



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.19

УДК 539.4:678.067

## ПРОФИЛИРОВАННЫЕ И ВЕТВЯЩИЕСЯ АНАЛОГИ МНОГОЛИСТОВОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕССОРЫ <sup>1</sup>

А.Н. Полилов<sup>1</sup>, Н.А. Татусь<sup>1</sup>, Ш. Тянь<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Россия, Москва

<sup>2</sup>Государственная ведущая лаборатория инженерии производственных систем, Сианьский университет Цзяотун, Китай

### О СТАТЬЕ

Получена: 12 августа 2018 г.  
Принята: 24 октября 2018 г.  
Опубликована: 28 декабря 2018 г.

#### Ключевые слова:

накопленная упругая энергия, равнопрочная листовая пружина, ветвящаяся и профилированная структура, правило Леонардо, низко модульный и высокопрочный квази-однонаправленный композит.

### АННОТАЦИЯ

Мерой эффективности упругих элементов типа листовых рессор служит их способность запасать максимальную упругую энергию на единицу массы рессор. Например, по возможной запасенной упругой энергии на 1 кг массы однонаправленный стеклопластик оказывается одним из лучших конструкционных материалов благодаря высоким пределу прочности и предельной деформации и низким модулю упругости и плотности. В настоящей статье обсуждается принципиальная возможность и эффективность применения композитов в равнопрочных профилированных и разветвленных упругих элементах с постоянной суммарной площадью поперечных сечений (констэра), которые представляют собой аналог многолистовой стальной рессоры, но при заданных податливости и несущей способности они могут дать многократный выигрыш по массе. Выведены в конечном виде соотношения для возможного снижения массы за счет профилирования при произвольном степенном законе изменения изгибающего момента. Показано, что любые «идеальные» равнопрочные балки при заданной накопленной упругой энергии дают по сравнению с однородной балкой трехкратное снижение массы при нагружении концевой силой и пятикратное – при действии равномерно распределенной нагрузки (без учета проблем крепления). Установлено, что традиционные методы расчета максимального прогиба могут приводить для сильно профилированных балок к расходящимся интегралам, но при формально бесконечном прогибе накопленная упругая энергия остается конечной.

Показано, что разветвленные структуры могут быть столь же эффективны, как профилированные, но при этом имеют еще и ряд преимуществ, которые состоят: 1) в отсутствии перерезанных волокон (правило Леонардо), 2) в исключении разориентации волокон, 3) в возможности ограничить габариты рессоры, объединяя «ветви» в пучок. Ветвящиеся и профилированные композитные упругие элементы в перспективе могут быть применены в приемных модулях космических платформ, где нет габаритных ограничений благодаря низкой массе и энергоёмкости изготовления, что делает возможным их производство непосредственно в орбитальной лаборатории.

© ПНИПУ

© Полилов Александр Николаевич – д.т.н., проф., зав. лаб., e-mail: polilov@imash.ru, [ID 0000-0002-0990-5178](#)

Татусь Николай Алексеевич – к.т.н., н.с., e-mail: nikalet@mail.ru, [ID 0000-0003-1748-9976](#)

Шиаяунг Тянь – проф., глава лаборатории, e-mail: leoxyt@hotmail.com, [ID 0000-0002-9618-3272](#)

Alexander N. Polilov – Doctor of Technical Sciences, Professor. Head of Laboratory, e-mail: polilov@imash.ru,

[ID 0000-0002-0990-5178](#)

Nikolay A. Tatus – CSc in Technical Sciences, Researcher, e-mail: nikalet@mail.ru, [ID 0000-0003-1748-9976](#)

Tian Xiaoyong, Professor, Head of Laboratory, e-mail: leoxyt@hotmail.com, [ID 0000-0002-9618-3272](#)

<sup>1</sup> В статье изложены материалы пленарного доклада, сделанного 22 мая 2018 года на конференции «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций».



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)



## SHAPED AND BRANCHED ANALOGS OF TRIANGLE MULTI-LEAF SPRING

A.N. Polilov<sup>1</sup>, N.A. Tatus<sup>1</sup>, Tian Xiaoyong<sup>2</sup><sup>1</sup>Mechanical Engineering Research Institute named by A.A. Blagonravov,  
Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation<sup>2</sup>State Key Laboratory of Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, China

## ARTICLE INFO

Received: 12 August 2018  
Accepted: 24 October 2018  
Published: 28 December 2018*Keywords:*

stored elastic energy, equistrong leaf spring, shaped and branched structure, Leonardo's rule, low-modulus and high-strength quasi-unidirectional composite material.

## ABSTRACT

The effectiveness of elastic elements like leaf springs is determined by their possibility to store the maximum elastic energy for unit mass of springs. For example, in the sense of elastic energy stored in 1 kg of mass, the unidirectional GFRP is one of the best among all structure materials due to its high strength and critical strain, and low Young's modulus and density.

In this paper we discuss the possibility and effectiveness of composites application for equistrong shaped and branched elastic beams with a constant sum area of cross sections ("constarea"). These beams are the analogs of steel multi-leaf springs, and at a fixed compliance and bear capacity these beams may provide great mass advantages: approximately threefold mass reduction for the end force action and a five-time reduction for a uniform disturbed loading with no account of connection problems. It's pointed that traditional maximum deflection computation methods lead us to infinity integrals for "sharp" shaped beams, but the stored elastic energy remains correct and finite for formally infinite deflections.

It is shown that the branched structures may give approximately the same effectiveness as shaped ones but they have some additional advantages connected with: the absence of cut fibers (Leonardo's rule); the exclusion of fiber disorientation; the possibility of a leaf spring size limitation during a "branch" connection with the bundle.

In future branching and shaping composite elastic elements may become efficient for space-based constructions without size limitations due to their low mass and energy of production, and these factors allow them to be produced directly in an orbit laboratory.

© PNRPU

**Введение**

Балки равного сопротивления («равнопрочные») интересовали ученых ещё со времен Галилея [1, 2, 3], но в технических приложениях широко применяются лишь простейшие треугольные стальные балки [4, 5], форма которых соответствует условию равнонапряженности («равнопрочности») при изгибе сосредоточенной силой. Особый интерес представляют балки, работающие не только как несущие элементы, но и как накопители упругой энергии – листовые пружины (разд. 1) [6, 7, 8, 9]. Наиболее известное применение нашли многолистные рессоры, в которых длина листов изменяется по линейному закону. Без учета межлистового трения и влияния контактных напряжений такие рессоры соответствуют треугольной балке со ступенчатым изменением ширины (разд. 2). Ограничение по ширине, например, в конструкциях автомобиля приводит к необходимости разбивать балку на узкие листы, имеющие различную начальную кривизну, и стягивать их стремлянками для разгрузки наиболее ответственного коренного листа. Межлистового трения и износа [10] можно было бы избежать, если применять «равнопрочное» профилирование листов, что позволило бы перейти к малолистовым (с одинаковой длиной листов) и однолистовым рессорам [11]. Однако профилирование стальных листов – дело крайне энергоёмкое, и оно применяется редко и ограничено. Ситуация изменилась с появлением новых конструкционных материалов – волокнистых

композитов [12–15], в частности высокопрочных, но низко модульных стеклопластиков, так как при отработке технологии изготовления композитных рессор можно получать любой профиль при совершенно незначительных дополнительных усилиях [16]. Так же как природа при минимальных энергозатратах создаёт профилированные или ветвящиеся структуры (крона дерева, плавник рыбы, крыло бабочки) [17, 18], так и композитные технологии пултрузии, ролтрузии, пулформинга, вакуумной инфузии, формования в вакуумной мешке (в принципе!) позволяют без значительных температур и прикладываемых усилий получать любую форму изделия в процессе его изготовления (до полной полимеризации связующего) [19, 20].

Отечественный и зарубежный опыт проектного расчета металлических и стеклопластиковых рессор показал, что достаточно точное приближение даёт обычная балочная теория, так как длина рессоры многократно превосходит её толщину и ширину [21]. При этом достаточно учитывать лишь продольные нормальные напряжения, создаваемые изгибающим моментом, и для наглядных модельных расчетов необходимо знание лишь продольного модуля Юнга. Поправки к прогибу от межслойных сдвигов можно учесть элементарно, по энергетической теории типа С.П.Тимошенко [22], однако при этом сами поправки незначительны (пропорциональны квадрату отношения толщины к длине балки), а наглядность результатов пропадает. Разумеется, при расчете несущей способности и циклической долговеч-

ности реальных композитных конструкций надо использовать энергетические критерии роста расслоений [23], но это представляет собой отдельную задачу, выходящую за пределы тематики и допустимый объем данной статьи.

Основная цель настоящей работы состоит в анализе эффективности возможного применения квазиоднопослойных композитов в профилированных (разд. 4) или разветвленных (разд. 5) упругих элементах [24–31], обусловленной более низкими, чем у стали, значениями плотности и модуля упругости.

Интересный результат обсуждается в разд. 3. При вычислении прогибов «сильно профилированных» балок возникают расходящиеся интегралы: прогибы обращаются в бесконечность при конечной энергии деформации. Несмотря на почти вековой опыт анализа применимости балочного приближения, удаётся наглядно обосновать новые ограничения в дополнение к традиционным требованиям малых прогибов и углов поворота сечений. Этот эффект, разумеется, никак не связан с возможной заменой стальных упругих элементов на стеклопластиковые. Просто в металлическом исполнении сильно профилированные балки типа констэра не рассматривались, и поэтому на проанализированное в статье появление расходящихся интегралов многочисленные авторы не обращали внимания или не считали подобную экзотику достойной включения в курсы «Строительная механика» и «Сопротивление материалов».

В настоящее время большое внимание уделяется аддитивным композитным технологиям, основанным на изучении опыта живой природы [32–34]. Например, компьютерное моделирование позволяет (по аналогии со структурой древесного сучка) построить траектории волокон, огибающих отверстие или узел крепления вдоль линий наибольших главных напряжений [35, 36], что даёт возможность проектировать и создавать при трехмерной печати более прочные соединения композитных деталей.

