

Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Устранение колебаний твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, при управляемом горизонтальном перемещении подвеса // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 234-245. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.21

Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. Elimination of a rigid body oscillations suspended on a variable-length cable with a controlled horizontal suspension movement. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 4, pp. 234-245. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.21



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.21

УДК 531.5

УСТРАНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА ТРОСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ, ПРИ УПРАВЛЯЕМОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ПОДВЕСА

С.В. Русских, Ф.Н. Шклярчук

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия
Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 27 июля 2018 г.
Принята: 11 сентября 2018 г.
Опубликована: 28 декабря 2018 г.

Ключевые слова:

управление колебаниями, управляемые системы, маятники, манипуляционные роботы, подъемно-транспортные механизмы, мостовые краны, системы с переменными параметрами, колебания малые, терминальное управление, метод Бубнова-Галеркина.

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена задача пассивного силового (динамического) и кинематического управления передвижением тяжелого груза (недеформируемого твердого тела), подвешенного на нерастяжимом безынерционном тросе переменной длины с управляемым горизонтальным перемещением точки подвеса. Получены дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами для малых поступательно-вращательных колебаний тела. Поставлена следующая задача: переместить тело из начального положения покоя в заданное конечное равновесное положение покоя за определенное время с устранением колебаний в момент остановки. При этом закон изменения длины троса считается заданным, а закон перемещения точки его подвеса – неизвестным. Установлены интегральные условия, которым должны удовлетворять искомые управляющие воздействия (сила или ускорение точки подвеса).

Приближенное решение задачи кинематического управления, описываемой двумя дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами для углов поворота троса и тела, ищется в рядах с неизвестными коэффициентами по методу Бубнова-Галеркина с использованием заданных аппроксимирующих функций времени, удовлетворяющих некоторым начальным и конечным условиям. Ускорение точки подвеса троса ищется в виде ряда по синусам с неизвестными коэффициентами. Получается связанная система линейных алгебраических уравнений для всех неизвестных коэффициентов, в которую входят уравнения метода Бубнова-Галеркина, уравнения для невыполненных при выборе заданных функций начальных и конечных условий и одно уравнение, представляющее интегральное условие в виде зависимости ускорения точки подвеса троса от его заданного конечного перемещения. Предложенный подход для решения задачи финитного управления колебаниями системы с переменными параметрами является новым.

На примерах системы с тросом постоянной и переменной длины выполнены расчеты с анализом сходимости и точности решений при двух различных наборах заданных функций и при различном их числе путем сравнения с численными решениями дифференциальных уравнений прямой задачи по методу Адамса при найденных законах управления.

© ПНИПУ

© Русских Сергей Владимирович – к. ф.-м. н., доц., e-mail: sergey.russkikh@rambler.ru, [ID 0000-0002-2470-2766](https://orcid.org/0000-0002-2470-2766)
Шклярчук Федор Николаевич – д.т.н., проф., г.н.с., e-mail: shklyarchuk@list.ru, [ID 0000-0002-0234-6350](https://orcid.org/0000-0002-0234-6350)

Sergey V. Russkikh – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: sergey.russkikh@rambler.ru, [ID 0000-0002-2470-2766](https://orcid.org/0000-0002-2470-2766)
Fedor N. Shklyarchuk – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher, e-mail: shklyarchuk@list.ru, [ID 0000-0002-0234-6350](https://orcid.org/0000-0002-0234-6350)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ELIMINATION OF A RIGID BODY OSCILLATIONS SUSPENDED ON A VARIABLE-LENGTH CABLE WITH A CONTROLLED HORIZONTAL SUSPENSION MOVEMENT

S.V. Russkikh, F.N. Shklyarchuk

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation
Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 July 2018
Accepted: 11 September 2018
Published: 28 December 2018

Keywords:

control of oscillations, controlled systems, pendulums, manipulation robots, hoisting and transport mechanisms, bridge cranes, systems with variable parameters, small oscillations, terminal control, Bubnov-Galerkin method.

ABSTRACT

The paper considers a passive force (dynamic) and kinematic control problem of a heavy cargo movement (an undeformed solid) suspended on an inextensible inertia-free variable length cable with a controlled horizontal displacement of the suspension point. Differential equations with variable coefficients for small translational-rotational vibrations of the body are obtained. The following problem is stated: to move the body from the initial rest position to a given final equilibrium rest position for a preset time with oscillations elimination at the stop. In this case, the law of changing the cable length is considered to be prescribed, and the law of displacement of its suspension point is unknown. The integral conditions are established for required unknown control actions (force or acceleration of the suspension point), which should be satisfied.

An approximate solution of the kinematic control problem described by two differential equations with variable coefficients for the angles of rotation of the cable and body is sought in series with unknown coefficients by the Bubnov-Galerkin method with the use of the given approximating functions of time satisfying certain initial and final conditions. Acceleration of the suspension point of the cable is sought in the form of a series of sines with unknown coefficients. A coupled system of linear algebraic equations for all unknown coefficients is obtained, which includes equations of the Bubnov-Galerkin method, equations for the initial and final conditions that are not satisfied in the choice of given functions, and one equation representing the integral condition in the form of the dependence of the acceleration of the cable suspension point on its specified finite displacement. The proposed approach for solving the problem of the oscillations finite control for a system with variable parameters is new.

By using the examples of a system with a cable of constant and variable length, we performed the calculations with an analysis of the convergence and accuracy of solutions for two different sets of given functions and for different numbers of them by comparing them with numerical solutions of differential equations of the direct problem by the Adams method with the control laws found.

© PNRPU

Введение

Задачи управления составными трансформируемыми системами и системами, совершающими конечные передвижения (перемещения и повороты), с учетом упругости отдельных частей или элементов являются актуальными для быстроходных манипуляционных роботов [1], виброударных механизмов [2], ракет с разделяющимися ступенями [3] и космических конструкций [4–11]. Общие вопросы теории управления большими системами, включая задачи управляемого передвижения системы из одного состояния в другое, рассмотрены в работах [12–18], а задачи и методы управления колебаниями – в работах [19, 20]. В большинстве работ упругие колебания, которые сопровождают конечные передвижения систем или их частей, считаются малыми и описываются нормальными координатами, которые представляют собой относительные движения по собственным формам колебаний. В этом случае линейные задачи терминального управления с учетом начальных и конечных условий сводятся к системам интегральных уравнений для нормальных координат (в теории управ-

ления они называются уравнениями моментов). Поскольку решение задачи определения закона управления не является единственным, она часто рассматривается как задача оптимального управления с минимизацией некоторого дополнительного функционала, зависящего от неизвестных параметров движения и управления.

Для решения интегральных уравнений для собственных форм колебаний, подлежащих гашению, управляющие функции обычно ищутся в виде кусочно-линейных функций с неизвестными параметрами [1, 19, 20] или в виде рядов заданных функций с неизвестными коэффициентами. В работах [21, 22] и нескольких других работах этих авторов для управления поперечными колебаниями балки с грузами на конце в качестве таких функций использовались синусы и косинусы с частотами собственных колебаний системы. Поскольку периоды собственных колебаний значительно меньше заданного времени управления, то при таком высокочастотном управлении весьма малые отклонения по времени управления и по собственным частотам математической модели и реальной системы приводят к большим откло-

нениям конечных перемещений и скоростей от заданных нулевых значений. Кроме того, искомые управляющие воздействия (например, силы и моменты) должны быть практически реализуемыми и как реакции взаимодействия не должны возбуждать ответные связанные колебания в системе управления и в несущей конструкции. Это особенно важно для упругих управляемых космических систем, обладающих плотным спектром низких собственных частот и требующих весьма высокой точности выполнения операций.

В работах [23–26] для гашения колебаний системы по нескольким низшим собственным формам управляющие воздействия ищутся на интервале управления в виде ряда Фурье. При этом достаточно высокая точность достигается при учете только двух или трех первых членов ряда, что позволяет получить достаточно «гладкие» управляющие функции.

