. Игумнова [12–15], Н.Н. Малинина [16], Ю.М. Темиса [17], Кремпла [18, 19], Крига [20–22], Леметри [23], Линхольма [24], Миллера [25–27], Оно [28–31], Харта [32], Шабоша [33–38] и др.

Наибольшее распространение в практических расчетах в настоящее время получили прикладные варианты теории течения, базирующиеся на концепции комбинированного упрочнения. Среди этих вариантов теорий теории В.С. Бондаря [6–9], Ю.Г. Коротких [12–15] и Шабоша [33–38] являются наиболее экспериментально обоснованными и широко применяемыми для расчетов ресурса материалов конструкций при термовязкопластическом деформировании в условиях повторности и

длительности термомеханических воздействий. Следует отметить, что в вариантах теорий Ю.Г. Коротких и Шабоша деформации разделяются на упругие, пластические и ползучести, а в варианте теории В.С. Бондаря – на упругие и неупругие. Поэтому первые варианты относятся к теории термовязкопластичности, а последний – к теории неупругости. Соответственно, и эволюционные уравнения для радиуса поверхности нагружения, смещений (микронапряжений) и накопления повреждений в первом случае строятся отдельно для пластичности и ползучести, а во втором случае – только для неупругости. Следует отметить, что разделение необратимой деформации на деформации пластичности и ползучести весьма условно. При быстрых процессах деформации ползучести малы и ими пренебрегают и говорят о пластическом деформировании, при медленных процессах имеют место и пластические деформации, и деформации ползучести, и разделение их весьма условно, т.е. в данном случае необратимая деформация едина. Разрушение при быстрых процессах деформирования обычно носит вязкий характер при накоплении повреждений в теле зерна, а при очень медленных процессах – хрупкий характер при накоплении повреждений по границам зерен. Поэтому в первых ва-

риантах процессы накопления повреждений разделены и описываются разными кинетическими уравнениями. Основным недостатком первого подхода является отсутствие взаимного влияния процессов пластичности и ползучести как при деформировании, так и при разрушении, что противоречит экспериментальным результатам [4–6, 10–16]. Во втором случае история процесса деформирования и взаимовлияние пластичности и ползучести учитывается априори – быстрый процесс влияет на последующий медленный и наоборот. Что касается разрушения, то наличие в уравнениях теории кинетического уравнения, описывающего охрупчивание, дает возможность как вязкого (при значительных деформациях и кратковременных процессах или малом числе циклов), так и хрупкого (при небольших деформациях и больших длительностях процесса, а также при многоциклового усталости) разрушения. Соответственно, этот вариант теории позволяет моделировать и смешанные виды деформирования, и разрушения.

Следует отметить некоторые особенности рассматриваемой здесь прикладной теории неупругости:

- деформация имеет упругую и неупругую составляющие (нет условного разделения на деформации пластичности и ползучести);

- поверхность нагружения может смещаться, расширяться, сужаться или иметь постоянный размер;

- нагружение, соответствующее движению по поверхности нагружения, не всегда является нейтральным (упругим);

- трехчленная структура уравнений для смещения поверхности нагружения обуславливает снятие ограничений на траектории сложного нагружения;

- кинетические уравнения накопления повреждений построены на энергетическом принципе с учетом процессов охрупчивания и залечивания и адекватно отражают нелинейные процессы накопления повреждений;

- уравнения неупругого поведения и накопления повреждений взаимосвязаны, т.е. повреждение влияет на поведение, а история нагружения на процесс повреждения;

- основу метода идентификации материальных функций составляет обработка кривых базового эксперимента, не связанная с определением пределов текучести и других величин с какими-либо допусками;

- базовыми экспериментами, на которых построен метод идентификации материальных функций, являются стандартные испытания материала на малоцикловую и длительную прочность, а также деформирование в условиях пластичности и ползучести.

В настоящей работе рассматриваются основные положения и уравнения прикладной теории неупругости, относящейся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении. Выделяются материальные функции, замыкающие прикладную теорию неупругости, формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций. Рассматривается пример определения материальных функций по результа-

там базового эксперимента, и приводятся материальные функции для нержавеющей стали 12Х18Н9 в диапазоне температур от 20 до 650 °С. Дается перечень экспериментов и конструкционных сталей и сплавов, на которых была проведена верификация прикладной теории неупругости в условиях пластического и термовязкопластического деформирования, изотермического и не-изотермического, простого и сложного нагружения.

## 1. Основные положения и уравнения

Материал однороден и начально изотропен. Рассматриваются малые деформации поликристаллических конструкционных сталей и сплавов при температурах, когда нет фазовых превращений, и скоростях деформаций, когда динамическими эффектами можно пренебречь. В процессе неупругого деформирования в материале может возникать только деформационная анизотропия. Тензор скоростей деформаций представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой и неупругой деформаций:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^n. \quad (1)$$

Следует отметить, что здесь нет условного разделения неупругой деформации на деформации пластичности и ползучести.

Упругие деформации при изменении напряжений следуют обобщенному закону Гука, а при изменении температуры – закону температурного расширения. Тогда с учетом зависимости упругих параметров от температуры упругие деформации будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^e &= \frac{1}{E} \left[ \dot{\sigma}_{ij} - \nu (3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}) \right] + \alpha_{ij}^{eT} \dot{T}, \\ \alpha_{ij}^{eT} &= \alpha_T \delta_{ij} - \frac{1}{E^2} \left[ \sigma_{ij} - \nu (3\sigma_0 \delta_{ij} - \sigma_{ij}) \right] \times \\ &\quad \times \frac{dE}{dT} - \frac{1}{E} (3\sigma_0 \delta_{ij} - \sigma_{ij}) \frac{d\nu}{dT}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $E, \nu, \alpha_T$  – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент температурного расширения, являющиеся функциями температуры  $T$ ;  $\sigma_0 = \sigma_{ii} / 3$  – среднее напряжение;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ).

Полагается, что в пространстве составляющих тензора напряжений существует поверхность нагружения, разделяющая области упругого и неупругого состояний. Поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Начальная поверхность нагружения может быть стянута в точку. Текущая поверхность нагружения определяется процессом нагружения. Воздействие фактора времени тоже есть процесс нагружения. Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C^2 = 0. \quad (3)$$

Здесь  $s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}$  – девиатор активных напряжений [3];  $s_{ij}$  – девиатор напряжений; тензор  $a_{ij}$  (добавочных напряжений, остаточных микронапряжений [3,5]) характеризует смещение поверхности нагружения в девиаторном пространстве напряжений, т.е. направленное (анизотропное) упрочнение. Скаляр  $C$  отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения и характеризует изотропное упрочнение. Тензор смещения  $a_{ij}$  и радиус  $C$  являются функционалами процесса нагружения.

Для радиуса поверхности нагружения принимается следующее уравнение:

$$\dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{u^*}^H + q_T \dot{T} - q_R. \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon_{u^*}^H$  – длина дуги траектории неупругой деформации (накопленная неупругая деформация);  $\dot{\varepsilon}_{u^*}^H$  – интенсивность скоростей неупругой деформации (скорость накопленной неупругой деформации);  $q_\varepsilon, q_T, q_R$  – функции, подлежащие экспериментальному определению. Первое слагаемое в уравнении (4) отвечает механическому упрочнению. По знаку  $q_\varepsilon$  определяются циклически упрочняющиеся ( $q_\varepsilon > 0$ ), стабильные ( $q_\varepsilon = 0$ ) и разупрочняющиеся ( $q_\varepsilon < 0$ ) материалы. Параметр  $q_T$  обеспечивает неизотермический переход, а параметр  $q_R$  – возврат механических свойств при отдыхе, отжиге.

Смещение поверхности нагружения определяется уравнением

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij}^H + \left( \frac{2}{3} g_\varepsilon \varepsilon_{ij}^H + g_a a_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{u^*}^H + \left( \frac{2}{3} g_\varepsilon^T \varepsilon_{ij}^H + g_a^T a_{ij} \right) \dot{T} - \left( \frac{2}{3} g_\varepsilon^R \varepsilon_{ij}^H + g_a^R a_{ij} \right). \quad (5)$$

Здесь  $g, g_\varepsilon, g_a, g_\varepsilon^T, g_a^T, g_\varepsilon^R, g_a^R$  – функции, подлежащие экспериментальному определению. Первые три слагаемых в уравнении (5) описывают процессы образования и снятия добавочных напряжений при неупругом деформировании, два следующих обеспечивают неизотермический переход, а два последних – снятие добавочных напряжений при отдыхе, отжиге. Параметры  $q_R, g_\varepsilon^R, g_a^R$  в уравнениях (4) и (5) являются функциями повреждения, что позволяет описать разупрочнение материала перед разрушением, т.е., например, уменьшение уровня напряжений при жестком циклическом нагружении перед разрушением, третью стадию ползучести.

