Пожарский Д.А., Пожарская Е.Д. Контактные задачи для упругого неоднородного тела с цилиндрической шахтой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 200-208. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.18

Pozharskii D.A., Pozharskaya E.D. Contact problems for an elastic inhomogeneous body with a cylindrical cavity. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 4, pp. 200-208. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.18

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/

DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.18
УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ШАХТОЙ

Д.А. Пожарский, Е.Д. Пожарская

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 27 июля 2018 г.
Принята: 7 декабря 2018 г.
Опубликована: 28 декабря 2018 г.

Ключевые слова:

контактные задачи, теория упругости, неоднородное тело, цилиндрическая полость, асимптотический метод, шероховатость.

АННОТАЦИЯ

Изучается осесимметричная задача упругого равновесия непрерывно неоднородного пространства с цилиндрической полостью, когда коэффициент Пуассона является произвольной достаточно гладкой функцией радиальной координаты, а модуль сдвига постоянный. При этом модуль упругости Юнга также является переменным по радиальной координате. Предложено общее представление решения, которое приводит к векторному уравнению Лапласа и скалярному уравнению Пуассона, правая часть которого зависит от коэффициента Пуассона. При помощи интегрального преобразования Фурье построены в квадратурах точные общие решения уравнений Лапласа и Пуассона. Получены интегральные уравнения двух осесимметричных контактных задач о взаимодействии поверхности полости (шахты) с жестким цилиндрическим вкладышем, вставленным в нее с натягом. В первой задаче контакт считается абсолютно гладким, для решения интегрального уравнения первого рода относительно контактного давления используется сингулярный асимптотический метод, эффективный для относительно длинных вкладышей. Во второй задаче учитывается шероховатость поверхности шахты, которая моделируется дополнительной прослойкой винклеровского типа, для решения интегрального уравнения второго рода применяется метод коллокации, эффективный для относительно коротких подкрепляющих вкладышей. Контактное давление на границе области контакта имеет характерную корневую особенность в первой задаче и принимает конечное значение во второй задаче. Для однородного материала отмечается близость интегральных характеристик контактных давлений, получаемых в обеих задачах, при малых показателях шероховатости (коэффициентах постели) в определенном диапазоне относительных длин вкладышей. Показано, что учет шероховатости снижает влияние неоднородности на распределение контактных давлений. Расчеты сделаны для случаев, когда коэффициент Пуассона и модуль упругости возрастают или убывают при удалении от поверхности полости.

© **Пожарский Дмитрий Александрович** – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: pozharda@rambler.ru,
iD 0000-0001-6372-1866
Пожарская Елизавета Дмитриевна – студентка, e-mail: pozharskaya.elizaveta@rambler.ru,
iD 0000-0002-5745-6135

Dmitrii A. Pozharskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department,
e-mail: pozharda@rambler.ru, iD 0000-0001-6372-1866
Elizaveta D. Pozharskaya – Undergraduate Student, e-mail: pozharskaya.elizaveta@rambler.ru,
iD 0000-0002-5745-6135

CONTACT PROBLEMS FOR AN ELASTIC INHOMOGENEOUS BODY WITH A CYLINDRICAL CAVITY

D.A. Pozharskii, E.D. Pozharskaya

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 July 2018
Accepted: 7 December 2018
Published: 28 December 2018

Keywords:
contact problems, elasticity theory, inhomogeneous body, cylindrical cavity, asymptotical method, roughness.

ABSTRACT

An axially symmetric elastic equilibrium problem is investigated for a continuously inhomogeneous space with a cylindrical cavity when Poisson's ratio is being an arbitrary fairly smooth function with respect to radial coordinate while shear modulus is constant. For this case Young's modulus is also variable with respect to the radial coordinate. A general solution is suggested which leads us to a vector Laplace equation and a scalar Poisson equation whose right-hand side depends on Poisson's ratio. As a result, exact general solutions of the Laplace and Poisson equations are constructed in integral forms with the help of Fourier transformations. Then integral equations of two axially symmetric contact problems are derived on the interaction between the cavity surface and a rigid cylindrical insert fitted with interference. In the first problem the contact is supposed to be absolutely ideal, a singular asymptotical method is used here to solve the integral equation of the first kind with respect to the contact pressure, which is effective for fairly long inserts. In the second problem the mine surface is supposed to be rough simulated by an extra Winkler type, a collocation method is used for solving the integral equation of the second kind, which is effective for fairly short inserts. The contact pressure has typical square root singularities at end-points in the first problem while it takes finite values at those points in the second problem. For a homogeneous material, the integral characteristics of the contact pressures in both problems are close for small coefficients of roughness for some values of the insert relative length. It is shown that the rough surface distributes contact pressures more uniformly removing effect of nonhomogeneity. The calculations are made for the cases when Poisson's ratio and Young's modulus increase or decrease from the surface of the cavity.

Введение

Контактные задачи теории упругости для неоднородных (функционально градиентных) материалов [1–10] важны для оценки контактной прочности различных конструкций и деталей. Интегральные уравнения контактных задач взаимосвязаны с интегральными уравнениями задач о трещинах [11]. При рассмотрении однородных тел цилиндрической формы, контактирующих с бандажами и вкладышами, для решения возникающих интегральных уравнений развивались асимптотические методы [12–17]. При решении статических и динамических контактных задач для неоднородных цилиндрических тел превалировали численные методы, обобщенный метод фиктивного поглощения [18–22]. Изучались волновые процессы и задачи идентификации упругих параметров для цилиндров [23, 24]. Учитывались сложные явления на поверхности контакта, включая микрогеометрию и адгезию [25, 26].