В работах [27–30] предложен альтернативный подход для определения силовых или кинематических управляющих воздействий для конечных передвижений упругой системы за заданное время из одного состояния в другое с гашением упругих колебаний по нескольким низшим собственным формам в конечный момент времени. Для этого используются «простые» управляющие финитные функции (например, в виде одной волны синуса или полуволны косинуса) при условии, что частоты подлежащих гашению нескольких низших собственных форм колебаний системы «настраиваются» в определенных соотношениях со временем управления.

Решения конкретных задач стабилизации или терминального управления для простых систем (типа одинарного или двойного маятника с подвижной точкой подвеса) приведены в работах [31–40].

При конечных перемещениях и поворотах упругих управляемых систем и при изменении их формы возникает необходимость учитывать геометрические нелинейности деформирования элементов системы, а также переменность ее параметров. Задачи терминального управления такими системами являются весьма трудными и решаются обычно приближенно на основе упрощенных редуцированных моделей (например, без учета упругих деформаций или считая их квазистатическими) с возможными уточнениями методом последовательных приближений [1, 17, 20]. Поэтому разработка общих методов решения задач динамики нелинейных управляемых систем с переменными параметрами является актуальной.

Здесь для решения дифференциальных уравнений нестационарных колебаний с переменными коэффициентами на конечном промежутке времени предложен новый подход, основанный на применении метода Бубнова-Галеркина с использованием заданных базисных функций времени.

В данной работе в качестве примера общего подхода рассматривается плоская линейная задача управляемого перемещения за определенное время тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе переменной дли-

ны с подвижной точкой подвеса, из одного положения покоя в другое заданное положение покоя. Закон изменения длины троса задан; требуется определить закон управляемого горизонтального перемещения точки подвеса троса, при котором в момент остановки подвешенного тела прекращаются его колебания. Такая задача одновременного вертикального и горизонтального перемещения тяжелых грузов с устранением их колебаний (например, на мостовом кране) имеет большое практическое значение для уменьшения времени операции, особенно если число таких однотипных операций велико.

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую задачу передвижения за определенное время T тяжелого абсолютно твердого тела, подвешенного на тросе, из начального положения покоя в конечное положение покоя за счет заданного изменения длины троса и управляемого горизонтального перемещения точки его подвеса (рис. 1). Тело соединено с концом троса в точке 1, расположенной выше центра тяжести тела C (точка 2) на расстоянии l_2 . Рассматривается два варианта пассивного управления системой: 1) силовое управление (определяется закон изменения горизонтальной силы $P(t)$ в точке подвеса); 2) кинематическое управление (определяется закон перемещения точки подвеса $u(t)$). В первом варианте в качестве обобщенных координат рассматривается перемещение $u(t)$ и углы поворота $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$; во втором варианте – только углы поворота $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.

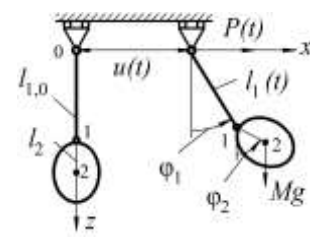


Рис. 1. Тело, подвешенное на тросе переменной длины, с подвижной точкой подвеса
 Fig. 1. A body suspended on a variable length cable with the movable suspension point

Начальные условия при $t = 0$ и конечные условия при $t = T$, представляющие устойчивые положения покоя системы, записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 0; & u &= 0; & \dot{\varphi}_1 &= 0; & \varphi_1 &= 0; \\ \dot{\varphi}_2 &= 0; & \varphi_2 &= 0 & \text{при } t &= 0; \\ \dot{u} &= 0; & u &= u_T; & \dot{\varphi}_1 &= 0; & \varphi_1 &= 0; \\ \dot{\varphi}_2 &= 0; & \varphi_2 &= 0 & \text{при } t &= T, \end{aligned} \tag{1}$$

где u_T – заданное конечное горизонтальное перемещение точки подвеса. Трос будем считать нерастяжимым,

его инерцией будем пренебрегать и полагать, что его длина $l_1(t)$ изменяется по заданному закону достаточно медленно при условиях

$$\dot{l}_1(0) = 0; \quad l_1(0) = l_{1,0}; \quad \dot{l}_1(T) = 0; \quad l_1(T) = l_{1,T} \quad (2)$$

и так, чтобы усилие в тросе при $0 \leq t \leq T$ было растягивающим. В частном случае длина троса может быть постоянной ($l_1 = \text{const}$, $\dot{l}_1 = 0$).

Координаты центра тяжести тела при $0 \leq t \leq T$ записываются в виде:

$$x_c = u + l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2; \quad z_c = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2, \quad (3)$$

а в начальном и конечном положениях соответственно: $x_c = 0$, $z_c = l_{1,0} + l_2$ при $t = 0$; $x_c = u_T$, $z_c = l_{1,T} + l_2$ при $t = T$.

Задача заключается в следующем: найти управляющую силу $P(t)$ или управляющее перемещение $u(t)$, при которых система за определенное время T перемещается из начального состояния покоя ($t = 0$, $x_c = 0$, $z_c = l_{1,0} + l_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) в конечное состояние покоя ($t = T$, $x_c = u_T$, $z_c = l_{1,T} + l_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) с устранением колебаний при $t \geq T$. Здесь эту задачу будем решать в линейной постановке для малых углов поворота троса и тела, полагая $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$.

2. Уравнения движения

Уравнения движения рассматриваемой системы получим по методу Лагранжа в обобщенных координатах. Кинетическая энергия системы и вариация работы управляющей силы P и силы тяжести тела

$$K = \frac{1}{2} M (\dot{x}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} J_c \dot{\varphi}_2^2; \quad \delta A = P \delta u + Mg \delta z_c$$

с учетом (3) записываются в виде

$$K = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 + \frac{1}{2} M [\dot{l}_1^2 + l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + 2 \dot{l}_1 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + 2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + 2 \dot{l}_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + \frac{1}{2} J_c \dot{\varphi}_2^2; \quad (4)$$

$$\delta A = P \delta u - Mg (l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \delta \varphi_2),$$

где M и J_c – масса и центральный массовый момент инерции тела; g – удельная массовая сила тяжести, направленная вдоль оси z .

Линеаризованные по φ_1 и φ_2 уравнения движения системы для случая, когда управление осуществляется силой $P(t)$, записываются по методу Лагранжа с использованием (4):

$$M (\ddot{u} + l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + 2 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + \ddot{l}_1 \varphi_1) = P; \quad (5)$$

$$\ddot{u} + l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + 2 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + g \varphi_1 = 0; \quad (6)$$

$$\ddot{u} + l_1 \ddot{\varphi}_1 + \left(l_2 + \frac{J_c}{M l_2} \right) \ddot{\varphi}_2 + 2 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + \ddot{l}_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + g \varphi_2 = 0. \quad (7)$$

Уравнение (5) можно записать в виде

$$M \frac{d^2}{dt^2} (u + l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2) = P \quad (8)$$

и последовательно проинтегрировать его дважды с учетом начальных и граничных условий (1). При этом получим условия для управляющих функций $u(t)$ и $P(t)$:

$$\int_0^T \ddot{u}(t) dt = 0; \quad \int_0^T P(t) dt = 0; \quad (9)$$

$$u_T = \int_0^T \left(\int_0^t P(t_1) dt_1 \right) dt = - \int_0^T P(t) t dt.$$

Если из уравнения (5) выразить \ddot{u} и подставить его в уравнения (6), (7), то они, соответственно, запишутся в виде

$$(g - \ddot{l}_1) \varphi_1 + \frac{1}{M} P = 0; \quad (10)$$

$$\frac{J_c}{M l_2} \ddot{\varphi}_2 + (g - \ddot{l}_1) \varphi_2 + \frac{1}{M} P = 0.$$

Переменная длина троса $l_1(t)$ должна задаваться такой, чтобы выполнялось условие $g - \ddot{l}_1 > 0$, при котором натяжение троса будет оставаться положительным. Управляющая сила $P(t)$ ищется в виде финитной функции на интервале $0 \leq t \leq T$, которая при заданных T и u_T должна удовлетворять второму и третьему интегральным условиям (9) и, кроме того, должна быть такой, чтобы решения уравнений (8) удовлетворяли начальным и конечным условиям (1). Сила $P(t)$, как реакция на конце $z = 0$ абсолютно гибкого натянутого троса при его малых изгибах (в линейном приближении), уравновешивается в основном за счет изменения натяжения троса при его малых угловых колебаниях. Поэтому эта сила в линейной постановке задачи должна быть достаточно малой. Соответственно, процесс конечного перемещения тяжелого груза на тросе переменной длины с подвижным подвесом должен быть достаточно медленным.