В данной статье рассмотрена другая задача, связанная с анализом эффективности некоторых приемов профилирования и ветвления, используемых природой для создания прочных и податливых конструкций типа кроны дерева.

**1. Особенности расчета на прочность при заданной податливости**

Упругим элементам предъявляют два основных противоречивых требования: они должны выдерживать заданную нагрузку и при этом быть достаточно податливыми [4], чтобы запастись требуемую упругую энергию, равную, например, половине от примерно ¼ веса автомобиля, умноженной на ход подвески. Требование по податливости должно выполняться точно, а требование по прочности – с произвольным запасом. При этом получаются неожиданные выводы: например, длинная

балка с заданной податливостью может выдержать большее поперечное усилие, чем короткая.

**Постановка задачи.** Для получения наглядных результатов будем рассматривать симметрично нагруженную рессору, заменяя её консольной балкой длиной  $l$  с прямоугольным сечением, толщина  $t$  и ширина  $w$  которого изменяются по степенным законам:

$$w_i(\bar{x}) = w_i(1)\bar{x}^{\alpha_i}; \quad t_i(\bar{x}) = t_i(1)\bar{x}^{\beta_i}; \quad \bar{x} = x/l \in [0;1]. \quad (1)$$

Индекс  $i$  в (1) и далее означает тип балки (рис. 1):  $i = 0$  – с постоянными размерами сечения;  $i = 1$  – с постоянной толщиной;  $i = 2$  – с постоянной шириной;  $i = 3$  – с постоянной площадью поперечного сечения («констэра»);  $x$  – продольная координата, отсчитываемая от конца балки (рис. 2);  $\bar{x}$  – безразмерная координата,  $\bar{x} = 1$  в корневом сечении балки;  $\alpha_i, \beta_i$  – показатели степени для разных типов балки;  $t_i(1), w_i(1)$  – размеры корневого сечения.

В работе рассматриваются два основных вида нагружения: сосредоточенной силой – практически наиболее важный случай для упругих элементов, и распределенной (в частности, равномерной) нагрузкой, что больше соответствует нагружению мостов, строительных конструкций или ветровым нагрузкам на крону дерева.

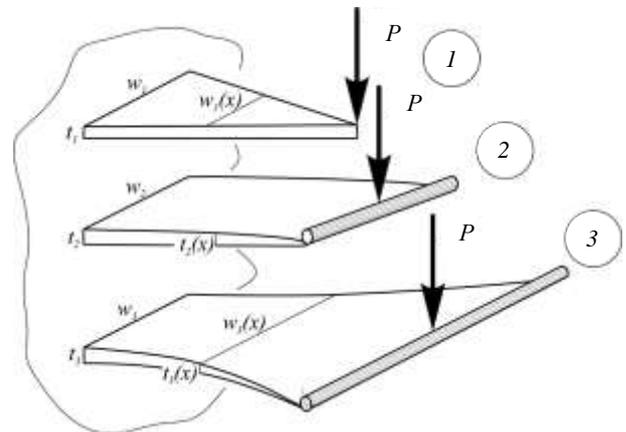


Рис. 1. Три наиболее распространенных типа профилированных равнопрочных балок для нагружения концевой силой: треугольная с постоянной толщиной – 1, параболическая – с постоянной шириной – 2 и констэра с постоянной площадью сечения – 3

Fig. 1. The three most common types of shaped equal strength beams for loading with a tip force: a triangular beam with a constant thickness of -1, a parabolic beam with a constant width of -2 and a constarea beam with a constant cross-section area -3

Малолисто́вая рессора состоит из  $n$  одинаковых профилированных листов. В степенных зависимостях (1) содержатся четыре параметра проектирования: размеры корневого сечения  $w_i(1), t_i(1)$  и показатели степени  $\alpha_i, \beta_i$ . Чтобы их однозначно определить, нужно удовлетворить четырём условиям:

1) заданной податливости  $C$  (отношением прогиба на свободном конце консольной балки  $v_i(0)$  к нагрузке  $P$ ),

$$C = \frac{v_i(0)}{P} = \frac{4\delta_{vi}l^3}{Enw_i(1)t_i^3(1)}; \delta_{vi} = \frac{v_i(0)}{v_0(0)}. \quad (2)$$

Коэффициент формы по прогибу  $\delta_{vi}$  равен отношению максимального прогиба на конце профилированной балки к прогибу  $v_0(0)$  прямоугольной балки с теми же размерами  $w_i(1), t_i(1)$  корневого сечения;

2) заданной прочности  $\sigma_*$  (способностью выдерживать заданную нагрузку  $P_*$ ),

$$\frac{6P_*l}{nw_i(1)t_i^2(1)} \leq \sigma_*; \quad (3)$$

3) «равнопрочности»,

$$\frac{6Px}{w_i(x)t_i^2(x)} = \frac{6Pl}{w_i(1)t_i^2(1)}; \text{ из (1)} \Rightarrow \alpha_i + 2\beta_i = 1. \quad (4)$$

4) выбранного соотношения между размерами сечения. Тут возможно бесконечное число вариантов, но **три типа** балок наиболее естественны:

4.1. постоянная толщина  $t_1(x) = \text{const} \Rightarrow \beta_1 = 0$ ;  $\alpha_1 = 1$ . Это условие связано с простотой получения упругого элемента, например, из стального листа;

4.2. постоянная ширина  $w_2(x) = \text{const} \Rightarrow \alpha_2 = 0$ ;  $\beta_2 = \frac{1}{2}$ . Это условие определяется ограничениями на габариты, например на ширину рессоры в автомобиле;

4.3. постоянная площадь поперечного сечения  $w_3(x)t_3(x) = w_3(1)t_3(1) = \text{const}$ . Это условие особенно важно для обеспечения прочности композитных балок, так как позволяет сохранять постоянное число непрерывных волокон по всей длине рессоры. Тип балки 3 констрэ (рис. 2) из (1) означает

$$\alpha_3 + \beta_3 = 0 \quad (5)$$

и из условия «равнопрочности» (4)  $\alpha_3 = -1$ ;  $\beta_3 = 1$ .

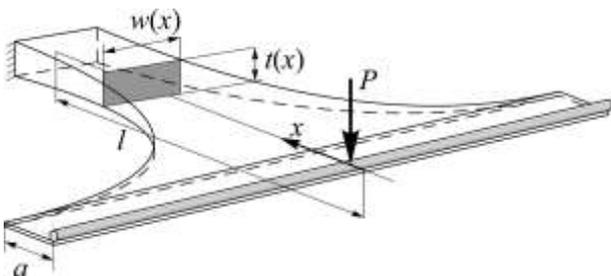


Рис. 2. Консольная балка констрэ с концевым участком с постоянными размерами сечения  
Fig. 2. A console constarea beam with the end section with constant section dimensions

**Пять способов удовлетворения двум условиям.** Условие по податливости (2) для рессоры должно быть выполнено точно (иначе машина будет стоять с наклоном), и из него можно определить требуемую толщину  $t$  листов. Подставив ее в (3), найдем выражение для наибольших напряжений при заданных максимальной нагрузке  $P_*$  и податливости  $C$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{3P_*}{l} \left( \frac{2E^2C^2}{\delta_{vi}^2nw_i(1)} \right)^{1/3} < \sigma_*. \quad (6)$$

Что делать, если условие по прочности (3), (6) не выполняется? Формула (6) отражает основные особенности расчета на прочность при заданной податливости. Например, для данной максимальной нагрузки  $P_*$  длинная (!) балка оказывается менее напряженной, чем короткая. Для повышения циклической долговечности необходимо снизить максимальное напряжение для заданной циклической нагрузки  $P_*$ . Согласно (6) этого можно добиться пятью способами: 1) увеличением числа листов  $n$  (традиционный подход), 2) увеличением ширины  $w(1)$  (вот почему иногда применяют широкие поперечные рессоры), 3) ростом длины  $l$ , 4) увеличением коэффициента формы по прогибу  $\delta_v$  с помощью равнопрочного профилирования и 5) использованием композитных материалов (например, квазиоднонаправленного стеклопластика) с высокой продольной прочностью, но с более низким, чем у стали, модулем упругости  $E$  вдоль волокон.

Мы остановимся лишь на способах 4 и 5, считая габариты (длину и ширину) заданными. Необходимое число листов легко оценить из условий (2) и (3), и благодаря профилированию и низкому модулю стеклопластика ( $E = 210$  ГПа у стали и 45 ГПа у стеклопластика) оно может быть снижено более чем в 20 раз, поэтому практически всегда можно обойтись однолистовым вариантом:

$$n_i = \frac{54P_*^3C^2E^2}{\sigma_*^3l^3w_i(1)\delta_{vi}^2}. \quad (7)$$

## 2. Эффект равнопрочного профилирования

Рассмотренные выше три типа равнопрочных балок, разумеется, не исчерпывают возможного разнообразия, которое мы здесь ограничиваем лишь степенным характером изменения размеров прямоугольных сечений. Заметим также, что эллиптическая (круговая) форма сечения может быть рассмотрена по совершенно тем же соотношениям, что и прямоугольная (квадратная) форма с точностью до числовых коэффициентов.