Зависимость параметра  $q_\varepsilon$  в уравнении (4) от меры непропорциональности (сложности) нагружения позволяет [7–9, 39] описать эффект дополнительного изо-

тропного упрочнения при непропорциональных циклических нагружениях, который имеет место для ряда конструкционных материалов – нержавеющей сталей.

Неупругие деформации зависят от истории нагружения и являются функционалами процесса. Для определения скоростей неупругих деформаций используется ассоциированный с (3) градиентальный закон течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u^*}^H. \quad (6)$$

Здесь  $\sigma_u^*$  – интенсивность активных напряжений.

Для получения уравнения для скорости накопленной неупругой деформации используются уравнения (1)–(6). Тогда для случаев мягкого и, соответственно, жесткого нагружений уравнения для скорости накопленной неупругой деформации будут иметь следующий вид:

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^H = \frac{1}{E_*} \left[ \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^*} - B^T \dot{T} + B^R \right], \quad (7)$$

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^H = \frac{1}{E_* + 3G} \left[ \frac{3G}{\sigma_u^*} \frac{s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^*} - B^T \dot{T} + B^R \right], \quad (8)$$

$$E_* = q_\varepsilon + g + g_\varepsilon \varepsilon_{u^*}^H + g_a a_u^*,$$

$$B^T = q_T + g_\varepsilon^T \varepsilon_{u^*}^H + g_a^T a_u^*,$$

$$B^R = q_R + g_\varepsilon^R \varepsilon_{u^*}^H + g_a^R a_u^*,$$

$$\varepsilon_{u^*}^H = \frac{s_{ij}^* \varepsilon_{ij}^H}{\sigma_u^*}, \quad a_u^* = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* a_{ij}}{\sigma_u^*}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Условия упругого и неупругого состояний следуют из того, что для неупругого состояния необходимо, чтобы изображающая точка процесса нагружения находилась на поверхности нагружения и определяемая скорость накопленной неупругой деформации была положительна, а упругое состояние следует при нарушении любого из двух упомянутых условий. Тогда условия упругого и неупругого состояний будут иметь следующий вид:

$$\sigma_u^* < C \cup \dot{\varepsilon}_{u^*}^H \leq 0 \quad - \text{упругость}, \quad (9)$$

$$\sigma_u^* = C \cap \dot{\varepsilon}_{u^*}^H > 0 \quad - \text{неупругость}.$$

Здесь под  $\dot{\varepsilon}_{u^*}^H$  подразумевается выражение, задаваемое уравнением (7) либо (8) или любым другим уравнением, связывающим скорость накопленной неупругой деформации и любой набор скоростей напряжений и деформаций (смешанное нагружение).

Для описания процесса накопления повреждений используется энергетический подход. В качестве энергии, расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия, равная работе добавочных напряжений на поле неупругих деформаций. Ответственность за накопление повреждений добавочных

напряжений (микронапряжений) иллюстрируется результатами, приведенными в работах [40–43]. В процессе нагружения имеют место: накопление повреждений за счет работы добавочных напряжений (микронапряжений), залечивание повреждений и охрупчивание материала. Залечивание и охрупчивание связаны с длительностью процесса нагружения. Кинетические уравнения накопления повреждений, залечивания и охрупчивания принимаются в следующем виде:

$$\dot{\omega} = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{a_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^H}{W} - g_{\omega} \omega, \quad (10)$$

$$\dot{W} = g_W^T \dot{T} - g_W W. \quad (11)$$

Здесь  $\omega$  – мера повреждения ( $\omega \in [0;1]$ );  $W$  – энергия разрушения;  $\alpha, g_{\omega}, g_W^T, g_W$  – функции, подлежащие экспериментальному определению. Функция  $\alpha$  описывает [42, 43] нелинейность процесса накопления повреждений. Первое слагаемое в уравнении (10) описывает процесс накопления повреждений за счет работы добавочных напряжений на поле неупругих деформаций. Второе слагаемое в уравнении (10) описывает процесс залечивания повреждений, интенсивность которого зависит от уровня повреждения, а также от уровня и характера напряженного состояния. Первое слагаемое в уравнении (11) обеспечивает неизотермический переход. Второе слагаемое в уравнении (11) описывает изменение энергии разрушения (начальная энергия разрушения равна  $W_0$  и определяется при пластическом деформировании) за счет процесса охрупчивания материала, интенсивность которого зависит от текущего значения энергии разрушения и уровня напряженного состояния. Критерием разрушения материала будет достижение повреждением предельного значения, обычно принимаемого равным или близким к единице.

## 2. Материальные функции

Теорию неупругости замыкают следующие материальные функции:

$E(T), \nu(T), \alpha_T(T)$  – упругие параметры;

$E_a(T), \sigma_a(T), \beta(T)$  – модули анизотропного упрочнения;

$C_p(T, \varepsilon_{u*}^H)$  – функция изотропного упрочнения;

$W_0(T)$  – начальная энергия разрушения;

### Изотермическое нагружение

$E, \nu, E_a, \sigma_a, \beta, C_p(\varepsilon_{u*}^H)$
---

пластичность  
(6 параметров)

$E, \nu, E_a, \sigma_a, \beta, C_p(\varepsilon_{u*}^H), W_0$
--

пластичность + разрушение  
(7 параметров)

$b_c(T), b_a(T), n_c(T), n_a(T), m_{\omega}(T)$  – параметры изотропной и анизотропной ползучести;

$b_{\lambda}(T), b_{\rho}(T), n_{\lambda}(T), n_{\rho}(T)$  – параметры залечивания и охрупчивания.

Определяющие функции выражаются через материальные следующим образом:

$$q_{\varepsilon} = \frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon_{u*}^H}, \quad q_T = \frac{C_p}{C_p} \frac{\partial C_p}{\partial T}, \quad q_R = q_{\varepsilon} P_c, \quad (12)$$

$$g = E_a + \beta \sigma_a, \quad g_{\varepsilon} = \beta E_a, \quad g_a = -\beta,$$

$$g_{\varepsilon}^T = \frac{dE_a}{dT} - \frac{dE_a}{\sigma_a} \frac{d\sigma_a}{dT}, \quad g_a^T = \frac{1}{\sigma_a} \frac{d\sigma_a}{dT},$$

$$g_{\varepsilon}^R = g_{\varepsilon} P_a, \quad g_a^R = (g + g_a a_u) \frac{P_a}{a_u},$$

$$\alpha = \left( \frac{\sigma_a}{a_u} \right)^{n_a}, \quad g_{\omega} = \lambda, \quad g_W = \rho, \quad g_W^T = \frac{W}{W_0} \frac{dW_0}{dT},$$

$$P_c = \exp(b_c) |C - C_{p0}|^{n_c} (1 - \omega)^{-m_{\omega}},$$

$$P_a = \exp(b_a) (a_u)^{n_a} (1 - \omega)^{-m_{\omega}},$$

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_{ii} \geq 0, \\ \exp(b_{\lambda}) |\sigma_{ii}|^{m_{\lambda}}, & \text{если } \sigma_{ii} < 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\rho = \exp(b_{\rho}) (\sigma_u)^{n_{\rho}},$$

$$a_u = \left( \frac{3}{2} a_{ij} a_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_u = \left( \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$C_{p0} = C_p(T, 0) = \sigma_{-1}.$$

Здесь  $\sigma_{-1}$  – предел длительной прочности (предел ползучести);  $n_a$  – параметр нелинейности процесса накопления повреждений ( $n_a = 1,5$ ). Следует отметить, что при несимметричных циклических нагружениях имеет место посадка или вышагивание петли пластического гистерезиса. Для описания этих явлений модуль  $E_a$  принимается [42–45] зависящим от  $\varepsilon_{u*}^H$ .

Ниже рассматриваются возможности вариантов теории неупругости и требуемое число материальных функций.