В случае кинематического управления рассматриваемой системой с помощью ускорения $\ddot{u}(t)$ задача описывается уравнениями (6) и (7). Функция $\ddot{u}(t)$ ищется в классе финитных функций при $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющих первому условию (9) и решениям уравнений (6) и (7) при начальных и конечных условиях (1). При этом устанавливается зависимость $\ddot{u}(t)$ от u_T , а реакция системы $P(t)$ для оценки определяется из уравнения (5).

Рассматриваемая задача пассивного управления колебаниями системы имеет множество решений при различных управляющих финитных функциях $P(t)$ или $\ddot{u}(t)$ (или $u(t)$) при $0 \leq t \leq T$ из класса функций, удовлетворяющих интегральным условиям (9). При определении управляющих функций из этого класса прежде всего необходимо, чтобы они были технически приемлемы и удобны для практической реализации полученного расчетным путем пассивного управления с помощью «жестких» приводов, т.е. чтобы они были достаточно гладкими и не содержали высокочастотных составляющих, поскольку реальные приводы обладают упругостью и инерцией и в них могут возникнуть «ответные» колебания, искажающие расчетные управляющие воздействия.

Для минимизации энергетических затрат на управление различные подходящие управляющие функции можно сравнивать между собой по среднеквадратичной величине (норме) и по их максимальным значениям. При оптимальном управлении наряду с решением задачи управления необходимо минимизировать определенный функционал.

3. Решение по методу Бубнова-Галеркина

Далее рассмотрим применение метода Бубнова-Галеркина для приближенного решения задачи кинематического управления перемещением твердого тела на тросе переменной длины с подвижным подвесом из начального положения покоя в конечное положение покоя, которая описывается дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами (6), (7) при начальных и конечных условиях (1). Введем безразмерное время и безразмерные параметры:

$$\tau = \frac{t}{T}; \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{l_2}; \quad \bar{u} = \frac{u}{l_2}; \quad \lambda = \frac{gT^2}{l_2}; \quad \mu = 1 + \frac{J_c}{Ml_2^2}. \quad (11)$$

Уравнения (6), (7) запишем в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} L_1(\varphi_1, \varphi_2; \bar{u}) &= \bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \lambda \varphi_1 + \bar{u}'' = 0; \\ L_2(\varphi_1, \varphi_2; \bar{u}) &= \bar{l}_1 \varphi_1'' + \mu \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \\ &+ \bar{l}_1''(\varphi_1 - \varphi_2) + \lambda \varphi_2 + \bar{u}'' = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где штрихом (') обозначаются производные по τ ; $0 \leq \tau \leq 1$.

Будем считать, что длина троса при передвижении груза изменяется по закону

$$\bar{l}_1(\tau) = \bar{l}_{1,0} + \bar{\Delta}_1(\tau); \quad \bar{\Delta}_1(\tau) = \frac{1}{2}(\bar{l}_{1,T} - \bar{l}_{1,0})(1 - \cos \pi\tau). \quad (13)$$

Закон управления перемещением точки подвеса троса с учетом начальных и конечных условий (1) примем в виде

$$\bar{u}''(\tau) = \sum_{k=1}^N b_k \sin 2k\pi\tau;$$

$$\begin{aligned} \bar{u}'(\tau) &= \sum_{k=1}^N b_k \frac{1}{2k\pi} (1 - \cos 2k\pi\tau); \\ \bar{u}(\tau) &= \sum_{k=1}^N b_k \frac{1}{2k\pi} \left(\tau - \frac{1}{2k\pi} \sin 2k\pi\tau \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где b_k – неизвестные коэффициенты; N – определенное в каждом конкретном случае число членов ряда. В конечный момент времени $\tau=1$ должно выполняться условие $\bar{u}(1) = \bar{u}_T$, которое дает одно уравнение для коэффициентов b_k :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{2k\pi} b_k = \bar{u}_T. \quad (15)$$

Приближенное решение уравнений (12) с переменными коэффициентами при $0 \leq \tau \leq 1$ будем искать в рядах

$$\varphi_i(\tau) = \sum_{r=0}^{s_i} C_{ir} \sigma_r(\tau); \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

где C_{ir} – неизвестные коэффициенты; $\sigma_r(\tau)$ – заданные аппроксимирующие функции, удовлетворяющие части условий (1) для функций $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$. Здесь для сравнения и оценки точности и сходимости решений будем использовать два различных набора аппроксимирующих функций:

$$\begin{aligned} 1) \quad \sigma_r(\tau) &= \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau; \quad \sigma_r(0) = \sigma_r'(0) = \\ &= \sigma_r'(1) = 0; \quad \sigma_r(1) = 2 \cos r\pi; \\ 2) \quad \sigma_r(\tau) &= \cos(r\pi\tau); \quad \sigma_r'(0) = \sigma_r'(1) = 0; \quad \sigma_r(0) = 1; \\ &\sigma_r(1) = \cos r\pi. \end{aligned}$$

Удовлетворяя уравнения (12) по методу Бубнова-Галеркина как

$$\int_0^1 L_i(\varphi_1, \varphi_2; \bar{u}) \sigma_p(\tau) d\tau = 0; \quad p = 0, 1, \dots, s_i; \quad i = 1, 2,$$

получим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов C_{1r} и C_{2r} :

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{s_1} \alpha_{pr}^{(1)} C_{1r} + \sum_{r=0}^{s_2} \alpha_{pr}^{(2)} C_{2r} + \sum_{k=1}^N \gamma_p b_k &= 0; \quad p = 0, 1, \dots, s_1; \\ \sum_{r=0}^{s_1} \beta_{pr}^{(1)} C_{1r} + \sum_{r=0}^{s_2} \beta_{pr}^{(2)} C_{2r} + \sum_{k=1}^N \gamma_p b_k &= 0; \quad p = 0, 1, \dots, s_2, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{pr}^{(1)} &= \int_0^1 \bar{l}_1 \sigma_p \sigma_r'' d\tau + 2 \int_0^1 \bar{l}_1' \sigma_p \sigma_r' d\tau + \lambda \int_0^1 \sigma_p \sigma_r d\tau; \\ \alpha_{pr}^{(2)} &= \int_0^1 \sigma_p \sigma_r'' d\tau; \quad \gamma_p = \int_0^1 \sigma_p \sin 2k\pi\tau d\tau; \\ \beta_{pr}^{(1)} &= \int_0^1 \bar{l}_1 \sigma_p \sigma_r'' d\tau + 2 \int_0^1 \bar{l}_1' \sigma_p \sigma_r' d\tau + \int_0^1 \bar{l}_1'' \sigma_p \sigma_r d\tau; \\ \beta_{pr}^{(2)} &= \mu \int_0^1 \sigma_p \sigma_r'' d\tau - \int_0^1 \bar{l}_1'' \sigma_p \sigma_r d\tau + \lambda \int_0^1 \sigma_p \sigma_r d\tau. \end{aligned} \quad (18)$$

Система уравнений (17) должна быть дополнена уравнениями, представляющими невыполненные начальные и конечные условия для функций $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$, которым не удовлетворяют заданные функции $\sigma_r(\tau)$, а также уравнением (15).

