



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.17

УДК: 531.133.1; 531.311; 539.312

## МЕХАНИКА СТОЛКНОВЕНИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ: ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ И АДГЕЗИИ.

### II. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Я.А. Ляшенко<sup>1,2</sup>, Э. Виллерт<sup>1</sup>, В.Л. Попов<sup>1,3,4</sup>

<sup>1</sup>Берлинский технический университет, Берлин, Германия

<sup>2</sup>Сумский государственный университет, Сумы, Украина

<sup>3</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>4</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия

#### О СТАТЬЕ

Получена: 05 июня 2018 г.

Принята: 19 июня 2018 г.

Опубликована: 28 декабря 2018 г.

#### Ключевые слова:

столкновение, нормальный и тангенциальный контакт, адгезия, трение, скольжение, коэффициент восстановления, метод редукции размерности.

#### АННОТАЦИЯ

Данная работа представляет собой вторую часть обзора, посвященного физике двухчастичных столкновений твердых тел. В первой части описаны теоретические и экспериментальные работы по неупругим столкновениям твердых тел, в которых диссипация энергии обусловлена наличием внутреннего или внешнего трения, пластичности, адгезии, а также других каналов затухания. В настоящей части обзора мы уделили основное внимание случаю столкновений упругих частиц. Приведены результаты математического и численного моделирования, полученные авторами с применением метода редукции размерности, который позволяет описание трехмерного контакта свести к моделированию контактных процессов в эквивалентном одномерном пространстве. Рассмотрено три случая: столкновение между телами без проскальзывания (эквивалент бесконечного коэффициента трения), с конечным коэффициентом трения в зоне контакта и с наличием адгезионного взаимодействия, которое описывается в пределе JKR. Во всех рассматриваемых случаях идентифицированы определяющие процесс безразмерные переменные, и численно определены функции, задающие зависимости между этими переменными. Используя указанные безразмерные переменные, возможно рассчитать компоненты скоростей и циклическую частоту вращения, а значит, и траекторию шарика после столкновения, если известны аналогичные параметры до столкновения. Теоретические результаты сравниваются с опубликованными экспериментальными данными и показывают хорошее совпадение с известными экспериментами.

© ПНИПУ

© Ляшенко Яков Александрович – д.ф.-м.н., проф., н.с., e-mail: [i.lyashenko@tu-berlin.de](mailto:i.lyashenko@tu-berlin.de), [iD 0000-0001-7511-3163](https://orcid.org/0000-0001-7511-3163)

Виллерт Эмануэль – н.с., e-mail: [e.willert@tu-berlin.de](mailto:e.willert@tu-berlin.de), [iD 0000-0001-7535-7301](https://orcid.org/0000-0001-7535-7301)

Попов Валентин Леонидович (Берлин, Германия) – д.ф.-м.н., проф., зав. каф,

e-mail: [v.popov@tu-berlin.de](mailto:v.popov@tu-berlin.de), [iD 0000-0003-0506-3804](https://orcid.org/0000-0003-0506-3804)

Iakov A. Lyashenko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Scientific Researcher,

e-mail: [i.lyashenko@tu-berlin.de](mailto:i.lyashenko@tu-berlin.de), [iD 0000-0001-7511-3163](https://orcid.org/0000-0001-7511-3163)

Emanuel Willert – Researcher, e-mail: [e.willert@tu-berlin.de](mailto:e.willert@tu-berlin.de), [iD 0000-0001-7535-7301](https://orcid.org/0000-0001-7535-7301)

Valentin L. Popov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department.

e-mail: [v.popov@tu-berlin.de](mailto:v.popov@tu-berlin.de), [iD 0000-0003-0506-3804](https://orcid.org/0000-0003-0506-3804)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## MECHANICS OF COLLISIONS OF SOLIDS: INFLUENCE OF FRICTION AND ADHESION. II NUMERICAL MODELING

I.A. Lyashenko<sup>1,2</sup>, E. Willert<sup>1</sup>, V.L. Popov<sup>1,3,4</sup>

<sup>1</sup>Berlin University of Technology, Berlin, Germany

<sup>2</sup>Sumy State University, Sumy, Ukraine

<sup>3</sup>National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>4</sup>National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 05 June 2018

Accepted: 19 June 2018

Published: 28 December 2018

#### Keywords:

impact, normal and tangential contact, adhesion, friction, partial sliding, restitution coefficient, method of dimensionality reduction

### ABSTRACT

This paper is the second part of the review on the physics of two-particle collisions of solids. The first one describes theoretical and experimental works on collisions of elastic and elastic-plastic solid bodies in the case when the energy dissipation is caused by the inner or interface friction, plasticity, adhesion, or some other damping mechanisms. In this second part, we concentrate on the case of collisions of elastic particles. Results of the analytical and numerical modeling within the dimensionality reduction (MDR) method are presented. MDR allows describing a three-dimensional contact by a reduction to an equivalent problem in a one-dimensional space. We consider three cases: a collision between bodies without slipping (equivalent to an infinite coefficient of friction), with a finite coefficient of friction in the interface, and with the presence of adhesion, which is described in the JKR limit. In all the considered cases, proper dimensionless variables have been identified which fully characterize the collision process, and the functions determining the transformation of the state before the impact into the state after the impact have been determined numerically. By using these dimensionless variables, it is possible to calculate the velocity components and the angular velocity, and hence the trajectory of the ball after the collision, in case if analogous parameters are known before the collision. Theoretical results are compared with the available results, the experimental data show agree well with the experiments.

© PNRPU

### Введение

Физические процессы, происходящие при столкновениях твердых частиц, представляют существенный интерес для различных технологических процессов, которые связаны с динамикой гранулированных сред [1–5]. Сложность теоретического описания процесса столкновения связана прежде всего с тем, что даже в простейшем случае упругого столкновения двух сферических частиц динамика их взаимодействия является очень сложной [6], поскольку может реализоваться множество различных случаев. Это частичное проскальзывание либо полное скольжение во время контакта, а также отсутствие скольжения на протяжении различных фаз удара [7]. На сегодняшний день не существует полной теории либо эффективных численных методов, которые позволяли бы описывать все процессы, происходящие при столкновениях. В предыдущей работе [8] нами был проведен обзор существующих теоретических и экспериментальных работ по изучению столкновений в случаях наличия трения в зоне контакта, адгезионного взаимодействия, а также пластической деформации. В этой части обзора мы проводим численное моделирование процесса удара в рамках метода редукции размерности [9], который позволяет описать многие экспериментальные результаты других авторов, освещенных в [8].

В своих недавних работах В.Л. Попов и другие показали, что теория Герца-Миндлина может быть точно вос-

произведена с помощью замены реального трехмерного контакта [10] контактом между модифицированным профилем с линейным упругим основанием, состоящим из независимых пружин [8, 11–14]. Этот метод можно использовать не только для точного описания нормального и тангенциального контакта при произвольной истории нагрузки, но и с хорошей точностью для контактов качения [15]. Указанный подход, получивший название метода редукции размерности (MDR), значительно упрощает проблему описания контакта, открывая при этом новые возможности для построения аналитических моделей и численного анализа динамически изменяющихся нормальных и тангенциальных контактов. Помимо этого, в рамках метода MDR возможно также описание контакта с адгезией, что позволяет провести моделирование столкновения тел, между которыми существует адгезионное взаимодействие. Такие ситуации нередко возникают в различных технологических процессах, к примеру при газодинамическом напылении [16], когда важно, чтобы после столкновения частица оставалась на поверхности. Настоящий обзор посвящен описанию упругого столкновения сферических тел под углом к упругому полупространству, которое основывается на результате численных экспериментов в рамках метода редукции размерности. Как мы уже указывали, эта часть обзора (первую часть см. в [8]) посвящена непосредственно моделированию в рамках метода MDR и обобщению полученных результатов, а также их сравнению с известными экспериментами.

Работа построена следующим образом. В подразд. 1 описана постановка задачи, приведена схема рассматриваемой системы и классическое аналитическое решение. Подразд. 2 посвящен обзору результатов, полученных авторами непосредственно с помощью моделирования в рамках метода редукции размерности. Приведены основные предположения и допущения, в рамках которых работает указанный подход. Отдельно рассмотрены три случая: столкновение без проскальзывания (эквивалент бесконечного коэффициента трения), столкновение с конечным коэффициентом трения и столкновение при наличии адгезионного взаимодействия между поверхностями контактирующих тел. Во всех случаях приведено аналитическое исследование линеаризованной модели с постоянной контактной жесткостью, в результате которого определены функции, полностью описывающие столкновение. С помощью моделирования в широком диапазоне параметров показано, что найденные функции полностью задают параметры столкновения при реальном контакте между сферическим телом и упругой полуплоскостью. Проведен численный расчет указанных функций, а в случаях без проскальзывания и наличия адгезионного взаимодействия в актуальной области параметров записаны аналитические аппроксимации. Показано, что использование этих аппроксимаций позволяет найти любую величину после столкновения: угловую скорость вращения, нормальную и тангенциальную компоненту скорости, угол отражения, коэффициенты восстановления и т.д. Для конечного коэффициента трения и случая с адгезией проведено сравнение с экспериментами и показано, что теоретические результаты описывают экспериментальные с высокой точностью. Более того, в ситуации с конечным коэффициентом трения теория в том числе описывает область малых углов падения меньше  $30^\circ$ , что является ее несомненным преимуществом по сравнению с другими подходами.

**1. Схематическое представление задачи и ее классическое аналитическое решение**

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением столкновения частиц с полупространством. Эта базовая задача может быть легко обобщена на случай столкновения двух конечных частиц. Во избежание излишнего усложнения мы отказались от явного рассмотрения механизма сведения общей задачи столкновений к задаче столкновения с полупространством. Детали этой редукции можно найти в классических учебниках по теории столкновений, например в [17]. Рассмотрим столкновение упругого шара массой  $m$  и радиусом  $R$  с упругим полупространством, как это показано на рис. 1.

Пусть модули упругости шара и полупространства  $E_1$  и  $E_2$ , коэффициенты Пуассона  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , сдвиговые модули  $G_1$  и  $G_2$ , а плотности материалов шара и полупространства  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Начальная скорость шара  $v_0$  до

акта столкновения раскладывается на вертикальную  $v_{z0}$  и горизонтальную  $v_{x0}$  компоненты, начальная циклическая частота вращения шара  $\omega_0$ . После акта столкновения часть кинетической энергии передается телу, с которым шар контактировал, и в результате эти величины становятся равными  $v$ ,  $-v_z$ ,  $v_x$ ,  $\omega$ . Зная величины компонент скорости, легко определить угол скольжения для падающего тела  $\alpha^\circ$ , а также угол скольжения  $\beta^\circ$ , с которым шар отлетает от поверхности.

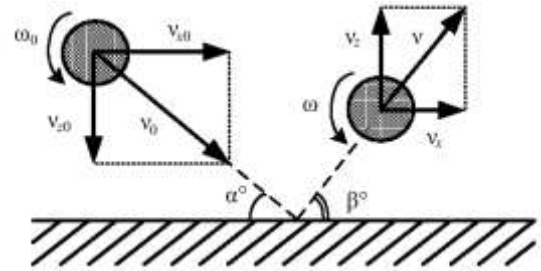


Рис. 1. Схематическое представление столкновения сферического тела с полупространством под углом к поверхности  
 Fig. 1. Schematic representation of the collision of a spherical body with a half-space at an angle to the surface

Существует классическое решение этой задачи. Обозначим через  $F_x$  и  $F_z$  силы, действующие на тело во время контакта со стороны полупространства. Уравнения движения шара запишутся в виде [8], [18]

$$m(v_z - v_{z0}) = -\int_0^t F_z(t') dt', \tag{1.1}$$

$$m(v_x - v_{x0}) = -\int_0^t F_x(t') dt', \tag{1.2}$$

$$I(\omega - \omega_0) = -R \int_0^t F_x(t') dt', \tag{1.3}$$

где  $t$  – время столкновения, а момент инерции сферы  $I = (2/5)mR^2$ . Система уравнений (1.1)–(1.3) позволяет определить все параметры после столкновения (скорость  $v$ , угол скольжения  $\beta^\circ$ , угловую скорость  $\omega$ ) как функции аналогичных параметров до столкновения. Однако для этого необходимо знать временные зависимости тангенциальной  $F_x(t)$  и нормальной  $F_z(t)$  сил, определение которых всегда представляет нетривиальную задачу. При использовании условия качения для тангенциальной компоненты скорости отражения  $v_x$

$$v_x + \omega R = 0 \tag{1.4}$$

система (1.1)–(1.3) решается аналитически точно, что приводит к известному результату [19]:

$$\bar{v}_x = \frac{5}{7} v_{x0} - \frac{2}{7} R \omega_0, \tag{1.5}$$

$$\bar{\omega} = \frac{2}{7} \omega_0 - \frac{5}{7} \frac{v_{x0}}{R}, \tag{1.6}$$

который мы в дальнейшем будем обозначать как «классическое» решение. Изменение кинетической энергии в результате столкновения составит

$$\Delta E = m(\bar{v}_x^2 - v_{x0}^2) / 2 + I(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2) / 2 = -m(v_{x0} + R\omega_0)^2 / 7. \quad (1.7)$$

Из выражения (1.7) видно, что удар не является абсолютно упругим, поскольку энергия не сохраняется (ее изменение отрицательно). Отметим, что решения (1.5), (1.6) не содержат материальных параметров типа модулей сдвига, а зависят только от начальных условий, что, как показано далее, имеет место только для узкого диапазона параметров и в большинстве практических случаев несправедливо [8].

Обычно в экспериментальных работах отдельно определяют коэффициенты восстановления для нормальной и тангенциальной компонент скоростей. В обозначениях рис. 1 они запишутся как

$$e_n = -v_z / v_{z0}, \quad (1.8)$$

$$e_t = v_x / v_{x0}, \quad (1.9)$$

где индексы  $n$  и  $t$  обозначают нормальную и тангенциальную составляющие. Далее при моделировании мы также будем использовать эти два определения.

## 2. Моделирование упругого удара сферического тела с упругим полупространством

Несмотря на обширное количество экспериментальных результатов и теоретических моделей, столкновение сферического тела под углом к поверхности на сегодняшний день представляет нерешенную задачу, поскольку не существует единой теории, позволяющей полностью описать процессы, происходящие в зоне контакта. В недавних работах авторов настоящего обзора [20–22] в безразмерных переменных решена задача по столкновению упругого тела с упругим полупространством (см. рис. 1) в таких случаях: столкновение без проскальзывания (эквивалент бесконечной силы трения), столкновение с конечным коэффициентом трения, а также столкновение при наличии адгезионного взаимодействия между поверхностями контактирующих тел. Причем задачи решены таким образом, что, зная начальные параметры до столкновения (скорость, угол падения и циклическую частоту вращения), аналогичные величины после столкновения определяются однозначным образом. Этот раздел посвящен обзору результатов, полученных в указанных работах.

### 2.1. Основные предположения

Рассмотрим систему, показанную на рис. 1. Основным моментом при построении математической модели здесь является адекватное описание нормального и тан-

генциального контакта. Ограничимся приближением, в котором будем рассматривать независимо нормальный и тангенциальный контакт без учета качения. Это справедливо, когда контактирующие среды являются упруго подобными, т.е. для них выполняется равенство

$$\frac{1 - 2\nu_1}{G_1} = \frac{1 - 2\nu_2}{G_2}. \quad (2.1)$$

Будем действовать в приближении полупространства [23], в котором градиент поверхности всегда намного меньше 1, что означает малость глубины индентирования  $d$  по сравнению с радиусом контакта  $a$ . Кроме того, все размеры, связанные с контактом, считаются пренебрежимо малыми по сравнению с радиусом сферы  $R$ . Если нормальная и тангенциальная компоненты скорости  $v_z$  и  $v_x$ , то характерное отклонение центра масс индентируемого тела имеет порядок величины  $u_x \approx d \cdot v_x / v_z$ . Для «типичного» столкновения с отношением  $v_x / v_z$  порядка единицы тангенциальное перемещение  $u_x \approx d$ , а это намного меньше, чем радиус контакта.