$E, \nu, E_a, \sigma_a, \beta, C_p(\varepsilon_{u^*}^h), b_a, n_a$	пластичность + установившаяся ползучесть (8 параметров)
$E, \nu, E_a, \sigma_a, \beta, C_p(\varepsilon_{u^*}^h), b_c, b_a, n_c, n_a$	пластичность + первая и вторая стадии ползучести (10 параметров)
$E, \nu, E_a, \sigma_a, \beta, C_p(\varepsilon_{u^*}^h), W_0, b_a, n_a, m_\omega$	пластичность + вторая и третья стадии ползучести + разрушение без учета охрупчивания и залечивания (10 параметров)
$E, \nu, E_a, \sigma_a, \beta, C_p(\varepsilon_{u^*}^h), W_0, b_a, n_a, m_\omega, b_p, n_p$	пластичность + вторая и третья стадии ползучести + разрушение с учетом охрупчивания, но без залечивания (12 параметров)

**Неизотермическое нагружение**

$E(T), \nu(T), \alpha_T(T)$ $E_a(T), \sigma_a(T), \beta(T), C_p(T, \varepsilon_{u^*}^h), W_0(T)$ $b_a(T), n_a(T), m_\omega(T), b_p(T), n_p(T)$	пластичность + вторая и третья стадии ползучести + разрушение с учетом охрупчивания, но без залечивания (13 параметров)
$E(T), \nu(T), \alpha_T(T)$ $E_a(T), \sigma_a(T), \beta(T), C_p(T, \varepsilon_{u^*}^h), W_0(T)$ $b_c(T), b_a(T), n_c(T), n_a(T), m_\omega(T)$ $b_\lambda(T), b_p(T), n_\lambda(T), n_p(T)$	пластичность + первая, вторая и третья стадии ползучести + разрушение с учетом охрупчивания и залечивания (17 параметров)

**3. Базовый эксперимент**

Для определения материальных функций достаточно следующего основного (базового) набора экспериментальных данных при различных уровнях температуры:

- упругие параметры  $E, \nu, \alpha_T$ , которые определяются традиционными методами;
- диаграмма пластического деформирования при одноосном растяжении  $\sigma_1(\varepsilon)$  до деформации 0,05–0,1;
- диаграмма пластического деформирования при одноосном растяжении  $\sigma_2(\varepsilon)$  до деформации 0,05–0,1 после предварительного сжатия до деформации 0,01–0,02;
- данные по циклическому одноосному растяжению-сжатию (знакопеременному кручению) при постоянном размахе пластической деформации: число циклов до разрушения (появления макротрещины)  $N_p$  и зависимость максимальных значений напряжений  $\sigma_N^+$  на цикле (в конце цикла) от числа циклов нагружения  $N$  (размах пластической деформации  $\Delta\varepsilon^h$  порядка 0,01–0,02);
- данные по ползучести при постоянном напряжении растяжения: зависимость минимальной скорости ползучести от напряжения во всем диапазоне изменения напряжений от кратковременной до весьма длительной ползучести;
- данные по длительной прочности: кривая длительной прочности при растяжении, включающая все

три участка, и кривая длительной прочности при сжатии, соответствующая только второму участку.

**4. Пример определения материальных функций**

Для определения параметров анизотропного упрочнения  $E_a, \beta, \sigma_a$  и функции изотропного упрочнения  $C_p(\varepsilon_{u^*}^h)$  при начальных значениях накопленной неупругой деформации необходимы диаграммы растяжения и растяжения после предварительного сжатия в условиях пластичности. На рис. 1 приведены диаграммы растяжения  $\sigma_1$  и растяжения  $\sigma_2$  после предварительного сжатия до деформации  $|\varepsilon_{02}^h|=0,0166$  как функции накопленной неупругой деформации. Далее, используя данные на рис. 1, строим кривую (рис. 2) в координатах

$$y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2|\varepsilon_{02}^h|}, \quad x = \varepsilon_{u^*}^h - |\varepsilon_{02}^h|, \quad (14)$$

горизонтальной асимптотой которой является прямая  $y = E_a$ , что позволяет определить значение параметра  $E_a$ .

Для получения параметров  $\beta$  и  $\sigma_a$  зависимости на рис. 2 перестраиваются в координатах

$$z = \ln\left(\frac{y - E_a}{E_a}\right), \quad x = \varepsilon_{u^*}^H - |\varepsilon_{02}^H|. \quad (15)$$

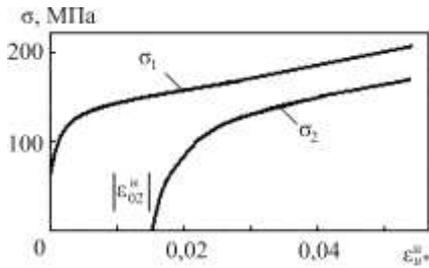


Рис. 1. Кривые растяжения и растяжения после предварительного сжатия  
Fig.1. Curves of stretching and stretching after prior compression

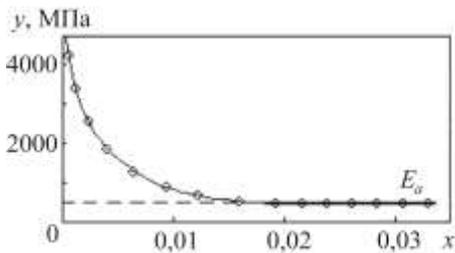


Рис. 2. Определение параметра  $E_a$   
Fig. 2. Determination of  $E_a$  parameter

Получаемая с помощью метода наименьших квадратов линейная зависимость (рис. 3) позволяет по углу наклона  $\varphi$  и ординате  $z_0$  определить параметры  $\beta$  и  $\sigma_a$  по формулам

$$\beta = \operatorname{tg}\varphi, \quad \sigma_a = \frac{E_a |\varepsilon_{02}^H| \exp(z_0)}{1 - \exp(-\beta |\varepsilon_{02}^H|)}. \quad (16)$$

Получив параметры анизотропного упрочнения  $E_a, \beta, \sigma_a$ , можно определить функцию изотропного упрочнения  $C_p(\varepsilon_{u^*}^H)$ , используя диаграмму растяжения, по формуле

$$C_p(\varepsilon_{u^*}^H) = \sigma_1(\varepsilon_{u^*}^H) - E_a \varepsilon_{u^*}^H - \sigma_a [1 - \exp(-\beta \varepsilon_{u^*}^H)]. \quad (17)$$

На рис. 4 показана кривая зависимости  $C_p(\varepsilon_{u^*}^H)$ , полученная на основе формулы (17).

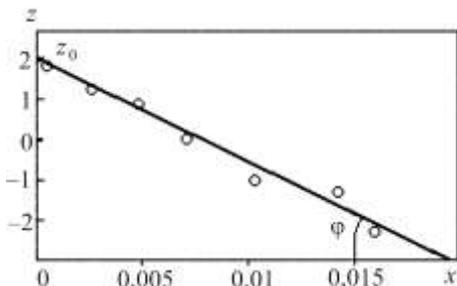


Рис. 3. Определение параметров  $\sigma_a$  и  $\beta$   
Fig. 3. Determining  $\sigma_a$  and  $\beta$  parameters

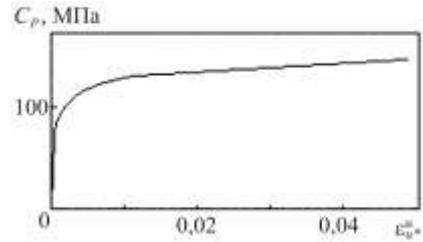


Рис. 4. Функция изотропного упрочнения  
Fig. 4. Isotropic hardening function

Для остальных значений накопленной неупругой деформации функция изотропного упрочнения определяется по результатам циклических испытаний (табл. 1) при постоянном размахе неупругой деформации  $\Delta\varepsilon^H = 0,015$  и деформации на первом полуцикле  $|\varepsilon_{02}^H| = 0,0075$  по формуле

$$C_p(\varepsilon_{u^*}^H) = \sigma_N^+ - E_a |\varepsilon_{02}^H| - \sigma_a \frac{1 - \exp(-\beta \Delta\varepsilon^H)}{1 + \exp(-\beta \Delta\varepsilon^H)}, \quad (18)$$

$$\varepsilon_{u^*}^H = |\varepsilon_{02}^H| + 2\Delta\varepsilon^H N.$$

Таблица 1

Максимальные значения напряжения на  $N$ -м цикле

Table 1

Maximum stress values of  $N$ -th cycle

$N$ , цикл	3	5	15	30
$\sigma_N^+$ , МПа	232	242	250	252

Примечание:  $\sigma_N^+$  – максимальные значения напряжения на  $N$ -м цикле,  $N$  – номер цикла. Первый цикл включает в себя второй и третий полуциклы и т.д. Первый же полуцикл обычно называется отнулевым циклом.

На рис. 5 приведена кривая зависимости  $C_p(\varepsilon_{u^*}^H)$ , полученная на основе формул (17) и (18).

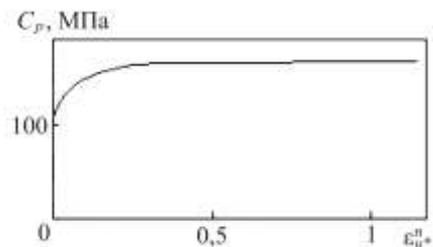


Рис. 5. Функция изотропного упрочнения  
Fig. 5. Isotropic hardening function

Далее по результатам циклических испытаний до разрушения в условиях пластичности с постоянным размахом неупругой деформации определяется энергия разрушения  $W_0$  по формуле

$$W_0 = \frac{2\sigma_a}{\beta} \left[ \beta \Delta \varepsilon^n - 2 \frac{1 - \exp(-\beta \Delta \varepsilon^n)}{1 + \exp(-\beta \Delta \varepsilon^n)} \right] N_p. \quad (19)$$

Здесь  $\Delta \varepsilon^n$  – размах неупругой деформации, а  $N_p$  – число циклов до разрушения, которые в данном случае соответственно равны 0,015 и 44.