1) При использовании первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau$ дополнительные уравнения получаются из условий $\varphi_i(1) = 0$ при $i = 1, 2$:

$$\sum_{r=0}^{s_i} C_{ir} \sigma_r(1) = 0; \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

В этом случае будем иметь $(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + 2$ уравнений (17), (19) для коэффициентов C_{1r} ($r = 0, 1, \dots, s_1$), C_{2r} ($r = 0, 1, \dots, s_2$) и b_k ($k = 1, 2, \dots, N$). К этим уравнениям добавляем еще уравнение (15). Тогда будем иметь систему $(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + 3$ уравнений, из которых наряду с коэффициентами C_{1r} , C_{2r} можно определить $N = 3$ неизвестных коэффициентов b_k ($k = 1, 2, 3$).

2) При использовании второго набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau$ дополнительные уравнения получаются из условий $\varphi_i(0) = 0$, $\varphi_i(1) = 0$ при $i = 1, 2$:

$$\sum_{r=0}^{s_i} C_{ir} \sigma_r(0) = 0; \quad \sum_{r=0}^{s_i} C_{ir} \sigma_r(1) = 0; \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Добавляя к системе уравнений (17), (20) уравнение (15), будем иметь систему $(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + 5$ уравнений, из которой наряду с коэффициентами C_{1r} ($r = 0, 1, \dots, s_1$), C_{2r} ($r = 0, 1, \dots, s_2$) можно определить $N = 5$ неизвестных коэффициентов b_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$).

4. Примеры расчета

4.1. Управляемое перемещение тела, подвешенного на тросе постоянной длины

Рассмотрим систему со следующими безразмерными параметрами: $\bar{l}_1 = 4$; $\lambda = 160$; $\mu = 4/3$; $\bar{u}_r = 4$.

1) При использовании первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau$ при $s_1 = s_2 = 5$ значения коэффициентов b_k в законе управления (14) для $N = 3$ соответственно: $b_1 = -7,988$; $b_2 = 72,978$; $b_3 = -10,103$. На рис. 2 представлены полученные графики этого закона: (а) – для ускорения $\bar{u}''(\tau)$; (б) – для перемещения $\bar{u}(\tau)$. На рис. 3 представлены результаты решения для углов поворота троса (а) и подве-

шенного тела (б), а также для их безразмерных угловых скоростей (в) и (г) соответственно. Здесь и далее на графиках углов поворота и угловых скоростей сплошной линией показано решение по методу Бубнова-Галеркина, а пунктирной линией – численное решение по стандартной программе, реализующей метод Адамса. Если на графиках пунктирные линии отсутствуют, то это означает, что в принятом масштабе они совпадают со сплошными линиями. Для оценки точности решения вычисляются разности значений по углам $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$, а также по скоростям $\varphi'_1(\tau)$ и $\varphi'_2(\tau)$, при $\tau = 1$ по методу Бубнова-Галеркина и Адамса соответственно. Здесь и далее эти разности обозначаются знаком Δ . Для данного расчетного случая эти значения: $\Delta\varphi_1(1) = -5,927 \cdot 10^{-3}$; $\Delta\varphi_2(1) = -0,012$; $\Delta\varphi'_1(1) = -6,753 \cdot 10^{-3}$; $\Delta\varphi'_2(1) = -0,041$.

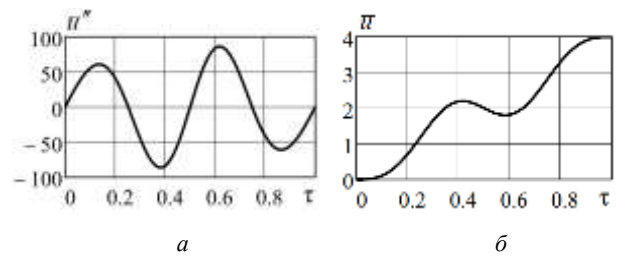


Рис. 2. Закон кинематического управления, полученный при использовании первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 5$: а – по ускорению; б – по перемещению

Fig. 2. The kinematic control law obtained by using the first set of approximating functions $\sigma_r(\tau)$ for $s_1 = s_2 = 5$: а – for acceleration; б – for displacement

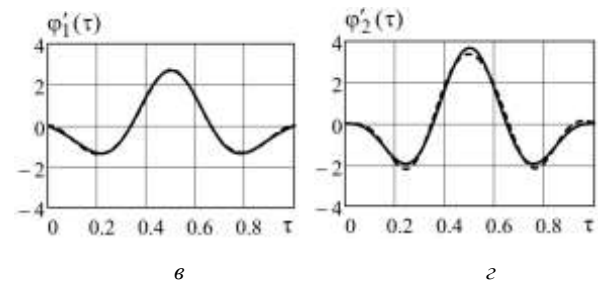
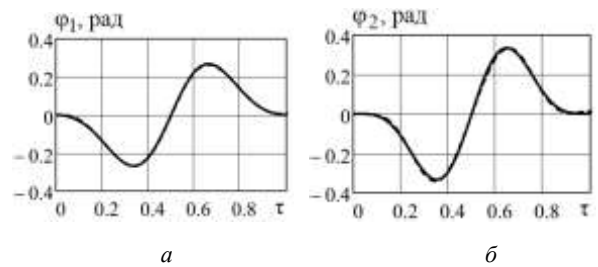


Рис. 3. Полученные при использовании первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 5$ графики: углов поворота троса (а), подвешенного тела (б) и, соответственно, их безразмерных угловых скоростей (в), (г) Fig. 3. The graphs obtained when using the first set of approximating functions $\sigma_r(\tau)$ for $s_1 = s_2 = 5$: the angles of rotation of the cable (а), the suspended body (б) and respectively their dimensionless angular velocities (в), (д)

Также были получены решения с использованием первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau$ при $s_1 = s_2 = 11$, $N = 3$. Значения коэффициентов b_k в (14): $b_1 = -8,861$; $b_2 = 91,952$; $b_3 = -35,948$. Для этого расчетного случая на рис. 4 представлены графики закона управления: *a* – по ускорению $\bar{u}''(\tau)$; *b* – по перемещению $\bar{u}(\tau)$, а на рис. 5 – графики для углов поворота троса (*a*) и подвешенного тела (*b*), а также для их безразмерных угловых скоростей (*в*) и (*г*) соответственно. В данном случае $\Delta\varphi_1(1) = -7,385 \cdot 10^{-4}$; $\Delta\varphi_2(1) = 2,238 \cdot 10^{-4}$; $\Delta\varphi'_1(1) = -2,271 \cdot 10^{-3}$; $\Delta\varphi'_2(1) = 3,575 \cdot 10^{-3}$.