Адгезию в контакте будем описывать в рамках JKR-теории, предполагая, что условие «прилипания» выполняется по всему контакту. Как показано в работе [24], при межмолекулярном притяжении предположение «прилипания» физически более обоснованно, чем предположение отсутствия сдвиговых напряжений в контакте, обычно используемое в теории JKR. Тем не менее в случае упруго подобных тел, удовлетворяющих уравнению (2.1), нет никакого различия между нормальным контактом без трения и контактом без проскальзывания. Даже в случае материалов, которые не удовлетворяют уравнению (2.1), теория может быть использована в очень хорошем приближении, поскольку разница получаемых результатов в адгезионном контакте со скольжением и без него по величине имеет тот же порядок, что и различие между нормальной жесткостью цилиндрического индентора с трением и без такового, для коэффициентов Пуассона, находящихся в пределах от 0,3 до 0,5, не превышает 3% [24]. Отметим, что столкновение рассматривается в квазистатическом случае, когда скорости воздействия намного меньше, чем скорость звука в упругом полупространстве. В этом случае эффекты, вызванные инерцией полупространства, незначительны. Помимо всего сказанного, мы пренебрегаем потерей кинетической энергии при столкновении за счет упругих волн, распространяющихся в полупространстве [25, 26].

Полученные далее результаты могут быть обобщены на произвольный несжимаемый индентор параболической формы, находящийся в непосредственной близости от контакта. Для этого необходимо ввести два дополнительных параметра: безразмерный радиус вращения  $K = \sqrt{I / (MR^2)}$  [7] и угол  $\Phi$  между нормалью к полупространству и направлением между точкой

контакта и центром масс параболического индентора. Здесь мы рассматриваем случай однородного шара, для которого  $K = \sqrt{0,4}$  и  $\Phi = 0$ , поскольку именно этот случай представляет наибольший интерес в различных приложениях.

### 2.2. Удар без проскальзывания (бесконечный коэффициент трения)

В работе [7] показано, что в зависимости от угла падения возможно различное поведение в области между поверхностями контактирующих тел: полное проскальзывание, частичное проскальзывание, либо качение с преобладанием «прилипания» (эти три зоны показаны на рис. 8 в работе [8]). Описанные ситуации соответствуют конечному коэффициенту трения  $\mu$ , который существенно отражается на поведении системы. Прежде чем вводить в рассмотрение коэффициент трения, опишем задачу без проскальзывания, решение которой представлено в работе [20]. Классическое решение этой задачи дается уравнениями (1.5)–(1.7). Покажем здесь, что это решение ввиду использованного приближения (1.4) выполняется только при определенном соотношении между материальными параметрами контактирующих тел, а в произвольном случае является неверным. Отметим, что ситуация без проскальзывания рассматривалась ранее в работе [27], однако в ней учитывались неупругие эффекты, мы же ограничимся областью упругого удара.

#### 2.2.1. Случай постоянной контактной жесткости

Проведем описание нормального и тангенциального контакта в упрощенном виде. При столкновении происходит изменение конфигурации нормального и тангенциального контакта из-за изменения глубины вдавливания и контактного радиуса, которые однозначно связаны между собой. Для понимания процесса упростим эту ситуацию, рассмотрев поведение жесткого шара, который контактирует с поверхностью с помощью пружины с постоянной жесткостью. Эта ситуация эквивалентна сфере, имеющей в области контакта плоское основание. Благодаря плоскому контакту жесткость будет постоянной при условии, что контактный радиус во время столкновения изменяется незначительно.

Обозначим нормальное и тангенциальное смещение центра тяжести сферического тела как  $u_z$  (направлено вниз) и  $u_x$  (направлено вправо по ходу движения), нормальную и тангенциальную силы как  $F_N$  (направление совпадает с направлением  $u_z$ ) и  $F_f$  (направление совпадает с  $u_x$ ). Тогда уравнения движения запишутся в виде (ср. с (1.1) – (1.3))

$$m\ddot{u}_z = -F_N, \tag{2.2}$$

$$m\ddot{u}_x = -F_f, \tag{2.3}$$

$$I\ddot{\phi} = -F_f R, \tag{2.4}$$

где  $\phi$  – угол поворота сферы, изменение которого задает угловую скорость через связь  $\dot{\phi} = \omega$ . Нормальная и тангенциальная силы в рассматриваемом случае определяются как

$$F_N = k_z u_z, \tag{2.5}$$

$$F_f = k_x (u_x + R\phi), \tag{2.6}$$

где  $k_z$  и  $k_x$  – нормальная и тангенциальная жесткости гипотетической пружины. В уравнении (2.6) мы учли тот факт, что тангенциальное перемещение точки контакта является суммой перемещений центра масс и перемещения за счет вращения несжимаемой сферы. Решая систему уравнений (2.2)–(2.6) при начальных условиях в начальный момент контакта  $u_x(0) = 0$ ,  $\dot{u}_x(0) = v_{x0}$ ,  $u_z(0) = 0$ ,  $\dot{u}_z(0) = v_{z0}$ ,  $\phi(0) = 0$ ,  $\dot{\phi}(0) = \omega_0$ , мы получим

$$\dot{u}_z(t) = v_{z0} \cos(\omega_z t), \tag{2.7}$$

$$\dot{u}_x(t) = \left( \frac{5}{7} v_{x0} - \frac{2}{7} R\omega_0 \right) + \frac{2}{7} (v_{x0} + R\omega_0) \cos(\omega_x t), \tag{2.8}$$

$$\dot{\phi}(t) = \left( \frac{2}{7} \omega_0 - \frac{5}{7} \frac{v_{x0}}{R} \right) + \frac{5}{7R} (v_{x0} + R\omega_0) \cos(\omega_x t), \tag{2.9}$$

где частота  $\omega_z = \sqrt{k_z / m}$  и частота  $\omega_x = \sqrt{7k_x / (2m)}$ . Время контакта  $t_i$  определяется уравнением (2.7) и вычисляется как  $t_i = \pi / \omega_z = \pi \sqrt{m / k_z}$ . Скорости, в последний момент столкновения соответствующие времени  $t_i$ , соответственно вычисляются так:

$$\dot{u}_z(t_i) = -v_{z0},$$

$$v_x = \dot{u}_x(t_i) = \bar{v}_x + \frac{2}{7} V \cos \left( \pi \sqrt{\frac{7 k_x}{2 k_z}} \right), \tag{2.10}$$

$$\omega = \dot{\phi}(t_i) = \bar{\omega} + \frac{5}{7R} V \cos \left( \pi \sqrt{\frac{7 k_x}{2 k_z}} \right), \tag{2.11}$$

где

$$V = v_{x0} + R\omega_0, \tag{2.12}$$

а величины  $\bar{v}_x$  и  $\bar{\omega}$  представляют классическое решение (1.5), (1.6). Согласно полученным соотношениям изменение энергии во время столкновения примет вид

$$\Delta E = -\frac{m}{7} (v_{x0} + R\omega_0)^2 \sin^2 \left( \pi \sqrt{\frac{7 k_x}{2 k_z}} \right). \tag{2.13}$$

Отметим, что в случае  $k_z = 14k_x$  решение задачи с постоянной жесткостью (2.10), (2.11) и (2.13) совпадают с классическим решением (1.5), (1.6), (1.7). Из выражений (2.10), (2.11) и (2.13) следует, что комбинации

$$\frac{7}{2} \frac{v_x - \bar{v}_x}{V} = \cos \left( \pi \sqrt{\frac{7 k_x}{2 k_z}} \right), \quad (2.14)$$

$$\frac{7}{5} \frac{R(\omega - \bar{\omega})}{V} = \cos \left( \pi \sqrt{\frac{7 k_x}{2 k_z}} \right), \quad (2.15)$$

$$\frac{7 \Delta E}{m(v_{x0} + R\omega_0)^2} = -\sin^2 \left( \pi \sqrt{\frac{7 k_x}{2 k_z}} \right) \quad (2.16)$$

зависят только от отношения тангенциальной жесткости к нормальной  $k_x/k_z$ . Поскольку такое отношение не зависит от размера контакта и, следовательно, остается неизменным в процессе индентирования, это позволяет предположить, что структура уравнений (2.14)–(2.16) справедлива для более общего случая контакта произвольной формы. Для произвольного осесимметричного тела отношение тангенциальной жесткости к нормальной постоянно и вычисляется как  $k_x/k_z = G^*/E^*$  [28], где  $E^*$  определяется выражением

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad (2.17)$$

а для  $G^*$  справедливо аналогичное соотношение в виде

$$\frac{1}{G^*} = \frac{2 - \nu_1}{4G_1} + \frac{2 - \nu_2}{4G_2}. \quad (2.18)$$

В работах [29, 30] показано, что выражения (2.17), (2.18) справедливы в том числе и для шероховатых фрактальных поверхностей, которые имеют практически все природные объекты, формирующиеся под действием шумов (флуктуаций) и других случайных сил [31–34]. Таким образом, можно предполагать, что соотношения (2.14)–(2.16) выполняются как для гладких профилей, так и для шероховатых, для которых точная зависимость может быть заменена другой, учитываю-

щей тип шероховатости. Таким образом, мы приходим к гипотезе, что в общем случае соотношения (2.14)–(2.16) должны быть определены как

$$\frac{7}{2} \frac{v_x - \bar{v}_x}{V} = \frac{7}{5} \frac{R(\omega - \bar{\omega})}{V} = P(\gamma), \quad (2.19)$$

$$\frac{7 \Delta E}{m(v_{x0} + R\omega_0)^2} = -1 + (P(\gamma))^2, \quad (2.20)$$

где введена функция

$$\gamma = \sqrt{\frac{7 G^*}{2 E^*}}. \quad (2.21)$$

В следующих двух подразделах мы докажем правомерность гипотезы (2.19), (2.20), а также найдем форму функции  $P(\gamma)$ .

### 2.2.2. Методика моделирования

Для моделирования нормального и тангенциального контакта при столкновении будем использовать метод редукции размерности (Method of Dimensionality Reduction – MDR) [9]. В рамках MDR необходимо сделать следующее. Сначала произвести замену трехмерного упругого полупространства на линейное упругое основание, состоящее из массива независимых пружин с расстоянием  $\Delta x$  между ними. При этом для каждой пружины тангенциальная и нормальная жесткость рассчитываются как

$$\Delta k_z = E^* \Delta x,$$

$$\Delta k_x = G^* \Delta x.$$

На следующем шаге трехмерный профиль  $z = f(r)$  трансформируется в плоский профиль  $g(x)$  согласно правилу

$$g(x) = |x| \int_0^{|x|} \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr. \quad (2.22)$$

Этот этап схематически показан на рис. 2.

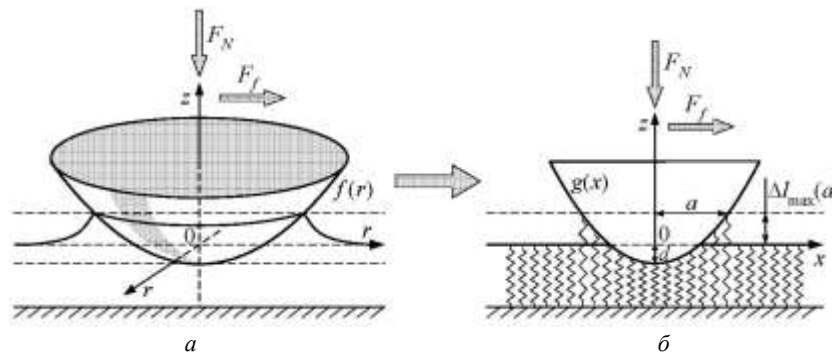


Рис. 2. MDR-трансформирование оригинального трехмерного профиля в одномерный (а) и замена упругого полупространства дискретным упругим основанием (б)

Fig. 2. MDR transformation of the original three-dimensional profile into one-dimensional (a) and replacement of the elastic half-space by a discrete elastic foundation (b)

В данном подразделе мы рассматриваем случай без учета адгезии, поэтому показанная на рисунке величина  $\Delta l_{\max}(a) \equiv 0$ . В [8, 13] показано, что при вдавливании MDR трансформированного профиля в упругое основание и его последующем произвольном движении в нормальном и тангенциальном направлениях зависимости обеих компонент сил от перемещений в соответствующих направлениях для одномерного представления задачи полностью воспроизводят зависимости для начальной трехмерной конфигурации. Решение контактной задачи в рамках метода MDR имеет такую же точность, как и решение Каттанео [35] и Миндлина [28]: в случае произвольного значения коэффициента Пуассона присутствует ошибка, которая, однако, является несущественной [36].

Для сферы радиусом  $R$  профиль в окрестности контакта имеет вид

$$f(r) = \frac{r^2}{2R}.$$

Этой функции согласно (2.22) соответствует одномерный профиль

$$g(x) = x^2 / R. \quad (2.23)$$

Если вертикальное смещение центра масс  $u_z$  отсчитывать от первого момента соприкосновения, оно будет совпадать с глубиной индентирования, а вертикальное смещение пружины в упругом основании внутри контактной области в точке  $x_i$  определится как

$$\tilde{u}_z(x_i) = u_z - g(x_i). \quad (2.24)$$

Контактный радиус  $a$  определяется согласно условию

$$\tilde{u}_z(a) = u_z - g(a) = 0. \quad (2.25)$$

Мы рассматриваем ситуацию без проскальзывания по всей области контакта, поэтому изменение горизонтального смещения  $d\tilde{u}_x(x_i)$  всех пружин, находящихся в контакте с профилем, рассчитывается по формуле

$$d\tilde{u}_x(x_i) = du_x + R d\varphi. \quad (2.26)$$

Нормальная и тангенциальная силы при этом задаются выражениями

$$F_N = E^* \Delta x \sum_{cont} \tilde{u}_z(x_i), \quad (2.27)$$

$$F_f = G^* \Delta x \sum_{cont} \tilde{u}_x(x_i), \quad (2.28)$$

где суммирование проводится по всем пружинам в области контакта в заданный момент времени.

### 2.2.3. Результаты моделирования

При моделировании процесса столкновения уравнения (2.2)–(2.4) решались численно методом Эйлера с шагом интегрирования по времени  $\Delta t = 10^{-8}$  с, а тангенциальная  $F_f$  и нормальная  $F_N$  силы определялись по методике, подробно описанной в подразд. 2.2.2. Результаты моделирования показаны на рис. 3.

Здесь показана рассчитанная функция  $P(\gamma)$  (2.19), полностью определяющая поведение системы, а также безразмерное изменение энергии при столкновении, задающееся выражением (2.20). Обе величины представлены как функции параметра  $\gamma$  (2.21). Если контактирующие тела имеют одинаковые коэффициенты Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , то выполняется равенство  $G^* / E^* = 2(1 - \nu) / (2 - \nu)$ . Из термодинамического критерия устойчивости следует соотношение  $-1 < \nu \leq 1/2$  [37]. Таким образом, для изотропных тел выполняется неравенство  $2/3 < G^* / E^* < 4/3$ , которое приводит к актуальному диапазону безразмерного параметра  $\gamma$ :

$$1,52 < \gamma < 2,16. \quad (2.29)$$

Однако для анизотропных (например, ортотропных) тел эффективное отношение  $G^* / E^*$  может находиться в более широком диапазоне, чем (2.29), поэтому при моделировании мы не ограничивались указанным интервалом. В результате проведенного моделирования выяснено, что все данные ложатся на единственную кривую. Таким образом гипотезы (2.19), (2.20) подтверждены.