При переменном коэффициенте Пуассона точные фундаментальные решения были получены для полупространства и слоя (коэффициент Пуассона непрерывно меняется по глубине) [27, 28] и для плоского клина (коэффициент Пуассона зависит от угловой координаты) [29]. Изучался частный случай изменения коэффициента Пуассона с глубиной полупространства [30]. Для неоднородного цилиндра, когда модуль упругости и коэффициент Пуассона зависят от радиальной координаты, предлагалось искать решение по методу возмущений [31]. В настоящей работе для пространства с цилиндрической шахтой, когда коэффициент Пуассона непрерывно зависит от радиальной координаты, на основе подхода А.Н. Бородачева [28] получено точное фундаментальное решение, символ ядра интегрального уравнения контактной задачи построен в квадратурах. Для решения контактной задачи предлагается сингулярный асимптотический метод (гладкий контакт) и метод коллокации (шероховатая поверхность контакта).

1. Фундаментальное решение

В цилиндрических координатах r, z рассмотрим осесимметричную деформацию упругого пространства с цилиндрической полостью $\{\rho \le r < \infty,\ |z| < \infty\}$, когда модуль сдвига G постоянный, а коэффициент Пуассона $\nu(r)$ — произвольная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию $-1 < \nu(r) < 0{,}5$ [28]. В этом случае модуль продольной упругости материала $E(r) = 2G(1+\nu(r))$ — положительная функция угловой координаты. При отсутствии массовых сил векторное уравнение равновесия в перемещениях для данной модели принимает форму

$$\Delta \mathbf{u} + \operatorname{grad}(\gamma(r)\operatorname{div}\mathbf{u}) = 0\,, \qquad (1)$$

$$\mathbf{u} = (u, w), \quad u = u(r,z), \quad w = w(r,z), \quad \gamma(r) = [1 - 2\nu(r)]^{-1}\,.$$

Разыскивая общее решение уравнения (1) в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + \mathrm{grad}b,\ \mathbf{B} = (B_1, B_2),\ B_1 = B_1(r,z),\\ B_2 = B_2(r,z),\ b = b(r,z) \tag{2}$$

и внося представление (2) в уравнение (1), получаем векторное уравнение Лапласа и скалярное уравнение Пуассона

$$\Delta\mathbf{B} = 0, \quad \Delta b = \eta(r)\mathrm{div}\,\mathbf{B}, \quad \eta(r) = -[2(1-\nu(r))]^{-1}. \tag{3}$$

Для однородного материала, $\nu(r)$=ν=const, представление общего решения (2), (3) в точности совпадает с известным решением Фрайбергера [32], которое для этого случая при

$$B_1 = 4(1-\nu)B_r, \quad b = -rB_r - B_0, \quad B_2 = B_z = 0 \tag{4}$$

сводится к классическому представлению Папковича–Нейбера в цилиндрических координатах через три гармонические функции B_0, B_r, B_z [33].

Проекции векторного уравнения Лапласа (3) приводят к уравнениям

$$\Delta B_1 - \frac{B_1}{r^2} = 0, \quad \Delta B_2 = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{5}$$

При помощи интегрального преобразования Фурье, предполагая, что задача симметрична по z, учитывая убывание перемещений на бесконечности, общее решение уравнений (5) получим в виде

$$B_1 = \int_0^\infty C_1 K_1(\beta r)\cos(\beta z)d\beta,\ B_2 = \int_0^\infty C_2 K_0(\beta r)\sin(\beta z)d\beta, \tag{6}$$

где $K_n(r)$ – модифицированные цилиндрические функции Бесселя (n=0,1), также называемые функциями Макдональда [34, 35].

Из соотношений (6) найдем дивергенцию в правой части уравнения Пуассона (3), а затем, используя метод вариации произвольных постоянных, построим частное решение этого уравнения в форме ($I_0(r)$ – другая модифицированная цилиндрическая функция Бесселя)

$$b = \int_0^\infty (C_1 - C_2)[E_1 K_0(\beta r) - E_2 I_0(\beta r)]\beta\cos(\beta z)d\beta,\\ E_1 = \int_\rho^r s\eta(s)I_0(\beta s)K_0(\beta s)ds,\ \ E_2 = \int_\rho^r s\eta(s)K_0^2(\beta s)ds. \tag{7}$$

Величины C_1 и C_2 в формулах (6) и (7) определяются из двух граничных условий на поверхности цилиндрической полости. На основании закона Гука для напряжений имеем выражения

$$\tau_{rz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right),\\ \sigma_r = 2G\gamma(r)\left((1-\nu(r))\frac{\partial u}{\partial r} + \nu(r)\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right). \tag{8}$$