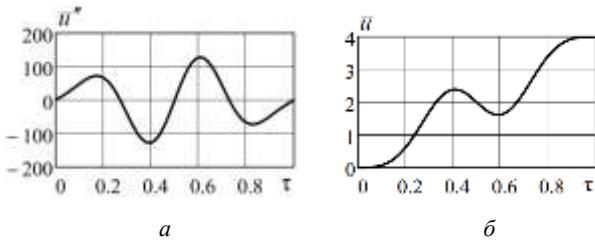


Рис. 4. Полученные при использовании первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 11$ графики закона управления: *a* – по ускорению; *b* – по перемещению
Fig. 4. The graphs of the control law obtained when using the first set of approximating functions $\sigma_r(\tau)$ for $s_1 = s_2 = 11$:
a – for acceleration; *b* – for displacement

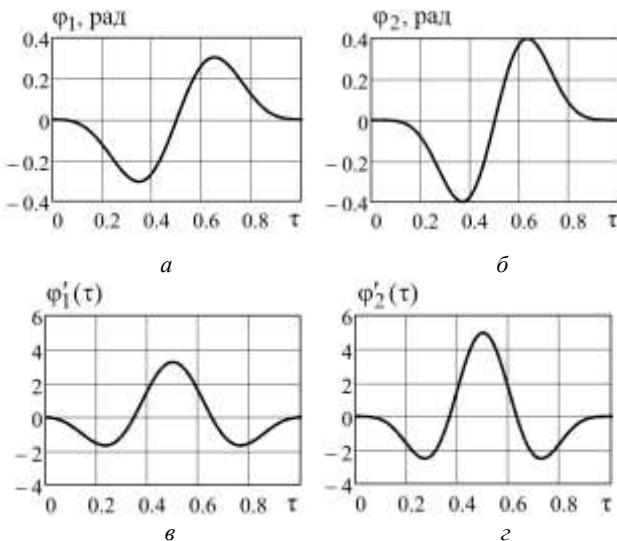


Рис. 5. Полученные при использовании первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 11$ графики: углов поворота троса (*a*), подвешенного тела (*b*) и, соответственно, их безразмерных угловых скоростей (*в*), (*г*)
Fig. 5. The graphs obtained when using the first set of approximating functions $\sigma_r(\tau)$ for $s_1 = s_2 = 11$: the angles of rotation of the cable (*a*), the suspended body (*b*) and, respectively, their dimensionless angular velocities (*c*), (*d*)

2) При использовании второго набора аппроксимирующих функций $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$ при $s_1 = s_2 = 15$ были получены решения той же самой задачи, как в случае 1. Значения коэффициентов в законе управления (14):

$b_1 = -6,901$; $b_2 = -18,592$; $b_3 = 154,253$; $b_4 = 15,490$; $b_5 = -69,801$. На рис. 6 показан график закона управления для случая 2 при $N = 5$: (*a*) – для ускорения $\bar{u}''(\tau)$; (*b*) – для перемещения $\bar{u}(\tau)$. Для этого же расчетного случая 2 на рис. 7 представлены графики углов поворота троса и подвешенного тела (*a*) и (*b*), соответственно, а также – их угловых скоростей (*в*) и (*г*). В данном случае имеем: $\Delta\varphi_1(1) = -3,488 \cdot 10^{-4}$; $\Delta\varphi_2(1) = 5,402 \cdot 10^{-5}$; $\Delta\varphi'_1(1) = -1,022 \cdot 10^{-3}$; $\Delta\varphi'_2(1) = 1,397 \cdot 10^{-3}$.

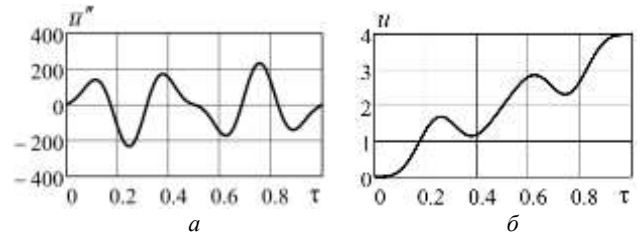


Рис. 6. Полученные при использовании второго набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 15$ графики закона управления: *a* – по ускорению; *b* – по перемещению
Fig. 6. The graphs of the control law obtained when using the second set of approximating functions $\sigma_r(\tau)$ for $s_1 = s_2 = 15$: *a* – for acceleration; *b* – for displacement

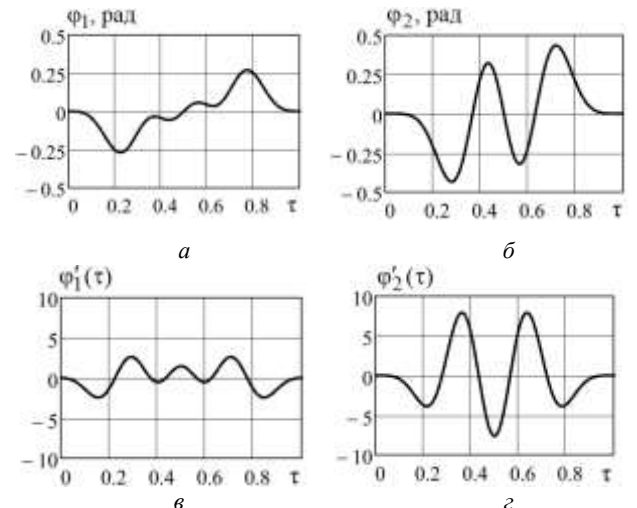


Рис. 7. Полученные при использовании второго набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 15$ графики: углов поворота троса (*a*), подвешенного тела (*b*) и, соответственно, их безразмерных угловых скоростей (*в*), (*г*)
Fig. 7. The graphs obtained when using the second set of approximating functions $\sigma_r(\tau)$ for $s_1 = s_2 = 15$: the angles of rotation of the cable (*a*), the suspended body (*b*) and respectively their dimensionless angular velocities (*c*), (*d*)

4.2. Управляемое перемещение тела, подвешенного на тросе переменной длины

Длина троса изменяется по закону (13). Безразмерные параметры системы: $\bar{l}_{1,0} = 4$; $\bar{l}_{1,T} = 5$; $\lambda = 160$; $\mu = 4/3$; $\bar{u}_T = 4$.

1) При использовании первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau$ при

$s_1 = s_2 = 5$ значения коэффициентов b_k в законе управления (14) для $N=3$ соответственно: $b_1 = -11,642$; $b_2 = 81,407$; $b_3 = -11,787$. На рис. 8 представлены полученные графики этого закона: a – для ускорения $\ddot{u}''(\tau)$; b – для перемещения $\bar{u}(\tau)$. На рис. 9 представлены результаты решения для углов поворота троса (a) и подвешенного тела (b), а также для их безразмерных угловых скоростей (ϵ) и (z) соответственно. Для данного расчетного случая $\Delta\varphi_1(1) = -0,011$; $\Delta\varphi_2(1) = -0,021$; $\Delta\varphi'_1(1) = 0,010$; $\Delta\varphi'_2(1) = -0,033$.

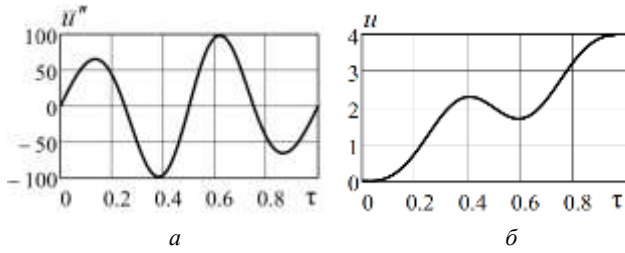


Рис. 8. Закон кинематического управления, полученный при использовании первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 5$: a – по ускорению; b – по перемещению

Fig. 8. The kinematic control law obtained by using the first set of approximating functions $\sigma_r(\tau)$ for $s_1 = s_2 = 5$: a – for acceleration; b – for displacement

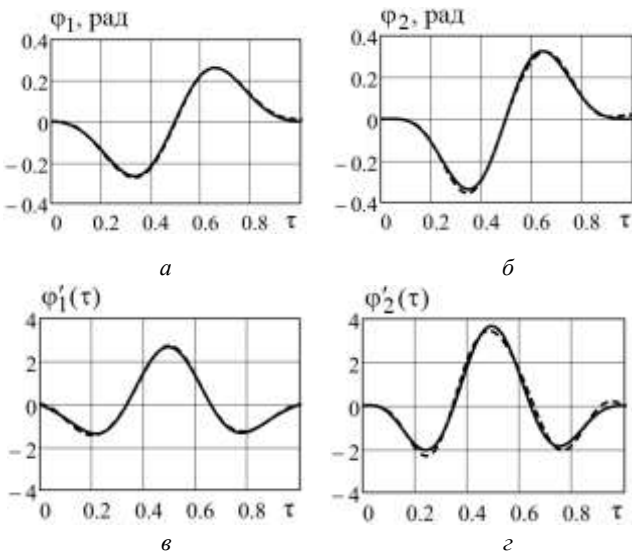


Рис. 9. Полученные при использовании первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 5$ графики: углов поворота троса (a), подвешенного тела (b) и, соответственно, их безразмерных угловых скоростей (c), (d)