В области  $\gamma < 3$  численно найденная функция  $P(\gamma)$  с высокой точностью аппроксимируется выражением

$$P(\gamma) = -1 + 2 \exp(-a\gamma) \cos^2[k(\gamma - b)] \quad (2.30)$$

с параметрами  $a = 0,195$ ,  $b = 0,061$ ,  $k = 1,685$ . Данные, рассчитанные по выражению (2.30), показаны на рис. 3 ромбами.

Коэффициент детерминации для аппроксимации (2.30) и численно найденной функции  $P(\gamma)$   $R^2 > 0,9995$ . Воспользовавшись выражением (2.30) для практически важного случая  $\nu = 1/3$ , мы имеем  $P \approx 0,197$ , а для несжимаемой среды ( $\nu = 1/2$ ) получим  $P \approx -0,087$ . В актуальном диапазоне (2.29) с гораздо более высокой точностью можно использовать аппроксимацию

$$P(\gamma) = 33,405 - 85,392\gamma + 75,914\gamma^2 - 28,195\gamma^3 + 3,727\gamma^4, \quad (2.31)$$

которая для величин  $\nu = 1/3$  и  $\nu = 1/2$  дает значения  $P \approx 0,193$  и  $P \approx -0,1$ . Из рис. 3 следует, что классическое решение (1.5), (1.6) в актуальном диапазоне пара-

метров (2.29) является справедливым только для единственного значения параметра  $\gamma$ .

Отметим, что функция  $P(\gamma)$  не определена, если  $(v_{x0} + R\omega_0) = 0$ . В этом случае имеем полностью нормальный контакт, поэтому, что очевидно,  $v_x = v_{x0}$  и  $\omega = \omega_0$ .

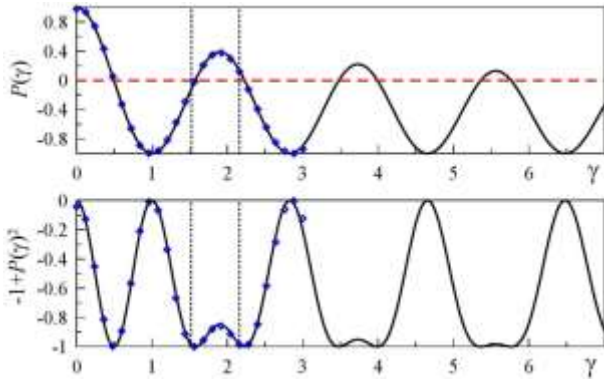


Рис. 3. Зависимости  $P(\gamma)$  (2.19) и  $-1+[P(\gamma)]^2$  (2.20) как функции параметра  $\gamma$  (2.21). Сплошная кривая представляет собой результат большого количества численных экспериментов с различным набором начальных условий, радиусов, упругих модулей и массы сферического тела. Вне зависимости от значений указанных величин все данные ложатся на единственную кривую, которая однозначно связывает кинематические параметры после столкновения с аналогичными параметрами до столкновения. Классическое решение (1.5) показано горизонтальной штриховой линией. Интервал (2.29) показан вертикальными штриховыми линиями

Fig. 3. Dependences  $P(\gamma)$  (2.19) and  $-1+[P(\gamma)]^2$  (2.20) as functions of the parameter  $\gamma$  (2.21). The solid curve is the result of a large number of numerical experiments with a different set of initial conditions, radii, elastic moduli, and the mass of the spherical body. Regardless of the values of these quantities, all data located on a single curve that uniquely relates the kinematic parameters after collision with similar parameters befor collision. The classical solution (1.5) is shown by a horizontal dashed line. The interval (2.29) is shown by vertical dashed lines

### 2.3. Удар с конечным коэффициентом трения

В подразд. 2.2 проведен анализ столкновения упругого сферического тела с упругим полупространством в случае бесконечного коэффициента трения, когда по всей области контакта наблюдается «прилипание» без проскальзывания. Это предположение существенно сужает область применения полученных результатов, поскольку достоверно известно, что в определенные моменты контакта наблюдаются области проскальзывания. Например, это показано на диаграмме на рис. 8 в работе [8]. Используемый нами для определения нормальной и тангенциальной контактных сил метод MDR позволяет проводить моделирование с произвольным коэффициентом трения. Проведем в этом подразделе анализ, позволяющий обобщить полученные ранее результаты на более широкий класс рассматриваемых систем.

#### 2.3.1. Случай постоянной контактной жесткости

Пусть между контактирующими поверхностями существует трение, характеризуемое коэффициентом трения  $\mu$ . Проведем здесь анализ, аналогичный осуществленному в подразд. 2.1.1. Полученные ранее результаты (2.10), (2.11), (2.13) справедливы в случае, когда в системе с конечным коэффициентом трения  $\mu$  выполняется условие «прилипания», при котором во всей зоне контакта отсутствует проскальзывание. Это условие записывается в виде

$$\left| \frac{v_{x0} + R\omega_0}{\omega_x} \right| |\sin(\omega_x t)| \leq \mu \frac{k_z}{k_x} \frac{v_{z0}}{\omega_z} |\sin(\omega_z t)|. \quad (2.32)$$

Уравнение (2.32) имеет нетривиальное решение:

$$\omega_x = \gamma\omega_z, \quad \alpha \geq \alpha_{c2} = 2\gamma^2 / 7, \quad (2.33)$$

задающееся параметром

$$\alpha = \mu v_{z0} / |v_{x0} + R\omega_0| \quad (2.34)$$

и натуральным числом  $\gamma$  (натуральное значение этот параметр имеет только в рассматриваемом случае постоянной жесткости [22]). При выполнении условия (2.33) реализуется случай, описывающийся уравнениями (2.10), (2.11), (2.13). Рассмотрим ситуацию с произвольным коэффициентом трения  $\mu$ . Условие «прилипания» задается комбинацией параметров  $\gamma$  (2.21) и  $\alpha$  (2.34). Это позволяет предположить, что гипотезы (2.19), (2.20) действуют и в рассматриваемом случае, однако теперь необходимо рассматривать функцию двух параметров  $P(\gamma, \alpha)$ . Далее мы докажем эту гипотезу численным моделированием и определим вид функции  $P(\gamma, \alpha)$ , но прежде получим некоторые ее свойства в рамках линеаризованной модели, в предельном случае полного проскальзывания в течение всего времени воздействия.

При выполнении неравенства

$$\alpha < \alpha_{c2} = 2\gamma^2 / 7 \quad (2.35)$$

пружина будет скользить с начала контакта. В этом случае сила трения определится как

$$F_f = \mu F_N \text{sgn}(v_{x0} + R\omega_0),$$

где  $\text{sgn}(x)$  – знаковая функция, определяющаяся стандартным образом и введенная для учета направления действия силы. Начальная фаза проскальзывания закончится в момент времени  $t = t_1$ , которое является корнем уравнения

$$\left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \cos(\omega_z t_1) = 1 - \frac{2}{7\alpha}.$$



Поскольку контакт существует до момента времени  $t = \pi / \omega_z$ , пружина будет проскальзывать на всем его протяжении, если  $t_1 > \pi / \omega_z$ , т.е. при выполнении неравенства

$$\alpha < \alpha_{c1} = \frac{2\gamma^2}{7(2\gamma^2 - 1)}. \quad (2.36)$$

В этом случае горизонтальная скорость после столкновения может быть рассчитана как

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} - \frac{1}{m} \int F_f dt = v_{x0} - \frac{\mu}{m} \int F_N dt \operatorname{sgn}(v_{x0} + R\omega_0) = \\ &= v_{x0} - 2\mu v_{z0} \operatorname{sgn}(v_{x0} + R\omega_0). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Выражение (2.37) может быть переписано в безразмерном виде как

$$P = 1 - 7\alpha. \quad (2.38)$$

Отметим, что решение (2.38) будет справедливо также и для нелинейного контакта в случае скольжения по всей зоне контакта на протяжении воздействия, поскольку зависимость нормальной силы  $F_N$  от глубины индентирования в (2.37) не была задана.

### 2.3.2. Методика моделирования

В случае конечного коэффициента трения методика моделирования аналогична описанной в подразд. 2.2.2, но имеется и ряд отличий. Отличия вызваны тем, что здесь присутствует проскальзывание, в то время как в подразд. 2.2.2 рассмотрен случай, в котором все находящиеся в контакте пружины сдвигаются так же, как и верхний профиль. Для учета скольжения на каждой итерации для всех пружин проверяется условие

$$\mu E^* \tilde{u}_z(x_i) \leq |G^* \tilde{u}_x(x_i)|. \quad (2.39)$$

Если условие (2.39) выполняется, пружина будет скользить. Для учета скольжения на каждом шаге к горизонтальному смещению пружин прибавляется инкремент (2.26), после чего для всех пружин проверяется условие (2.39). Для тех пружин, для которых это условие выполняется, устанавливается новая величина смещения

$$\tilde{u}_x(x_i) = \pm \mu E^* \tilde{u}_z(x_i) / G^*, \quad (2.40)$$

где знак совпадает со знаком  $\tilde{u}_x(x_i)$  в выражении (2.39), т.е. до присваивания величине  $\tilde{u}_x(x_i)$  нового значения. После этого нормальная  $F_N$  и тангенциальная  $F_f$  силы рассчитываются, как и ранее, по формулам (2.27), (2.28). Поскольку  $F_N$  и  $F_f$  теперь определены, решая численно систему уравнений (2.2)–(2.4), мы можем определить временную эволюцию интересующих нас величин. Как и ранее, сосредоточимся на нахождении функции  $P(\gamma, \alpha)$  (2.19), которая позволяет рассчитать полный

набор кинетических параметров после столкновения в зависимости от их значений до момента контакта.

### 2.3.3. Результаты моделирования

В разд. 4 работы [8] на основе имеющихся литературных данных описано столкновение сферического тела с упругим полупространством под углом. В частности, кратко описаны результаты работы [7], где показано, что в зависимости от угла падения возможна реализация различных ситуаций – полное проскальзывание в зоне контакта (область III), преобладание «прилипания» (область I), либо частичное проскальзывание (область II). На рис. 8 в работе [8] эти области показаны римскими цифрами. Ситуация с бесконечным коэффициентом трения, когда проскальзывание отсутствует на всех этапах столкновения, рассмотрена нами в предлагаемой работе в подразд. 2.2, где в актуальном диапазоне (2.29) функция  $P(\gamma)$  описывается аппроксимацией (2.31) и не зависит от параметра  $\alpha$  (2.34). При скольжении по всей зоне контакта реализуется соотношение (2.38).

Прежде чем начинать моделирование процесса столкновения, определим, пользуясь выражениями (3.6)–(3.12) из работы [8] области I, II и III, как функции параметров  $\gamma$  (2.19) и  $\alpha$  (2.34). При этом условие реализации области I (преобладает «прилипание») запишется как  $\alpha \geq \alpha_{c2}$ . Интервал, соответствующий области II (частичное проскальзывание) в рассматриваемом случае принимает вид  $\alpha_{c1} < \alpha < \alpha_{c2}$ . И последняя область III (полное проскальзывание) наблюдается при выполнении неравенства  $\alpha \leq \alpha_{c1}$ . Критические значения  $\alpha_{c1}$ ,  $\alpha_{c2}$  определяются полученными ранее формулами (2.36), (2.35). Отметим, что в случае  $\gamma = 1$  обе критические величины совпадают ( $\alpha_{c1} = \alpha_{c2}$ ), поэтому описанное выше справедливо только при  $\gamma > 1$ , когда  $\alpha_{c2} > \alpha_{c1}$ . На рис. 4 показана диаграмма, на которой показаны обсуждаемые выше области I, II и III.

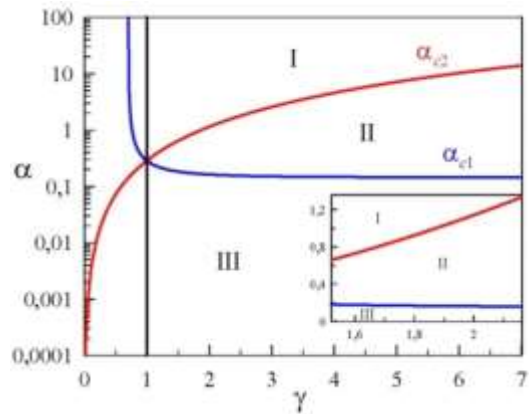


Рис. 4. Диаграмма режимов столкновения с конечным коэффициентом трения. Области I, II, III описаны выше и соответствуют аналогичным областям, показанным на рис. 8 в работе [8]. На вставке к рисунку показана актуальная область (2.29)

Fig. 4. Diagram of collision modes with a finite coefficient of friction. Areas I, II, III are described above and correspond to similar areas shown in Fig. 8 in [8]. The inset in the figure shows the actual area (2.29)

На осях диаграммы отложены безразмерные переменные  $\alpha$  и  $\gamma$ , набор которых полностью определяет рассматриваемую задачу. Увеличенный фрагмент диаграммы, показанный на вставке к рисунку для актуального диапазона параметров (2.29), полностью определяет возможные режимы в этом диапазоне, поскольку показывает поведение для всех значений  $\alpha$ .

На рис. 5 показана полученная в результате численного эксперимента зависимость  $P(\gamma, \alpha)$ , где результаты многочисленных компьютерных экспериментов ложатся на единственную поверхность, что делает ее универсальной.

Из рисунка видно, что при больших значениях параметра  $\alpha$  (2.34) поведение описывается кривой, показанной на верхней панели рис. 3, который построен для случая с бесконечным коэффициентом трения, соответствующим отсутствию проскальзывания в зоне контакта. Однако, как видно из рис. 5, поведение в области малых значений параметра  $\alpha$  существенно отличается, что требует проведения дополнительного анализа.

На рис. 6, а приведены зависимости  $P(\gamma, \alpha)$  как функции параметра  $\alpha$  (2.34) для 17 значений  $\gamma$  (2.21) из актуального диапазона (2.29). Из рисунка видно, что для всех кривых при малых  $\alpha$  наблюдается универсальное поведение, не зависящее от величины  $\gamma$ . Здесь все кривые ложатся на единственную прямую, задающуюся уравнением (2.38). Это связано с тем, что такие значения параметра  $\alpha$  отвечают низкому трению, когда осуществляется проскальзывание на протяжении всего контакта (область III на диаграмме (см. рис. 4)). При увеличении значения  $\alpha$  функция  $P(\gamma, \alpha)$  отклоняется от этой прямой, причем, как видно на вставке к рис. 5, которая представляет его увеличенный фрагмент, где и начинаются указанные отклонения, с увеличением ве-

личины параметра  $\gamma$  отклонение начинается раньше. Это согласуется с диаграммой, представленной на рис. 4, где с ростом  $\gamma$  область проскальзывания III сужается, поскольку уменьшается критическое значение  $\alpha_{c1}$  (2.36). После отклонения от линейного поведения все кривые ведут себя одинаково: функция  $P(\gamma, \alpha)$  сначала продолжает убывать, а затем при достижении минимума возрастает (возможно и последующее убывание функции), и с превышением параметром  $\alpha$  критического значения выходит на постоянное значение, соответствующее полному прилипанию, когда  $P(\gamma, \alpha)$  больше не зависит от  $\alpha$  и описывается аппроксимацией (2.31). Описанное поведение при больших  $\alpha$  хорошо прослеживается на трехмерной диаграмме на рис. 5. Стоит отметить, что условие  $\alpha > \alpha_{c2}$  означает преобладание "прилипания" в зоне контакта, а полное прилипание наступает при еще большем увеличении  $\alpha$ . Поэтому при превышении  $\alpha > \alpha_{c2}$  и дальнейшем его увеличении некоторое время наблюдается зависимость функции  $P(\gamma, \alpha)$  от параметра  $\alpha$ . К примеру, на кривых на рис. 6, а при малых значениях параметра  $\gamma$  во всем приведенном диапазоне  $\alpha > \alpha_{c2}$  наблюдается увеличение  $P(\gamma, \alpha)$ , а кривые, соответствующие большему  $\gamma$ , при  $\alpha > \alpha_{c2}$  показывают уменьшение значений  $P(\gamma, \alpha)$ . С еще большим ростом  $\alpha$  все же устанавливается постоянное значение  $P(\gamma, \alpha)$ , описываемое аппроксимацией (2.31), что легко видеть на рис. 6, б. Однако, из рисунка следует, что даже при значении  $\alpha = 12$  зависимость  $P(\gamma, \alpha)$  хоть и незначительно, но все же отклоняется от функции (2.31).