Таким образом, для каждого уровня температуры  $T$  определяются материальные функции (параметры), соответствующие упругопластическому состоянию:

$$E(T); \nu(T); \alpha_T(T); E_a(T); \sigma_a(T); \beta(T); C_p(T, \varepsilon_{u*}^n), W_0(T).$$

Далее определяются материальные функции, отвечающие за временные эффекты по результатам испытаний в условиях ползучести.

Для определения параметра изотропной и анизотропной ползучести  $m_\omega$  используются данные первого и второго участков кривой длительной прочности, а также определенные ранее материальные функции, соответствующие пластическому состоянию. Параметр  $m_\omega$  определяется из линейной зависимости

$$y = (m_\omega + 1)x, \quad (20)$$

где

$$y = \lg \left[ t_p (\sigma)^m / D \right], \quad x = \lg (1 - \omega_1), \quad (21)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{W_0} \left\{ \frac{1}{2} E_a (\varepsilon^n)^2 + \sigma_a \varepsilon^n - \frac{\sigma_a}{\beta} [1 - \exp(-\beta \varepsilon^n)] \right\}. \quad (22)$$

Здесь  $t_p$  – время до разрушения в условиях кратковременной ползучести при напряжении  $\sigma$ ;  $\varepsilon^n$  – пластическая деформация, соответствующая напряжению  $\sigma$ ;  $D, m$  – коэффициенты степенной аппроксимации второго участка кривой длительной прочности,

$$t_p = D \sigma^{-m}. \quad (23)$$

Значения коэффициентов степенной аппроксимации в данном случае соответственно  $D = 10^{21.5}$ ,  $m = 9$ .

В табл. 2 приведены значения времени до разрушения для различных значений напряжений, соответствующих первому участку кривой длительной прочности.

Таблица 2

Длительная прочность на первом участке

Table 2

Long-term hardening at the first section

$\sigma$ , МПа	280	260	240	200
$t_p$ , ч	0,059	0,157	0,432	3,850

На рис. 6 приведена линейная зависимость (25), построенная на основе метода наименьших квадратов.

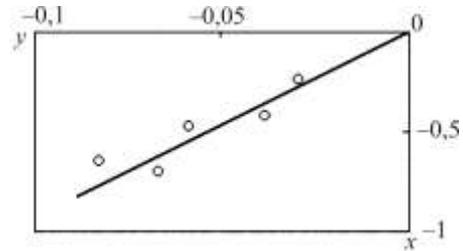


Рис. 6. Определение параметра  $m_\omega$

Fig. 6. Determining  $m_\omega$  parameter

Далее, используя экспериментальные данные второго участка кривой длительной прочности и данные по скорости установившейся ползучести, параметры анизотропной ползучести  $b_a$  и  $n_a$  можно определить по формулам

$$n_a = \frac{n_\varepsilon}{m - n_\varepsilon}, \quad (24)$$

$$b_a = \ln \left[ \left( \frac{DP_0(m_\omega + 1)}{W_0} \right)^{n_a} P_0 \right]. \quad (25)$$

Здесь  $P_0, n_\varepsilon$  – коэффициенты степенной аппроксимации зависимости установившейся скорости ползучести от напряжения

$$\dot{\varepsilon}_{st}^n = P_0 (\sigma)^{n_\varepsilon}, \quad (26)$$

в данном случае  $P_0 = \exp(-35,46)$ ,  $n_\varepsilon = 6$ .

Для определения параметров изотропной ползучести  $b_c$  и  $n_c$  используются данные зависимости установившейся скорости ползучести  $\dot{\varepsilon}_{st}^n$  от напряжения  $\sigma$ . Вначале для набора значений напряжений, в данном случае для  $\sigma \in [80; 140]$ , по формуле (26) определяется соответствующий набор значений скорости установившейся ползучести. Затем на основании формулы

$$a = \left[ \dot{\varepsilon}_{st}^n / \exp(b_a) \right]^{1/n_a} \quad (27)$$

вычисляются соответствующие значения добавочного напряжения и соответствующие значения радиуса поверхности нагружения по формуле

$$C = \sigma - a. \quad (28)$$

Таким образом, устанавливается соответствие между скоростью установившейся ползучести  $\dot{\varepsilon}_{st}^n$  и радиусом  $C$ . Далее, представляя эту зависимость в координатах

$$y = \ln \dot{\varepsilon}_{st}^n, \quad x = \ln |C - C_{p0}|, \quad (29)$$

можно получить параметры  $b_c$  и  $n_c$  из линейной зависимости

$$y = b_c + n_c x, \quad (30)$$

которая представлена на рис. 7.

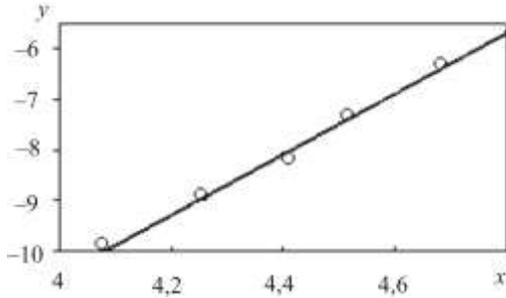


Рис. 7. Определение параметров  $b_c$  и  $n_c$   
Fig. 7. Determining  $b_c$  and  $n_c$  parameters

Для определения параметров охрупчивания  $b_p$  и  $n_p$  используются результаты испытаний, относящиеся к третьему участку кривой длительной прочности. В табл. 3 приведены значения времени до разрушения для разных значений напряжения, соответствующих третьему участку кривой длительной прочности.

Таблица 3

Длительная прочность на третьем участке

Table 3

Long-term hardening at the third section

$\sigma$ , МПа	100	80	60
$t_p$ , ч	950	3550	17 000

Значение модуля охрупчивания  $\rho$  определяется для каждого уровня напряжения из следующего нелинейного уравнения:

$$\rho = \frac{1}{t_p} \ln \left[ 1 + \rho D (\sigma)^{-m} \right]. \quad (31)$$

Решение нелинейного уравнения (31) осуществляется любым итерационным методом. В качестве начального приближения можно принять

$$\rho = \frac{1}{t_p}. \quad (32)$$

Далее, представляя зависимость между  $\rho$  и  $\sigma$  в логарифмических координатах

$$y = \ln \rho, \quad x = \ln \sigma, \quad (33)$$

можно получить параметры  $b_p$  и  $n_p$  из линейной зависимости

$$y = b_p + n_p x, \quad (34)$$

которая представлена на рис 8.

Для определения параметров залечивания  $b_\lambda$  и  $n_\lambda$  используются данные по длительной прочности при растяжении и сжатии, относящиеся ко второму участку кривых длительной прочности. Вначале для набора значений напряжений, в данном случае для  $\sigma \in [150; 200]$ , по формулам

$$t_p^+ = D^+ (\sigma)^{-m}, \quad t_p^- = D^- |\sigma|^{-m} \quad (35)$$

определяются соответствующие значения  $t_p^+$  при растяжении и  $t_p^-$  при сжатии. Затем значение модуля залечивания  $\lambda$  определяется для каждого уровня напряжения из следующего нелинейного уравнения:

$$\lambda = \frac{1}{t_p^+} \left[ 1 - \exp(-\lambda t_p^-) \right]. \quad (36)$$

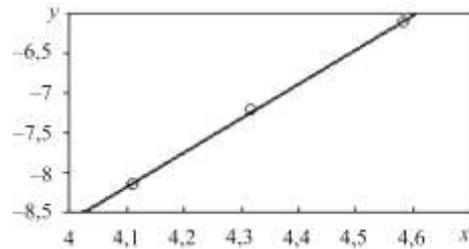


Рис. 8. Определение параметров  $b_p$  и  $n_p$   
Fig. 8. Determining  $b_p$  and  $n_p$  parameters

Решение нелинейного уравнения (36) осуществляется любыми итерационными методами. В качестве начального приближения можно принять

$$\lambda = \frac{1}{t_p^+} - \frac{1}{t_p^-}. \quad (37)$$

Далее, представляя зависимость между  $\lambda$  и  $|\sigma|$  в логарифмических координатах

$$y = \ln \lambda, \quad x = \ln |\sigma|, \quad (38)$$

можно получить параметры  $b_\lambda$  и  $n_\lambda$  из линейной зависимости

$$y = b_\lambda + n_\lambda x, \quad (39)$$

которая представлена на рис. 9.