Максимальный прогиб профилированной консольной балки находится без учета поправки к прогибу от сдвигов по теореме Кастильяно:

$$v_i(0) = \frac{Pl^3}{E} \int_1^0 \frac{\bar{x}^2 d\bar{x}}{I_i(\bar{x})} = v_0(0)\delta_{vi};$$

$$I_i(\bar{x}) = \frac{w_i(1)t_i^3(1)\bar{x}^{\alpha_i+3\beta_i}}{12};$$

$$\delta_{vi} = \frac{1}{1-\alpha_i/3-\beta_i}. \quad (8)$$

Аналогично коэффициенту формы по прогибу  $\delta_{vi}$  можно рассчитать коэффициент формы по объему:

$$\delta_{vi} = \frac{V_i}{V_0} = \frac{l}{w_i(1)t_i(1)l_0} \int_0^1 w_i(\bar{x})t_i(\bar{x})d\bar{x} = \frac{1}{1+\alpha_i+\beta_i}. \quad (9)$$

Точное выполнение условий по прочности (3) и податливости (2) позволяет определить необходимые размеры корневого сечения:

$$t_i(1) = \frac{2\sigma_* l^2}{3CEP_*} \delta_{vi} = t_0 \delta_{vi}; \quad w_i(1) = \frac{27P_*^3 E^2 C^2}{2\sigma_*^3 l^3 \delta_{vi}^2} = \frac{w_0}{\delta_{vi}^2}, \quad (10)$$

где  $t_0, w_0$  – постоянные размеры сечений прямоугольной балки, удовлетворяющей тем же условиям (3) и (2). Теперь можно из (8)–(10) рассчитать массу «идеальной» профилированной балки:

$$m(l) = \rho w_i(1)t_i(1)l\delta_{vi} = \frac{9\rho P_*^2 EC}{\sigma_*^2} \delta_{mi}, \quad (11)$$

где  $\delta_{mi}$  – коэффициент формы по массе профилированной балки по сравнению с прямоугольной,  $\delta_{mi} = \delta_{vi} / \delta_{vi}$ . Из (11) видно, что масса зависит не только от прочности (которая примерно одинакова у стали и у однонаправленного стеклопластика) и от плотности  $\rho$  (которая у стеклопластика в три раза ниже), но и от модуля упругости  $E$ , который почти в пять раз ниже у стеклопластика, чем у стали. Именно этот эффект делает стеклопластик очень эффективным конструкционным материалом для упругих элементов, и «идеальная» стеклопластиковая рессора может быть примерно в 15 раз легче, чем стальная, если не рассматривать сложные конструкции её крепления.

Интересный вывод получается из (11) с учетом условия равнопрочности (4):  $\alpha_i = 1 - 2\beta_i$ . Коэффициент формы по массе при нагружении концевой силой для всех «идеальных» равнопрочных балок с заданной прочностью и податливостью одинаков:

$$\delta_{mi} = \frac{1-\alpha_i/3-\beta_i}{1+\alpha_i+\beta_i} = \frac{1}{3}. \quad (12)$$

Реальные балки должны иметь ненулевые размеры в зоне приложения нагрузки, как показано на рис. 2, и для них коэффициент формы по массе можно получить интегрированием типа (8) и (9), но по двум участкам – с переменными и с постоянными размерами:

$$\delta_{mi}^* = \frac{\delta_{vi} + (1-\delta_{vi})\bar{a}^{1/\delta_{vi}}}{\delta_{vi} + (1-\delta_{vi})\bar{a}^{3/\delta_{vi}}}; \quad \bar{a} = \frac{a}{l}, \quad (13)$$

где  $a, \bar{a}$  – длина и нормированная длина концевого участка консольной балки, имеющего постоянные размеры сечения (см. рис. 2).

**Треугольная ступенчатая балка.** Рессору можно рассматривать как симметричную, центрально нагруженную балку, лежащую на двух опорах, поэтому для простоты анализа заменим её на консольную балку половинной длины, нагруженную концевой половинной силой. Для повышения комфортности легковых автомобилей иногда применяют несимметричное расположение стремянок, стягивающих листы рессоры, которая при этом лучше сопротивляется моменту, поворачивающему подвеску при торможении («клевокый эффект») и при старте («приседание»). Для этого случая расчетные формулы становятся чуть более громоздкими, хотя принципиально не уточняют обсуждаемые в данной статье эффекты профилирования. Просто каждое плечо балки должно изготавливаться равнопрочным, с учетом разных длин плеча и концевых нагрузок.

Балка постоянной толщины типа 1 из условия равнопрочности должна иметь линейное уменьшение ширины от корневого сечения к точке приложения концевой силы. Чтобы уменьшить габариты по ширине, треугольный профиль заменяют ступенчатым (рис. 3) и нарезают треугольную балку на листы постоянной ширины (и толщины), но различной линейно убывающей длины.

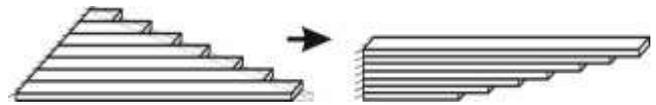


Рис. 3. Традиционная многолистовая рессора с линейным уменьшением длин листов  
Fig. 3. A traditional multi-leaf spring with a linear decrease in the length of the sheets

При сборке таких листов в стопку получается традиционная многолистовая, почти равнопрочная рессора, которая (при гипотезе «равной кривизны») и без учета межлистового трения) эквивалентна ступенчатой (почти треугольной) балке. Для получения наглядных, качественных результатов мы не учитываем кривизну рессоры и наличие сборочных напряжений, возникающих при стягивании листов с различным начальным радиусом кривизны, что делается для разгрузки наиболее ответственного корневого листа. Считаем также, что листы деформируются совместно (гипотеза «равной кривизны»), то есть прогиб стопки листов, положенных друг на друга, такой же, как прогиб листов, положенных рядом и образующих широкую ступенчатую пластину. Для инженерных оценок напряжений и прогибов используют также альтернативную гипотезу «концевых сил», считая, что нижний короткий лист взаимодействует с вышележащим только по своим концам. И та и другая гипотезы – приближенные, и они дают лишь верхнюю и нижнюю оценки, но мы не будем пытаться

уточнять известные инженерные методы решением сложной контактной задачи, ограничившись простейшей гипотезой «равной кривизны», т.е. представлением о независимом, но совместном изгибе листов. Заметим только, что в своё время на одном из технологических предприятий были сделаны попытки создать для опытного вездехода сверхвысокой проходимости прямой аналог стальных многолистовых рессор, но из стеклопластика. Эти попытки закончились неудачей при ресурсных испытаниях. Контакт по концам коротких листов с вышележащими приводил к быстрому разрушению последних из-за низкой твердости и поперечной прочности стеклопластика. Подобные негативные результаты подтвердили указанную в данной статье необходимость создания малолистовых (в идеале – однолистовых) профилированных рессор, «равнопрочность» и повышение изгибной податливости которых обеспечивается не за счет переменной длины листов, а за счет изменения размеров сечения листов. Такой путь изготовления приводит для металлов к большим энергозатратам, но композитные технологии (в принципе) позволяют непосредственно, с низкими энергозатратами и без механической обработки, получать листы с требуемым изменением размеров поперечных сечений и с сохранением их площади, т.е. с сохранением числа волокон в каждом сечении.

Рассмотрим для примера ступенчатую («треугольную») консольную балку постоянной толщины, разбитую на  $n$  одинаковых участков различной ширины. Расстояние от конца балки до границы  $j$ -го участка определяется выражением  $l_j/l = \bar{l}_j = j/n$ . Ширина  $j$ -го участка  $w_j/w = \bar{w}_j = j/n$  в границах  $l_{j-1} \leq x \leq l_j$ ;  $l_1 = l/n$ ;  $l_0 = 0$ .

Коэффициент формы  $\delta_v = V_s / V_0$ , по объему равный отношению объема профилированной балки к объему прямоугольной балки той же длины и с теми же размерами  $w, t$  корневого сечения, выражается в виде

$$\delta_v = \frac{1}{wtl} \sum_{j=1}^n \frac{tw_j l}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Коэффициент формы  $\delta_v = v_s / v_0$  по прогибу, совпадающий для случая концевой силы с коэффициентом формы по упругой энергии  $\delta_U = U_s / U_0$  и равный отношению прогиба (энергии) профилированной балки к прогибу (энергии) прямоугольной балки, вычисляется интегрированием из условия равенства работы силы и накопленной упругой энергии:

$$U_0 = \frac{6P_*^2 l^3}{Ewt^3} \int_0^1 \bar{x}^2 d\bar{x} = \frac{2P_*^2 l^3}{Ewt^3}; \quad \bar{x} = \frac{x}{l}; \quad \bar{l}_j = \frac{l_j}{l};$$

$$\delta_U = \sum_{j=1}^n \int_{\bar{l}_{j-1}}^{\bar{l}_j} \frac{n\bar{x}^2}{j} d\bar{x} = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{j^2}{n^2} - \frac{(j-1)^2}{jn^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \left( 3j - 3 + \frac{1}{j} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} \sum_{j=1}^n j =$$

$$= \frac{3n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2}. \quad (15)$$

Предельные значения для коэффициентов формы по объему (1/2) и по прогибу (энергии) 3/2 соответствуют «идеальной» треугольной балке.

Из заданных накопленной энергии  $U_*$  и максимальной нагрузки  $P_*$  можно вывести необходимые размеры корневого сечения и минимально возможную массу профилированной балки, которая в «идеальном» случае втрое меньше, чем масса прямоугольной балки, удовлетворяющей тем же условиям:

$$U_* = \frac{2P_*^2 l^3 \delta_U}{Ewt^3}; \quad \sigma_* = \frac{6P_* l}{wt^2} \Rightarrow$$

$$t = \frac{P_* \sigma_* l^2 \delta_U}{3EU_*}; \quad w = \frac{6(3EU_*)^2}{\sigma_*^3 P_* l^3 \delta_U^2} \Rightarrow \quad (16)$$

$$m = \rho w t l \delta_v = \frac{18\rho EU_*}{\sigma_*^2} \delta_m; \quad \delta_m = \frac{\delta_v}{\delta_U} = \frac{1}{3}.$$

Однако число листов не может быть слишком большим, поэтому экономия в массе для реальных рессор, как видно из таблицы, далека от трёхкратной (16).