#### 2.3.4. Сравнение с экспериментом

На рис. 7 показаны экспериментальные результаты исследования соударения под углом сферического тела с плоскостью, полученные в работе [38].

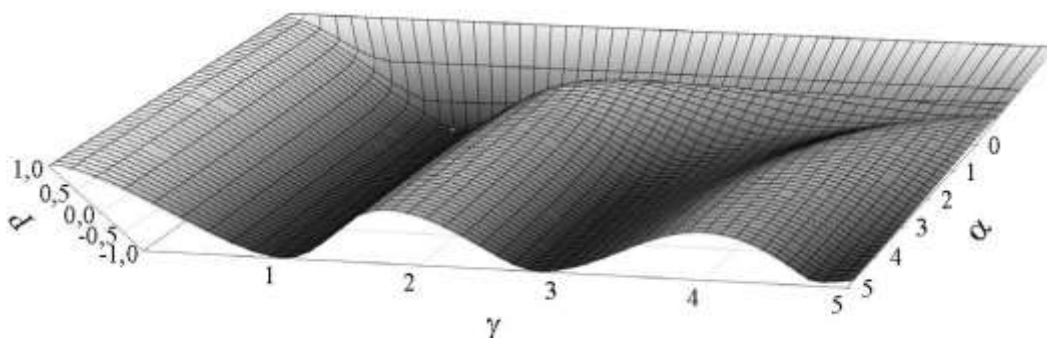


Рис. 5. Численно рассчитанная зависимость  $P(\gamma, \alpha)$  (2.19) как функция параметров  $\gamma$  (2.21) и  $\alpha$  (2.34). Полученная поверхность является результатом большого количества численных экспериментов с различным набором начальных условий, радиусов, упругих модулей, и массы сферического тела

Fig. 5. Numerically calculated dependence  $P(\gamma, \alpha)$  (2.19) as a function of parameters  $\gamma$  (2.21) and  $\alpha$  (2.34).

The resulting surface is the result of a large number of numerical experiments with a different set of initial conditions, radii, elastic moduli, and the mass of a spherical body

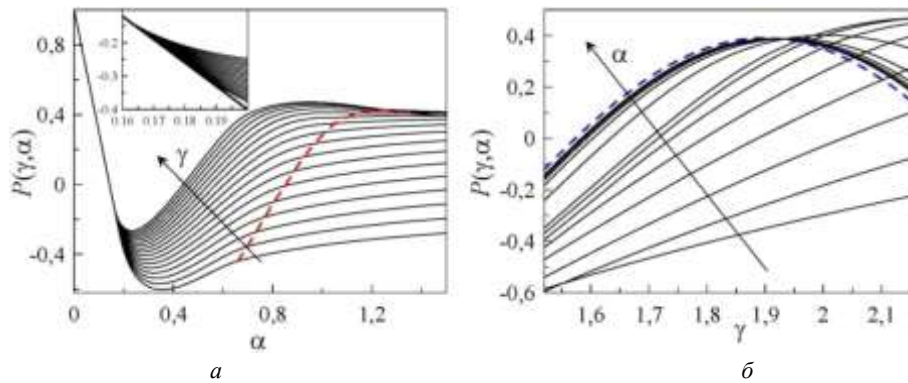


Рис. 6. Зависимости  $P(\gamma, \alpha)$  как функции параметра  $\alpha$  (2.34) при фиксированных значениях  $\gamma$  (2.21) (а). Величина  $\gamma$  изменяется от 1,52 до 2,16 с интервалом 0,04. Направление увеличения  $\gamma$  показано на рисунке стрелкой. Штриховой линией показана критическая величина  $\alpha_{c2}$

(2.35). Сплошная прямая на вставке к рисунку иллюстрирует зависимость (2.38); зависимости  $P(\gamma, \alpha)$  как функции параметра  $\gamma$  (2.21) при фиксированных значениях  $\alpha$  (2.34) (б). Нижние 8 кривых построены при увеличении  $\alpha$  от 0,3 до 1,0 с шагом 0,1. Далее  $\alpha$  увеличивается от 1 до 12 с шагом 1,0. Направление увеличения  $\alpha$  показано на рисунке стрелкой. Штриховой линией показана функция (2.31)

Fig. 6. The dependence  $P(\gamma, \alpha)$  as a function of the parameter  $\alpha$  (2.34) for fixed values of the parameter  $\gamma$  (2.21) (a). The value of  $\gamma$  varies from 1.52 to 2.16 with a step of 0.04. The direction of increasing of  $\gamma$  is shown in the figure with the arrow. The dashed line shows the critical value  $\alpha_{c2}$  (2.35).

The solid straight line in the inset to the figure illustrates the dependence (2.38); the dependence  $P(\gamma, \alpha)$  as a function of the parameter  $\gamma$  (2.21) for fixed values  $\alpha$  (2.34) (b). The lower 8 curves are plotted with an increase from 0.3 to 1.0 in 0.1 increments. Then  $\alpha$  increases from 1 to 12 in step 1.0. The direction of increasing of  $\alpha$  is shown in the figure by the arrow. The dashed line shows the function (2.31)

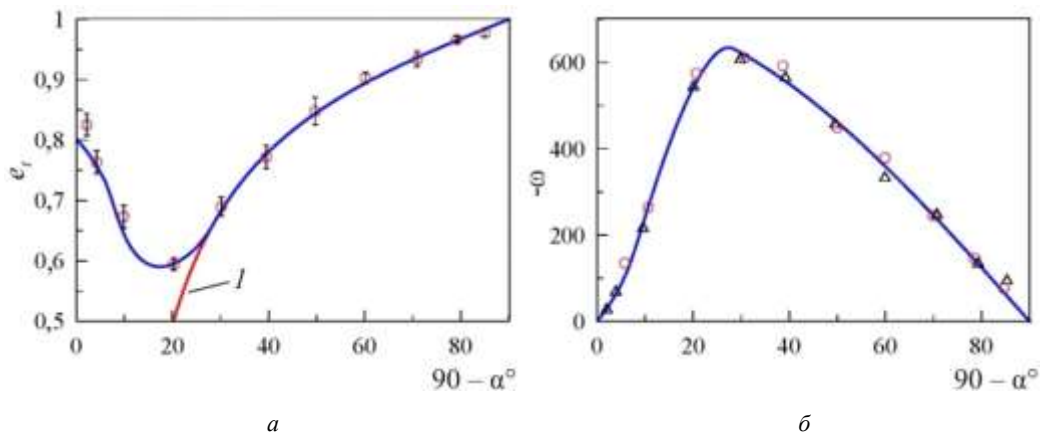


Рис. 7. Тангенциальный коэффициент восстановления  $e_t$  (1.9) (а) и угловая скорость  $-\omega$  (б) как функции угла падения  $(90 - \alpha^\circ)$  в области упругого удара [38]. Кривая 1 на панели (а) получена по формуле (2.42) при  $\mu = 0,092$ ,  $e_n = 1,0$ . Сплошные кривые на обоих рисунках рассчитаны способом, подробно описанным в подразд. 2.3.4

Fig. 7. The tangential restitution coefficient (1.9) (a) and the angular velocity  $-\omega$  (b) as a function of the angle of incidence  $(90 - \alpha^\circ)$  in the region of elastic impact [38]. Curve 1 on the panel (a) is obtained from (2.42) at the parameters  $\mu = 0,092$ ,  $e_n = 1,0$ . The solid curves in both figures are calculated in the manner detailed in subsection 2.3.4

В работе изучается отражение шарика, выполненного из оксида алюминия, диаметром 5 мм, падающего под углом на упругую поверхность при нулевой начальной частоте вращения  $\omega_0 = 0$ . На рис. 7 показаны результаты экспериментов по столкновению шарика с отражающей поверхностью в области упругого удара

для диапазона скоростей, при которых отсутствуют пластические деформации<sup>1</sup>.

В случае, показанном на рис. 7, нормальный коэффициент восстановления  $e_n$  (1.8) составлял от 0,976 до

<sup>1</sup>На рис. 7, б циклическая частота  $\omega$  показана с обратным знаком, поскольку в работе [38] за положительное направление вращения сферы выбрано направление, противоположное по отношению к обозначенному на рис. 1.

0,986, что говорит о полностью упругом ударе. Из рис. 7, а следует, что минимальное значение тангенциального коэффициента восстановления  $e_t \approx 0,6$  реализуется при значении угла падения порядка  $20^\circ$ , а при полном скольжении, когда скорость имеет только тангенциальную составляющую ( $\alpha^\circ = 0^\circ$ ), коэффициент восстановления  $e_t \approx 1^2$ . Каждая точка на рис. 7 получена усреднением минимум 10 экспериментов с фиксированными значениями начальной скорости  $v$  и угла падения ( $90 - \alpha^\circ$ ). На рис. 7, б показана зависимость циклической частоты вращения шарика после столкновения от угла падения, которая определяется как [38, 39] (см. обозначения на рис. 1)

$$\omega = \frac{5 v_0 \cos \alpha^\circ}{2 R} (1 - e_t). \quad (2.41)$$

На рис. 7, б кружки представляют данные измерений угловой скорости непосредственно, а значения, показанные треугольниками, определены по формуле (2.41), основываясь на результатах измерений, показанных на рис. 7, а. Из рисунка видно, что формула (2.41) выполняется с высокой точностью, определяющей точностью измерений соответствующих величин в эксперименте. Если предположить, что сфера несжимаемая, то при малых углах (близких к нормальному падению) будет наблюдаться качение, а при больших – проскальзывание. Пусть проскальзывание описывается законом Кулона с коэффициентом трения  $\mu$ , тогда справедливо соотношение между нормальной  $F_n$  и тангенциальной  $F_t$  силами в виде

$$F_t = \mu F_n,$$

из чего легко получить выражение для тангенциального коэффициента восстановления [40]:

$$e_t = 1 - \mu(1 + e_n) \operatorname{tg} \alpha^\circ, \quad (2.42)$$

где для эксперимента, показанного на рис. 7, при углах падения, находящихся в диапазоне между  $90$  и  $30^\circ$ , коэффициент трения  $\mu \approx 0,092$ . Коэффициент  $e_t$ , рассчитанный по формуле (2.42), соответствующий значениям  $\mu = 0,092$  и  $e_n = 1,0$ , показан на рис. 7, а сплошной линией<sup>3</sup>, откуда видно, что приближение несжимаемого тела хорошо работает в данном случае для углов падения  $(90^\circ - \alpha^\circ) > 30^\circ$ . Это связано с тем, что в зоне контакта

<sup>2</sup>Подобное поведение наблюдалось в эксперименте, описанном в работе [41].

<sup>3</sup>Несмотря на то, что в эксперименте коэффициент  $e_n$  принимал значения от 0,976 до 0,986, а его среднее значение составляло 0,980, при расчете зависимости (2.42) выбрано значение  $e_n = 1$ , соответствующее упругому нормальному столкновению, поскольку далее будет показано, что в области применимости соотношения (2.42) результаты моделирования, проведенного в подразд. 2.3, показанные на рис. 7 сплошными непрономерованными линиями, идеально описываются формулой (2.42).

наблюдаются области проскальзывания и «прилипания». Однако при больших значениях углов падения (когда нормальная скорость  $v_{z0}$  существенно меньше тангенциальной  $v_{x0}$ ) преобладает зона проскальзывания, и эта ситуация хорошо описывается аппроксимацией (2.42).

Поскольку данные получены в области отсутствия пластических эффектов, мы можем провести сравнение этих результатов с результатами моделирования в рамках метода MDR, проведенного в подразд. 2.3.3. В указанном подразделе рассчитана функция  $P(\gamma, \alpha)$  (2.19), которая позволяет рассчитать все параметры столкновения. Причем переменная  $\gamma$  (2.21) учитывает параметры соударяющихся тел, а  $\alpha$  (2.34) описывает влияние коэффициента трения  $\mu$ . На рис. 7 приведены зависимости тангенциального коэффициента восстановления  $e_t = v_x / v_{x0}$  (1.9) и циклической скорости  $\omega$ , с которой сфера отскакивает от поверхности, при нулевом начальном вращении  $\omega_0 = 0$ . Выразим эти параметры через функцию  $P(\gamma, \alpha)$ . Воспользовавшись соотношениями (2.19), (2.20), (1.5), (1.6), (2.12) при  $\omega_0 = 0$ , получим

$$e_t = \frac{2P(\gamma, \alpha) + 5}{7}, \quad (2.43)$$

$$\omega = \frac{5v_0 \cos \alpha^\circ [P(\gamma, \alpha) - 1]}{7R}, \quad (2.44)$$

где в эксперименте, описанном в работе [38], радиус сферы  $R = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м, а начальная скорость  $v_0 = 3,9$  м/с. Угол  $\alpha^\circ$  в формуле (2.44) – это угол скольжения, показанный на рис. 1. В работе [38] изменялся угол падения, который составляет  $(90 - \alpha^\circ)$  и отложен по оси абсцисс на рис. 7. Величина  $\alpha$  в формулах (2.43), (2.44) зависит от угла скольжения  $\alpha^\circ$ . Так, в случае  $\omega_0 = 0$  параметр  $\alpha$  определится согласно (2.34) как

$$\alpha = \mu \operatorname{tg} \alpha^\circ, \quad (2.45)$$

где в эксперименте, представленном на рис. 7, коэффициент трения  $\mu = 0,092$ . Таким образом, используя формулы (2.43), (2.44) и варьируя угол  $\alpha^\circ$ , можно получить зависимости, представленные на рис. 7, если знать вид функции  $P(\gamma, \alpha)$ , показанной на рис. 5 и 6. Перед началом соответствующих расчетов необходимо определить параметр  $\gamma$  (2.21), который остается постоянным для серии экспериментов, результаты которых показаны на рис. 7. В работе [38] не приведены параметры используемых материалов, однако указаны сами материалы. Так, в качестве отражающей поверхности использовалось натриево-кальциевое стекло, а отражаемая частица была изготовлена из оксида алюминия. Более подробных данных в работе нет, а приведенных

недостаточно для точного определения параметров, поэтому возьмем типичные для этих материалов величины<sup>4</sup>. Так, для используемого стекла  $E_2 = 7,3 \cdot 10^{10}$  Па,  $G_2 = 3,0 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_2 = 0,217$ . Для оксида алюминия  $E_1 = 3,7 \cdot 10^{11}$  Па,  $G_1 = 1,53 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu_1 = 0,25$  и плотность  $\rho = 3970$  кг/м<sup>3</sup>, что соответствует материалу, содержащему 96 %  $Al_2O_3$  при комнатной температуре. Указанный набор параметров позволяет найти  $E^*$  и  $G^*$  (формулы (2.17), (2.18)),  $E^* \approx 6,42 \cdot 10^{10}$  Па,  $G^* \approx 5,64 \cdot 10^{10}$  Па, что согласно формуле (2.21) приводит к значению  $\gamma \approx 1,754$ .