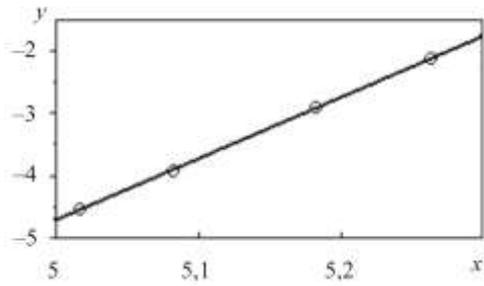


Рис. 9. Определение параметров  $b_\lambda$  и  $n_\lambda$

Fig. 9. Determining  $b_\lambda$  and  $n_\lambda$  parameters

Следует отметить, что представленный алгоритм получения параметров залечивания приводит к верному решению в том случае, если время разрушения при растяжении незначительно отличается от времени разрушения при сжатии. Поэтому для уточнения параметра

залечивания  $b_\lambda$  проводятся расчеты длительной прочности при сжатии и корректировка  $b_\lambda$  до совпадения расчетных и экспериментальных результатов.

На основе приведенного выше метода и примера идентификации материальных функций были получены материальные функции для нержавеющей стали 12Х18Н9 в диапазоне температур от 20 до 650 °С на основе экспериментальных данных [54–56]. В табл. 4, 5, 6 приведены материальные функции стали 12Х18Н9 (табл. 5 – функция изотропного упрочнения  $C_p(T, \epsilon_{u^*}^H)$ ). Данные в таблицах соответствуют температуре, задаваемой в °С; напряжениям, задаваемым в МПа; времени, задаваемому в часах.

Таблица 4

Упругие параметры. Модули анизотропного упрочнения, начальная энергия разрушения

Table 4

Elastic parameters. Anisotropic hardening modules, initial energy of destruction

$T, ^\circ\text{C}$	$E, \text{МПа}$	$\nu$	$\alpha_T, 1/\text{град}$	$E_a, \text{МПа}$	$\sigma_a, \text{МПа}$	$\beta$	$W_0, \text{дж/см}^3$
20	205 000	0,3	$1,69 \cdot 10^{-5}$	500	150	500	270
150	195 000	0,3	$1,77 \cdot 10^{-5}$	200	124	500	200
300	182 500	0,3	$1,87 \cdot 10^{-5}$	50	117	500	150
500	167 000	0,3	$2 \cdot 10^{-5}$	0	96	500	88
550	163 000	0,3	$2,03 \cdot 10^{-5}$	0	88	500	72
600	159 000	0,3	$2,06 \cdot 10^{-5}$	0	76	500	56
650	155 000	0,3	$2,08 \cdot 10^{-5}$	0	60	500	40

Таблица 5

Функция изотропного упрочнения

Table 5

Anisotropic hardening function

$T, ^\circ\text{C}$	$\epsilon_{u^*}^H$									
	0	0,0005	0,002	0,005	0,01	0,02	0,04	0,1	0,4	100
20	10	190	218	225	228	236	254	300	310	320
150	10	150	179	189	192	200	220	266	276	286
300	10	130	165	180	184	194	214	260	270	280
500	10	100	124	133	136	146	166	212	222	232
550	10	93	118	127	132	142	160	200	210	219
600	10	86	112	121	128	138	154	190	198	206
650	10	80	107	116	125	134	148	180	188	194

Таблица 6

Параметры изотропной и анизотропной ползучести, залечивания и охрупчивания

Table 6

Isotropic and anisotropic creep, healing and brittling

$T, ^\circ\text{C}$	$m_\omega$	$b_c$	$n_c$	$b_a$	$n_a$	$b_p$	$n_p$	$b_\lambda$	$n_\lambda$
---------------------	------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------------	-------------

20	7	-60,4	6	-27	2	-51	4	-92,6	9
150	7	-54,4	6	-22	2	-45	4	-80,6	9
300	7	-48,4	6	-17	2	-39	4	-68	9
500	7	-40,4	6	-13,06	2	-31,5	4	-57,5	9
550	7	-38,4	6	-12,21	2	-29	4	-54,94	9
600	7	-36,4	6	-11,48	2	-26,9	4	-52,29	9
650	7	-34,4	6	-10,93	2	-24,8	4	-49,7	9

**5. Перечень экспериментов и конструкционных материалов, на которых была проведена верификация теории**

- Пластичность
- Изотермическое нагружение
- Простое нагружение
- Циклическое нагружение

Вид нагружения	Материал	Эксперимент
Стационарное жесткое циклическое одноосное растяжение-сжатие, $T = 150\text{ }^{\circ}\text{C}$	АЛ-25 – циклически разупрочняющийся материал	Е.А. Аверченков и др. [46]
Жесткое нестационарное циклическое одноосное растяжение-сжатие. Блочное изменение амплитуды и асимметрии цикла, $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$	12X18H10T – циклически стабилизирующийся материал	Д.А. Казаков В.С. Бондарь [6]
Жесткое стационарное циклическое одноосное растяжение-сжатие. Усталостное разрушение от $10^3$ до $10^5$ циклов, $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$	AISI 304 – циклически стабилизирующийся материал	D. Socie [47]
Жесткое стационарное циклическое одноосное растяжение-сжатие. Усталостное разрушение от $2 \cdot 10^3$ до $2 \cdot 10^4$ циклов, $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$	12X18H9 – циклически стабилизирующийся материал	Д.А. Казаков В.С. Бондарь [6]

**Сложное нагружение**

**Плоские траектории**

Вид нагружения	Материал	Эксперимент
Двузвенные ломаные траектории деформаций. Угол излома траектории от $15$ до $100^{\circ}$ . Длина первого звена от $0,002$ до $0,0145$ . $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , $P, q$ – опыты.	30ХГСА	В.П. Дегтярев [48]
Двузвенные ломаные траектории напряжений. Угол излома траектории от $130$ до $180^{\circ}$ , $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , $P, M$ – опыты	Ст 10	О.А. Шишмарев [49]
Двузвенные ломаные траектории деформаций. Угол излома траектории от $30$ до $180^{\circ}$ , $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , $P, M$ – опыты.	S15C	Y. Ohashi [50]
Двузвенные ломаные траектории напряжений. Угол излома траектории $90^{\circ}$ , $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , $P, M$ – опыты.	30ХГСА	А.С. Вавакин и др. [51]
Трехзвенные ломаные траектории деформаций. Угол первого излома $90^{\circ}$ , угол второго излома $60, 70, 80^{\circ}$ , $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , $P, M$ – опыты.	S10C	Y. Ohashi [50]
Криволинейные траектории деформаций: луч+дуга окружности, $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , $P, q$ – опыты.	30ХГСА	В.П. Дегтярев [48]
Криволинейные траектории деформаций: луч + дуга окружности + луч + дуга окружности + луч. $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . $P, M$ – опыты.	BsBM2	Y. Ohashi [50]
Траектория деформаций в виде квадрата, 3 витка, $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , $P, M$ – опыты.	40X16H9Г2С	В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков [52]
Траектория деформаций в виде окружностей с общим центром в начале координат. Радиус от $0,0025$ до $0,0125$ , $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , $P, M$ – опыты.	40X16H9Г2С	В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков [52]
Траектория деформаций в виде окружностей, проходящих через начало координат. Радиус от $0,0025$ до $0,01$ , $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , $P, M$ – опыты.	9X2	В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков [52]
Траектория деформаций в виде спирали Архимеда. Скручивание в начало координат за 4 витка, а затем раскручивание 2 витка.	Ст. 45	В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков [52]
Стационарные циклические нагружения по траекториям деформаций в виде двойного квадрата, квадрата, окружности. Усталостное разрушение от $4 \cdot 10^3$ до $2 \cdot 10^5$ циклов, $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . $P, M$ – опыты.	AISI 304	D. Socie [47]

**Пространственные траектории**

Вид нагружения	Материал	Эксперимент
----------------	----------	-------------

Траектории деформаций в виде винтовых линий с постоянной кривизной и кручением. Кривизна от 100 до 333 и крутка от 10 до 666. Всего восемь траекторий, $T = 20$ °С, $P, M, q$ – опыты.	Ст. 45	А.С. Вавакин и др. [53]
--	--------	-------------------------

**Неупругость**  
**Изотермическое нагружение**  
**Простое нагружение**

Вид нагружения	Материал	Эксперимент
Жесткое стационарное циклическое одноосное растяжение-сжатие, $\dot{\epsilon} = 10^{-4}$ 1/с, $T = 250$ и $350$ °С	Ал – 25 – циклически разупрочняющийся материал	Аверченко [46]
Жесткое стационарное циклическое одноосное растяжение-сжатие, $T = 650$ °С, длительность цикла 2 и 8 мин Усталостное разрушение от $10^2$ до $10$ циклов.	12X18H9	А.П. Гусенков [54]
Длительная прочность при постоянном напряжении растяжения. Время разрушения от 0,1 до $10^3$ ч. $T = 550, 600, 650$ °С.	12X18H9	А.П. Гусенков [54]
Длительная прочность при постоянном напряжении растяжения. Время разрушения от 10 до $10^5$ ч. $T = 550, 600, 650$ °С	МЗ	В.В. Кашелкин С.А. Шестериков
Знакопеременная циклическая ползучесть. Длительность выдержки на режиме растяжения (сжатия) составляла 8 ч. $T = 650$ °С, 5 циклов	AISI 304	Y. Ohashi [57]