Коэффициенты формы: по объему  $\delta_v$ , по энергии  $\delta_U$  и по массе  $\delta_m$  для обычных многолистовых рессор (для ступенчатой, «треугольной» балки)

Form factors: by volume  $\delta_v$ , by energy  $\delta_U$  and by mass  $\delta_m$  for ordinary multi-leaf springs (for stepped, “triangular” beams)

$n$	$\delta_v$	$\delta_U$	$1/\delta_m = \delta_U/\delta_v$
1	1,00	1,00	1,00
2	0,75	1,12	1,49
3	0,67	1,20	1,79
4	0,62	1,25	2,02
5	0,60	1,29	2,15
10	0,55	1,38	2,51
$\infty$	0,50	1,50	3,00

### 3. Корректность вычисления прогибов и запасенной энергии

Случай концевой силы кажется совершенно простым, но даже для него не все «равнопрочные» проекты могут быть исследованы в балочном приближении. На рис. 4 приведена графическая иллюстрация области допустимых проектов. Начало координат (0 в кружке) соответствует прямоугольной балке. Прямая 1, построенная по уравнению (4), соответствует множеству равнопрочных проектов: на осях – цифры 1 и 2 в кружках – соответствуют традиционным треугольной и параболической балкам. Прямые 2, 3 и другие с тем же наклоном определяют проекты

равной массы. Прямая 2 соответствует балкам констрэра с той же массой, что и у прямоугольной балки. Точка пересечения прямых 2 и 1 (3 в кружке) – это констрэра, нагруженная концевой силой. Чем ниже прямые типа 2, тем балка тяжелее, но ниже прямой 3 проектов нет, так как на прямой 3 масса обращается в бесконечность. Пересечение прямых 3 и 1 в т. С (-3; 2) определяет «бесконечно тяжелую», но равнопрочную балку, нагруженную концевой силой. Прямые типа 4 соответствуют проектам с одинаковым коэффициентом формы по прогибу. Чем ниже подобные прямые, тем балка жестче. Прямая 4, проходящая через точки 3 и 1 на осях, ограничивает область допустимых проектов сверху. На ней прогиб обращается в бесконечность. Таким образом, прямые 4 и 3 ограничивают сектор допустимых проектов с вершиной в точке С (-3; 2). Вне этого сектора традиционный расчет прогиба приводит к расходящимся интегралам. Например, нагружение равномерно распределенной нагрузкой (линия 5) приводит к следующему условию равнопрочности:

$$\alpha_3 + 2\beta_3 = 2, \tag{17}$$

что для констрэры (прямая 2) соответствует точке В с координатами  $\alpha_3 = -2; \beta_3 = 2$ , находящейся за пределами допустимого сектора на рис. 4. Если подставить эти значения  $\alpha_3, \beta_3$  в формулу (8), мы увидим, что интеграл для прогиба расходится. Равномерная нагрузка для констрэры эквивалентна действию собственного веса. Бесконечный прогиб в данном случае напоминает поведение листа бумаги, который мы держим за один край. Прогиб, конечно, не может быть бесконечным, но лист прогнется с проявлением всех нелинейностей: и прогибы, и углы поворота сечений, и изменение плеча силы перестают быть малыми, то есть линейное, балочное, приближение перестает быть справедливым. То же касается, например, случая линейно меняющейся нагрузки (рис. 5, в), который из условия равнопрочности  $\alpha_3 + 2\beta_3 = 3$  соответствует точке с координатами  $\alpha_3 = -\beta_3 = -3$ . Вне указанного на рис. 4 сектора расчет максимального прогиба становится некорректным.

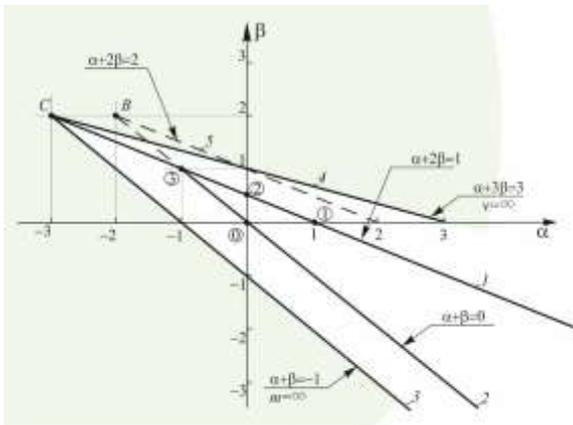


Рис. 4. Допустимый сектор проектов для корректного вычисления прогибов и массы

Fig. 4. An allowable projects sector for a correct calculation of deflections and mass

Из анализа полученных ограничений следует вывод, что для разных видов распределенной нагрузки разумно задавать не условную податливость, выраженную через максимальный прогиб, а накопленную при изгибе упругую энергию. При этом не возникает противоречия со случаем сосредоточенной силы, когда накопленная упругая энергия  $U_*$  просто пропорциональна максимальному прогибу:  $2U_* = P_*v(0)$ , и она однозначно связана с заданной податливостью  $C$ . При действии распределенной нагрузки упругая энергия равна интегралу от её произведения на переменный прогиб:

$$U_* = \frac{1}{2} \int_0^l p(x)v(x)dx = \frac{3p^2l^5}{10Ew(1)t^3(1)(1-\alpha_i/5-3\beta_i/5)} = U_0\delta_{Ui}. \tag{18}$$

Отношение  $\delta_{Ui}$  (18) накопленной энергии в равнопрочной балке к энергии в прямоугольной балке с теми же размерами корневого сечения следует использовать в (11) вместо  $\delta_{vi}$ , и тогда выражение коэффициента формы по массе  $\delta_{mi}$  при заданной упругой энергии  $U_*$  примет для равнопрочных балок (17)  $\alpha_i = 2 - 2\beta_i$  следующий вид:

$$\delta_{mi} = \frac{\delta_{vi}}{\delta_{Ui}} = \frac{5 - \alpha_i - 3\beta_i}{5(1 + \alpha_i + \beta_i)} = \frac{3 - \beta_i}{5(3 - \beta_i)} = \frac{1}{5}. \tag{19}$$

Таким образом, противоречие (расходящийся интеграл) при расчете прогиба «слишком» профилированных балок снимается при интегральной оценке запасенной упругой энергии. Ситуация напоминает известный парадокс сингулярной теории упругости в линейной механике разрушения: напряжения в вершине трещины обращаются в бесконечность, но особенность (1/2) оказывается интегрируемой, что приводит к конечному значению энергии, высвобождаемой при росте трещины. Так и в данном случае: прогиб (формально) обращается в бесконечность, но упругая энергия, равная работе распределенной нагрузки на этом прогибе, оказывается конечной. Массовая эффективность (19) одинакова для различных равнопрочных балок, как и в (12), т.е. при заданной накопленной упругой энергии масса равномерно нагруженных равнопрочных балок в пять раз меньше, чем прямоугольных с той же несущей способностью.

Линейно меняющаяся нагрузка  $p(\bar{x}) = p_*\bar{x}$ ; ( $p_*$  – максимальный уровень распределенной нагрузки в корневом сечении при  $\bar{x} = 1$ ) приводит к переменному изгибающему моменту:  $M(\bar{x}) = p_*l^2\bar{x}^3 / 6 = P_*\bar{x}^3 / 3$ . Условие прочности (3) примет вид

$$\frac{2P_l}{w_i(1)t_i^2(1)} = \sigma_*, \quad (20)$$

а условие равнопрочности (4)

$$\frac{P_* l^2 \bar{x}^3}{w_i(x)t_i^2(x)} = \frac{P_* l^2}{w_i(1)t_i^2(1)} \Rightarrow \alpha_i + 2\beta_i = 3. \quad (21)$$

Попытка вычисления максимального прогиба двойным интегрированием уравнения

$$EI(\bar{x})v'' = M(\bar{x}) \quad (22)$$

снова приводит к расходящимся интегралам, однако интеграл типа (18) от произведения переменного прогиба на переменную распределенную нагрузку даёт конечные значения накопленной энергии при изгибе равнопрочной балки. Повторяя вычисления, проведенные для равномерной нагрузки, получим коэффициент формы по массе для равнопрочной (21) балки ( $\alpha_i = 3 - 2\beta_i$ ) под действием линейно меняющейся нагрузки:

$$\delta_{mi} = \frac{\delta_{vi}}{\delta_{Ui}} = \frac{7 - \alpha_i - 3\beta_i}{7(1 + \alpha_i + \beta_i)} = \frac{4 - \beta_i}{7(4 - \beta_i)} = \frac{1}{7}. \quad (23)$$

Из (12), (19), (23) видно, что чем более неравномерно меняется изгибающий момент, тем больший эффект даёт равнопрочное профилирование.

**Энергетический анализ эффективности равнопрочных балок при разных условиях нагружения.** Приведенные выше иллюстрации могут быть легко обобщены на случай изгибающего момента, изменяющегося по произвольному степенному закону:

$$M(\bar{x}) = M(1)\bar{x}^\gamma. \quad (24)$$

Напомним, что перерезывающая сила выражается производной от момента:  $Q(x) = dM/dx$ , а распределенная нагрузка – производной от перерезывающей силы:  $p(x) = dQ/dx = d^2M/dx^2$ , поэтому рассмотренный выше случай концевой силы (рис. 5, а) соответствует  $\gamma = 1$ , равномерная распределенная нагрузка  $\gamma = 2$ , линейно меняющаяся нагрузка  $\gamma = 3$ .