Также были получены решения с использованием первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau) = \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau$ при $s_1 = s_2 = 11$, $N=3$. Значения коэффициентов b_k в (14): $b_1 = -13,256$;

$b_2 = 123,965$; $b_3 = -70,781$. Для этого расчетного случая на рис. 10 представлены графики закона управления: a – по ускорению $\ddot{u}''(\tau)$; b – по перемещению $\bar{u}(\tau)$, а на рис. 11 – графики для углов поворота троса (a) и подвешенного тела (b), а также для их безразмерных угловых скоростей (ϵ) и (z) соответственно. В данном случае $\Delta\varphi_1(1) = -0,012$; $\Delta\varphi_2(1) = 5,050 \cdot 10^{-3}$; $\Delta\varphi'_1(1) = 0,057$; $\Delta\varphi'_2(1) = -0,105$.

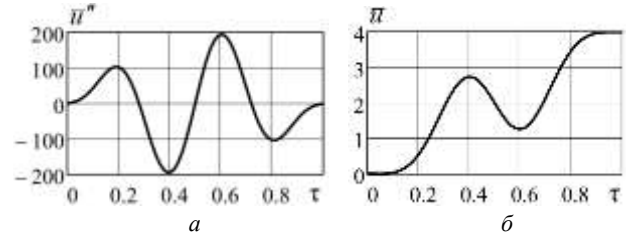


Рис. 10. Полученные при использовании первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 11$ графики закона управления: a – по ускорению; b – по перемещению

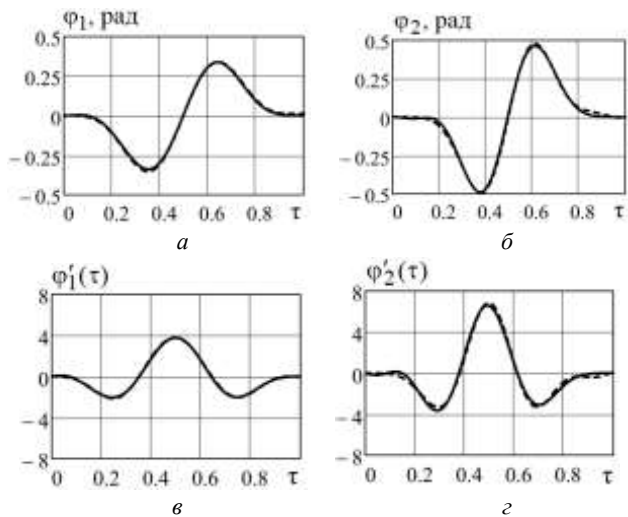


Рис. 11. Полученные при использовании первого набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 11$ графики: углов поворота троса (a), подвешенного тела (b) и, соответственно, их безразмерных угловых скоростей (c), (d)

2) При использовании второго набора аппроксимирующих функций $\varphi_r(\tau) = \cos(r\pi\tau)$ при $s_1 = s_2 = 15$ были получены решения той же самой задачи, как в случае 1. Значения коэффициентов в законе управления (14): $b_1 = -9,264$; $b_2 = -16,033$; $b_3 = 58,514$; $b_4 = -8,338$; $b_5 = 124,962$. На рис. 12 показаны графики закона управления для случая 2 при $N=5$: a – для ускорения $\ddot{u}''(\tau)$; b – для перемещения $\bar{u}(\tau)$. Для этого же расчет-

ного случая на рис. 13 представлены графики углов поворота троса и подвешенного тела (а) и (б), соответственно, а также – их угловых скоростей (в) и (г). В данном случае имеем: $\Delta\varphi_1(1) = -3,347 \cdot 10^{-3}$; $\Delta\varphi_2(1) = 9,691 \cdot 10^{-4}$; $\Delta\varphi'_1(1) = -0,016$; $\Delta\varphi'_2(1) = 0,034$.

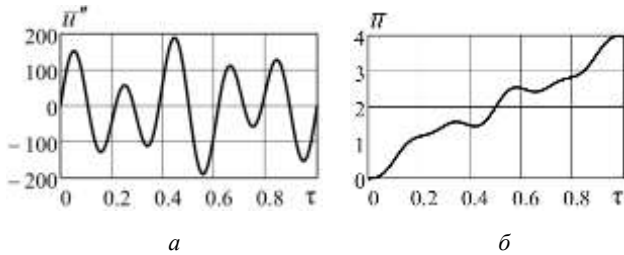


Рис. 12. Полученные при использовании второго набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 15$ графики закона управления: а – по ускорению; б – по перемещению

Fig. 12. The graphs of the control law obtained when using the second set of approximating functions $\sigma_r(\tau)$ for $s_1 = s_2 = 15$: а – for acceleration; б – for displacement

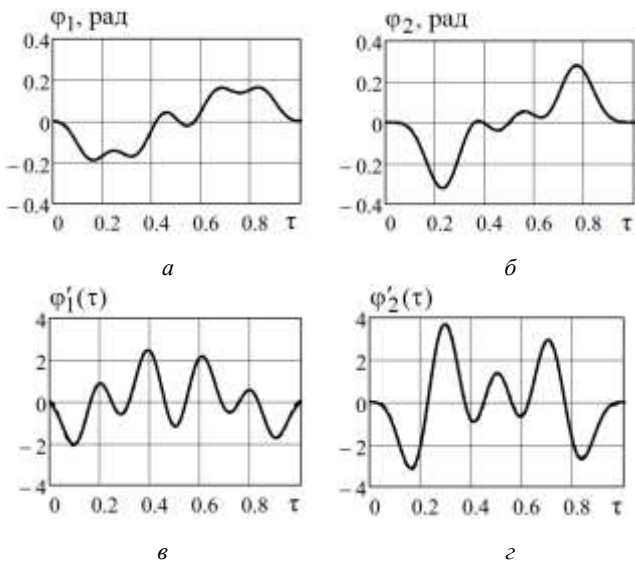


Рис. 13. Полученные при использовании второго набора аппроксимирующих функций $\sigma_r(\tau)$ при $s_1 = s_2 = 15$ графики: углов поворота троса (а), подвешенного тела (б) и, соответственно, их безразмерных угловых скоростей (в), (г)

Fig. 13. The graphs obtained when using the second set of approximating functions $\sigma_r(\tau)$ for $s_1 = s_2 = 15$: the angles of rotation of the cable (а), the suspended body (б) and respectively their dimensionless angular velocities (с), (д)

Заключение

1. Предложен новый подход для решения задачи терминального управления линейной системой с конечным числом степеней свободы и с переменными параметрами. Вектор обобщенных координат и управляю-

щая функция ищутся в рядах по заданным на конечном интервале времени аппроксимирующим функциям с неизвестными коэффициентами. Для коэффициентов, представляющих движение системы, уравнения составляются по методу Бубнова-Галеркина, а для коэффициентов управляющей функции используются невыполненные при выборе аппроксимирующих функций начальные и конечные условия. Задача сводится к связанной системе линейных алгебраических уравнений.

2. Решена плоская задача поступательно-вращательных колебаний тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе изменяемой по заданному закону длины с точкой его подвеса, совершающей управляемое горизонтальное перемещение. Тело передвигается из начального положения покоя в заданное конечное положение покоя за определенное время с устранением колебаний в конце операции.