**Сложное нагружение**

Вид нагружения	Материал	Эксперимент
Ползучесть при изломе траектории напряжений на угол 30, 90, 150°. Длительность выдержки в конце каждого луча напряжений составляла 8 ч, $T = 650$ °С, 5 циклов	AISI 304	Y. Ohashi [57]
Двухзвенные ломаные траектории деформаций, $T = 550$ °С. $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-4}$ мин <sup>-1</sup> , угол излома 60°. Длина первого звена 0,0025, 0,004, 0,0096.	30ХГСА	В.П. Дегтярев [48]
Двухзвенные ломаные траектории деформаций, $T = 550$ °С. $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-4}$ мин <sup>-1</sup> . Угол излома 15, 42, 70°. Длина первого звена 0,006	30ХГСА	В.П. Дегтярев [48]
Двухзвенные ломаные траектории деформаций, $T = 550$ °С. Угол излома 60°. Длина первого звена 0,0055. $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4}, 1,65 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-5}$ мин <sup>-1</sup>	30ХГСА	В.П. Дегтярев [48]

**Неизотермическое нагружение**  
**Простое нагружение**

Вид нагружения	Материал	Эксперимент
Стационарное жесткое циклическое одноосное растяжение-сжатие. Противофазный режим изменения температуры и силовой деформации, $T = 150 \leftrightarrow 300$ °С. Длительность цикла 180 с. 6 циклов нагружения.	Ал – 25 – циклически разупрочняющийся материал	Е.А. Аверченко и др. [46]
Стационарное жесткое циклическое одноосное растяжение-сжатие. Синфазный режим изменения температуры и деформации. Два режима: $T = 200 \leftrightarrow 375$ °С, $185 \leftrightarrow 385$ °С. Длительность цикла 95 с и 115 с. Усталостное разрушение	Ал – 25 – циклически разупрочняющийся материал	В.П. Белов В.С. Бондарь [6]

**Сложное нагружение**

Вид нагружения	Материал	Эксперимент
Малоцикловая прочность конических оболочек, подкрепленных кольцом жесткости на широком срезе, при теплосменах. Существенный знакопеременный градиент температуры по образующей на участке перехода от гладкой оболочки к кольцу жесткости. Реализуется сложное неизотермическое нагружение. $T = -115 \leftrightarrow 830$ °С на гладкой оболочке и $T = -50 \leftrightarrow 600$ °С на кольце жесткости. Длительности цикла 300 с.	ВЖ-100	Я.Г. Осадчий В.С. Бондарь [6]

## Заключение

Наибольшее экспериментальное обоснование теория получила в области изотермического упругопластического деформирования. Здесь рассматривались достаточно произвольные процессы простого (циклического) нагружения, а также сложного нагружения как по плоским, так и по пространственным траекториям деформаций в достаточно широком диапазоне углов излома, кривизны и кручения траекторий. Рассматривались также циклические процессы сложного нагружения. Особо следует отметить, что развитие прикладной теории позволило описать эффекты дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональных циклических нагружениях. Рассматривалось также разрушение материалов при циклических пропорциональных (простых) и непропорциональных (сложных) нагружениях. Все упомянутые выше процессы нагружения относятся к жестким режимам нагружения, т.е. нагружение осуществлялось по траекториям деформаций. Мягкие нагружения, которые осуществляются по траекториям напряжений, в должной мере не рассматривались. Однако в настоящее время развивается прикладная теория для описания процессов посадки и вышагивания петли пластического гистерезиса при несимметричных жестких и мягких циклических нагружениях.

Что касается области неизотермического упругопластического деформирования, то в диапазоне температур, при которых малы эффекты, связанные с длительностью процесса нагружения, никаких особенно-

стей деформирования не возникает, и теория обеспечивает неизотермические переходы при изменении температуры в процессе нагружения.

Таким образом, можно сказать, что теория неупругости получила достаточное экспериментальное обоснование и может применяться для описания упругопластического деформирования и разрушения материалов при изотермических и неизотермических, простых и сложных процессах жесткого нагружения.

В меньшей мере экспериментальное обоснование теория неупругости получила в области неупругого деформирования, хотя здесь рассматривались изотермические и неизотермические, простые и сложные процессы мягкого и жесткого нагружения. Рассматривались также усталостная и длительная прочность с учетом процессов залечивания и охрупчивания. Однако проведение сопоставления расчетов и экспериментов ограничивалось недостатком данных для определения материальных функций и значительно меньшим количеством экспериментальных исследований в условиях неупругости, так как эти исследования связаны с высокими температурами испытаний.

Тем не менее проведенное сопоставление результатов расчетов и экспериментов позволяет говорить о достаточной с точки зрения инженерных расчетов применимости теории неупругости для описания неупругого деформирования и разрушения материалов при изотермических и неизотермических, простых и сложных процессах нагружения в условиях повторности и длительности воздействия термомеханических нагрузок.

## Библиографический список

1. Ильющин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
2. Ильющин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
3. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 224 с.
4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Физматгиз, 1966. – 752 с.
5. Термопрочность деталей машин: справочник / под ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с.
6. Бондарь В.С. Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкции при сложном неизотермическом нагружении: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М.: Изд-во МАМИ, 1990. – 314 с.
7. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.
8. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: Физматлит, 2008. – 176 с.
9. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.
10. Васин Р.А. Экспериментально-теоретическое исследование определяющих соотношений в теории упругопластических процессов: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 36 с.
11. Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: Физматлит, 1960. – 455 с.
12. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
13. Прикладная теория пластичности / Ф.М. Митенков, И.А. Волков, Л.А. Игумнов, А.В. Каплиенко, Ю.Г. Коротких, В.А. Панов. – М.: Физматлит, 2015. – 282 с.
14. Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г. Прикладная теория вязкопластичности: моногр. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2015. – 317 с.
15. Волков И.А., Игумнов Л.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. – М.: Физматлит, 2017. – 299 с.
16. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
17. Темис Ю.М. Моделирование пластичности и ползучести конструкционных материалов ГТД // Приоритеты развития отечественного автотракторостроения и подготовки инженерных научных кадров: материалы 49-й Междунар. науч.-техн. конф. ААИ [Школа-семинар «Современные моде-

ли термовязкопластичности»]. Ч. 2. – М.: Изд-во МАМИ, 2005. – С. 25–76.

18. Krempl E. The influence of state of stress on low-cycle fatigue of structural materials: a literature survey and interpretive report // Amer. Soc. Test. And Mater. Spec. Techn. Publ. –1974. – No. 549. – P. 1–46.

19. Krempl E., Lu H. The Hardening and Dependent Behavior of Fully Annealed AISI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial in Phase and Out – of – Phase Strain Cycling at Room Temperature // ASME Journal of Engineering Materials and Technology. – 1984. – Vol. 106. – P. 376–382.

20. Krieg R.D. A Practical Two Surface plasticity Theory // Journal of Applied Mechanics. – 1975. – Vol. 42. – P. 641–646.

21. Krieg R.D., Swearingen J.C., Rhode R.W. A physically-based internal variable model for rate-dependent plasticity // Proc. ASME/CSME PVP Conference, 1978. – P. 15–27.

22. Krieg R.D., Krieg D.B. Accurate of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model // Trans. ASME. – 1977. – Vol. 199. – No. 4. – P. 510–515.

23. Lemaitre Jean. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. – 1985. – Vol. 51. – No. 1–3. – P. 31–49.

24. Constitutive modeling for isotropic materials (HOST). Second Annual Contract Report / U.S. Lindholm, K.S. Chan, S.R. Bodner, R.M. Weber, K.P. Walker, B.N. Cassenti. – NASA CR – 174980. – 1985.

25. Miller A.K. A unified approach to predicting interactions among creep, cyclic plasticity, and recovery // Nuclear Eng. and Design. – 1978. – Vol. 51. – P. 35–43.

26. Miller K.J., Brown M.W. Multiaxial fatigue: a brief review // Adv. Fract. Res. Proc. 6<sup>th</sup> Int. Conf. New Delhi 4-10 Dec. – 1984. – Vol. I. – P. 31–56.

27. Miller A.K., Tanaka T.G. NONSS: A new method for integrating unified constitutive equations under complex histories // Trans. ASME: J. Eng. Mater. and Technol. – 1988. – Vol. 110. – No. 3. – P. 205–211.

28. Ohno N. A constitutive model of cyclic plasticity with a nonhardening strain region // J. Appl. Mech. – 1982. – No. 49. – P. 721–727.

29. Ohno N. Recent topics in constitutive modeling of cyclic and viscoplasticity // Appl. Mech. Rev. – 1990. – No. 43. – 283 p.

30. Ohno N., Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions // Int. Journal of Plasticity. – 1991. – No. 7. – P. 879–891.

31. Ohno N., Wang J.D. Kinematics hardening rule with critical state of dynamic recovery, Parts I and II // Int. Journal of Plasticity. – 1993. – No. 9. – P. 375–403.