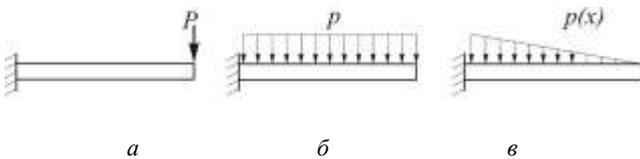


Рис. 5. Виды нагружения: а – концевая сила  $\gamma = 1$ ; б – равномерная  $\gamma = 2$ ; в – линейно меняющаяся  $\gamma = 3$  распределенная нагрузка;  $\gamma$  – показатель степени в (24)  
 Fig. 5. Types of loading: a is the end force  $\gamma = 1$ ; b is a uniform  $\gamma = 2$  and c is a linearly varying  $\gamma = 3$  distributed load;  $\gamma$  – exponent in (24)

С помощью теоремы Кастильяно можно сразу, без вычисления прогибов, оценить накопленную упругую

энергию в балке с переменным сечением под действием изменяющегося по длине момента:

$$U_* = \frac{6l}{E} \int_0^l \frac{M^2(\bar{x})}{w(\bar{x})t^3(\bar{x})} d\bar{x}. \quad (25)$$

Из заданных значений максимального момента  $M(1)$ , прочности  $\sigma_*$  и упругой энергии  $U_*$  найдём требуемые размеры корневого сечения (1) профилированной равнопрочной балки  $w(\bar{x}) = w(1)\bar{x}^\alpha$ ;  $t(\bar{x}) = t(1)\bar{x}^\beta$ :

$$\begin{aligned} 1. \sigma_* &= \frac{6M(1)}{w(1)t^2(1)}; \\ 2. U_* &= \frac{6M^2(1)l}{Ew(1)t^3(1)} \int_0^1 \bar{x}^{2\gamma-\alpha-3\beta} d\bar{x} = \\ &= \frac{6M^2(1)l}{Ew(1)t^3(1)} \times \frac{1}{1+2\gamma-\alpha-3\beta}; \\ \text{из 1.-2.} \Rightarrow t(1) &= \frac{\sigma_* M(1)l}{U_* E(1+2\gamma-\alpha-3\beta)} = t_0 \delta_U; \\ w(1) &= \frac{6U_*^2 E^2 (1+2\gamma-\alpha-3\beta)^2}{\sigma_*^3 M(1)l^2} = \\ &= w_0 \delta_U^{-2} \Rightarrow \delta_U = \frac{1+2\gamma}{1+2\gamma-\alpha-3\beta}; \delta_V = \frac{1}{1+\alpha+\beta}, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $w_0, t_0$  – постоянные размеры прямоугольной балки ( $\alpha = \beta = 0$ ), удовлетворяющей тем же условиям по прочности и запасенной энергии.

Условие равнопрочности означает

$$\frac{6M(1)\bar{x}^\gamma}{w(\bar{x})t^2(\bar{x})} = \frac{6M(1)}{w(1)t^2(1)} = \text{const} \Rightarrow \alpha + 2\beta = \gamma. \quad (27)$$

Теперь можно найти требуемую массу профилированной балки, сравнив её с прямоугольной:

$$m = \rho w(1)t(1)l\delta_V = \rho w_0 t_0 l \delta_V / \delta_U = m_0 \delta_m. \quad (28)$$

Учитывая соотношение равнопрочности  $\alpha_i = \gamma - 2\beta_i$ , находим

$$\delta_{mi} = \frac{\delta_{vi}}{\delta_{Ui}} = \frac{1+2\gamma-\alpha_i-3\beta_i}{(1+2\gamma)(1+\alpha_i+\beta_i)} = \frac{1}{1+2\gamma}. \quad (29)$$

Результат (29) объясняет постоянство коэффициента снижения массы равнопрочной балки с заданной упругой энергией для каждого вида нагружения: для концевой силы возможно снижение массы в три раза, для распределённой нагрузки – в пять, для линейно растущей от конца к корню – в семь раз.

#### 4. Равнопрочное полукольцо в ленточной пружине

Важный вывод разд. 3 состоит в том, что чем более неоднородно изменение изгибающего момента, тем бо-

лее эффективным оказывается равнопрочное профилирование. Для иллюстрации этого вывода вместо степенного изменения момента (24) рассмотрим ещё более «слабое», чем линейное, изменение момента пропорционально синусу полярного угла при растяжении–сжатии полукольца, которое можно считать элементом ленточной пружины (рис. 6):

$$M = PR \sin \varphi. \quad (30)$$

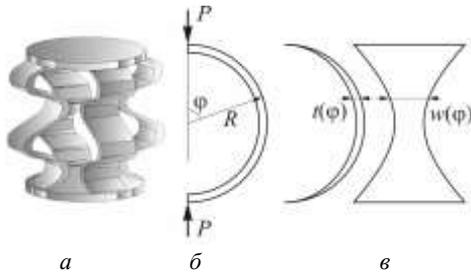


Рис. 6. Пружина из волнистых лент (а) и схема нагружения полукольца (б) с равнопрочным профилем (в)

Fig. 6. A spring from wavy tapes (a) and a loading scheme of a semi-ring (b) with an equal strength profile (c)

Из нижеприведенных условий: прочности 1, равнопрочности 2 и сохранения площади сечения полукольца 3 можно найти размеры наиболее нагруженного сечения  $w(\pi/2)$ ;  $t(\pi/2)$  и зависимости этих размеров от полярного угла:

1.  $6P_*R = \sigma_* w(\pi/2)t^2(\pi/2)$ ;
2.  $6P_*R \sin \varphi = \sigma_* w(\varphi)t^2(\varphi)$ ;
3.  $w(\varphi)t(\varphi) = w(\pi/2)t(\pi/2) \Rightarrow$  (31)  
 $t(\varphi) = t(\pi/2) \sin \varphi$ ;  $w(\varphi) = w(\pi/2) / \sin \varphi \Rightarrow$   
 $I(\varphi) = w(\pi/2)t^3(\pi/2) \sin^2 \varphi / 12 = I \sin^2 \varphi$ .

Упругая энергия, накапливаемая в полукольце, рассчитывается по формуле типа (25). Для полукольца с постоянными размерами сечения

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{M^2(\varphi)}{EI} R d\varphi = \frac{P_*^2 R^3}{2EI} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi P_*^2 R^3}{4EI}.$$

Для полукольца типа 3 – констрэра – из (31) накопленная энергия вдвое больше:

$$U_* = \frac{P_*^2 R^3}{2E} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \varphi}{I(\varphi)} d\varphi = \frac{\pi P_*^2 R^3}{2EI}, \quad (32)$$

поэтому согласно (28) равнопрочное профилирование кольца обеспечивает (в идеальном случае) снижение массы в два раза. Это снижение массы меньше, чем при линейном росте момента (в три раза), так как синус изменяется медленнее, чем линейная зависимость.

Разумеется, этот пример – чисто теоретический. Создать подобную идеальную пружину класса констрэра невозможно, но к этому нужно стремиться. Возможная технологическая схема состоит в том, что полученный

пултрузией, неотвержденный лист квазиоднонаправленного композита укладывается на волнистую форму (оправку) и далее при окончательном прессовании толщина листа по нужному закону уменьшается, а ширина при этом увеличивается с сохранением площади сечения листа, числа и объемной доли волокон.

Для подтверждения результата (32) рассмотрим другое равнопрочное полукольцо: постоянной толщины  $t$  (тип 1), но с переменной шириной  $w(\varphi)$ . Условие равнопрочности 2 из (31) означает

$$6P_*R \sin \varphi = \sigma_* w(\varphi)t^2 \Rightarrow w(\varphi) = w(\pi/2) \sin \varphi. \quad (33)$$

Отношения объемов и накопленных упругих энергий для двух полуколец с изменяющейся согласно (33) и с постоянной шириной позволяют определить коэффициент формы по массе при выполнении условий по прочности и накопленной упругой энергии:

$$\delta_v = \frac{tw(\pi/2)}{\pi R t w(\pi/2)} \int_0^\pi \sin \varphi R d\varphi = \frac{2}{\pi};$$

$$\delta_U = \frac{\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi}{\int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \delta_m = \frac{\delta_v}{\delta_U} = \frac{1}{2}.$$

Чуть сложнее для аналитики оказывается случай постоянной ширины  $w$  и переменной равнопрочной толщины  $t(\varphi)$  полукольца, но окончательный результат по снижению массы остается прежним:

$$6P_*R \sin \varphi = \sigma_* w t^2(\varphi) \Rightarrow t(\varphi) = t(\pi/2) \sqrt{\sin \varphi};$$

$$I(\varphi) = w t^3(\pi/2) \sin^{3/2} \varphi / 12;$$

$$\delta_v = \frac{R w t(\pi/2)}{\pi R w t(\pi/2)} \int_0^\pi \sqrt{\sin \varphi} d\varphi = \frac{X}{\pi}; \quad X = \int_0^\pi \sqrt{\sin \varphi} d\varphi;$$

$$\delta_U = \frac{\int_0^\pi \sqrt{\sin \varphi} d\varphi}{\int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi} = \frac{2X}{\pi} \Rightarrow \delta_m = \frac{\delta_v}{\delta_U} = \frac{1}{2}. \quad (34)$$

Эти результаты иллюстрируют чисто аналитический вывод: любое диаметрально нагруженное, «идеально» равнопрочное полукольцо при заданных максимальной нагрузке и податливости вдвое легче, чем полукольцо с постоянными размерами сечений. Сравнивая (34) с формулой (29), можно заключить, что изменение изгибающего момента пропорционально синусу полярного угла, эквивалентно по снижению массы случаю степенного изменения момента с показателем  $\gamma = 1/2$ .

Реально достичь такого снижения массы только благодаря профилированию нельзя из-за невозможности создания неограниченно широкого и бесконечно тонкого листа типа констрэра, но за счет высокой прочности, низкой плотности и низкого модуля Юнга квазиоднонаправленного композита его применение в подоб-

ных пружинах из волнистых лент способно обеспечить значительное снижение массы по сравнению со стальным аналогом.

**5. Ветвящиеся равнопрочные структуры**

Условие равнопрочности балок констэра в случае нагружения сосредоточенной силой приводит к неограниченному росту ширины при линейном уменьшении толщины. Кроме того, в балке констэра (см. рис. 2) происходит разориентация волокон, существенно снижающая прочность [11]. Но профилирование – не единственный способ создания равнопрочных упругих элементов. Наблюдая реакцию кроны лиственных деревьев на ветровую нагрузку, можно понять один из возможных методов повышения изгибной податливости композитного упругого элемента [24–27]. Для защиты от губительных ураганов дерево «выбирает» либо «стратегию прочности», увеличивая толщину ствола, либо «стратегию гибкости» путем повышения изгибной податливости за счет ветвления.