Пусть к поверхности полости (r=ρ) при z=0 приложена осесимметричная нормальная сосредоточенная нагрузка q. Тогда граничные условия имеют вид ($\delta(z)$ – δ-функция Дирака)

$$r = \rho: \quad \tau_{rz} = 0, \quad \sigma_r = -q\delta(z). \tag{9}$$

На основании формул (2)–(8) и условий (9) приходим к системе двух уравнений относительно C_1 и C_2, решив которую, найдем используемое в контактных задачах нормальное перемещение точек поверхности полости:

$$u(\rho,z) = \frac{q\rho}{2\pi G}\int_0^\infty \frac{K_1^2(\beta\rho)\cos(\beta z)d\beta}{K_1^2(\beta\rho) - 2F}, \tag{10}$$

$$F = \beta^2\int_\rho^\infty s\eta(s)K_0^2(\beta s)ds,$$

которое при $\nu(r)$=ν=const совпадает с известным для однородного материала [12–15]

$$u(\rho,z) =\\ = \frac{q\rho(1-\nu)}{\pi G}\int_0^\infty \frac{K_1^2(\beta\rho)\cos(\beta z)d\beta}{2(1-\nu)K_1^2(\beta\rho) - \beta^2\rho^2(K_0^2(\beta\rho) - K_1^2(\beta\rho))}. \tag{11}$$

При выводе формулы (11) использовано значение интеграла [35]

$$\int_\rho^\infty sK_0^2(\beta s)ds = \frac{\rho^2}{2}[K_1^2(\beta\rho) - K_0^2(\beta\rho)]. \tag{12}$$

2. Контактная задача

Рассмотрим осесимметричную контактную задачу о взаимодействии без учета сил трения и шероховатости упругого неоднородного (с переменным коэффициентом Пуассона) пространства с цилиндрической полостью радиуса ρ с жестким вкладышем длины $2a$, цилиндрическая поверхность которого описывается уравнением r=ρ+δ (δ–натяг). Требуется определить контактное давление $\sigma_r(\rho,z) = -q(z)$ в области контакта $|z|\le a$. Учитывая выражение (10) и условие контакта $u(\rho,z)$=δ ($|z|\le a$), после введения безразмерных величин

$$x = \frac{z}{a},\ u = \beta\rho,\ \lambda = \frac{\rho}{a},\\ \varphi(x) = \frac{(1-\nu_0)q(z)}{G},\ \nu_\infty = \nu(\infty), \quad f = \frac{\delta}{a} \tag{13}$$

придем относительно функции $\varphi(x)$ к интегральному уравнению

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi)k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi = \pi f \quad (|x| \le 1) \tag{14}$$

с ядром

$$k(t)=\int_0^\infty K(u)\cos(ut)du,\quad K(u)=\frac{(1-\nu_0)^{-1}K_1^2(u)}{2(K_1^2(u)-2F_0(u))},$$
$$F_0(u)=\frac{u^2}{\rho^2}\int_\rho^\infty s\eta(s)K_0^2\left(\frac{us}{\rho}\right)ds. \tag{15}$$

Допустим, что функция $\eta(r)$ (3) разлагается в ряд по нечетным отрицательным степеням радиальной координаты вида

$$\eta(r)=\eta_\infty+\eta_1\frac{\rho^3}{r^3}+\eta_2\frac{\rho^5}{r^5}+\ldots\quad(\rho\le r<\infty),$$
$$\eta_\infty=-\frac{1}{2(1-\nu_\infty)}. \tag{16}$$

Тогда, подставляя разложение (16) в формулу (15) для $F_0(u)$, используя формулу (12), интеграл [35]

$$\int_\rho^\infty\frac{K_0^2(\beta s)}{s^2}ds=\frac{2}{\rho}\Big[\beta^2\rho^2(K_1^2(\beta\rho)-K_0^2(\beta\rho))+$$
$$+\frac{1}{2}K_0^2(\beta\rho)-\beta\rho K_0(\beta\rho)K_1(\beta\rho)\Big] \tag{17}$$

и рекуррентное значение интеграла [35]

$$\int_\rho^\infty\frac{K_0^2(\beta s)}{s^{m+2}}ds=\frac{4m\beta^2}{(m+1)^3}\int_\rho^\infty\frac{K_0^2(\beta s)}{s^m}ds+\frac{2\rho^{-m-1}}{(m+1)^3}\times$$
$$\times\left\{\left[\beta^2\rho^2K_1(\beta\rho)-\frac{m+1}{2}K_0(\beta\rho)\right]^2-\right.$$
$$\left.-\left[\beta^2\rho^2-\frac{(m+1)^2}{4}\right]K_0^2(\beta\rho)\right\}\ (m=2,\ 4,\ldots), \tag{18}$$

можно последовательно вычислять возникающие интегралы по переменной s. В результате можно показать, что при удержании любого конечного числа слагаемых в разложении (16) асимптотическое поведение в бесконечности и нуле символа ядра $K(u)$ вида (15) принципиально не меняется и имеет вид

$$K(u)=c_0u^{-1}+c_1u^{-2}+O(u^{-3})\quad(u\to\infty),$$
$$K(u)=d_0+O(u)\quad(u\to0). \tag{19}$$

Поведение (19) обеспечивает возможность применения сингулярного асимптотического метода, эффективного при малых значениях параметра λ [14–16] для решения интегрального уравнения (14). Безразмерный параметр λ, введенный в формулах (13), характеризует относительную длину вкладыша. Малые значения λ соответствуют относительно длинным вкладышам.