На рис. 7, а и б сплошными линиями показаны рассчитанные по формулам (2.43), (2.44) тангенциальная компонента коэффициента восстановления  $e_t$  и циклическая частота  $\omega$ , взятая с обратным знаком, при  $\gamma = 1,754$  и изменении  $\alpha$  согласно выражению (2.45). Из рисунков следует, что полученная нами зависимость с большой точностью описывает экспериментальные данные во всем диапазоне углов падения, что является несомненным преимуществом по сравнению с аппроксимацией (2.42), которая показана на рис. 7, а кривой 1 и описывает поведение системы при углах падения  $(90^\circ - \alpha) > 30^\circ$ . В то же время полученные нами результаты и аппроксимация (2.42) идеально совпадают в области применимости (2.42). Преимущество нашего подхода состоит еще и в том, что в нем начальная циклическая частота вращения сферической частицы может принимать любые отличные от нуля значения. Также важен и тот факт, что исследование проведено в безразмерных величинах  $\gamma$  (2.21) и  $\alpha$  (2.34), которые включают в себя все параметры системы. Поэтому в области упругого удара подход на основе метода MDR, описанный в данной работе, позволяет описать любой эксперимент. Более того, как это предложено в работе [42], в случае неизвестной природы контактирующих тел результаты экспериментов по столкновению частиц можно использовать для определения модуля упругости материала, для чего можно использовать соотношения (2.43), (2.44), поскольку вид функции  $P(\gamma, \alpha)$  известен.

## 2.4. Удар с адгезией

В первой части обзора [8], посвященной анализу литературных данных, показано, что силы адгезии между контактирующими телами вносят существенный вклад в диссипацию энергии. Так, на рис. 6 из работы [8] видно, что при малых начальных скоростях, где реализуется полностью упругий удар без проявления пластических эффектов, вся диссипация происходит за счет

адгезионных сил. Более того, для отрыва сферы от поверхности после контакта скорость должна превышать определенное критическое значение, иначе сфера прилипнет к поверхности. Поэтому изучение влияния адгезии с научной и практической точек зрения представляется большой интерес.

В экспериментальной работе [43] показано, что нормальный и тангенциальный вклады в силы адгезии могут зависеть от направления движения частицы. В предлагаемом нами подходе мы считаем, что реализуются условия, при которых влияние тангенциального нагружения на адгезию в нормальном направлении отсутствует. В этом случае адгезионное взаимодействие может быть описано в рамках метода редукции размерности [8, 13, 14]. В [44] изучалось влияние адгезии на столкновения частиц, находящихся в жидкости с использованием теории JKR [45]. Авторы указанной работы предложили комплексное решение задачи в безразмерном виде для широкого диапазона параметров в случае чисто нормального контакта. В другой работе [46] при использовании метода дискретных элементов (DEM) изучено взаимодействие между полимерными частицами, которые моделируются как агломерации упругих микроэлементов, связанных с помощью адгезионных сил. Проведено исследование длительности столкновений, а также процессов агломерации и распада полимерных частиц во время столкновения. Задача столкновения для нормального адгезионного контакта также изучалась аналитически и экспериментально в работе [47]. В этой работе применялись адгезионные модели JKR [45], DMT [48] и Маугиса [49]. Довольно полная аналитическая модель нормального столкновения с адгезией в рамках JKR-подхода предложена в работе [50]. В [51] проведено моделирование нормального адгезионного контакта с помощью методов молекулярной динамики. И хотя существуют теоретические работы, в той или иной мере описывающие адгезионный контакт при столкновении под углом [52, 54], этот вопрос ввиду своей сложности до сих пор остается открытым. Проведем здесь соответствующий анализ в рамках метода MDR, следуя идеологии подразд. 2.2, 2.3. Будем считать, что в случае наличия адгезии между контактирующими поверхностями по всей области контакта наблюдается зона прилипания, что эквивалентно бесконечному коэффициенту трения. В работе [21] на основании анализа, представленного в подразд. 2.2, проведен учет адгезии в рамках метода MDR [9, 13]. Приведем в этом подразделе основные результаты, полученные в указанной работе.

### 2.4.1. Случай постоянной контактной жесткости

В рассматриваемом случае справедливы уравнения (2.5)–(2.9). Будем характеризовать адгезионное взаимодействие между контактирующими телами отрицательным значением «глубины проникновения»  $-d_c$ , при котором адгезионный контакт теряет устойчивость и происходит отрыв сферы от пружины. Момент време-

<sup>4</sup>При вариации параметров для различных типов стекол и процентного состава  $Al_2O_3$  получаемые результаты изменяются несущественно.

ни  $t_i$ , при котором происходит отрыв, легко получить из уравнения для вертикального движения (2.7):

$$u_z(t_i) = v_{z0} \sin(\omega_z t_i) / \omega_z = -d_c,$$

откуда следует решение:

$$t_i = \frac{1}{\omega_z} \arcsin\left(\frac{-d_c \omega_z}{v_{z0}}\right) = \frac{1}{\omega_z} \left[ \pi + \arcsin\left(\frac{d_c \omega_z}{v_{z0}}\right) \right]. \quad (2.46)$$

Скорости в последний момент столкновения принимают вид

$$v_z = \dot{u}_z(t_i) = -v_{z0} \sqrt{1 - (d_c \omega_z / v_{z0})^2} = -v_{z0} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (2.47)$$

$$v_x = \dot{u}_x(t_i) = \bar{v}_x + \frac{2}{7} V \cos\left[\sqrt{\frac{7k_x}{2k_z}} \left(\pi + \arcsin\left(\frac{d_c \omega_z}{v_{z0}}\right)\right)\right] = \bar{v}_x + 2V \cos[\varphi(\gamma, \beta)] / 7, \quad (2.48)$$

$$\omega = \dot{\varphi}(t_i) = \bar{\omega} + \frac{5}{7R} V \cos[\varphi(\gamma, \beta)], \quad (2.49)$$

где введены функции  $\beta = d_c \omega_z / v_{z0}$  и  $\varphi(\gamma, \beta) = \gamma(\pi + \arcsin \beta)$ , а также используются величины  $\gamma$  (2.21),  $\bar{v}_x$  (1.5),  $\bar{\omega}$  (1.6) и  $V$  (2.12). Определим потери энергии при контакте. В рассматриваемом случае удобно отдельно вычислять потери кинетической энергии при вертикальном  $\Delta E_z$  и горизонтальном  $\Delta E_x$  движении:

$$\Delta E_x = -\frac{m}{7} (v_{x0} + R\omega_0)^2 \sin^2[\varphi(\gamma, \beta)], \quad (2.50)$$

$$\Delta E_z = -mv_{z0}^2 \beta^2 / 2 = -E_{z0} \beta^2, \quad (2.51)$$

где  $E_{z0}$  – начальная кинетическая энергия, связанная с нормальным движением. Уравнения (2.47)–(2.51) могут быть переписаны в виде

$$v_z / v_{z0} = -\sqrt{1 - \beta^2}, \quad (2.52)$$

$$\Delta E_z / E_{z0} = -\beta^2, \quad (2.53)$$

$$\frac{7}{2} \frac{v_x - \bar{v}_x}{V} = \frac{7}{5} \frac{R(\omega - \bar{\omega})}{V} = \cos[\varphi(\gamma, \beta)], \quad (2.54)$$

$$\frac{7\Delta E_x}{m(v_{x0} + R\omega_0)^2} = -\sin^2[\varphi(\gamma, \beta)]. \quad (2.55)$$

Правые части выражений (2.52)–(2.55) являются функциями параметра  $\gamma = 7k_x / 2k_z = \sqrt{7G^* / 2E^*}$  (2.21) и отношения смещений

$$\beta = d_c \omega_z / v_{z0} = d_c / d,$$

где  $d \equiv v_{z0} / \omega_z$  имеет смысл максимальной глубины проникновения (в случае постоянной жесткости максимальная глубина проникновения одинакова при учете

адгезии и без нее, в общем случае будем считать, что  $d$  – это глубина проникновения для столкновения без адгезии). Сказанное выше позволяет предположить, что для общего случая, как и ранее, выполняются гипотезы (2.19), (2.20), где вместо функции  $P(\gamma)$  фигурирует  $P(\gamma, \beta)$ . Дополнительно к этим двум гипотезам в случае адгезионного контакта добавляются еще две, связанные с диссипацией нормальной компоненты кинетической энергии:

$$v_z / v_{z0} = -F(\beta), \quad (2.56)$$

$$\Delta E_z / E_{z0} = -1 + (F(\beta))^2. \quad (2.57)$$

Найдем выражение для безразмерного параметра, описывающего адгезию в случае столкновения сферического тела с упругим полупространством. Максимальная глубина проникновения  $d$  в случае отсутствия адгезии запишется как

$$d = \left( \frac{15}{16} \frac{mv_{z0}^2}{E^* R^{1/2}} \right)^{2/5},$$

а максимальное расстояние между сферой и полупространством в момент отрыва в адгезионном контакте согласно JKR-теории [45] – как

$$d_c = \frac{3}{4} \left( \frac{\pi^2 R \Delta \gamma^2}{E^{*2}} \right)^{1/3},$$

где  $\Delta \gamma$  – поверхностная энергия. В итоге приходим к соотношению

$$\beta = \frac{d_c}{d} = \pi^{2/3} \frac{3}{4} \left( \frac{16}{15} \right)^{2/5} \frac{R^{8/15} \Delta \gamma^{2/3}}{E^{*4/15} m^{2/5} v_{z0}^{4/5}}.$$

Для удобства опустим константу и будем в дальнейшем использовать параметр  $\beta$  в виде

$$\beta = \left( \frac{R^4 \Delta \gamma^5}{E^{*2} m^3 v_{z0}^6} \right)^{2/15}. \quad (2.58)$$

#### 2.4.2. Методика моделирования

Если глубина индентирования профиля в упругое основание равна  $d$ , то смещения индивидуальных пружин в области индентирования определяются согласно выражению (ср. с (2.23), (2.24))

$$u_z(x) = d - g(x) = d - x^2 / R. \quad (2.59)$$

В адгезионном контакте контактный радиус  $a$  увеличивается, и выражение (2.25) теряет применимость. В этом случае натяжение граничных пружин может быть найдено по «правилу Гесса» (Heß rule) [9]. Согласно этому правилу, условие равновесия граничных пружин (при  $x = \pm a$ ) может быть записано как

$$\Delta l = \Delta l_{\max}(a) = \sqrt{2\pi a \Delta \gamma / E^*}, \quad (2.60)$$

где величина  $\Delta l_{\max}(a)$  показана на рис. 2. Комбинируя (2.59) и (2.60), получим

$$u_z(a) = d - a^2 / R = -\Delta l_{\max}(a) = -\sqrt{2\pi a \Delta \gamma / E^*}, \quad (2.61)$$

откуда

$$d = a^2 / R - \sqrt{2\pi a \Delta \gamma / E^*}. \quad (2.62)$$

Нормальная сила при этом определится как сумма сил от всех сжатых (в области индентирования) и растянутых (в адгезионной области) пружин:

$$\begin{aligned} F_z(a) &= \int_{-a}^a u_z(x) dx = 2E^* \int_0^a \left( d - \frac{x^2}{R} \right) dx = \\ &= \frac{4E^* a^3}{3R} - \sqrt{8\pi a^3 E^* \Delta \gamma}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Представим аналитические и численные результаты в безразмерных переменных:

$$\tilde{a} = a / a_0, \quad \tilde{F}_z = F_z / F_0, \quad \tilde{d} = d / d_0,$$

где  $F_0$ ,  $a_0$  и  $d_0$  – критические значения силы, контактного радиуса и абсолютного значения глубины индентирования в момент отрыва параболического профиля от упругого полупространства при условиях «контролируемой силы» [9],

$$F_0 = \frac{3}{2} \pi R \Delta \gamma, \quad a_0 = \left( \frac{9\pi R^2 \Delta \gamma}{8E^*} \right)^{1/3}, \quad d_0 = \left( \frac{3\pi^2 R \Delta \gamma^2}{64E^{*2}} \right)^{1/3}.$$

В безразмерных единицах соотношения (2.62) и (2.63) запишутся как

$$\tilde{d} = 3\tilde{a}^2 - 4\tilde{a}^{1/2}, \quad (2.64)$$

$$\tilde{F}_z = \tilde{a}^3 - 2\tilde{a}^{3/2}. \quad (2.65)$$

Выражения (2.64), (2.65) воспроизводят классическое решение, полученное в [45], и могут быть использованы для тестирования численного алгоритма. Так, на рис. 8 показаны результаты тестирования численного алгоритма для нормального контакта, из чего видно, что численные результаты совпадают с аналитическим решением с большой точностью.

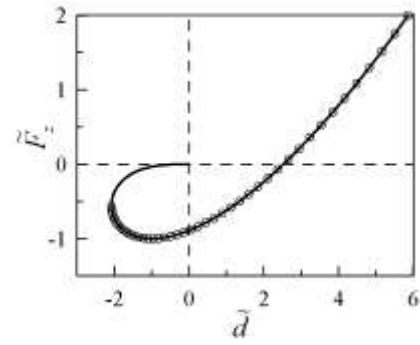


Рис. 8. Нормальная сила  $\tilde{F}_z$  как функция глубины индентирования  $\tilde{d}$  для нормального контакта с адгезией. Сплошная кривая показывает аналитическое решение (2.64), (2.65). Кружками показаны результаты численного моделирования, полученные в рамках метода MDR Fig. 8. Normal force  $\tilde{F}_z$  as a function of the indentation depth  $\tilde{d}$  for normal contact with adhesion. The solid curve shows the analytical solution (2.64), (2.65). The circles show the results of numerical simulation obtained in the framework of the MDR method

В итоге численное моделирование сводится к следующим шагам. На каждом временном шаге рассчитываются тангенциальные и нормальные натяжения всех индивидуальных пружин. В предположении отсутствия проскальзывания смещения пружин с координатами  $x_i$  рассчитываются по формулам (2.24) и (2.26). При этом пружины, находящиеся в контакте, определяются условием (2.61). После этого рассчитывается новый контактный радиус  $a$ . Полные контактные силы  $F_N$  и  $F_f$  на каждом шаге вычисляются как суммы (2.27), (2.28). На последнем этапе временного шага численно методом Эйлера решаются уравнения движения (2.2)–(2.4). В модели могут изменяться параметры  $R$ ,  $E^*$ ,  $G^*$ ,  $m$ ,  $\Delta \gamma$ , а также обе компоненты начальной скорости  $v_{x0}$ ,  $v_{z0}$  и начальная циклическая частота вращения частицы  $\omega_0$ .