Ещё в записках Леонардо да Винчи было найдено следующее утверждение: «Сумма квадратов диаметров ветвей одинакова до и после ветвления». Подобное «правило Леонардо» [25] можно применить при проектировании ветвящейся балки констэра из волокнистого композита, преимущества которой состоят в возможности обеспечить равнопрочность при незначительном увеличении суммарной ширины (за счет собирания «ветвей» в пучок) и сохранении практически прямолинейного, однонаправленного армирования в «ветвях».

**Ветвление стержня с квадратным сечением.** В качестве наглядной модели рассмотрим консольную балку с первоначально квадратным сечением  $w(l) = t(l) = t$ , нагруженную на конце сосредоточенной силой  $P$  (рис. 7). Считаем, что на некотором расстоянии от конца  $l_{N1}$  балка разветвилась на  $N$  одинаковых стержней с сохранением суммарной площади квадратных сечений согласно «правилу Леонардо»:

$$t^2 = Nt_{N1}^2 \Rightarrow t_{N1} = t / \sqrt{N}. \tag{35}$$

Здесь  $t_{N1}$  – сторона квадратного сечения каждой из  $N$  одинаковых ветвей; второй нижний индекс означает номер узла ветвления. Случай круглых ветвей повторяет все выкладки с точностью до числовых коэффициентов.

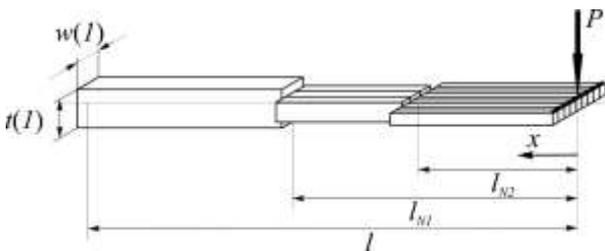


Рис. 7. Схема равнопрочного ветвления на стержни с квадратными сечениями

Fig. 7. The scheme of the equal strength branching on rods with square sections

Расстояние  $l_{N1}$ , на котором целесообразно проводить разветвление, выбирается из условий равных максимальных напряжений в корневом сечении и в  $N$  ветвях сразу после разветвления:

$$\frac{Pl}{t^3} = \frac{Pl_{N1}}{Nt_{N1}^3} \Rightarrow \text{из (35)} \quad \bar{l}_{N1} = \frac{l_{N1}}{l} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{36}$$

Покажем, как изменится накопленная упругая энергия после одного ветвления:

$$U_{N1} = \frac{P^2 l^3}{2E} \left\{ \frac{1}{I} \int_{l_{N1}}^l \bar{x}^2 d\bar{x} + \frac{1}{I_{N1}} \int_0^{l_{N1}} \bar{x}^2 d\bar{x} \right\} = U_0 [1 + (N-1)\bar{l}_{N1}^3]; \tag{37}$$

$$U_0 = \frac{P^2 l^3}{6EI}; \quad I = \frac{t^4}{12}; \quad I_{N1} = N \frac{t_{N1}^4}{12} = \frac{I}{N}.$$

В результате одного ветвления система становится более податливой, но согласно (37) ветвление не даёт преимущества по накопленной энергии ни для тривиального случая ( $N = 1$ ), ни для большого числа ветвей ( $N \rightarrow \infty$ ):

$$\delta_U = U_{N1} / U_0 = 1 + (N-1)N^{-3/2} \xrightarrow{N \rightarrow 1; N \rightarrow \infty} 1. \tag{38}$$

Значит, существует число ветвей, соответствующее максимальному повышению накопленной энергии. Из (38) следует, что это число в точности равно трём:

$$d\delta_U / dN = 0 \Rightarrow 2N^{3/2} - 3N^{1/2}(N-1) = 0 \Rightarrow N_{opt} = 3. \tag{39}$$

При  $N = 3$ ;  $\bar{l}_{31} = 1/\sqrt{3} \Rightarrow U_{31} / U_0 = 1 + 2/3^{3/2} \approx 1,38$ .

Это наибольший возможный коэффициент увеличения накопленной упругой энергии для одного ветвления с сохранением равнонапряженности и равной площади сечений.

Можно продолжить процесс, рассмотрев два узла ветвления на 3, а затем на 9 ветвей с сохранением условия равнонапряженности (36) и суммарной площади сечений (35):

$$U_{32} = \frac{P^2 l^3}{2E} \left\{ \frac{1}{I} \int_{l_{31}}^l \bar{x}^2 d\bar{x} + \frac{1}{I_{31}} \int_{l_{32}}^{l_{31}} \dots + \frac{1}{I_{32}} \int_0^{l_{32}} \dots \right\} = U_0 [1 + 2\bar{l}_{31}^3 + 6\bar{l}_{32}^3] = 1,61U_0;$$

$$I = 3I_{31} = 9I_{32}; \quad \bar{l}_{32} = \bar{l}_{31}^2 = 1/3.$$

Накопленная энергия с ростом числа ветвлений растет, и можно записать общую формулу для  $n$  узлов ветвления на  $N$  веток в каждом узле при сохранении условия равнонапряженности (36) для каждого последующего ветвления:

$$U_{Nn} = U_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^n \left\{ (1 - N^{-1}) N^{-k/2} \right\} \right]. \quad (40)$$

Этот степенной ряд сходится, и для  $N=3$  выражение (40) представляет собой сумму геометрической прогрессии с начальным членом ( $k = 1$ ):  $a_1 = 2/3\sqrt{3}$  и знаменателем  $q = 1/\sqrt{3}$ . Сумма членов этой прогрессии  $a_1(1 - q^n)/(1 - q)$ . Для одного и двух ветвлений она совпадает с полученными выше значениями:  $U_{31}/U_0 = 1 + 2/3\sqrt{3} \approx 1,38$ ,  $U_{32}/U_0 = 1 + a_1[1 - (1/\sqrt{3})^2]/(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 1,61$ . При неограниченном росте числа «равнопрочных» ветвлений на три ветви коэффициент  $\delta_U$  растёт, но ограниченно:  $\delta_U = U_{3n}/U_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + a_1/(1 - 1/\sqrt{3}) = 2/[3(\sqrt{3} - 1)] \approx 1,91$ .

Это максимальный коэффициент роста накопленной энергии при ветвлении на три ветви, когда размеры сечений сохраняются постоянными между узлами ветвления. Ситуация аналогична ступенчатой треугольной (многолистовой) рессоре (разд. 2) или балке констэра (см. рис. 2), размеры которой меняются не плавно, а ступенчато. Чтобы повысить накопленную энергию, надо форму сечения веток делать равнопрочной – прямоугольной (или эллиптической) с переменными шириной и толщиной, но с сохранением площади сечения. Другой путь – формально считать, что возможно непрерывное (фрактальное) ветвление на нецелое число ветвей  $N$  при сохранении суммарной площади (35). Из условия равнонапряженности (36)  $N(\bar{x}) = \bar{x}^{-2} \Rightarrow I(\bar{x}) = IN^{-1}(\bar{x})$  накопленная энергия «идеальной», фрактально ветвящейся балки

$$U_{N(\bar{x})} = \frac{P^2 l^3}{2EI} \int_0^1 \bar{x}^2 N(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{P^2 l^3}{2EI} = 3U_0. \quad (41)$$

Таким образом, «идеально» ветвящийся стержень может, как и в других приведенных примерах (12), (16), при заданной массе накапливать втрое большую упругую энергию, чем однородный стержень.

**Ветвление с равнопрочным изменением размеров сечений.** Поскольку фрактальное (непрерывное) ветвление (41) нельзя реализовать, можно подойти к этому же пределу, создавая равнопрочное изменение размеров прямоугольных (эллиптических) сечений между узлами ветвления. Результат получится таким же, как в балке констэра, но ветвление позволит сохранить допустимую суммарную ширину пучка ветвей и получить в каждой ветви почти однонаправленное, продольное армирование.

Чрезвычайное упрощение анализа связано с тем, что для сохранения суммарной площади  $S$  прямоугольного (очевидно) или эллиптического (неочевидно!) сечения при ветвлении на 2, 3,  $N$  ветвей необходимо всего лишь сохранить в месте ветвления толщину  $t$

и суммарную ширину  $w$  вновь образованных ветвей (рис. 8).