Далее будем удерживать в разложении (16) только два первых члена. Тогда

$$\nu(r)=1+\frac{0,5}{\eta_\infty+\eta_1\rho^3r^{-3}},$$
$$\eta_\infty=-\frac{1}{2(1-\nu_\infty)},\ \nu_\infty=\nu(\infty). \tag{20}$$

Для закона изменения (20) значение коэффициента Пуассона в бесконечности (вдали от границы полости) не зависит от значения η_1. При $\eta_1=0$ имеем однородный упругий материал. При приближении к границе полости из бесконечности (от значения ν_∞) коэффициент Пуассона и модуль Юнга убывают при $\eta_1>0$ и возрастают при $\eta_1<0$. При этом на границе полости коэффициент Пуассона достигает значения

$$\nu(\rho)=1+\frac{0,5}{\eta_\infty+\eta_1}. \tag{21}$$

С целью приведения коэффициента c_0 в разложении (19) к единице домножим обе части интегрального уравнения (14) на

$$1-0,5\eta,\qquad \eta=4(1-\nu_\infty)\eta_1 \tag{22}$$

и будем рассматривать интегральное уравнение

$$\int_{-1}^1\varphi(\xi)k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi=\pi(1-0,5\eta)f\quad(|x|\le1), \tag{23}$$

для которого символ ядра, используя интегралы (12) и (17), запишем в форме

$$K(u)=\frac{1-0,5\eta}{2(1-\nu_\infty)-u^2(1-2\eta u^2)(\Omega_0^2-1)-\eta u^2(\Omega_0^2-2u\Omega_0)},$$
$$\Omega_0=\frac{K_0(u)}{K_1(u)}. \tag{24}$$

При $\eta=0$ символ (24) совпадает с известным для однородного пространства с цилиндрической шахтой [12–15].

Для символа ядра (24), используя известные асимптотические формулы для функций Макдональда [35], получим асимптотику

$$\Omega_0=1-\frac{1}{2u}+\frac{3}{8u^2}-\frac{3}{8u^3}+$$
$$+\frac{63}{128u^4}+O\left(\frac{1}{u^5}\right)\ (u\to+\infty) \tag{25}$$

и найдем коэффициенты в разложениях (19):

$$c_0=1,\quad c_1=-\frac{1-2\nu_\infty+1,25\eta}{1-0,5\eta},\quad d_0=\frac{1-0,5\eta}{2(1-\nu_\infty)}. \tag{26}$$

На основании асимптотического поведения символа (24) ядро (15) интегрального уравнения (23) имеет логарифмическую особенность, которую можно выделить в форме

$$k(t)=-\ln|t|+\int_0^\infty\frac{uK(u)-1+\exp(-u)}{u}\cos(ut)du, \tag{27}$$

где использовано значение интеграла [13,15]

$$\int_0^\infty\frac{1-\exp(-u)}{u}\cos(ut)du=-\ln|t|. \tag{28}$$

Зная главную часть ядра (27), можно утверждать, что решение интегрального уравнения первого рода (23) должно иметь корневую особенность на границе области контакта $x = \pm 1$.

Ниже используем сингулярный асимптотический метод для решения интегрального уравнения (23) с символом ядра (24). Метод предполагает построение решения в виде суперпозиции вырожденного (проникающего) решения и решений типа пограничного слоя, несущих корневые особенности на краях области контакта. При малых значениях λ заменим интегральное уравнение (23) на эквивалентную систему трех интегральных уравнений [13–15]:

$$\int_{-1}^{\infty}\omega\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right)k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi =$$
$$=\pi\lambda+\int_{-\infty}^{-1}\left[\omega\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right)-p(\xi)\right]k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi \quad (-1\le x<\infty),$$
$$\int_{-\infty}^{1}\omega\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right)k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi = \qquad (29)$$
$$=\pi\lambda+\int_{-1}^{\infty}\left[\omega\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right)-p(\xi)\right]k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi \quad (-\infty< x\le 1),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi=\pi\lambda \quad (-\infty<x<\infty)$$

при условии

$$\varphi(x)=(1-0{,}5\eta)\frac{f}{\lambda}\times$$
$$\times\left[\omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)+\omega\left(\frac{1-x}{\lambda}\right)-p\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] \quad (|x|\le 1). \qquad (30)$$

Из последнего интегрального уравнения (29) при помощи интегрального преобразования Фурье сразу найдем вырожденное решение, не учитывающее корневые особенности на краях области контакта (см. формулы (19), (26)),

$$p(x\lambda^{-1})=d_0^{-1}. \qquad (31)$$

Первые два интегральных уравнения (29), служащие для построения решений типа погранслоя, заменами переменных сводятся к одному интегральному уравнению вида

$$\int_0^{\infty}\omega(\tau)k(t-\tau)d\tau=\pi+\int_{2/\lambda}^{\infty}[\omega(\tau)-d_0^{-1}]k\left(\frac{2}{\lambda}-t-\tau\right)d\tau. \qquad (32)$$

Можно показать, что интеграл в правой части интегрального уравнения (32) экспоненциально убывает при $\lambda\to 0$, для решения этого интегрального уравнения можно использовать метод последовательных приближений, на каждом шаге которого возникает интегральное уравнение Винера–Хопфа. При малых значениях λ ограничимся нулевым приближением решения интегрального уравнения (32), пренебрегая интегралом в правой его части. Для эффективной факторизации символа ядра в соответствии с его свойствами (19), (26) используем аппроксимацию

$$K(u)\approx\frac{\sqrt{u^2+B^2}}{u^2+C^2}\exp\left(\frac{D}{\sqrt{u^2+E^2}}\right),$$
$$D=c_1,\ \frac{B}{C^2}\exp\left(\frac{D}{E}\right)=d_0,\quad E>1. \qquad (33)$$

Значения постоянных, входящих в формулу (33), и погрешность этой аппроксимации на действительной оси θ приведены в табл. 1, рассчитанные при ν_∞=0,3 и разных η. Известно [13], что погрешность решения интегрального уравнения (23), связанная с заменой точного выражения символа ядра на приближенное (33), не превосходит погрешности аппроксимации θ.