32. Харт. Уравнения состояния для неупругой деформации металлов // Теоретические основы инженерных расчетов: труды ASME. – 1976. – № 3. – С. 1–7.

33. Chaboche J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // Inter. J. of Plasticity. – 1989. – Vol. 5. – No. 3. – P. 247–302.

34. Chaboche J.L. Thermodynamically based viscoplastic constitutive equations: theory versus experiment. ASME Winter Annual Meeting. – Atlanta, GA (USA), 1991. – P. 1–20.

35. Chaboche J.L. Cyclic viscoplastic constitutive equations, parts I and II. ASME // J. of Applied Mechanics. – 1993. – No. 60. – P. 813–828.

36. Chaboche J.L., Rousselier G. On the plastic an viscoplastic constitutive equations // ASME J. of Pres. Vessel Techn. – 1983. – Vol. 105. – P. 153–164.

37. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.

38. Нелинейная механика материалов / Ж. Бессон, Ж. Каето, Ж.-Л. Шабоши, Т.С. Форест. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397 с.

39. Кадашев Ю.И., Мосолов А.Б. О соотношениях эндохронной теории пластичности с «новой» мерой внутреннего времени при сложном циклическом нагружении // Прочность при малом числе нагружения. – М.: Наука, 1969. – С. 71–80.

40. Романов А.Н. Энергетические критерии разрушения при малоцикловом нагружении // Проблемы прочности. – 1974. – № 1. – С. 3–10.

41. Бондарь В.С., Горохов В.Б., Санников В.М. Исследование малоциклового прочностного оболочек вращения при сложном тепловом нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Механика деформируемых систем: всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т. – Горький, 1979. – Вып. 12. – С. 120–126.

42. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 125–152.

43. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Нелинейные процессы накопления повреждений при нестационарных циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности. – 2012. – Вып. 75. – Ч. 2. – С. 96–104.

44. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 2. – С. 21–35. DOI: 10.15593 / perm.mech /2015.2.02

45. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термовязкопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – С. 39–56.

46. Аверченков Е.А., Донченко А.С., Егоров В.И. О поведении материала поршня при термомеханическом нагружении // Повышение топливной экономичности и долговечности автомобильных двигателей. – М.: Изд-во МАМИ, 1983. – Вып. 5. – С. 59–68.

47. Соси. Модели разрушения при многоосной усталости // Теор. основы инженерных расчетов: тр. FSME. – 1988. – № 3. – С. 9–21.

48. Дегтярев В.П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. – М.: Машиностроение, 1967. – 131 с.

49. Шишмарев О.А., Щербо А.Г. Исследование некоторых сложных процессов нагружения стали с разгрузкой // Прикладная механика. – 1982. – Т. 18, № 3. – С. 65–70.

50. Ohashi Y. Effect of Complicated deformation history on inelastic deformation behavior of metals // Memoirs of Faculty of engineering Nagoya University. – 1982. – Vol. 34. – No. 1. – P. 1–76.

51. Вавакин А.С., Мохель А.Н., Степанов Л.П. Исследование характера пластического деформирования стали

30ХГСА в точках резкого излома траектории нагружения (Р, М – опыты). – М., 1983. – 102 с. Деп. ВИНТИ.

52. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность: моногр. Кн. 1. Процессы сложного деформирования. – Тверь: Изд-во ТГТУ, 2003. – 170 с.

53. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали 45 при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций / А.С. Вавакин, Р.А. Васин, В.В. Викторов [и др.]. – М., 1986. – 66 с. Деп. ВИНТИ 16.10.86, №7298-В86.

54. Гусенков А.П. Прочность при изотермическом и не-изотермическом малоцикловом нагружении. – М.: Наука, 1979. – 295 с.

## References

1. Il'jushin A.A. Plastichnost'. Osnovy obshchei matematicheskoj teorii [Plastic. Fundamentals of general mathematical theory]. Moscow, Izdatel'stvo AN SSSR, 1963, 271 p.

2. Il'jushin A.A. Mehanika sploshnoj sredy [Continuum mechanics]. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta, 1990, 310 p.

3. Novozhilov V.V., Kadashevich Ju.I. Mikronaprjazhenija v konstrukcionnyh materialah [Microstress in structural materials]. Leningrad, Mashinostroenie, 1990. 224 p.

4. Rabotnov Ju.N. Polzuchest' jelementov konstrukcij [Creep of structural elements]. Moscow, Fizmatgiz, 1966, 752 p.

5. Birgera I.A., Shorra B.F. Termoprochnost' detalej mashin: Spravochnik [The thermal resistance of machine parts: Directory]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 455 p.

6. Bondar' V.S. Neuprugoe povedenie i razrushenie materialov i konstrukcii pri slozhnom neizotermicheskom nagruzenii: dis....d-ra fiz.-mat.nauk [Inelastic behavior and destruction of materials and structures under complex non-isothermal loading: dis .... dd-fiz.-mat.nauk]. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskij gosudarstvennyj mashinostroitel'nyj institut, 1990, 314 p.

7. Bondar' V.S. Neuprugost'. Varianty teorii [Inelasticity. Variants of the theory]. Moscow, FIZMATLIT, 2004, 144 p.

8. Bondar' V.S., Danshin V.V. Plastichnost'. Proporcional'nye i neproporcional'nye nagruzenija [Plastic. Proportional and disproportionate loading]. Moscow, FIZMATLIT, 2008, 176 p.

9. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. New York, Begell House, 2013, 194 p.

10. Vasin R.A. Jeksperimental'no-teoreticheskoe issledovanie opredelajushhh sootnoshenij v teorii uprugoplasticheskikh processov Avtoref. diss. d.f.-m.n.- [Experimental-theoretical study of determining relationships in the theory of elastoplastic processes]. Moscow, Moskovskij gosudarstvennyj universitet, 1987, 36 p.

11. Kachanov L.M. Teorija polzuchesti [Creep Theory]. Moscow, FIZMATLIT, 1960, 455 p.

12. Volkov I.A., Korotkih Ju.G. Uravnenija sostojanija vjzakuprugoplasticheskikh sred s povrezhdenijami [Equations of state of viscoelastoplastic media with damages]. Moscow, FIZMATLIT, 2008, 424 p.

13. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A., Kaplienko A.V., Korotkih Ju.G., Panov V.A. Prikladnaja teorija plastichnosti [Applied theory of plasticity]. Moscow, FIZMATLIT, 2015, 282 p.

14. Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkih Ju.G. Prikladnaja teorija vjzakuplastichnosti. Monografija [Applied theory of viscoplasticity]. Nizhnij Novgorod, Izdatel'stvo Nizhegorodskogo gos.universiteta, 2015, 317 p.

15. Volkov I.A., Igumnov L.A. Vvedenie v kontinual'nuju mehaniku povrezhdennoj sredy [Introduction to the Continuum

mechanics of a damaged medium]. Moscow, FIZMATLIT, 2017, 299 p.

55. Гусенков А.П., Котов П.И. Малоцикловая усталость при неизотермическом нагружении. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.

56. Казаков Д.А. Экспериментально-теоретическое исследование вязкопластического деформирования сталей в области повышенных температур и скоростей деформаций до  $10^{-2}C^{-1}$ : автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Горький: Изд-во ГТУ, 1985 – 20 с.

57. Охаси, Оно, Каваи. Оценка определяющих уравнений ползучести для нержавеющей стали 304 при повторяющемся многоосном нагружении // Теоретические основы инженерных расчетов: тр. ASME. – 1982. – Т. 104, № 3. – С. 1–8.

16. Malinin N.N. Prikladnaja teorija plastichnosti i polzuchesti [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 400 p.

17. Temis Ju.M. Modelirovanie plastichnosti i polzuchesti konstrukcionnyh materialov GTD [Modeling of plasticity and creep of construction materials GTE]. Moscow, Moskovskij gosudarstvennyj mashinostroitel'nyj institut, Materialy 49-oj Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii AAI «Prioritety razvitiya otechestvennogo avtotraktorostroenija i podgotovki inzhenernyh nauchnyh kadrov». Shkola-seminar «Sovremennye modeli termovjzakuplastichnosti». Chast' 2, 2005, pp. 25-76.

18. Krempl E. The influence of state of stress on low-cycle fatigue of structural materials: a literature survey and interpretive report. Amer. Soc. Test. And Mater. Spec. Techn.Publ., 1974, no. 549, pp. 1-46.

19. Krempl E., and Lu H. The hardening and dependent behavior of fully annealed aisi type 304 stainless steel under biaxial in phase and out – of – phase strain cycling at room temperature. ASME journal of engineering materials and technology, 1984.Vol. 106, pp. 376-382.