При этом в месте ветвления (верхний индекс + относится к координате после ветвления, минус – до ветвления) не меняется ни суммарная площадь  $S$  ветвей, ни их суммарный момент сопротивления  $W$ , ни суммарный момент инерции  $I$ , то есть при таком ветвлении констэры в произвольном сечении на любое число ветвей условие равнопрочности выполняется по всей длине и выражение (41) для энергии сохраняется:

$$\begin{aligned} t(\bar{x}_N^-) &= t_N(\bar{x}_N^+); \quad w(\bar{x}_N^-) = Nw_N(\bar{x}_N^+) \Rightarrow \\ S(\bar{x}_N^-) &= w(\bar{x}_N^-)t(\bar{x}_N^-) = Nw_N(\bar{x}_N^+)t(\bar{x}_N^-) = \\ &= S_N(\bar{x}_N^+); \\ W(\bar{x}_N^-) &= w(\bar{x}_N^-)t^2(\bar{x}_N^-)/6 = Nw_N(\bar{x}_N^+)t^2(\bar{x}_N^-)/6 = \\ &= W_N(\bar{x}_N^+); \\ I(\bar{x}_N^-) &= w(\bar{x}_N^-)t^3(\bar{x}_N^-)/12 = Nw_N(\bar{x}_N^+)t^3(\bar{x}_N^-)/12 = \\ &= I(\bar{x}_N^+). \end{aligned} \quad (42)$$

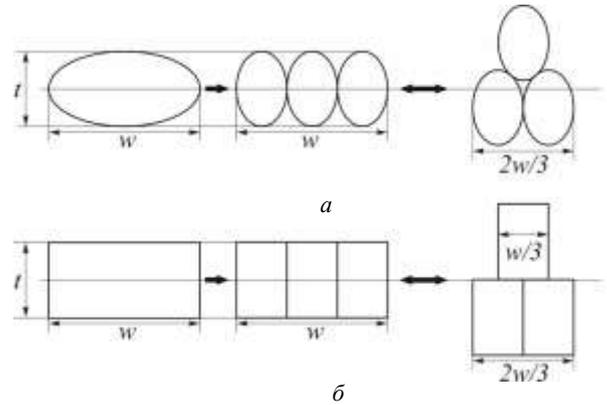


Рис. 8. Иллюстрация ветвления балки констэра для эллиптических (а) и прямоугольных (б) сечений с сохранением суммарных прочности и моментов сопротивления и инерции сечений

Fig. 8. A drawing of branching of the constarea beam for elliptic a) and rectangular b) sections with retention of total strength and moments of resistance and inertia of sections

Прямоугольную констэру можно нарезать на «ветви» по ширине с сохранением линейно убывающей толщины ветвей, суммарная ширина которых будет равна текущей ширине неразрезанной констэры. Ветвление удобно проводить в том месте, где ширина кратна толщине, например, ширина больше толщины в три раза. Прямоугольное сечение при этом разбивается на три первоначально квадратных сечения (рис. 8, б), а затем снова происходит профилирование каждой ветви по типу констэры. Этот способ ветвления напоминает замену широкой треугольной рессоры набором узких листов с линейно убывающей длиной.

**Расслоенный упругий элемент** (рис. 9). Влияние разделения на слои можно проанализировать по той же схеме, что и ветвление. При этом суммарные размеры

прямоугольного сечения – ширина  $w$  и высота  $t$  – остаются постоянными, изменяется лишь толщина образованных слоев. По аналогии с выражением (37) рассчитаем изменение энергии при одном расслоении на  $N$  слоев:

$$U_{N1} = \frac{P^2 l^3}{2E} \left\{ \frac{1}{I} \int_{l_{N1}}^1 \bar{x}^2 d\bar{x} + \frac{1}{I_{N1}} \int_0^{l_{N1}} \bar{x}^2 d\bar{x} \right\} = U_0 \left[ 1 + \frac{(N^2 - 1)}{N^3} \right];$$

$$U_0 = \frac{P^2 l^3}{6EI}; \quad I = \frac{wt^3}{12}; \quad I_{N1} = N \frac{w(t/N)^3}{12} = \frac{I}{N^2}; \quad (43)$$

$$\delta_U = \frac{U_{N1}}{U_0}.$$

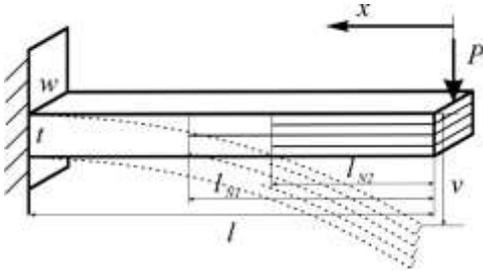


Рис. 9. Модель расслоенной равнопрочной балки:  $l_{N1}, l_{N2}$  – координаты первого и второго расслоения на  $N$  слоёв  
 Fig. 9. The model of a delaminated full-strength beam:  
 $l_{N1}, l_{N2}$  – are the coordinates of the first and second delamination on  $N$  layers

Рациональная координата расслоения определяется из условия равнопрочности типа (36):

$$\frac{Pl}{t^2} = \frac{Pl_{N1}}{Nt_{N1}^2} \Rightarrow l_{N1} = \frac{l}{N}. \quad (44)$$

Оптимальное число слоев для максимальной накопленной энергии найдется из (43):

$$\frac{d\delta_U}{dN} = 0 \Rightarrow \left[ 1 + \frac{N^2 - 1}{N^3} \right]' = 0 \Rightarrow N_{opt} = \sqrt{3} \Rightarrow \delta_{U_{max}} \approx 1,38.$$

Этот результат практически совпадает с полученным из выражения (39) для одного ветвления на три ветки, но такого же «красивого» вывода о рациональном расслоении на целое число слоев не получается. Для повышения податливости можно использовать последовательное

**Библиографический список**

1. Черепанов Г.П. Равнопрочный тяжелый брус: решение проблемы Галилея // Физическая мезомеханика. – 2016. – Т. 19, № 1. – С. 84–88.  
 2. Гордон Дж. Почему мы не проваливаемся сквозь пол / пер. с англ. С.Т. Милейко; под ред. Ю.Н. Работнова. – М.: Мир, 1971. – 272 с.

расслоение на два слоя ( $\sqrt{3} \approx 2$ ) на расстояниях, определяемых условием равнопрочности (44). Изготовить балку с заданными размерами и длинами расслоений можно введением между слоями полосок тефлоновой пленки. Вопрос о предельном состоянии по условию роста расслоений требует специального исследования [21] и в данном контексте не обсуждается.

**Выводы**

1. Равнопрочная балка при заданной накопленной упругой энергии дает по сравнению с однородной балкой **трехкратное** снижение массы при нагружении концевой силой и **пятикратное** – при равномерно распределенной нагрузке.

2. Установлены границы применимости линейных моделей при проектировании профилированных балок. Традиционный метод расчета максимального прогиба приводит к расходящимся интегралам для равнопрочных балок с достаточно быстрым изменением размеров. При этом расчет накопленной упругой энергии остается корректным. Это ещё одно, малоизученное ограничение в дополнение к традиционным требованиям малых прогибов и углов поворота сечений. В общем случае нагружения профилированных балок необходим анализ в дважды нелинейной постановке с учетом точного выражения для кривизны и уменьшения момента по мере увеличения прогиба («эластика Эйлера»).

3. Разветвленные структуры могут быть столь же эффективны, как профилированные. Их преимущества заключаются в отсутствии перерезанных волокон, в сохранении однонаправленности армирования и в возможности уменьшения габаритов путем собирания «ветвей» в пучок, по аналогии со сборкой многолистовой рессоры.

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 18-08-00372, 18-58-53029 и Национального научного фонда Китая (NSFC 51575430, 51811530107).

**Acknowledgments**

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grants No. 18-08-00372, 18-58-53029 and the National Science Foundation of China (NSFC 51575430, 51811530107).

5. Осипенко М.А., Няшин Ю.И. Об оптимизации упругого элемента протеза стопы // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 2. – С. 16–23.
6. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Сер. Библиотека расчетчика. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
7. Осипенко М.А. Контактная задача об изгибе двухлистной рессоры с листами, искривленными по дуге окружности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 142–152.
8. Русланцев А.Н., Думанский А.М., Алимов М.А. Модель напряженно-деформированного состояния криволинейной слоистой композитной балки // Труды МАИ. – 2017. – № 96. – С. 1–15.
9. Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Гитман М.Б. Равнонапряженные листовые рессоры // Вестн. Магнитогор. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова. – 2014. – № 4 (48). – С. 22–26.
10. Красон В., Высоцкий Д. Исследование трения в двойной листовой рессоре // Трение и износ. – 2017. – Т. 38, № 3. – С. 233–241.
11. Полилов А.Н., Татусь Н.А., Плитов И.С. Оценка влияния разориентации волокон на жесткость и прочность профилированных композитных элементов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2013. – № 5. – С. 58–67.
12. Композиционные материалы: справочник / В.В. Васильев [и др.]. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
13. Раскутин А.Е., Соколов И.И. Углепластики и стеклопластики нового поколения // Труды ВИАМ. – 2013. – № 4. – С. 9–15.
14. Задачи моделирования и оптимизации панелей переменной жесткости и конструкций из слоистых композитов / А.И. Боровков, Д.В. Мамчиц, А.С. Немов, А.Д. Новокшенов // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. – 2018. – № 1. – С. 113–122.
15. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics. Third Edition. CRC Press Content, 2011. – 683 p.
16. Ghodake A.P., Patil K.N. Analysis of Steel and Composite. Leaf Spring for Vehicle // IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering. – 2013. – No. 5(4). – P. 68–76.
17. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Биомеханика прочности волокнистых композитов. – М.: Физматлит, 2018. – 328 с.
18. Cho H.R., Rowlands R.E. Optimizing fiber direction in perforated orthotropic media to reduce stress concentration // Journal of Composite Materials. – 2009. – Vol. 43. – No 10. – P. 1177–1198.
19. Полимерные композиционные материалы. Прочность и технология / С.Л. Баженов, А.А. Берлин, А.А. Кульков, В.Г. Ошмян. – Долгопрудный: Интеллект, 2010. – 352 с.
20. Производство изделий из полимерных композиционных материалов методом пултрузии для гражданских отраслей промышленности / К.А. Павловский, Е.А. Серкова, Д.А. Мельников, А.Г. Гуляева // Вопросы материаловедения. – 2017. – № 4 (92). – С. 81–89.
21. Полилов А.Н. Экспериментальная механика композитов. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 376 с.
22. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
23. Луат Д.Ч., Лурье С.А., Дудченко А.А. Моделирование деградации свойств композита при растрескивании и расслоении при статическом и циклическом нагружении // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т. 14, № 4. – С. 623–637.
24. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Проектирование разветвляющихся или профилированных композитных элементов по аналогии со структурой кроны дерева // Проблемы машиностроения и надежности машин – 2017. – № 4. – С. 76–84.
25. Eloy C. Leonardo's rule, self-similarity and wind-induced stresses in trees // arXiv: 1105.2591v2 [physics. Bio-ph]. – 15 Nov. 2011.
26. Minamino R., Tateno M. Tree branching: Leonardo da Vinci's rule versus biomechanical models // Open Access available online. Plos one/ www. Plosone. Org, April 2014. – Vol. 9. – Iss. 4. – e 9535.
27. Wind loads and competition for light sculpt trees into self-similar structures / C. Eloy, M. Fournier, A. Lacoite, B. Moulia // Nat. Commun. – 2017. – Vol. 8. – P. 1014.
28. Using tailored fibre placement technology for stress adapted design of composite structures / A. Spickenheuer, M. Schulz, K. Gliesche, G. Heinrich // Plast. Rubber Compos. – Macromol. Eng. – 2008. – Vol. 37. – No. 5. – P. 227–232.
29. Wegst U.G.K., Ashby M.F. The structural efficiency of orthotropic stalks, stems and tubes // J. Mater. Sci. – 2007. – Vol. 42. – P. 9005–9014.
30. Schulgasser K., Witzum A. On the strength of herbaceous vascular plant stems // Annals of Botany. – 1997. – Vol. 80. – P. 35–44.
31. Drag reduction, from bending to pruning / D. Lopez, C. Eloy, S. Michelin, E. de Langre // Europhys. Lett. – 2014 – Vol. 108 – 48002.
32. Bioinspired structural materials / U.G.K. Wegst, Bai Hao, E. Saiz, A.P. Tomsia, R.O. Ritchie // Nature Materials. – 2015. – Vol. 14. – P. 23–36.
33. Synergy of multi-scale toughening and protective mechanisms at hierarchical branch-stem interfaces / U. Muller, W. Gindl-Altmutter, J. Konnerth, G.A. Maier, J. Keckes // Scientific Reports. – 2015. – Vol. 5. – Article number: 14522.
34. Rao KMM, Rao KM. Extraction and tensile properties of natural fibers: vakka, date and bamboo // Compos Struct. – 2007 – Vol. 77(3) – 288e95.
35. Ortega-Jimenez V.M., Dudley R. Spiderweb deformation induced by electrostatically charged insects // Scientific Reports. – 2013. – 3:2108. DOI: 10.1038/srep02108
36. Malakhov A.V., Polilov A.N. Design of composite structures reinforced curvilinear fibres using FEM // Composites: Part A. – 2016. – No. 87. – P. 23–28.