Применяя метод Винера–Хопфа, решение типа погранслоя интегрального уравнения (32), (33) в нулевом приближении найдем в виде

$$\omega(s)=\frac{1}{\sqrt{d_0}}\left(\frac{\exp(-Bs)}{\sqrt{\pi s}}+\frac{C}{\sqrt{B}}\operatorname{erf}\left(\sqrt{Bs}\right)+I(s)\right),$$
$$I(s)=\frac{-D}{\pi}\int_0^s\left[\frac{\exp(-B(s-\tau))}{\sqrt{\pi(s-\tau)}}+\right. \qquad (34)$$
$$\left.+\frac{C}{\sqrt{B}}\operatorname{erf}(\sqrt{B(s-\tau)})\right]K_0(E\tau)d\tau.$$

Таблица 1

Значения параметров аппроксимации (32)

Table 1

Parameters of the approximation (32)

η	B	C	D	E	θ (%)
–0,08	1,110	1,129	–0,288	1,810	5,5
–0,04	1,030	1,069	–0,343	1,610	5,0
0	1,070	1,081	–0,400	1,610	4,5
0,04	1,000	1,052	–0,459	1,810	4,5
0,08	1,020	1,071	–0,521	2,010	4,5

Решение (34) имеет корневые особенности на краях области контакта.

Формулы (30), (31) и (34) дают сингулярное асимптотическое решение интегрального уравнения (23). На основании этих формул получим интегральную характеристику контактных давлений

$$N_0=\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx \qquad (35)$$

в форме

$$N_0=(1-0{,}5\eta)f\left\{\frac{2C}{\sqrt{d_0B}}\left[\left(\zeta-\frac{1}{2B}+\frac{1}{C}\right)\operatorname{erf}(\sqrt{B\zeta})+\right.\right.$$

$$+\sqrt{\frac{\zeta}{\pi B}}\exp(-B\zeta)\Bigg]-\frac{\zeta}{d_0}+\frac{2J(\zeta)}{\sqrt{d_0}}\Bigg\},\quad \zeta=\frac{2}{\lambda},$$

$$J(s)=\frac{-D}{\pi}\int_0^s\left[\frac{C}{B}\sqrt{\frac{s-\tau}{\pi}}\exp(-B(s-\tau))+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{erf}(\sqrt{B(s-\tau)})}{\sqrt{B}}\left(1-\frac{C}{2B}+C(s-\tau)\right)\right]K_0(E\tau)d\tau. \quad (36)$$

Погрешность решения (30), (31), (35) и (36) при $\lambda \le 1$ не превосходит $(5+\theta)\%$. Это решение можно рекомендовать, когда длина вкладыша существенно больше диаметра цилиндрической полости.

В табл. 2 приведены значения интегральной характеристики N_0/f, рассчитанные по формуле (36) при $\nu_\infty=0{,}3$ и разных значениях λ и η. При уменьшении параметра λ контактные давления и интегральная характеристика существенно возрастают.

Таблица 2

Значения интегральной характеристики (35)

Table 2

Integral characteristics (35)

λ / η	2	1	0,5	0,25
–0,08	2,95	4,67	8,00	14,6
–0,04	2,71	4,29	7,34	13,4
0	2,47	3,90	6,67	12,2
0,04	2,20	3,49	5,97	10,9
0,08	1,94	3,07	5,25	9,61

3. Учет шероховатости

Допустим, что поверхность полости является не идеально гладкой, как в предыдущем разделе, а шероховатой. Известно [36], что шероховатость поверхности в контактных задачах может моделироваться покрытием винклеровского типа. Пусть поверхность шахты армирована таким покрытием, которое дает дополнительный вклад в нормальное перемещение в области контакта (снова используем размерные обозначения):

$$u_* = Aq(z),\quad A=\text{const}, \quad (37)$$

где $q(z)$ – искомое контактное давление. Условие контакта имеет вид

$$u_* + u_q = \delta \quad (|z|\le a), \quad (38)$$

где u_q – упругое перемещение точек поверхности под действием контактного давления, которое определяется с использованием фундаментального решения (10); δ – натяг. Для изменяющегося коэффициента Пуассона снова принимаем закон (20).

Используя условие (38), безразмерные величины (13), а также обозначение

$$A_* = \frac{AG}{(1-\nu_\infty)a}, \quad (39)$$

сведем контактную задачу для шахты с покрытием к интегральному уравнению относительно безразмерного контактного давления $\varphi(x)$:

$$A_* c_* \varphi(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi = c_* f \quad (|x|\le 1),$$
$$k(t)=\int_0^\infty K(u)\cos(ut)du,\quad c_*=1-0{,}5\eta. \quad (40)$$

Здесь символ ядра $K(u)$ определяется по формуле (24).