20. Krieg R.D. A. Practical two surface plasticity theory. Journal of applied mechanics, 1975, vol. 42, pp. 641-646.

21. Krieg R.D., Swearingen J.C., Rhode R.W. A physicallybased internal variable model for rate-dependent plasticity. Proc. ASME/CSME PVP Conference, 1978, pp.15-27.

22. Krieg R.D., Krieg D.B. Accurate of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model. Trans. ASME, 1977, vol. 199, no. 4, pp. 510-515.

23. Lemaitre Jean. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. Comput. meth. appl. mech. and eng, 1985, vol. 51, no. 1-3, pp. 31-49.

24. Lindholm U.S., Chan K.S., Bodner S.R., Weber R.M., Walker K.P., Cassenti B.N. Constitutive modeling for isotropic materials (HOST). Second annual contract report. NASA CR, 1985, 174980.

25. Miller A.K. A unified approach to predicting interactions among creep, cyclic plasticity, and recovery. Nuclear eng. and design, 1978, vol. 51, pp. 35-43.

26. Miller K.J., Brown M.W. Multiaxial fatigue: a brief review. New Delhi, Adv. fract. res. proc. 6<sup>th</sup> int. conf. 4-10 Dec., 1984, vol. I, pp. 31-56.

27. Miller A.K., Tanaka T.G. NONSS: A new method for integrating unified constitutive equations under complex histories. Trans. ASME: J. Eng. Mater. and Technol., 1988, vol. 110, no. 3, pp. 205-211.

28. Ohno N. A constitutive model of cyclic plasticity with a nonhardening strain region. *J. Appl. Mech.*, 1982, no. 49, pp. 721-727.
29. Ohno N. Recent topics in constitutive modeling of cyclic and viscoplasticity. *Appl. Mech. rev.*, 1990, no. 43, 283 p.
30. Ohno N. and Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions. *Int. Journal of Plasticity* 7, 1991, pp. 879-891.
31. Ohno N. and Wang J.D. Kinematics hardening rule with critical state of dynamic recovery, Parts I and II. *Int. Journal of Plasticity* 9, 1993, pp. 375-403.
32. Khart Uravneniia sostoianiiia dlia neuprugoi deformatsii metallov teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov [Equations of state for inelastic deformation of metals]. *Trudy ASME*. 1976. № 3. C. 1-7.
33. Chaboche J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *Inter. J. of Plasticity*, 1989, vol. 5, no. 3, pp. 247-302.
34. Chaboche J.L. Thermodynamically based viscoplastic constitutive equations: theory versus experiment. *ASME Winter Annual Meeting, Atlanta, GA (USA)*, 1991, pp. 1-20.
35. Chaboche J.L. Cyclic viscoplastic constitutive equations, parts I and II. *ASME J. of Applied Mechanics* 60, 1993, pp. 813-828.
36. Chaboche J.L., Rousselier G. On the plastic and viscoplastic constitutive equations. *ASME J. of Pres. Vessel Techn.*, 1983, vol. 105, pp. 153-164.
37. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. of Plasticity.*, 2008, vol. 24, pp. 1642-1692.
38. Besson Zh., Kaeto Zh., Zh.-L. Shaboshi, Forest T.S. Nelinejnaja mehanika materialov [Nonlinear Mechanics of Materials], *Saint Petersburg: Izd-vo Politehn. un-ta*, 2010, 397 p.
39. Kadashevich Ju.I., Mosolov A.B. O sootnoshenijah jendohronnoj teorii plastichnosti s «novoj» meroj vnutrennego vremeni pri slozhnom ciklicheskom nagruzhennii. Prochnost' pri malom chisle nagruzhennija [On the relations of the endochronic theory of plasticity with the "new" measure of internal time under complex cyclic loading. Durability with a small number of loading]. *Moscow, Nauka*, 1969, pp. 71-80.
40. Romanov A.N. Jenergeticheskie kriterii razrushenija pri malociklovom nagruzhennii [Energy criteria of failure under low-cycle loading]. *Problemy prochnosti*, 1974, no. 1, pp. 3-10.
41. Bondar' V.S., Gorohov V.B., Sannikov V.M. Issledovanie malociklovoj prochnosti obolochek vrashhenija pri slozhnom teplosilovom nagruzhennii [Investigation of low-cycle strength of shells of revolution under complex heat-stress loading]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Mehanika deformiruemyh sistem: vsesojuz. mezhvuz. sb./ Gor'k. Un-t*, 1979, iss.12, pp. 120-126.
42. Bondar V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Mathematical modelling of deformation and damage accumulation under cyclic loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014, no. 2, pp. 125-152.
43. Bondar' V.S., Danshin V.V., Semenov P.V. Nelinejnye processy nakoplenija povrezhdenij pri nestacionarnykh ciklicheskih nagruzhennijah [Nonlinear processes of damage accumulation under non-stationary cyclic loading]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2012, iss. 75, Ch. 2, pp. 96-104.
44. Bondar V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. Version of the theory of thermoplasticity. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 2, pp. 21-35. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.02
45. Bondar V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. Variant of thermoviscoplasticity theory. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 1, pp. 39-56. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.03
46. Averkhenkov E.A., Donchenko A.S., Egorov V.I. O povedenii materiala porshnja pri termomechanicheskom nagruzhennii // Povyshenie toplivnoj jekonomichnosti i dolgovechnosti avtomobil'nykh dvigatelej [On the behavior of the piston material under thermomechanical loading]. *Moscow, Moskovskii gosudarstvennyi mashinostroitelnyi universitet*, 1983, iss. 5, pp. 59-68.
47. Sosi. Modeli razrushenija pri mnogoosnoj ustalosti [Models of failure with multiaxial fatigue]. *Teoretich. Osnovy inzhenernykh raschetov: Trudy FSME*, 1988, no. 3, pp. 9-21.
48. Degtjarev V.P. Plastichnost' i polzuchnost' mashinostroitel'nykh konstrukcij [Plasticity and creep of engineering constructions]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1967, 131 p.
49. Shishmarev O.A., Shherbo A.G. Issledovanie nekotorykh slozhnykh processov nagruzhennija stali s razgruzkoj [Investigation of some complex loading processes of steel with unloading]. *Prikladnaja mehanika*, 1982, vol.18, no. 3, pp.65-70.
50. Ohashi Y. Effect of Complicated deformation history on inelastic deformation behavior of metals. *Memoirs of Faculty of engineering Nagoya University*, 1982, vol. 34, no. 1, pp. 1-76.
51. Vavakin A.S., Mohel' A.N., Stepanov L.P. Issledovanie haraktera plasticheskogo deformirovanija stali 30HGSA v tochkah rezkogo izloma traektorii nagruzhennija. (R, M – opyty) [Investigation of the nature of the plastic deformation of steel 30XГСА at the points of a sharp break in the trajectory of loading. (P, M – experiments)]. *Moscow, Dep. VINITI*, 1983, 102 p.
52. Zubchaninov V.G., Ohlopkov N.L., Garanikov V.V. Jeksperimental'naja plastichnost': Monografija. Kniga 1. Processy slozhnogo deformirovanija [Experimental plasticity: Monograph. Book 1. Processes of complex deformation]. *Tver', Tverskoi gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet*, 2003, 170 p.
53. A.S. Vavakin, R.A. Vasin, V.V. Viktorov i dr. Jeksperimental'noe issledovanie uprugoplasticheskogo deformirovanija stali 45 pri slozhnom nagruzhennii po krivolinejnym prostranstvennym traektorijam deformacij [Experimental study of elastoplastic deformation of steel 45 under complex loading along curvilinear spatial deformation trajectories]. *Moscow, Dep. VINITI*, 1986. 66 p.
54. Gusenkov A.P. Prochnost' pri izotermicheskom i neizotermicheskom malociklovom nagruzhennii [Strength in isothermal and non-isothermal low-cycle loading]. *Moscow, Nauka*, 1979, 295 p.
55. Gusenkov A.P., Kotov P.I. Malociklovaja ustalost' pri neizotermicheskom nagruzhennii [Low-cycle fatigue under nonisothermal loading]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1983, 240 p.
56. Kazakov D.A. Jeksperimental'no-teoreticheskoe issledovanie vjzokplasticheskogo deformirovanija stalej v oblasti povyshennykh temperatur i skorostej deformacij do  $10^{-2}C^{-1}$  [A theoretical and theoretical study of viscoplastic deformation of steels in the region of elevated temperatures and deformation rates up to  $10^{-2}C^{-1}$ ]. *Avtoreferat dissert. na soisk. uch. stepeni k.t.n. Gor'kij: GTU*, 1985, 20 p.
57. Ohasi, Ono, Kawai. Ocenka opredeljajushhijh uravnenij polzuchesti dlja nerzhavejushhej stali 304 pri povtorjajushhemsja mnogoosnom nagruzhennii [Evaluation of the determining creep equations for stainless steel 304 under repeated multiaxial loading]. *Teoreticheskie osnovy inzhenernykh raschetov: Trudy ASME*, 1982, vol. 104, no. 3, pp. 1-8.