

Юрлов М.А., Ошмарин Д.А., Севодина Н.В., Юрлова Н.А. Решение задачи о собственных колебаниях электроупругих тел с внешними электрическими цепями на основе их электрического аналога // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 266-277. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.24

Iurlov M.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlova N.A. The problem solution of natural vibrations of electroelastic bodies with external electric circuits based on their electrical analogue. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 4, pp. 266-277. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.24



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.24

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТЕЛ С ВНЕШНИМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ НА ОСНОВЕ ИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО АНАЛОГА

М.А. Юрлов, Д.А. Ошмарин, Н.В. Севодина, Н.А. Юрлова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 27 июля 2018 г.
Принята: 6 декабря 2018 г.
Опубликована: 28 декабря 2018 г.

Ключевые слова:

электроупругая конструкция, пьезоэлемент, электрическая цепь, электрический аналог системы, собственные колебания, комплексные собственные частоты.

АННОТАЦИЯ

Оптимизация диссипативных свойств электроупругих тел с внешними электрическими цепями может производиться за счет подбора параметров цепей, обеспечивающих наилучшее демпфирование колебаний на заданной частоте. Поскольку внешние цепи представляют собой некоторую совокупность элементов с сосредоточенными параметрами, присоединенных к системе с распределенными параметрами, решение для такой системы задач электроупругости в полной постановке требует значительных вычислительных и временных ресурсов. В механике известны подходы, позволяющие представлять механические системы с распределенными параметрами в виде дискретных систем с сосредоточенными параметрами типа пружина-масса-демпфер. В рамках данной работы предлагается подход к анализу собственных колебаний электроупругих конструкций с внешними электрическими цепями (электромеханических систем) на основе эквивалентных электрических схем замещения, представляющих собой дискретные электрические системы с сосредоточенными параметрами. Данные дискретные системы являются полным аналогом исходной электромеханической системы с точки зрения частотных характеристик и протекающих в ней электрических процессов. Решением задачи о собственных колебаниях электромеханических систем являются комплексные собственные частоты колебаний, мнимая часть которых определяет круговую частоту колебаний, а действительная часть является показателем демпфирования, характеризующим скорость затухания колебаний. В статье рассматриваются вопросы определения величины параметров элементов, входящих в эквивалентную электрическую схему. Обеспечив существенное снижение ресурсных и временных затрат, предложенный подход позволил получить математические зависимости, связывающие предельные величины, определяющие динамические характеристики рассматриваемых систем (границы диапазона изменения собственных частот колебаний, максимально достижимый показатель демпфирования, значение резонансной частоты системы при подключении резистивной электрической цепи), со значениями собственных частот колебаний исходной конструкции с пьезоэлементом в режимах холостого хода и короткого замыкания.

© ПНИПУ

© Юрлов Максим Александрович – инж.-исслед., e-mail: yurlovm@icmm.ru, [ID 0000-0003-1507-6617](https://orcid.org/0000-0003-1507-6617)

Ошмарин Дмитрий Александрович – м.н.с., e-mail: oshmarin@icmm.ru, [ID 0000-0002-9898-4823](https://orcid.org/0000-0002-9898-4823)

Севодина Наталья Витальевна – к.т.н., н.с., e-mail: natsev@icmm.ru, [ID 0000-0001-9374-7135](https://orcid.org/0000-0001-9374-7135)

Юрлова Наталия Алексеевна – к.ф.-м.н., доц., с.н.с., e-mail: yurlova@icmm.ru, [ID 0000-0003-3497-0358](https://orcid.org/0000-0003-3497-0358)

Maksim A. Yurlov – Research Engineer, e-mail: yurlovm@icmm.ru, [ID 0000-0003-1507-6617](https://orcid.org/0000-0003-1507-6617)

Dmitrii A. Oshmarin – Junior Research, e-mail: oshmarin@icmm.ru, [ID 0000-0002-9898-4823](https://orcid.org/0000-0002-9898-4823)

Nataliya V. Sevodina – CSc in Technical Sciences, Researcher, e-mail: natsev@icmm.ru, [ID 0000-0001-9374-7135](https://orcid.org/0000-0001-9374-7135)