3. Исследована сходимость и точность решения задачи при использовании двух различных наборов аппроксимирующих функций при двух различных числах членов ряда для каждого рассмотренного варианта. Для этого выполнены сравнения с численными решениями по методу Адамса дифференциальных уравнений движения системы при найденной для каждого варианта управляющей функции. Показано, что достаточная для практических расчетов точность получается при аппроксимации управляющей функции трехчленным рядом по синусам. Такие управляющие функции вполне пригодны для пассивного управления системой с помощью электрических или гидравлических приводов.

4. Результаты решенной задачи имеют большое практическое значение для уменьшения времени операции передвижения, например, на мостовом кране (одновременное вертикальное и горизонтальное перемещение тела без его колебаний в начале и конце) тяжелых грузов, подвешенных на тросе с изменяемой по заданному закону длиной при управляемом горизонтальном перемещении точки его подвеса.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания (номер государственной регистрации темы АААА-А17-117032010144-8) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-08-00778а).

Acknowledgments

The work was carried out within the State Assignment (state registration number АААА-А17-117032010144-8) and with a partial financial support of the Russian Foundation for Basic Research (Project Nr. 18-08-00778a).

Библиографический список

1. Черноушко Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – М.: Наука, 1989. – 363 с.
2. Ковалева А.С. Управление колебательными и вибронарудами системами. – М.: Наука, 1990. – 256 с.
3. Расчет и проектирование систем разделения ступеней ракет / К.С. Колесников, В.В. Кокушкин, С.В. Борзых, Н.В. Панкова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 376 с.
4. Dynamics and Control of Large Space Structures / G.S. Nurre, R.S. Ryan, H.N. Scofield, J.I. Sims // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 1984. – Vol. 7. – No. 5. – P. 514–526.
5. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. – М.: Машиностроение, 1986. – 216 с.
6. Das S.K., Utku S., Wada B.K. Inverse Dynamics of Adaptive Space Cranes with Tip Point Adjustment // 31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conf. – 1990. – Art. AIAA-90-1166-CP. – P. 2367–2374.
7. Bainum P.M., Li F. Optimal large angle maneuvers of a flexible spacecraft // Acta Astronautica. – 1991. – Vol. 25. – No. 3. – P. 141–148.
8. Chan J.K., Modi V.J. A Closed-Form Dynamical Analysis of an Orbiting Flexible Manipulator // Acta Astronautica. – 1991. – Vol. 25. – No. 2. – P. 67–76.
9. Meirovitch L., Kwak M.K. Control of Flexible Spacecraft with Time-Varying Configuration // Journal of Control, Guidance and Dynamics. – 1992. – Vol. 15. – No. 2. – P. 314–324. DOI: 10.2514/3.20839.
10. Miller D.W., Crawley E.F. Theoretical and Experimental Investigation of Space-Realizable Inertial Actuation for Passive and Active Structural Control // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 1988. – Vol. 11. – No. 5. – P. 449–458. DOI: 10.2514/3.20338.
11. Закрежевский А.Е. Об оптимальном развороте упругого космического аппарата // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 8. – С. 106–113.
12. Ротенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971. – 396 с.
13. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М.: Наука, 1985. – 352 с.
14. Разыграев А.П. Основы управления полетом космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1990. – 480 с.
15. Ганиев Р.Ф., Закрежевский А.Е. Программные движения управляемых деформируемых конструкций. – М.: Наука, 1995. – 213 с.
16. Masters B.P., Crawley E.F. Evolutionary Design of Controlled Structures // Journal of Aircraft. – 1999. – Vol. 36. – No. 1. – P. 209–217. DOI: 10.2514/2.2427.
17. Матюхин В.И. Управление механическими системами. – М.: Физматлит, 2009. – 320 с.
18. Динамика управляемых движений вибрационных систем / Н.Н. Болотник, И.М. Зейдис, К. Циммерманн, С.Ф. Яцун // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 5. – С. 157–167.
19. Черноушко Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1976. – 383 с.
20. Черноушко Ф.Л., Аняньевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М.: Физматлит, 2006. – 326 с.
21. Бербюк В.Б. Динамика и оптимизация робототехнических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 187 с.
22. Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // ПММ. – 1992. – Т. 56. – Вып. 2. – С. 240–249.
23. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Управление конечным поворотом упругой системы из одного состояния в другое с гашением колебаний в момент окончания операции // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159. – Кн. 4. – С. 429–443.
24. Русских С.В. Управляемый поворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей // Изв. вузов. Машиностроение. – 2016. – № 12 (681). – С. 97–105.
25. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Конечное поперечное передвижение упругого стержня с массой на конце с гашением колебаний в момент остановки [Электронный ресурс] // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2018. – Вып. 7. – URL: <http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1786.html> (дата обращения: 18.07.2018). DOI: 10.18698/2308-6033-2018-7-1786.
26. Шклярчук Ф.Н., Русских С.В. Избранные задачи динамики упругих космических систем. – М.: Изд-во МАИ, 2017. – 80 с.
27. Гришанина Т.В. Управляемый поворот упругого стержня на конечный угол // Вестн. МАИ. – 2004. – Т. 11, № 1. – С. 64–68.
28. Гришанина Т.В. Устранение колебаний упругой системы после ее быстрого передвижения и поворота // Вестн. МАИ. – 2004. – Т. 11, № 2. – С. 68–75.
29. Гришанина Т.В. Динамика управляемого движения упругих систем при конечных перемещениях и поворотах // Изв. РАН. МТТ. – 2004. – № 6. – С. 171–186.
30. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика упругих управляемых конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.
31. Формальский А.М. Перевернутый маятник на неподвижном и подвижном основании // ПММ. – 2006. – Т. 70. – Вып. 1. – С. 62–71.
32. Зевин А.А., Филоненко Л.А. Качественное исследование колебаний маятника с периодически меняющейся длиной и математическая модель качелей // ПММ. – 2007. – Т. 71. – Вып. 6. – С. 989–1003.
33. Акуленко Л.Д. Оптимальное по быстрдействию приведение возмущенного динамического объекта в заданное положение // ПММ. – 2008. – Т. 72. – Вып. 2. – С. 230–240.
34. Холостова О.В. О движениях двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – № 2. – С. 25–40.
35. Буланчук П.О., Петров А.Г. Параметры вибрации точки подвеса для заданного положения равновесия двойного математического маятника // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 4. – С. 31–39.
36. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управляемый маятник на подвижном основании // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 1. – С. 9–23.
37. Асланов В.С., Безгласный С.П. Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Изв. РАН. МТТ. – 2012. – № 3. – С. 32–46.
38. Аняньевский И.М., Анохин Н.В. Управление пространственным движением многозвенного перевернутого маятника с помощью момента, приложенного к первому звену // ПММ. – 2014. – Т. 78. – Вып. 6. – С. 755–765.
39. Воробьев Е.И. Осуществление заданного относительного движения двух твердых тел двуруким роботом // Изв. РАН. МТТ. – 2018. – № 2. – С. 122–128.
40. Матюхин В.И. Приведение двух твердых тел в контакт без ударов ограниченными управлениями за конечное время // ПММ. – 2010. – Т. 74. – Вып. 5. – С. 840–855.