В качестве следующего теста используемой численной процедуры проведем сравнение полученных нами численных результатов с результатами работы [7]. В [7] рассмотрена ситуация с конечным коэффициентом трения  $\mu$ , которая описана в рамках нашего подхода в подразд. 2.3. Случай бесконечного коэффициента трения, рассмотренный в подразд. 2.2, может быть описан в рамках используемой здесь процедуры при  $\beta = 0$ , что соответствует значению  $\Delta \gamma = 0$ . В работе [7] вводится в рассмотрение безразмерная тангенциальная сила

$$\tilde{F}_x = \frac{3(1-\nu)F_x}{4C^3 R^2 G \mu}, \quad (2.66)$$

которая представляется как функция безразмерного времени  $\tilde{t} = t / \tau$ , где время

$$\tau = 2,9432 C^2 R / v_{z0} \quad (2.67)$$

соответствует длительности упругого удара без адгезии [53]. Также в [7] вводится параметр

$$\psi = \frac{2(1-\nu)v_{x0}}{\mu(2-\nu)v_{z0}}, \quad (2.68)$$

значение которого определяет режимы удара. Константа  $C$  в выражениях (2.66), (2.67) имеет вид [7]

$$C = \left( \frac{15m(1-\nu)v_{z0}^2}{16GR^3} \right)^{1/5}.$$

На рис. 9 показаны рассчитанные временные зависимости тангенциальной силы  $\tilde{F}_x$ , действующей на протяжении столкновения при фиксированных параметрах модели.

Кривые 1, 2 и 3 на верхней панели рис. 9 соответствуют различным значениям параметра  $\psi \leq 1$ , при которых преобладает режим «прилипания». Кружками здесь показаны результаты, полученные в работе [7] для случая без адгезии. Отличия с рассчитанными кривыми связано с тем, что мы проводили моделирование с бесконечным коэффициентом трения без проскальзывания, в то время как при конечном  $\mu$  в диапазоне значений  $\psi \leq 1$ , хотя и преобладает режим «прилипания», все же есть моменты времени, в которые осуществляется скольжение. Поэтому на зависимостях  $\tilde{F}_x(\tilde{t})$ , полученных в работе [7], сила  $\tilde{F}_x$  меньше по абсолютному значению, чем в ситуации без проскальзывания. При использовании процедуры (2.39), (2.40) и выражений (2.66), (2.68) мы получим идеальное совпадение результатов, однако в рамках данного подраздела нас интересует случай без проскальзывания, поскольку рассматривается влияние адгезии.

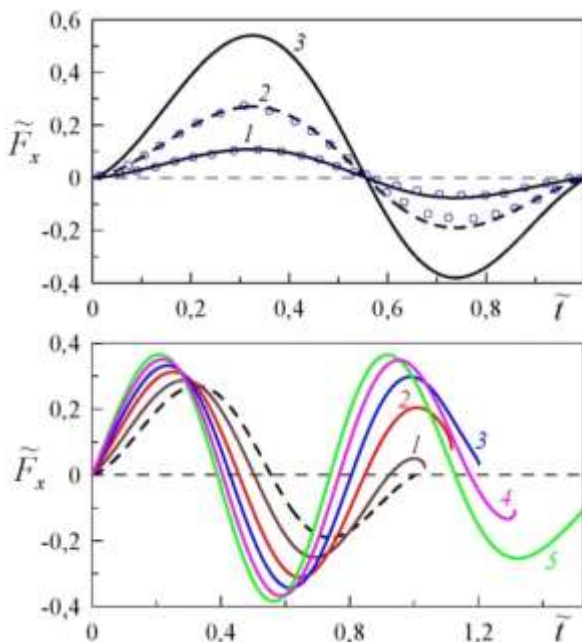


Рис. 9. Зависимости безразмерной тангенциальной силы  $\tilde{F}_x$  (2.66) от безразмерного времени  $\tilde{t} = t / \tau$  (2.67), полученные при параметрах  $R = 0,02$  м,  $E^* = 10^{10}$  Па,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\omega_0 = 0$  рад/с,  $v_{z0} = 0,01$  м/с,  $\nu = 0,3$ . Верхняя панель (случай без адгезии): кривые 1–3 отвечают значениям  $\psi = 0,2; 0,5; 1,0$ , кружками показаны данные из работы [7]. Нижняя панель (случай с адгезией) построена для  $\psi = 0,5$  и поверхностных энергий  $\Delta\gamma = 1,0; 5,0; 10,0; 17,0; 24,0$  Дж/м<sup>2</sup>. Штриховая кривая на обеих панелях соответствует случаю без адгезии при  $\psi = 0,5$

Нижняя панель на рис. 9 показывает результаты моделирования для случая с адгезией при различных значениях поверхностной энергии  $\Delta\gamma$ . Из рисунка следует, что с уменьшением значения  $\Delta\gamma$  поведение системы стремится к безадгезионному случаю. Помимо этого, рост величины  $\Delta\gamma$  приводит к увеличению продолжительности контакта, а также частоты и амплитуды колебаний тангенциальной силы  $\tilde{F}_x$ . Окончания всех зависимостей соответствуют моменту времени  $\tilde{t}$  перед отрывом профиля от упругого основания. Стоит обратить внимание, что в случае без адгезии в момент отрыва реализуется значение тангенциальной силы  $\tilde{F}_x = 0$ , в то время как в адгезионном случае в конце контакта  $\tilde{F}_x \neq 0$ . Значение нормальной силы  $F_z$  в момент отрыва при  $\Delta\gamma \neq 0$  также ненулевое (см. рис. 8).

### 2.4.3. Результаты моделирования

На рис. 10 показаны зависимости нормального коэффициента восстановления  $v_z / v_{z0}$  (2.56), а также относительной потери кинетической энергии  $\Delta E_z / E_{z0}$  (2.57) от параметра  $\beta$  (2.58), описывающего адгезионные свойства системы.



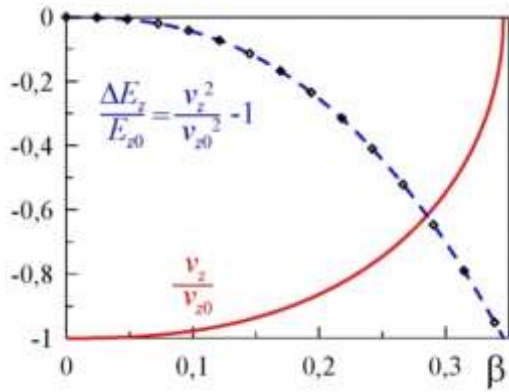


Рис. 10. Зависимости нормального коэффициента восстановления  $v_z / v_{z0}$  (2.56) (сплошная линия) и относительной потери энергии за счет движения в нормальном направлении  $\Delta E_z / E_{z0}$  (2.57) (пунктирная линия) как функции параметра  $\beta$  (2.58). Столкновения моделировались при различных наборах начальных условий и параметров модели, таких как упругие модули, масса и поверхностная энергия. Все данные ложатся на единственную кривую. Аппроксимация (2.69) показана ромбами

Fig. 10. Dependences of the normal restitution coefficient  $v_z / v_{z0}$  (2.56) (solid line) and the relative energy loss due to motion in the normal direction  $\Delta E_z / E_{z0}$  (2.57) (dashed line) as a function of the parameter  $\beta$  (2.58). Collisions were modeled for different sets of initial conditions and model parameters, such as elastic moduli, mass and surface energy. All data located on a single curve. The approximation (2.69) is shown by rhombuses

Полученная кривая с высокой точностью может быть аппроксимирована выражением

$$\frac{\Delta E_z}{E_{z0}} = -0,0019\sqrt{\beta} + 0,0413\beta - 2,7194\beta^2 - 24,2169\beta^3 + 30,073\beta^4 - 23,5737\beta^5, \quad (2.69)$$

из которого вертикальная компонента скорости после столкновения  $v_z$  определяется из (2.56), (2.57), а непосредственно функция  $F(\beta)$  (2.56) запишется как

$$F(\beta) = -v_z / v_{z0} = \sqrt{\Delta E_z / E_{z0} + 1}. \quad (2.70)$$

Коэффициент детерминации для аппроксимации (2.69) и численно определенной кривой на всем показанном диапазоне  $R^2 > 0,99999997$  (рис. 10), что гово-

рит о высокой коррелированности выражения (2.69) с численными результатами. Ранее в работе [55] аналитически было получено точное выражение

$$\frac{\Delta E_z}{E_{z0}} = -\frac{\sqrt[3]{4\pi^5}}{10} (12 + \sqrt[3]{2}) \beta^{5/2} \approx -14,184\beta^{5/2}, \quad (2.71)$$

которое с высокой точностью численно совпадает с результатами нашего моделирования, что подтверждает правильность выбранной численной процедуры и проведенных расчетов. Выражение (2.71) использовалось нами ранее в работе [56] при моделировании нормального столкновения с учетом адгезии в рамках модели адгезионного взаимодействия, предложенной Маугисом [49].

Из расчета, показанного на рис. 10, следует, что критическое значение параметра  $\beta$  – это  $\beta_c \approx 0,34582$ . Эту величину также можно найти аналитически точно из соотношения (2.71) при  $\Delta E_z / E_{z0} = -1$ , что для критического значения  $\beta_c$  приводит к следующему результату

$$\beta_c = \frac{5^{2/5} \cdot 2^{2/15}}{(12 + 2^{1/3})^{2/5} \pi^{2/3}} \approx 0.3461590663, \quad (2.72)$$

который хорошо совпадает с найденным ранее численным значением.

В случае  $\beta > \beta_c$  условие  $v_z = 0$  достигается до момента отрыва, поэтому сфера «прилипает» к поверхности. Аналогичный эффект наблюдается в рамках линейной модели (2.46), когда частица не отскакивает от поверхности при выполнении условия  $(d_c / v_{z0}) \sqrt{k_z / m} > 1$ . Поэтому будем исследовать область «отскока», в которой  $\beta < \beta_c$ .

На рис. 11 показана полная зависимость  $P(\gamma, \beta)$ . Как и в предыдущих случаях, поверхность является результатом большого количества компьютерных экспериментов с различными наборами начальных значений и материальных параметров. В актуальном интервале значений  $\gamma$  (2.29) показанная зависимость с достаточной точностью аппроксимируется выражением

$$P(\gamma, \beta) \approx a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + a_3\gamma^3 + a_4\gamma^4 \quad (2.73)$$

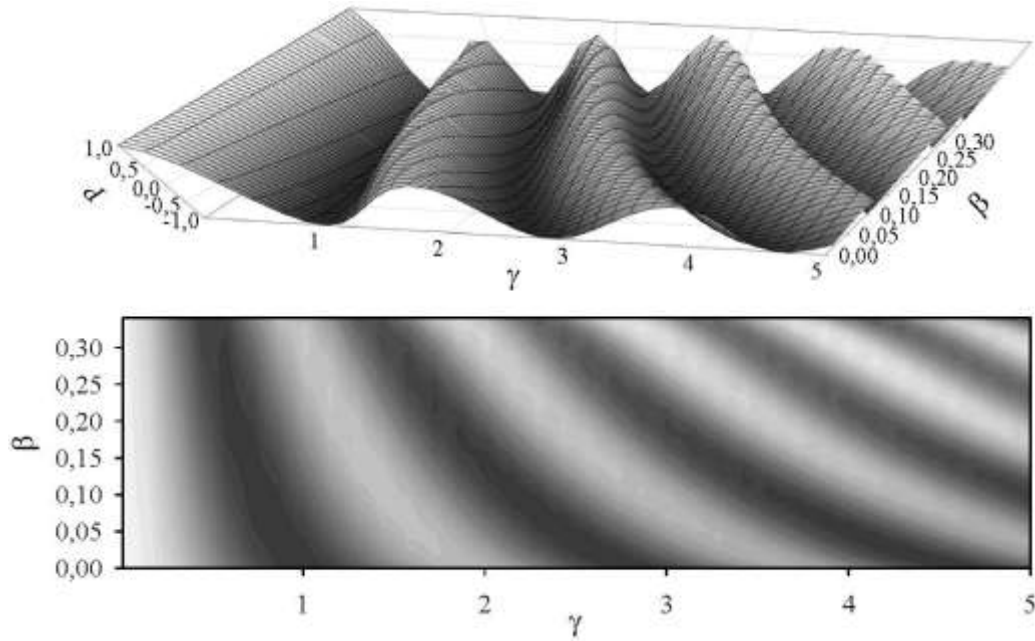


Рис. 11. Верхняя панель: трехмерная зависимость  $P(\gamma, \beta)$  (2.19) как функция параметров  $\gamma$  (2.21) и  $\beta$  (2.58); нижняя панель: двумерная зависимость  $P(\gamma, \beta)$  (2.19), на которой большие значения  $P$  отвечают более светлым участкам  
 Fig. 11. Top panel: three-dimensional dependence  $P(\gamma, \beta)$  (2.19) as a function of the parameters  $\gamma$  (2.21) and  $\beta$  (2.58); lower panel: two-dimensional dependence  $P(\gamma, \beta)$  (2.19), in which large values correspond to lighter areas

с коэффициентами  $a_i$ , которые являются функциями параметра  $\beta$  [21]:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 43,139 - 1171,292\beta + 26272,84\beta^2 - 425164,358\beta^3 + \\
 &\quad + 2019578,141\beta^4 - 2730636,482\beta^5, \\
 a_1 &= -107,979 + 2330,636\beta - 59003,404\beta^2 + 973668,408\beta^3 - \\
 &\quad - 4542494,427\beta^4 + 6011602,434\beta^5, \\
 a_2 &= 95,513 - 1659,826\beta + 49929,478\beta^2 - 830694,428\beta^3 + \\
 &\quad + 3787497,609\beta^4 - 4889171,548\beta^5, \\
 a_3 &= -35,686 + 507,716\beta - 18909,789\beta^2 + 312224,871\beta^3 - \\
 &\quad - 1384531,709\beta^4 + 1737264,447\beta^5, \\
 a_4 &= 4,786 - 57,27\beta + 2693,537\beta^2 - 43475,09\beta^3 + \\
 &\quad + 186768,848\beta^4 - 227031,806\beta^5.
 \end{aligned}$$

На рис. 12 сплошными кривыми показаны численно полученные результаты, а символами – аппроксимация (2.73).

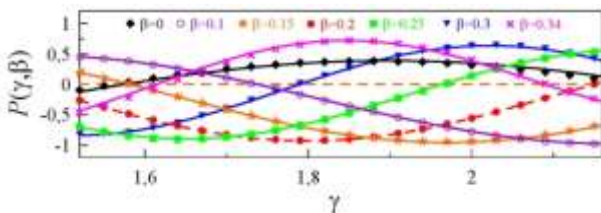


Рис. 12. Сравнение численных результатов (сплошные линии) с аппроксимацией (2.73) для  $P(\gamma, \beta)$  как функции  $\gamma$  (2.21) при фиксированных значениях параметра  $\beta$  (2.58),

показанных на рисунке

Fig. 12. Comparison of the numerical results (solid lines) with the approximation (2.73) for the function  $\gamma$  (2.21) for fixed values of the parameter  $\beta$  (2.58), which are shown in the figure

Из рисунка видно, что функция (2.73) с высокой точностью описывает зависимость  $P(\gamma, \beta)$  от обоих параметров. Наибольшие отклонения выражения (2.73) от численных результатов наблюдаются на краях при  $\beta \approx 0$  и  $\beta \approx \beta_c$ . Это, однако, не имеет большого значения, поскольку случай  $\beta = 0$  описывается кривыми, показанными на рис. 3; в области  $\beta \leq 0,34$  полученные данные, как это следует из рис. 12, хорошо описываются зависимостью (2.73), а узкий интервал  $0,34 < \beta < \beta_c \approx 0,346$  не представляет большого интереса, поскольку находится близко к значению  $\beta_c$ , при котором тело «прилипает» к поверхности. Кроме того, при необходимости всегда можно провести дополнительное моделирование согласно процедуре, подробно описанной в подразд. 2.2.2, 2.3.2 и 2.4.2.