Nataliia A. Yurlova – CSc in Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher,

e-mail: yurlova@icmm.ru, [ID 0000-0003-3497-0358](https://orcid.org/0000-0003-3497-0358)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE PROBLEM SOLUTION OF NATURAL VIBRATIONS OF ELECTROELASTIC BODIES WITH EXTERNAL ELECTRIC CIRCUITS BASED ON THEIR ELECTRICAL ANALOGUE

M.A. Iurlov, D.A. Oshmarin, N.V. Sevodina, N.A. Iurlova

Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Science, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 July 2018
Accepted: 6 December 2018
Published: 28 December 2018

Keywords:

electroelastic structure, piezoelectric element, electric circuit, electrical analogue of system, natural vibrations, complex eigenfrequencies.

ABSTRACT

The optimization of dissipative properties of electroelastic bodies with external electric circuits suggests the selection of parameters for these circuits which can provide the most effective damping of vibrations at the prescribed frequency. Since the external circuits can be represented as a set of elements with concentrated parameters connected to the system with distributed parameters, solving the electroelastic problems for such systems using their full formulation requires high computational and time costs. In mechanics, there exist several approaches, which allow the representation of the mechanical systems with distributed parameters as discrete systems with concentrated parameters of the spring-mass-damper type. In this paper, an approach to the analysis of the dynamic behavior of electromechanical systems with external electric circuits is developed based on the equivalent electric circuits representing discrete electric systems with concentrated parameters. The above discrete systems are the analogues of the initial electromechanical systems in relation to frequency characteristics and electrical processes occurring in them. The solution to the problem on natural vibrations of electromechanical systems are the complex natural vibration frequencies, the real part of which defines the frequency of vibrations and imaginary part – the damping index. The present paper considers the problems of determining the magnitude of elements parameters of the equivalent circuit. The proposed approach made it possible to obtain the mathematical relations binding the limit values defining the dynamic characteristics of systems under consideration (boundaries of the frequency range for natural vibration frequencies change, maximal reachable damping index, the value of resonant frequency of a system when the resistive external circuit is attached) with the values of natural vibration frequencies of the original structure with piezoelectric element operating in the open circuit and short circuit modes.

© PNRPU

Введение

В работах [1, 2] была показана возможность демпфирования колебаний конструкции с присоединенным к ее поверхности пьезоэлементом с помощью внешних электрических цепей (шунтирующих цепей), присоединенных к электродированным поверхностям элементов конструкции, выполненных из пьезоэлектрических материалов. В настоящее время шунтирование внешними электрическими цепями элементов конструкций, выполненных из пьезоматериалов, для демпфирования колебаний широко применяется в технических приложениях, где малые размеры и вес объектов играют решающую роль, либо в таких условиях эксплуатации конструкции, при которых нет доступа к источникам электроэнергии. Для успешной реализации данного подхода необходимо понимание, как изменяются динамические характеристики конструкции с пьезоэлементом и внешней электрической цепью при изменении внутренних характеристик такой электромеханической системы.

При анализе динамических процессов в конструкции с пьезоэлементами и внешними электрическими цепями ее динамические характеристики могут быть определены из решения различных задач: о вынужденных колебаниях, о собственных колебаниях, о переход-

ных процессах с начальными условиями. С точки зрения эффективности определения динамических характеристик и оптимизации диссипативных свойств задача о собственных колебаниях является наиболее удобной и информативной, что было продемонстрировано, например, в работах [3, 4]. В результате решения данной задачи найденные комплексные собственные значения будут определять частоты собственных колебаний и показатели демпфирования. Эффективность приложения рассматриваемой задачи для оптимизации динамических характеристик определяется их независимостью от нагрузок.

В силу особенностей математической постановки задачи о собственных колебаниях электроупругих тел с внешними электрическими цепями численная реализация алгоритма ее решения на основе метода конечных элементов является достаточно нетривиальной задачей [5], и получение решения требует существенных временных затрат из-за большой размерности разрешающей системы уравнений.

В то же время существует общность математических уравнений, которыми описываются колебания в механических системах и колебания тока и напряжения в электрических цепях. При этом индуктивность является аналогом массы, сопротивление – аналогом вязкости, а емкость – аналогом жесткости. Совпадение

математических описаний позволяет рассматривать в ряде случаев вместо механической системы электрическую, применяя метод динамических аналогий, заменяя уравнения движения механической системы соответствующими уравнениями для эквивалентной электрической. Этот подход был использован, например, в работах [6–10].