References

1. Chernous'ko F.L., Bolotnik N.N., Gradetskii V.G. Manipulatsionnye roboty: dinamika, upravlenie, optimizatsiia [Manipulation robots: dynamics, management, optimization]. *Moscow, Nauka*, 1989, 363 p.
2. Kovaleva A.S. Upravlenie kolebatel'nymi i vibroudarnymi sistemami [Control of vibratory and vibro-impact systems]. *Moscow, Nauka*, 1990, 256 p.
3. Kolesnikov K.S., Kokushkin V.V., Borzykh S.V., Pankova N.V. Raschet i proektirovanie sistem razdeleniia stupenei raket [Calculation and design of systems for separation of stages of rockets]. *Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta imeni N.E. Baumana*, 2006, 376 p.
4. Nurre G.S., Ryan R.S., Scofield H.N., Sims J.I. Dynamics and Control of Large Space Structures. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1984, vol. 7, no. 5, pp. 514-526.
5. Degtiarev G.L., Sirazetdinov T.K. Teoreticheskie osnovy optimal'nogo upravleniia uprugimi kosmicheskimi apparatami [Theoretical Foundations of Optimal Control of Elastic Spacecraft]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1986, 216 p.
6. Das S.K., Utku S., Wada B.K. Inverse Dynamics of Adaptive Space Cranes with Tip Point Adjstment. *31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conf*, 1990, Art. AIAA-90-1166-CP, pp. 2367-2374.
7. Bainum P.M., Li F. Optimal large angle maneuvers of a flexible spacecraft. *Acta Astronautica*, 1991, vol. 25, no. 3, pp. 141-148.
8. Chan J.K., Modi V.J. A Closed-Form Dynamical Analysis of an Orbiting Flexible Manipulator. *Acta Astronautica*, 1991, vol. 25, no. 2, pp. 67-76.
9. Meirovitch L., Kwak M.K. Control of Flexible Spacecraft with Time-Varying Configuration. *Journal of Control, Guidance and Dynamics*, 1992, vol. 15, no. 2, pp. 314-324. DOI: 10.2514/3.20839.
10. Miller D.W., Crawley E.F. Theoretical and Experimental Investigation of Space-Realizable Inertial Actuation for Passive and Active Structural Control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1988, vol. 11, no. 5, pp. 449-458. DOI: 10.2514/3.20338.
11. Zakrezhevskii A.E. Ob optimal'nom razvorote uprugogo kosmicheskogo apparata [On the optimal turn of an elastic spacecraft]. *Prikladnaia mekhanika*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 106-113.
12. Rotenberg Ia.N. Avtomaticheskoe upravlenie [Automatic control]. *Moscow, Nauka*, 1971, 396 p.
13. Voronov A.A. Vvedenie v dinamiku slozhnykh upravliaemykh system [Introduction to the dynamics of complex managed systems]. *Moscow, Nauka*, 1985, 352 p.
14. Razygraev A.P. Osnovy upravleniia poletom kosmicheskikh apparatov [Fundamentals of flight control of space vehicles]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1990, 480 p.
15. Ganiev R.F., Zakrezhevskii A.E. Programmnye dvizheniia upravliaemykh deformiruemykh konstruksii [Software movements of controlled deformable structures]. *Moscow, Nauka*, 1995, 213 p.
16. Masters B.P., Crawley E.F. Evolutionary Design of Controlled Structures. *Journal of Aircraft*, 1999, vol. 36, no. 1, pp. 209-217. DOI: 10.2514/2.2427.
17. Matiukhin V.I. Upravlenie mekhanicheskimi sistemami [Management of mechanical systems]. *Moscow, Fizmatlit*, 2009, 320 p.
18. Bolotnik N.N., Zeidis I.M., Zimmermann K., Yatsun S.F. Dynamics of controlled motion of vibration-driven systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2006, vol. 45, no. 5, pp 831–840. DOI: 10.1134/S1064230706050145.
19. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. Upravlenie kolebaniiami [Control of oscillations]. *Moscow, Nauka*, 1976, 383 p.
20. Chernous'ko F.L., Anan'evskii I.M., Reshmin S.A. Metody upravleniia nelineinymi mekhanicheskimi sistemami [Methods of control of nonlinear mechanical systems]. *Moscow, Fizmatlit*, 2006, 326 p.
21. Berbiuk V.B. Dinamika i optimizatsiia robototekhnicheskikh system [Dynamics and optimization of robotic systems]. *Kiev, Naukova Dumka*, 1989, 187 p.
22. Kubyshkin E.P. Optimal'noe upravlenie povorotom tverdogo tela s gibkim sterzhnem [Optimum control of rotation of a rigid body with a flexible rod]. *Prikladnaia matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, vol. 56, no. 2, pp 240-249.
23. Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shkliarchuk F.N. Upravlenie konechnym povorotom uprugoi sistemy iz odnogo sostoiianiia v drugoe s gasheniem kolebanii v moment okonchaniia operatsii [Controlling the final rotation of the elastic system from one state to another with damping of the oscillations at the moment of the end of the operation]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 429-443.
24. Russkikh S.V. Upravliaemyi povorot kosmicheskogo apparata s uprugimi paneliami solnechnykh batarei [Controlled rotation of a spacecraft with elastic solar panels]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie*, 2016, no. 12 (681), pp. 97-105.
25. Russkikh S.V., Shkliarchuk F.N. Konechnoe poperechnoe peredvizhenie uprugogo sterzhnia s massoi na kontse s gasheniem kolebanii v moment ostanovki [Final transverse movement of the elastic rod with mass at the end with damping of oscillations at the moment of stopping]. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, 2018, no. 7, available at: www.engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1786.html. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-7-1786.
26. Shkliarchuk F.N., Russkikh S.V. Izbrannye zadachi dinamiki uprugikh kosmicheskikh sistem [Selected problems of the dynamics of elastic cosmic systems]. *Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta*, 2017, 80 p.
27. Grishanina T.V. Upravliaemyi povorot uprugogo sterzhnia na konechnyi ugol [Controlled rotation of the elastic rod at the end angle]. *Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta*, 2004, vol. 11, no. 1, pp. 64-68.
28. Grishanina T.V. Ustranenie kolebanii uprugoi sistemy posle ee bystrogo peredvizheniia i povorota [Elimination of oscillations of the elastic system after its rapid movement and rotation]. *Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta*, 2004, vol. 11, no. 2, pp. 68-75.
29. Grishanina T.V. Dinamika upravliaemogo dvizheniia uprugikh sistem pri konechnykh peremeshcheniakh i povorotakh [Dynamics of controlled motion of elastic systems with finite displacements and rotations]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*, 2004, no. 6, pp. 171-186.
30. Grishanina T.V., Shkliarchuk F.N. Dinamika uprugikh upravliaemykh konstruksii [Dynamics of elastic controlled structures]. *Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta*, 2007, 328 p.

31. Formal'skii A.M. An inverted pendulum on a fixed and a moving base. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, no. 1, pp. 56-64. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2006.03.010.
32. Zevin A.A., Filonenko L.A. A qualitative investigation of the oscillations of a pendulum with a periodically varying length and a mathematical model of a swing. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, vol. 71, no. 6, pp. 892-904. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2007.12.008.
33. Akulenko L.D. The time-optimal transfer of a perturbed dynamical object to a given position. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 136-143. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2008.04.012.
34. Kholostova O.V. On the motions of a double pendulum with vibrating suspension point. *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 2, pp 184-197. DOI: 10.3103/S0025654409020034.
35. Bulanchuk P.O., Petrov A.G. Suspension point vibration parameters for a given equilibrium of a double mathematical pendulum. *Mechanics of Solids*, 2013, vol. 48, no. 4, pp 6-18. DOI: 10.3103/S0025654413040043.
36. Martynenko Yu.G., Formal'skii A.M. Controlled pendulum on a movable base. *Mechanics of Solids*, 2013, vol. 48, no. 1, pp 6-18. DOI: 10.3103/S0025654413010020.
37. Aslanov V.S., Bezglasnyi S.P. Stability and instability of controlled motions of a two-mass pendulum of variable length. *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, no. 3, pp 285-297. DOI: 10.3103/S002565441203003X.
38. Anan'evskii I.M., Anokhin N.V. Control of the spatial motion of a multilink inverted pendulum using a torque applied to the first link. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, no. 6, pp. 543-550. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2015.04.001.
39. Vorob'ev E.I. Osushchestvlenie zadannogo otnositel'nogo dvizheniia dvukh tverdykh tel dvurukim robotom [Realization of a given relative motion of two solids by a two-armed robot]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2018, no. 2, pp. 122-128.
40. Matyukhin V.I. The bringing of two rigid bodies into collision-free contact by bounded controls in a finite time. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, vol. 74, no. 5, pp. 599-610. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2010.11.010.