В отличие от уравнения (23) интегральное уравнение (40) является уравнением второго рода. Несмотря на логарифмическую особенность ядра, его решение уже не обладает корневыми особенностями и принимает конечные значения на краях области контакта. Для численного решения интегрального уравнения (40) используем метод коллокации на основе квадратурной формулы Гаусса по 32 узлам [34]. Метод эффективен при не слишком малых значениях параметра λ, когда для расчета ядра можно применять формулу (27). При расчетах брали $\lambda \ge 1$.

В табл. 3 приведены значения интегральной характеристики N_0/f, рассчитанные по формуле (35) при $\nu_\infty=0{,}3$ и разных значениях A_*, λ и η.

Таблица 3

Значения характеристики (34) по методу коллокации

Table 3

Characteristics (34) in collocation method

λ	4	2	1	4	2	1
η	$A_*=0{,}05$			$A_*=0{,}01$		
–0,08	1,68	2,31	3,34	1,76	2,46	3,64
–0,04	1,67	2,30	3,33	1,75	2,45	3,63
0	1,66	2,30	3,32	1,74	2,44	3,62
0,04	1,65	2,29	3,31	1,73	2,43	3,60
0,08	1,64	2,28	3,30	1,72	2,42	3,59

Заключение

При необходимости аппроксимация (33) может быть уточнена путем добавления множителей по типу аппроксимации Паде [16].

Увеличение контактных давлений и интегральной характеристики при уменьшении параметра λ для гладкого и шероховатого контакта (см. табл. 2 и 3) связано с возрастанием площади области контакта S (при фиксированном радиусе шахты ρ):

$$\frac{S}{\rho^2} = \frac{4\pi}{\lambda}. \qquad (41)$$

Как показывает численный анализ (см. табл. 2 и 3), при $\eta<0$, когда коэффициент Пуассона возрастает при приближении к поверхности шахты от значения в бесконечности ν_∞ (при этом модуль Юнга также возрастает) контактные давления и их интегральная характеристика, отнесенные к натягу вкладыша f, больше, чем при убывающем в направлении из бесконечности коэффициенте Пуассона и модуле Юнга ($\eta>0$).

При малых значениях параметра A_*, характеризующего коэффициент постели покрытия, решение интегрального уравнения (40) вдали от краев области контакта становится близко к вырожденному (проникающему) решению (31). Решение уравнения (40) возрастает вблизи краев области контакта тем больше, чем меньше значение A_*, что согласуется с эффектом регуляризации интегрального уравнения (23) по А.Н. Тихонову. При увеличении параметра A_* (возрастании степени шероховатости) контактные давления и их интегральная характеристика снижаются (см. табл. 3). Сравнение табл. 2 и 3 показывает, что покрытие существенно снижает влияние неоднородности на интегральную характеристику и распределение контактных давлений.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №18-01-00017).

Acknowledgements

The work was carried out with the financial support from the Russian Foundation for Basic Research (Project Nr. 18-01-00017).

Библиографический список

1. Axisymmetric contact problem of the theory of elasticity for inhomogeneous layers / A.S. Vasiliev, S.S. Volkov, S.M. Aizikovich, Y.-R. Jeng // ZAMM. – 2014. – Vol. 94. – No. 9 – P. 705–712. DOI: 10.1002/zamm.201300067

2. Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С. Осесимметричная контактная задача о вдавливании конического штампа в полупространство с неоднородным по глубине покрытием // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т. 79, вып. 5. – С. 710–716.

3. Axisymmetric problem on the indentation of a hot circular punch into an arbitrarily non-homogeneous half-space / L.I. Krenev, S.M. Aizikovich, Y.V. Tokovyy, Y.-C. Wang // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – Vol. 59 – P. 18–28. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.12.017

4. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора / С.С. Волков, А.С. Васильев, С.М. Айзикович, Н.М. Селезнев, А.В. Леонтьева // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 4. – С. 20–34. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.02

5. Torsion of a circular punch attached to an elastic half-space with a coating with periodically depth-varying elastic properties / A.S. Vasiliev, M.V. Swain, S.M. Aizikovich, E.V. Sadyrin // Archive of Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 86. – No. 7 – P. 1247–1254. DOI: 10.1007/s00419-015-1089-1

6. Influence of a soft FGM interlayer on a contact stresses under a beam on an elastic foundation / S.M. Aizikovich, B.I. Mitrin, N.M. Seleznev, Y.-C. Wang, S.S. Volkov // Structural Engineering and Mechanics. – 2016. – Vol. 58. – No. 4 – P. 613–625. DOI: 10.12989/sem.2016.58.4.613

7. Vasiliev A.S., volkov S.S., Aizikovich S.M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating // Materials Physics and Mechanics. – 2016. – Vol. 28. – No. 1–2 – P. 11–15.

8. Индикация термоупругой неустойчивости скользящего контакта с помощью заглубленной пьезокерамической прослойки / В.Б. Зеленцов, Б.И. Митрин, А.Г. Сукиязов, С.М. Айзикович // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017 – № 1. – С. 63–84. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.05

9. Indentation of functionally graded coating on an elastic substrate by a sphero-conical indenter / L.I. Krenev, E.V. Sadyrin, S.M. Aizikovich, T.I. Zubar // Springer Proceedings in Phycics. – 2017. – Vol. 193 – P. 397–405. DOI: 10.1007/978-3-319-56062-5_33

10. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer // Materials Physics and Mechanics. – 2018. – Vol. 35. – No. 1 – P. 175–180. DOI: 10.18720/MPM.3512018_20

11. Aizikovich S.M., Galybin A.N., Krenev L.I. Semi-analytical solution for mode I penny-shaped crack in a soft inhomogeneous layer // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – Vol. 53 – P. 129–137. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.10.010

12. Александров В.М., Белоконь А.В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 4. – С. 704–710.

13. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.

14. Александров В.М., Пожарский Д.А. Об одном асимптотическом методе в контактных задачах // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т. 63. – Вып. 2. – С. 295–302.

15. Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-dimensional contact problems. – Dordrecht: Kluwer, 2001. – 406 p.

16. Пожарский Д.А. Контактная задача для полого цилиндра // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т. 81. – Вып. 6. – С. 727–733.

17. Пожарский Д.А., Золотов Н.Б. К одной задаче Белоконя А.В. // Вестн. Дон. гос. техн. ун-та. – 2017. – Т. 17, №. 2. – С. 7–11. DOI: 10.23947/1992-5980-2017-17-2-7-11

18. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред. – М.: Физматлит, 2009. – 316 с.

19. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. Динамическая контактная задача для заполненной жидкостью преднапряженной цилиндрической трубы // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73. – Вып. 2. – С. 289–302.

20. Абрамович М.В., Колосова Е.М., Чебаков М.И. Контактная задача при наличии сил трения в зоне контакта для трехкомпонентного цилиндрического основания // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т. 78. – Вып. 2. – С. 262–269.

21. Белянкова Т.И., Калинчук В.В., Лыжов В.А. Особенности динамики трехслойного полого цилиндра // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2015. – № 4. – С. 19–32.

22. Finite-element modeling of a damaged pipeline repaired using the wrap of a composite material / A.A. Lyapin, M.I. Chebakov, A. Dumitrescu, G. Zecheru // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51. – No. 3 – P. 333–340. DOI: 10.1007/s11029-015-9504-9

23. Ватульян А.О., Юров В.О. Волновые процессы в полом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57, № 4. – С. 182–191. DOI: 10.15372/PMTF20160418

24. Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder / I.V. Bogachev, R.D. Nedin, A.O. Vatulyan, O.V. Yavrunyan // ZAMM. – 2017. – Vol. 97. – No. 3 – P. 358–364. DOI: 10.1002/zamm.201600179

25. Goryacheva I.G., Makhovskaya Y. Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // Friction. – 2017. – Vol. 5. – No. 3. – P. 339–350. DOI: 10.1007/s40544-017-0179-1

26. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y. Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 991. – No. 1 – P. 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012028

27. Бородачев А.Н., Дудинский В.И. Жесткий штамп на упругом полупространстве с изменяющимся по глубине коэффициентом Пуассона // Прикладная механика. 1985. – Т. 21, № 8. – С. 34–39.

28. Бородачев А.Н. Упругое равновесие неоднородного по толщине слоя // Прикладная механика. 1988. – Т. 24, № 8. – С. 30–35.

29. Пожарский Д.А. Упругое равновесие неоднородного клина с переменным коэффициентом Пуассона // Прикладная математика и механика. – 2016. – Т. 80. – Вып. 5. – С. 614–621.

30. Кузнецов Е.А. Давление круглого цилиндра на полупространство с переменным по глубине коэффициентом Пуассона // Изв. АН СССР. МТТ. – 1985. – № 1. – С. 73–86.

31. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Ленанд, 2014. – 376 с.

32. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity. Handbuch der Physik. vol. VIa/2. – Berlin: Springer, 1972 – P. 1–295.

33. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 491 с.

34. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

35. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

36. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 487 с.

References

1. Vasiliev A.S., volkov S.S., Aizikovich S.M., Jeng Y.-R. Axisymmetric contact problem of the theory of elasticity for inhomogeneous layers. *ZAMM*, 2014, vol. 94, no. 9, pp. 705-712. DOI: 10.1002/zamm.201300067

2. Aizikovich S.M., Vasil'ev A.S., volkov S.S. The axisymmetric contact problem of the indentation of a conical punch into a half-space with coating inhomogeneous in depth. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 79, no. 5, pp. 500-505. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2016.03.011

3. Krenev L.I., Aizikovich S.M., Tokovyy Y.V., Wang Y.-C. Axisymmetric problem on the indentation of a hot circular punch into an arbitrarily non-homogeneous half-space. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 59, pp. 18-28. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.12.017

4. volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M., Seleznev N.M., Leontieva A.V. Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie uprugogo miagkogo funktsional'no-gradientnogo pokrytiia pri vnedrenii sfericheskogo indentora [Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 20-34. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.02

5. Vasiliev A.S., Swain M.V., Aizikovich S.M., Sadyrin E.V. Torsion of a circular punch attached to an elastic half-space with a coating with periodically depth-varying elastic properties. *Archive of Applied Mechanics*, 2016, vol. 86, no. 7, pp. 1247-1254. DOI: 10.1007/s00419-015-1089-1

6. Aizikovich S.M., Mitrin B.I., Seleznev N.M., Wang Y.-C., volkov S.S. Influence of a soft FGM interlayer on a contact stresses under a beam on an elastic foundation. *Structural Engineering and Mechanics*, 2016, vol. 58, no. 4, pp. 613-625. DOI: 10.12989/sem.2016.58.4.613

7. Vasiliev A.S., volkov S.S., Aizikovich S.M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating. *Materials Physics and Mechanics*, 2016, vol. 28, no. 1-2, pp. 11-15.

8. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Sukiyazov A.G., Aizikovich S.M. Indication of thermoelastic instability of sliding contact using embedded piezoceramic interlayer. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 1, pp. 63-84. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.05

9. Krenev L.I., Sadyrin E.V., Aizikovich S.M., Zubar T.I. Indentation of functionally graded coating on an elastic substrate by a sphero-conical indenter. *Springer Proceedings in Phycics*, 2017, vol. 193, pp. 397-405. DOI: 10.1007/978-3-319-56062-5_33

10. Vasiliev A.S., volkov S.S., Aizikovich S.M. Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 35, no. 1, pp. 175-180. DOI: 10.18720/MPM.3512018_20

11. Aizikovich S.M., Galybin A.N., Krenev L.I. Semi-analytical solution for mode I penny-shaped crack in a soft inhomogeneous layer. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 53, pp. 129-137. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.10.010

12. Aleksandrov V.M., Belokon' A.V. Asymptotic solution of a class of integral equations and its application to contact problems for cylindrical elastic bodies. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1967, vol. 31, no. 4, pp. 718-724.

13. Aleksandrov V.M., Romalis B.L. Kontaktnye zadachi v mashinostroenii [Contact problems in machine-building]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 176 p.

14. Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A. An asymptotic method in contact problems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, vol. 63, no. 2, pp. 283-290.

15. Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-dimensional contact problems. Dordrecht, Kluwer, 2001, 406 p.

16. Pozharskii D.A. Contact problem for a hollow cylinder. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 499-503. DOI: 10.1016/j.jappmathmech. 2018.03.020

17. Pozharskii D.A., Zolotov N.B. K odnoi zadache Belokonia A.V. [To one Belokon's problem]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – DSTU Bulletin*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 7-11. DOI: 10.23947/1992-5980-2017-17-2-7-11

18. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred [Surface dynamics of inhomogeneous media]. *Moscow, Fizmatlit*, 2009, 316 p.

19. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. The dynamic contact problem for a prestressed cylindrical tube filled with a fluid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 209-219. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2009.04.011

20. Abramovich M.V., Kolosova Ye.M., Chebakov M.I. The contact problem when there are friction forces in the contact area for a three-component cylindrical base. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, no. 2, pp. 181-186. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2014.07.011

21. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. Osobennosti dinamiki trekhsloinogo pologo tsilindra [Peculiarities of dynamics of a three-layered hollow cylinder]. *Ecological Bulletin of BEC Scientific Centers*, 2015, no. 4, pp. 19-32.

22. Lyapin A.A., Chebakov M.I., Dumitrescu A., Zecheru G. Finite-element modeling of a damaged pipeline repaired using the wrap of a composite material. *Mechanics of Composite Materials*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 333-340. DOI: 10.1007/s11029-015-9504-9

23. Vatulyan A.O., Yurov V.O. Wave processes in a hollow cylinder in an inhomogeneous prestress field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 731-739. DOI: 10.1134/S0021894416040180

24. Bogachev I.V., Nedin R.D., Vatulyan A.O., Yavrunyan O.V. Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder. *ZAMM*, 2017, vol. 97, no. 3, pp. 358-364. DOI: 10.1002/zamm.201600179

25. Goryacheva I.G., Makhovskaya Y. Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies. *Friction*, 2017, vol. 5, no. 3, pp. 339-350. DOI: 10.1007/s40544-017-0179-1

26. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y. Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 991, no. 1, pp. 012028. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012028

27. Borodachev A.N., Dudinskii V.I. Rigid punch on an elastic semispace with a depth-varying Poisson ratio. *Soviet Applied Mechanics*, 1985, vol. 21, no. 8, pp. 753-757.

28. Borodachev A.N. Elastic equilibrium in a layer inhomogeneous with depth. *Soviet Applied Mechanics*, 1988, vol. 24, no. 8, pp. 753-758.

29. Pozharskii D.A. The elastic equilibrium of an inhomogeneous wedge with varying Poisson's ratio. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, vol. 80, no. 5, pp. 433-438. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.02.010

30. Kuznetsov E.A. Pressure of a curcular cylinder against a half-space with Poisson's ratio that varies with depth. *Mechanics of Solids*, 1985, vol. 20, no. 1, pp. 68-80.

31. Lomakin V.A. Teoriia uprugosti neodnorodnykh tel [Theory of elasticity of inhomogeneous bodies]. *Moscow, Lenand*, 2014, 376 p.

32. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity. Handbuch der Physik. vol. VIa/2. *Berlin, Springer*, 1972, pp. 1-295.

33. Lur'e A.I. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti [Spatial problems in the elasticity theory]. *Moscow, GITTL*, 1955, 491 p.

34. Handbook of Mathematical Functions. Edited by M. Abramowitz and I. Stigan. *New York, Dover Publications*, 1964, 832 p.

35. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i riady. Spetsial'nye funktsii [Integrals and series. Special functions]. *Moscow, Nauka*, 1983, 752 p.

36. Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M. Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers [Kontaktnye zadachi dlia tel s tonkimi pokrytiiama i prosloikami]. *Moscow, Nauka*, 1983, 487 p.