## References

1. Cherepanov G.P. Equistrong heavy beam: solving the problem of Galileo Galilei. *Physical Mesomechanics*, 2016, vol. 19, no. 1. pp. 84–88.
2. J. E. Gordon. The New Science of Strong Materials Or Why You Don't Fall through the Floor. *Princeton University Press*, 2018, 328 p. ISBN 9780691180984.
3. Malinin N.N. Nadyozhnost', prochnost', krasota [Reliability, strength, beauty]. *Moscow, Academia*, 2016, 288 p.
4. Parhilovskij I.G. Avtomobil'nye listovye resory [Automobile leaf springs]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1978, 232 p.
5. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I. Ob optimizatsii uprugogo elementa proteza stopy [On Optimizing of the Elastic Element for

the Foot Prosthesis]. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki – Russian Journal of Biomechanics*, 2011, vol. 15, no. 2, pp. 16-23.

6. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov V.G. Raschet mnog-oslojnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov. Seriya "Biblioteka raschetchika" [Calculation of multi-layered composite plates and shells. Series "Calculator Library"]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1984, 264 p.

7. Osipenko M.A. A contact problem for bending of two-leaf spring with the leaves curved along the circular arc. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 1, pp. 142-152.

8. Ruslancev A.N., Dumanskij A.M., Alimov M.A. Model' napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya krivolinejnoj sloistoj kompozitnoj balki [The stressed-deformed state model of curvilinear composite beam]. *Trudy MAI (Proceedings of the Moscow Aviation Institute)*, 2017, no. 96, pp. 1-15.

9. Nyashin Yu.I., Osipenko M.A., Gitman M.B. Ravnopriazhennyye listovyye resory [Equal tensile leaf springs]. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. G.I. Nosova – Bulletin of Magnitogorsk State Technical University*, 2014, no 4 (48), pp. 22-26.

10. Krasov V., Vysotskii D. Issledovanie treniya v dvoinoi listovoi resore [Research of Friction in Double Leaf Spring]. *Trenie i iznos – Journal of Friction and Wear*, 2017, vol. 38, no 3, pp. 233-241.

11. Polilov A.N., Tatus N.A., Plitov I.S. Estimating the effect of misorientation of fibers on stiffness and strength of profiled composite elements. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 5, pp. 390-397.

12. Vasil'ev V.V. et al. Kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Composite Materials: Handbook]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1990, 512 p.

13. Raskutin A.E., Sokolov I.I. Ugleplastiki i stekloplastiki novogo pokoleniya [New generation of carbon and fiberglass]. *Trudy VIAM (Proceedings of VIAM)*, 2013, no. 4, pp. 9-15.

14. Borovkov A.I., Mamchits D.V., Nemov A.S. and Novokshenov A.D. Problems of Modeling and Optimization of Variable-Hardness Panels and Structures Made of Layered Composites. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, no. 1, pp. 93-100.

15. Gibson R. F. Principles of composite material mechanics. Third Edition. CRC Press Content, 2011, 683 p.

16. Ghodake A. P., Patil K. N. Analysis of Steel and Composite. Leaf Spring for Vehicle. *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering*, 2013, no. 5(4), pp. 68-76.

17. Polilov A.N., Tatus N.A. Biomekhanika prochnosti voloknistykh kompozitov [Strength biomechanics of fibrous composites]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2018, 328 p., ISBN 978-5-9221-1760-9.

18. Cho H.R., Rowlands R.E. Optimizing fiber direction in perforated orthotropic media to reduce stress concentration. *Journal of Composite Materials*, 2009, vol. 43, no. 10, pp. 1177-1198.

19. Bazhenov S.L., Berlin A.A., Kul'kov A.A., Oshmyan V.G. Polimernyye kompozitsionnye materialy. Prochnost' i tekhnologiya [Polymer composite materials. Strength and technology]. *Dolgoprudnyj, Intellect*, 2010, 352 p.

20. Pavlovskii K.A., Serkova E.A., Mel'nikov D.A., Guniaeva A.G. Proizvodstvo izdelii iz polimernykh kompozitsionnykh materialov metodom pultruzii dlia grazhdanskikh otraslei promyshlennosti [Manufacture of products from polymeric com-

posite materials by pultrusion for civil industries]. *Voprosy materialovedeniia – Problems of Materials Science*, 2017, no 4 (92), pp. 81-89.

21. Polilov A.N. Eksperimental'naya mekhanika kompozitov (2-e izdanie) [Experimental Mechanics of Composites (2nd edition)], *Moscow, Bauman MSTU*, 2016, 376 p.

22. Rabotnov YU.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela 2-e izd [Solid mechanics 2nd edition]. *Moscow, Nauka*, 1988, 712 p.

23. Luat D.Ch., Lur'e S.A., Dudchenko A.A. Modelirovanie degradatsii svoystv kompozita pri rastreskivanii i rassloenii pri staticheskom i tsiklicheskom nagruzhении [Modeling of the degradation of composite properties during cracking and delamination under static and cyclic loading]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii – Mechanics of composite materials and structures*, 2008, vol. 14, no 4, pp. 623-637.

24. Polilov A.N., Tatus N.A. Designing branching or shaped composite elements by analogy with the structure of treetops. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46, no. 4, pp. 385-393.

25. Eloy C. Leonardo's rule, self-similarity and wind-induced stresses in trees. arXiv: 1105.2591v2 [physics. Bio-ph]. 15 Nov. 2011.

26. Minamino R., Tateno M. Tree branching: Leonardo da Vinci's rule versus biomechanical models. Open Access available online. *Plos one/www.Plosone. Org*, April 2014, vol. 9, issue 4, e 9535.

27. Eloy C., Fournier M., Lacoite A., Moulia B. Wind loads and competition for light sculpt trees into self-similar structures. *Nat. Commun.*, 8, 1014 (2017).

28. Spickenheuer A., Schulz M., Gliesche K., Heinrich G. Using tailored fibre placement technology for stress adapted design of composite structures. *Plast. Rubber Compos. Macromol. Eng.*, 2008, vol. 37, no. 5, pp. 227-232.

29. Wegst U.G.K., Ashby M.F. The structural efficiency of orthotropic stalks, stems and tubes. *J. Mater. Sci.*, 2007, vol. 42, pp. 9005-9014.

30. Schulgasser K., Witztum A. On the strength of herbaceous vascular plant stems. *Annals of Botany*, 1997, vol. 80, pp. 35-44.

31. Lopez D., Eloy C., Michelin S., de Langre, E. Drag reduction, from bending to pruning. *Europhys. Lett.*, 2014, 108, 48002.

32. Ulrike G. K. Wegst, Hao Bai, Eduardo Saiz, Antoni P. Tomsia & Robert O. Ritchie. Bioinspired structural materials. *Nature Materials*, 2015, vol. 14, pp. 23-36.

33. Ulrich Muller, Wolfgang Gindl-Altmutter, Johannes Konnerth, Gunther A. Maier & Jozef Keckes. Synergy of multi-scale toughening and protective mechanisms at hierarchical branch-stem interfaces. *Scientific Reports*, 2015, vol. 5, Article number: 14522.

34. Rao KMM, Rao KM. Extraction and tensile properties of natural fibers: vakka, date and bamboo. *Compos Struct.*, 2007, vol. 77(3), 288e95.

35. Victor Manuel Ortega-Jimenez & Robert Dudley. Spiderweb deformation induced by electrostatically charged insects. *Scientific reports*, 2013, 3:2108, doi: 10.1038/srep02108.

36. Malakhov A.V., Polilov A.N. Design of composite structures reinforced curvilinear fibres using FEM. *Composites: Part A*, 2016, no. 87, pp. 23-28.