Полученные зависимости (2.69) (или точное выражение (2.71)) и (2.73) позволяют вычислить все параметры столкновения в актуальной области значений  $\gamma$  (2.29). Например, найдем правило вычисления углов скольжения  $\beta^\circ$  как функции угла скольжения  $\alpha^\circ$  (см. рис. 1). Согласно рис. 1, имеем  $\text{tg}\alpha^\circ = v_{z0}/v_{x0}$  и  $\text{tg}\beta^\circ = |v_z|/v_x$ . Из выражений (2.19), (2.56) получим

$$\operatorname{tg}\beta^\circ = \frac{7F(\beta)}{2} \left( \frac{2P(\gamma, \beta) + 5}{2 \operatorname{tg}\alpha^\circ} - \frac{R\omega_0 [P(\gamma, \beta) + 1]}{v_{z0}} \right)^{-1}, \quad (2.74)$$

где  $F(\beta)$  определяется согласно (2.70) по известной зависимости (2.69) (либо аналогичной точной (2.71)). Из (2.74) следует, что при  $\omega_0 \neq 0$  угол скольжения  $\beta^\circ$  зависит явным образом от начальной нормальной компоненты скорости  $v_{z0}$ . При  $\omega_0 = 0$  выражение (2.74) упрощается и принимает вид

$$\operatorname{tg}\beta^\circ = \frac{7F(\beta) \operatorname{tg}\alpha^\circ}{2P(\gamma, \beta) + 5}. \quad (2.75)$$

Заметим, что в случае отсутствия адгезии между контактирующими телами ( $\Delta\gamma = 0$ ) в уравнениях (2.74), (2.75) следует положить  $F(\beta) \equiv 1$ . Формула (2.75) может использоваться для объяснения серии экспериментов, проведенных в работе [38], в которой изучалось падение сферического тела под углом к отражающей поверхности при нулевой начальной частоте вращения  $\omega_0 = 0$ .

#### 2.4.4. Сравнение с экспериментом

Насколько нам известно, на сегодняшний день не существует исчерпывающих аналитических, численных либо экспериментальных результатов, которые описывали бы столкновение под углом при наличии адгезионных сил между контактирующими поверхностями. К примеру, в работе [52] проводится моделирование методом конечных элементов столкновения под углом с учетом адгезии, однако рассматривается упругопластический удар, нас же интересует исключительно упругая область. Молекулярно-динамические модели хотя и учитывают адгезию естественным образом, но не в состоянии описать поведение систем на макроскопическом уровне [55]. Тем не менее существует большое количество работ, которые описывают нормальные столкновения частиц с учетом адгезии. На рис. 2 и 3 в первой части обзора [8] приведены экспериментальные результаты из этих работ, также в [8] кратко описан теоретический подход к этому вопросу. Поэтому ограничимся сравнением полученных нами результатов с имеющимися данными по нормальному столкновению частиц. В работе [57] описаны результаты эксперимента по отражению частицы, выполненной из полистирола, от гладкой поверхности кварца. На рис. 13 для сравнения с нашей теорией показаны эти же результаты, но в области упругого удара, для которого характерным является возрастание коэффициента восстановления  $e$  с ростом нормальной скорости  $v_{z0}$ .

Фактически, сплошной линией на рис. 13 показана функция  $F(\beta)$  (2.56), которая определяется из аппроксимации (2.69) при использовании (2.70). Параметр  $\beta$  (2.58) содержит информацию о параметрах системы,

которые представлены в подписях к рис. 13. Эффективный модуль упругости  $E^*$  определяется по формуле (2.17), где для полистирола  $E_1 = 3 \cdot 10^9$  Па,  $\nu_1 = 0,34$ , а для кварца  $E_2 = 7,3 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_2 = 0,17$ .

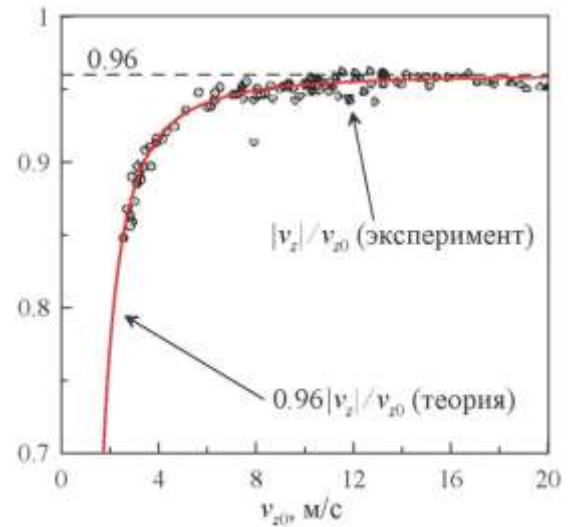


Рис. 13. Сравнение экспериментальных результатов, полученных в работе [57] (показаны символами), с численными результатами (сплошная линия) при параметрах  $R = 0,635 \cdot 10^{-6}$  м,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $E^* = 3,25 \cdot 10^9$  Па,  $\Delta\gamma = 0,15$  Дж/м<sup>2</sup>. Данные, показанные кривой, нормированы на величину 0,96 для исключения влияния неупругих эффектов в материале, которые не учитываются в модели

Fig. 13. Comparison of the experimental results obtained in [57] (shown by symbols) with numerical results (solid line) at the parameters  $R = 0.635 \cdot 10^{-6}$  m,  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $E^* = 3.25 \cdot 10^9$  Pa,  $\Delta\gamma = 0.15$  J/m<sup>2</sup>. The data shown by the curve is normalized to the value 0.96 to exclude the effect of inelastic effects in the material that are not taken into account in the model

Отметим, что согласно теоретическим представлениям о нормальном столкновении с адгезией (см. формулу (3.24) и рис. 5 в [8] коэффициент восстановления  $e$  при нормальном столкновении в упругой области с ростом начальной скорости  $v_{z0}$  должен асимптотически приближаться к единице, чего не происходит в эксперименте, результаты которого показаны на рис. 13. Это связано с тем, что при уже сравнительно малых скоростях в соударяющихся с поверхностью частицах начинаются неупругие эффекты, связанные с пластической деформацией и вязкой диссипацией. Для исключения этих эффектов, которые не учитываются в нашей модели, полученная в результате моделирования зависимость  $e(v_{z0})$  нормирована на максимальное значение 0,96. Из рис. 13 следует, что при исключении неупругих эффектов результаты моделирования с высокой точностью совпадают с результатами реального эксперимента.

#### Закключение

В первой части обзора [8] проведен анализ теоретических и экспериментальных работ различных авторов по физике столкновений упругих сферических тел с упругой плоскостью. Показано, что в зависимости от наличия сил трения, адгезии, вязких и пластических эффектов, шероховатостей поверхностей и т.п. возможно принципиально различное поведение. В представленной (второй) части работы показаны результаты, полученные авторами настоящего обзора. Так, рассмотрены вопросы упругого удара при наличии трения между поверхностями контактирующих тел, а также случай их адгезионного взаимодействия. Отдельно выделена ситуация отсутствия проскальзывания между контактирующими телами, что эквивалентно бесконечному коэффициенту трения  $\mu \rightarrow \infty$ . Во всех случаях определена функция  $P$ , которая является функцией безразмерных параметров, включающих в себя тангенциальную и нормальную компоненты начальных скоростей, начальную циклическую частоту вращения сферического тела, его массу, модули упругости и сдвига контактирующих тел, коэффициент трения в случае его конечного значения, а при учете адгезии также и поверхностную энергию. Таким образом, учтены основные параметры, задающие поведение частиц при столкновении. Модель, предложенная в работе, позволяет определить кинетические параметры после столкновения, такие как нормальная и тангенциальная компоненты скорости отражения частицы, а также циклическая частота ее вращения в зависимости от значений аналогичных параметров до столкновения. Все величины, измеряемые экспериментально, такие как нормальный и тангенциальный коэффициенты восстановления, угол отражения, потери кинетической энергии и т.п., выражаются через численно найденную функцию  $P$ . Кроме этого, подробно описана сама процедура моделирования, позволяющая находить не только параметры после столкновения, а и определять изменяющиеся во времени величины на протяжении контакта, такие как глубина индентирования сферы в упругое полупространство и ее горизонтальное смещение, нормальная и тангенциальная компоненты контактных сил, временные зависимости скоростей и частоты вращения частицы и т.д. Во всех рассмотренных случаях удар считается упругим, т.е. пластические эффекты в модели не учитываются.

### Библиографический список

1. Dynamics of drag and force distributions for projectile impact in a granular medium / M.P. Ciamarra, A.H. Lara, A.T. Lee, D.I. Goldman, I. Vishik, H.L. Swinney // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – Vol. 92. – No. 19. – P. 194301.
2. Jop P., Forterre Y., Pouliquen O. A constitutive law for dense granular flows // *Nature*. – 2006. – Vol. 441. – No. 7094. – P. 727–730.
3. Model for collisions in granular gases / N.V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, T. Pöschel // *Phys. Rev. E*. – 1996. – Vol. 53. – No. 5. – P. 5382–5392.

Проведено сравнение с экспериментальными результатами. Так, в случае конечного коэффициента трения для упругого удара, когда нормальный коэффициент восстановления равен единице, теоретически рассчитаны зависимости тангенциальной компоненты коэффициента восстановления и циклической частоты вращения частицы после столкновения. Сравнение указанных зависимостей с полученными экспериментально показывает хорошее согласие. При учете адгезии проведено сравнение экспериментально определенного коэффициента восстановления при нормальном столкновении с теоретической кривой, что также показывает совпадение с высокой точностью. Поскольку теория учитывает весь необходимый набор материальных параметров контактирующих тел и начальных условий, она может использоваться для объяснения и предсказания результатов экспериментов по упругому удару однородных сферических тел под углом к поверхности, когда ненулевые значения принимают как нормальная, так и тангенциальная компоненты скоростей для описанных ситуаций, т.е. столкновение частиц без проскальзывания в зоне контакта, столкновение с конечной силой трения и столкновение при учете адгезионного взаимодействия между контактирующими частицами. Отметим, что задача чисто нормального соударения является гораздо более простой, чем косой удар, и она была решена нами полуаналитически в недавней работе [56] в полном диапазоне изменений параметра Тейбора, задающего адгезионные свойства контакта (см. также работу Маугиса [49]).

### Благодарности

Публикация содержит результаты исследований, проведенных при финансовой поддержке Немецкого научно-исследовательского сообщества (DFG), проект PO 810-55-1.

### Acknowledgements

The publication contains the results of researches conducted with the financial support of the German Research Community (DFG), Project ID – PO 810-55-1.

4. Bernard B. Impacts in mechanical systems: analysis and modelling. – Berlin, New York: Springer, 2000. – 278 p.
5. Attractive particle interaction forces and packing density of fine glass powders / E.J.R. Parteli, J. Schmidt, C. Blümel, K.-E. Wirth, W. Peukert, T. Pöschel // *Sci. Rep.* – 2014. – Vol. 4. – P. 6227 (7 pp.).
6. Родионов А.И., Матвеев К.А. К динамике удара абсолютно твердого шара по упругому полупространству // *Научный вестник НГТУ*. – 2012. – № 1 (46). – С. 93–108.

7. Maw N., Barber J.R., Fawcett J.N. The oblique impact of elastic spheres // *Wear*. – 1976. – Vol. 38. – No. 1. – P. 101–114.
8. Ляшенко Я.А., Виллерт Э., Попов В.Л. Механика столкновений твердых тел: влияние трения и адгезии. I. Обзор экспериментальных и теоретических работ // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2018. – № 2. – С. 44–61. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.05
9. Popov V.L., Heß M. Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction. – Berlin: Springer, 2014. – 265 p.
10. Jia Y.-B. Three-dimensional impact: energy-based modeling of tangential compliance // *The International Journal of Robotics Research*. – 2013. – Vol. 32. – No. 1. – P. 56–83.
11. Popov V.L., Psakhie S.G., Numerical simulation methods in tribology: possibilities and limitations // *Tribology International*. – 2007. – Vol. 40. – No. 6. – P. 916–923.
12. Popov V.L. Method of reduction of dimensionality in contact and friction mechanics: A linkage between micro and macro scales // *Friction*. – 2013. – Vol. 1. – No. 1. – P. 41–62.
13. Popov V.L., Heß M. Methode der Dimensionsreduktion in Kontaktmechanik und Reibung. Eine Berechnungsmethode im Mikro- und Makrobereich. – Berlin: Springer, 2013. – 267 p.
14. Popov V.L., Hess M. Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction: a users handbook. I. Axially-symmetric contacts // *Facta Universitatis, series Mechanical Engineering*. – 2014. – Vol. 12. – No. 1. – P. 1–14.
15. Wetter R., Popov V.L. Shakedown limits for an oscillating, elastic rolling contact with Coulomb friction // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2014. – Vol. 51. – No. 5. – P. 930–935.
16. Клинков С.В., Косарев В.Ф. Моделирование адгезионного взаимодействия частиц с преградой при газодинамическом напылении // *Физ. мезомех.* – 2002. – Т. 5, № 3. – С. 27–35.
17. Stronge W. J. *Impact Mechanics*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 280 p.
18. Паус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 1. – М.: Наука, 1983. – 464 с.
19. Hauger W., Schnell W., Gross D. *Technische Mechanik. Bd 3: Kinetik 7*. – Berlin: Springer, 2002. – 267 p.
20. Lyashenko I.A., Popov V.L. Impact of an elastic sphere with an elastic half space revisited: Numerical analysis based on the method of dimensionality reduction // *Sci. Rep.* – 2015. – Vol. 5. – P. 8479 (5 p.).
21. Lyashenko I.A., Willert E., Popov V.L. Adhesive impact of an elastic sphere with an elastic half space: Numerical analysis based on the method of dimensionality reduction // *Mech. Mater.* – 2016. – Vol. 92. – P. 155–163.
22. Willert E., Popov V.L. Impact of an elastic sphere with an elastic half space with a constant coefficient of friction: Numerical analysis based on the method of dimensionality reduction // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 2016. – Vol. 96. – P. 108–91095.
23. Popov V.L. *Contact mechanics and friction. Physical principles and applications*. 2nd Edition. – Berlin: Springer, 2017. – 362 p.
24. Influence of complete sticking on the indentation of a rigid cone into an elastic half-space in the presence of molecular adhesion / F.M. Borodich, B.A. Galanov, Yu.I. Prostov, M.M. Suarez-Alvarez // *J. Appl. Math. Mech.* – 2012. – Vol. 76. – No. 5. – P. 590–596.
25. Argatov I.I. Asymptotic modeling of the impact of a spherical indenter on an elastic half-space // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – Vol. 45. – No. 18–19. – P. 5035–5048.
26. Hunter S.C. Energy absorbed by elastic waves during impact // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1957. – Vol. 5. – No. 3. – P. 162–171.
27. Broomhead D.S., Gutkin E. The dynamics of billiards with no-slip collisions // *Physica D*. – 1993. – Vol. 67. – No. 1–3. – P. 188–197.
28. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact // *ASME J. Applied Mech.* – 1949. – Vol. 16. – P. 259–268.
29. Campañá C., Persson B.N.J., Müser M.H. Transverse and normal interfacial stiffness of solids with randomly rough surfaces // *J. of Phys.: Condens. Matter*. – 2011. – Vol. 23. – No. 8. – P. 085001 (9 pp.).
30. Grzempa B., Pohrt R., Teidelt E. Maximum micro-slip in tangential contact of randomly rough self-affine surfaces // *Wear*. – 2014. – Vol. 309. – No. 1–2. – P. 256–258.
31. Persson B.N.J. On the fractal dimension of rough surfaces // *Tribol. Lett.* – 2014. – Vol. 54. – No. 1. – P. 99–106.
32. Pogrebnjak A.D., Borisyuk V.N., Bagdasaryan A.A. Numerical analysis of the morphological and phase changes in the TiN/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> coating under high current electron beam modification // *Cond. Matt. Phys.* – 2013. – Vol. 16. – No. 3. – P. 33803: 1–8.
33. Lyashenko I.A., Borysiuk V.N., Manko N.N. Statistical analysis of self-similar behaviour in the shear induced melting model // *Cond. Matt. Phys.* – 2014. – Vol. 17. – No. 2. – P. 23003: 1–11.
34. Khomenko A.V., Lyashenko I.A., Borisyuk, V.N. Multifractal analysis of stress time series during ultrathin lubricant film melting // *Fluct. Noise Lett.* – 2010. – Vol. 9. – No. 1. – P. 19–35.
35. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei*. – 1938. – Vol. 27. – No. 6. – P. 342–348; 434–436; 474–478.
36. Munisamy R.L., Hills D.A., Nowell D. Static axisymmetric hertzian contacts subject to shearing forces // *ASME J. Appl. Mech.* – 1994. – Vol. 61. – No. 2. – P. 278–283.
37. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория упругости*. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
38. Gorham D.A., Kharaz A.H. The measurement of particle rebound characteristics // *Powder Technol.* – 2000. – Vol. 112. – No. 3. – P. 193–202.
39. Ning Z. *Elasto-plastic impact of fine particles and fragmentation of small agglomerates*: PhD Thesis. – Birmingham, Aston University, 1995. – 269 p.
40. Sondergaard R., Chaney K., Brennen C.E. Measurements of solid spheres bouncing off flat plates // *ASME J. Appl. Mech.* – 1990. – Vol. 57. – No. 3. – P. 694–699.
41. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Коржин С.И. Упругий удар тела о наклонную поверхность // *Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта*. – 2013. – Вып. 10. – С. 36–42.
42. Лапшин В.Л., Рудых А.В., Глухов А.В. Разработка ударного способа определения модуля упругости материала // *Системы. Методы. Технологии*. – 2015. – № 2(26). – С. 37–43.
43. Waters J.F., Guduru P.R. Mode-mixity-dependent adhesive contact of a sphere on a plane surface // *Proc. R. Soc. A*. – 2010. – Vol. 466. – P. 1303–1325.
44. Kosinski P., Hoffmann A.C. Extended hard-sphere model and collisions of cohesive particles // *Phys. Rev. E*. – 2011. – Vol. 84. – No. 3. – P. 031303 (13 pp.).
45. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. R. Soc. London A*. – 1971. – Vol. 324. – No. 1558. – P. 301–313.
46. Lednikova B., Kosek J. The effects of adhesive forces on the collision behavior of polyolefin particles // *Powder Technol.* – 2013. – Vol. 243. – P. 27–39.
47. Andres R.P. Inelastic energy transfer in particle surface collisions // *Aerosol Sci. Technol.* – 1995. – Vol. 23. – No. 1. – P. 40–50.
48. Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Colloid Interf. Sci.* – 1975. – Vol. 53. – No. 2. – P. 314–326.
49. Maugis D. Adhesion of spheres: the JKR-DMT transition using a dugdale model // *J. Colloid Interf. Sci.* – 1992. – Vol. 150. – No. 1. – P. 243–269.

50. Collision dynamics of granular particles with adhesion / N.V. Brilliantov, N. Albers, F. Spahn, T. Pöschel // *Phys. Rev. E*. – 2007. – Vol. 76. – No. 5. – P. 051302 (12 pp.).

51. Negative normal restitution coefficient found in simulation of nanocluster collisions / K. Saitoh, A. Bodrova, H. Hayakawa, N.V. Brilliantov // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – Vol. 105. – No. 23. – P. 238001 (4 pp.).

52. Katta R.R., Polycarpou A.A., Hanchi J.V. High velocity oblique impact and coefficient of restitution for head disk interface operational shock // *ASME J. Tribol.* – 2009. – Vol. 131. – No. 2. – P. 021903 (9 pp.).

53. Hertz H.J. Ueber die berührung fester elastischer körper // *J. für die Reine Angew. Math.* – 1882. – Vol. 92. – P. 156–171.

54. Brach R.M., Dunn P.F. A mathematical model of the impact and adhesion of microspheres // *Aerosol Sci. Technol.* – 1992. – Vol. 16. – No. 1. – P. 51–64.

55. Thornton C., Ning Z. A theoretical model for the stick/bounce behaviour of adhesive, elastic-plastic spheres // *Powder Technol.* – 1998. – Vol. 99. – No. 2. – P. 154–162.

56. Willert E., Lyashenko I.A., Popov V.L. Influence of the Tabor parameter on the adhesive normal impact of spheres in Maugis-Dugdale approximation // *Comp. Part. Mech.* – 2018. – Vol. 5. – No. 3. – P. 313–318.

57. Dahneke B.E. Particle bounce or capture-search for an adequate theory: I. Conservation-of-energy model for a simple collision process // *Aerosol Sci. Technol.* – 1995. – Vol. 23. – No. 1. – P. 25–39.

## References

1. Ciamarra M.P., Lara A.H., Lee A.T., Goldman D.I., Vishik I., Swinney H.L. Dynamics of drag and force distributions for projectile impact in a granular medium. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 92, no. 19, pp. 194301.

2. Jop P., Forterre Y., Pouliquen O. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 2006, vol. 441, no. 7094, pp. 727–730.

3. Brilliantov N.V., Spahn F., Hertzsch J.-M., Pöschel T. Model for collisions in granular gases. *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 53, no. 5, pp. 5382–5392.

4. Bernard B. Impacts in mechanical systems: analysis and modelling. *Berlin, New York: Springer*, 2005, 278 p.

5. Parteli E.J.R., Schmidt J., Blümel C., Wirth K.-E., Peukert W., Pöschel T. Attractive particle interaction forces and packing density of fine glass powders. *Sci. Rep.*, 2014, vol. 4, p. 6227 (7 pp.).

6. Rodionov A.I., Matveev K.A. K dinamike udara absolutno tverdogo shara po uprugomu poluprostranstvu [To the dynamics of the impact of an absolutely rigid ball on an elastic half-space]. *Scientific Bulletin of NSTU*, 2012, no. 1 (46), pp. 93–108.

7. Maw N., Barber J.R., Fawcett J.N. The oblique impact of elastic spheres. *Wear*, 1976, vol. 38, no. 1, pp. 101–114.

8. Lyashenko I.A., Willert E., Popov V.L. Mechanics of collisions of solids: influence of friction and adhesion. I. Review of experimental and theoretical works. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 44–61. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.05

9. Popov V.L., Heß M. Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction. *Berlin, Springer*, 2014, 265 p.

10. Jia Y.-B. Three-dimensional impact: energy-based modeling of tangential compliance. *The International Journal of Robotics Research*, 2013, vol. 32, no. 1, pp. 56–83.

11. Popov V.L., Psakhie S.G., Numerical simulation methods in tribology: possibilities and limitations. *Tribology International*, 2007, vol. 40, no. 6, pp. 916–923.

12. Popov V.L. Method of reduction of dimensionality in contact and friction mechanics: A linkage between micro and macro scales. *Friction*, 2013, vol. 1, no. 1, pp. 41–62.

13. Popov V.L., Heß M. Methode der Dimensionsreduktion in Kontaktmechanik und Reibung. Eine Berechnungsmethode im Mikro- und Makrobereich, *Berlin: Springer*, 2013, 267 p.

14. Popov V.L., Hess M. Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction: a users handbook. I. Axially-symmetric contacts. *Facta Universitatis, series Mechanical Engineering*, 2014, vol. 12, no. 1, pp. 1–14.

15. Wetter R., Popov V.L. Shakedown limits for an oscillating, elastic rolling contact with Coulomb friction. *Int. J. of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, no. 5, pp. 930–935.

16. Klinkov S.V., Kosarev V.F. Modeling of particle-substrate adhesive interaction in cold spraying. *Fizicheskaja Mesomechanika*, 2002, vol. 5, no. 3, pp. 27–35.

17. Stronge W. J. Impact Mechanics. Cambridge, Cambridge University Press, 2004, 280 p.

18. Routh E.J. Dynamics of a system of rigid bodies. Part 1. *London, Macmillan and Co.* 1955, 448 p.

19. Hauger W., Schnell W., Gross D. Technische Mechanik. Bd 3: Kinetik 7, *Berlin: Springer*, 2002, 267 p.

20. Lyashenko I.A., Popov V.L. Impact of an elastic sphere with an elastic half space revisited: Numerical analysis based on the method of dimensionality reduction. *Sci. Rep.*, 2015, vol. 5, pp. 8479 (5 pp.).

21. Lyashenko I.A., Willert E., Popov V.L. Adhesive impact of an elastic sphere with an elastic half space: Numerical analysis based on the method of dimensionality reduction. *Mech. Mater*, 2016, vol. 92, pp. 155–163.

22. Willert E., Popov V.L. Impact of an elastic sphere with an elastic half space with a constant coefficient of friction: Numerical analysis based on the method of dimensionality reduction. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, vol. 96, pp. 1089–1095.

23. Popov V.L. Contact mechanics and friction. Physical principles and applications, *Berlin, Springer*, 2010, 362 p.

24. Borodich F.M., Galanov B.A., Prostov Yu. I., Suarez-Alvarez M.M. Influence of complete sticking on the indentation of a rigid cone into an elastic half-space in the presence of molecular adhesion. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 590–596.

25. Argatov I.I. Asymptotic modeling of the impact of a spherical indenter on an elastic half-space. *Int. J. Solids Struct.*, 2008, vol. 45, no. 18–19, pp. 5035–5048.

26. Hunter S.C. Energy absorbed by elastic waves during impact. *J. Mech. Phys. Solids*, 1957, vol. 5, no. 3, pp. 162–171.

27. Broomhead D.S., Gutkin E. The dynamics of billiards with no-slip collisions. *Physica D*, 1993, vol. 67, no. 1–3, pp. 188–197.

28. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact. *ASME J. Applied Mech.*, 1949, vol. 16, pp. 259–268.

29. Campañá C., Persson B.N.J., Müser M.H. Transverse and normal interfacial stiffness of solids with randomly rough surfaces. *J. of Phys.: Condens. Matter.*, 2011, vol. 23, no. 8, pp. 085001 (9 pp.).

30. Grzempa B., Pohrt R., Teidelt E. Maximum micro-slip in tangential contact of randomly rough self-affine surfaces. *Wear*, 2014, vol. 309, no. 1–2, pp. 256–258.

31. Persson B.N.J. On the fractal dimension of rough surfaces. *Tribol. Lett.*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 99–106.

32. Pogrebnjak A.D., Borisyuk V.N., Bagdasaryan A.A. Numerical analysis of the morphological and phase changes in the TiN/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> coating under high current electron beam modification. *Cond. Matt. Phys.*, 2013, vol. 16, no. 3, pp. 33803: 1–8.

33. Lyashenko I.A., Borisyuk V.N., Manko N.N. Statistical analysis of self-similar behaviour in the shear induced melting model. *Cond. Matt. Phys.*, 2014, vol. 17, no. 2, pp. 23003: 1–11.

34. Khomenko A.V., Lyashenko I.A., Borisyuk, V.N. Multifractal analysis of stress time series during ultrathin lubricant film melting. *Fluct. Noise Lett.*, 2010, vol. 9, no. 1, pp. 19-35.
35. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi. *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei*, 1938, vol. 27, no. 6, pp. 342-348; 434-436; 474-478.
36. Munisamy R.L., Hills D.A., Nowell D. Static axisymmetric hertzian contacts subject to shearing forces. *ASME J. Appl. Mech.*, 1994, vol. 61, no. 2, pp. 278-283.
37. Landau L.D., Lifshitz E.M. Theory of elasticity. *Oxford, Pergamon Press*, 1986, 195 p.
38. Gorham D.A., Kharaz A.H. The measurement of particle rebound characteristics. *Powder Technol.*, 2000, vol. 112, no. 3, pp. 193-202.
39. Ning Z. Elasto-plastic impact of fine particles and fragmentation of small agglomerates: PhD Thesis. Birmingham, Aston University, 1995, 269 p.
40. Sondergaard R., Chaney K., Brennen C.E. Measurements of solid spheres bouncing off flat plates. *ASME J. Appl. Mech.*, 1990, vol. 57, no. 3, pp. 694-699.
41. Velikanov N.L., Naumov V.A., Koryagin S.I. Uprugiy udar tela o naklonnyuyu poverhnost [Elastic impact of the body on an inclined surface]. *Bulletin of the Baltic Federal University named I. Kant*, 2013, no. 10, pp. 36-42.
42. Lapshin V.L., Rudyih A.V., Gluhov A.V. Razrabotka udarnogo sposoba opredeleniya modulya uprugosti materiala [Development of an impact method for determining the modulus of elasticity of a material]. *Sytemi. Metodi. Tekhnologii*, 2015, no. 2(26), pp. 37-43.
43. Waters J.F., Guduru P.R. Mode-mixity-dependent adhesive contact of a sphere on a plane surface. *Proc. R. Soc. A*, 2010, vol. 466, pp. 1303-1325.
44. Kosinski P., Hoffmann A.C. Extended hard-sphere model and collisions of cohesive particles. *Phys. Rev. E*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 031303 (13 pp.).
45. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proc. R. Soc. London A*, 1971, vol. 324, no. 1558, pp. 301-313.
46. Lednikova B., Kosek J. The effects of adhesive forces on the collision behavior of polyolefin particles. *Powder Technol.*, 2013, vol. 243, pp. 27-39.
47. Andres R.P. Inelastic energy transfer in particle surface collisions. *Aerosol Sci. Technol.*, 1995, vol. 23, no. 1, pp. 40-50.
48. Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *J. Colloid Interf. Sci.*, 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314-326.
49. Maugis D. Adhesion of spheres: the JKR-DMT transition using a dugdale model. *J. Colloid Interf. Sci.*, 1992, vol. 150, no. 1, pp. 243-269.
50. Brilliantov N.V., Albers N., Spahn F., Pöschel T. Collision dynamics of granular particles with adhesion. *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, no. 5, pp. 051302 (12 pp.).
51. Saitoh K., Bodrova A., Hayakawa H., Brilliantov N.V. Negative normal restitution coefficient found in simulation of nanocluster collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, vol. 105, no. 23, pp. 238001 (4 pp.).
52. Katta R.R., Polycarpou A.A., Hanchi J.V. High velocity oblique impact and coefficient of restitution for head disk interface operational shock. *ASME J. Tribol.*, 2009, vol. 131, no. 2, pp. 021903 (9 pp.).
53. Hertz H. J. Ueber die berührung fester elastischer körper. *J. für die reine Angew. Math.*, 1882, vol. 92, pp. 156-171.
54. Brach R.M., Dunn P.F. A mathematical model of the impact and adhesion of microspheres. *Aerosol Sci. Technol.*, 1992, vol. 16, no. 1, pp. 51-64.
55. Thornton C., Ning Z. A theoretical model for the stick/bounce behaviour of adhesive, elastic-plastic spheres. *Powder Technol.*, 1998, vol. 99, no. 2, pp. 154-162.
56. Willert E., Lyashenko I.A., Popov V.L. Influence of the Tabor parameter on the adhesive normal impact of spheres in Maugis-Dugdale approximation. *Comp. Part. Mech.*, 2018, vol. 5, no. 3, pp. 313-318.
57. Dahneke B.E. Particle bounce or capture-search for an adequate theory: I. Conservation-of-energy model for a simple collision process. *Aerosol Sci. Technol.*, 1995, vol. 23, no. 1, pp. 25-39.