Метод динамических аналогий был описан Гарри Ф. Ольсоном в [11], где приведены аналогии между элементами механических (линейных и вращающихся), акустических и электрических систем и предложено анализировать акустические и механические системы путем преобразования их к электрическим аналогам. Данный подход широко применяется для решения различных механических задач [12–20].

При этом рассматриваются два типа аналогий: при первой механические усилия заменяются электрическим напряжением, скорость – электрическим током, при второй усилия являются аналогом тока, а скорость – электрического напряжения. Второй подход имеет преимущество, состоящее в том, что структура эквивалентной электрической цепи, полученной таким образом, почти идентична структуре исходной плоской механической системы.

В настоящее время метод динамических аналогий успешно применяется при моделировании поведения конструкций с пьезоэлементами и внешними электрическими цепями (электромеханических систем).

Представление электромеханической системы в виде дискретного аналога, состоящего из элементов с сосредоточенными параметрами, позволяет существенно упростить процедуру получения ее динамических характеристик. В классической механике таким аналогом является одномассовая система типа «пружина–масса–демпфер». С помощью такого аналога можно описывать динамические характеристики исходной электромеханической системы с бесконечным числом степеней свободы в окрестности какой-либо одной резонансной частоты. С другой стороны, в электродинамике известен ряд подходов к моделированию поведения пьезоэлектриков с помощью их электрических аналогов в виде эквивалентных электрических схем [21–26]. Данные модели описывают поведение пьезоматериалов в диапазоне частот ниже ультразвука. Одна из первых моделей эквивалентной электрической цепи предложена Ван Дюке [8]. Все эти модели описывают поведение пьезоэлектрика как отдельного элемента с сосредоточенными параметрами и довольно широко используются многими исследователями для понимания влияния внешней электрической цепи на исследуемую конструкцию. Однако данные модели имеют свои особенности. Модель Sherrit [22] использует комплексные элементы схемы для моделирования потерь в пьезоэлектрической керамике, поэтому компоненты цепи в модели Sherrit имеют комплексные значения, тогда как в модели Van Dyke они действительные. Модель, предложенная Guan [21], является попыткой повысить точность модели Van Dyke

введением двух дополнительных сопротивлений для учета диссипации энергии на нерезонансных режимах. Mason в своей работе [27] объяснил физический смысл этих механических констант в схеме модели Van Dyke с точки зрения резонансных и антирезонансных частот.

Однако, с одной стороны, присоединение к конструкции пьезоэлемента изменяет ее механические граничные условия, с другой – на пьезоэлемент будет воздействовать конструкция, имеющая свое множество резонансов. Поэтому для моделирования поведения пьезоэлемента, прикрепленного к конструкции, необходима модель, описывающая множество резонансных частот в широком частотном диапазоне, что, соответственно, требует другой схемы электрической модели.

В настоящее время исследователями используются оба подхода моделирования исходной электромеханической системы электрическим аналогом в форме эквивалентной электрической схемы: моделирование пьезоэлемента с присоединенной к нему внешней электрической цепью без учета влияния конструкции и с учетом влияния конструкции, к которой он присоединен [8, 23, 28–30].

Влияние конструкции на поведение пьезоэлемента можно учесть, например, вводя дополнительные параллельные ветви в схему модели Van Dyke. Аналогично модифицируется и модель Guan, образуя так называемую полную модель. Каждая последовательная RLC-ветка в этой модели физически соответствует одной резонансной моде. Однако при применении полной модели Guan возникают сложности при определении численных значений ее параметров в том случае, когда резонансные частоты пьезокерамики и конструкции близки или совпадают.

При разработке электрических аналогов электровязкоупругих тел пьезоэлемент моделируется различным образом.

В ряде работ [29–32] предлагается в качестве электрического аналога пьезоэлемента использовать его простейшую модель, представляющую собой постоянную емкость C_0 . Но при этом необходимо понимать, что пьезоэлемент ведет себя как обычный конденсатор с емкостью C_0 только на частотах, далеких от резонанса.

В настоящее время эквивалентные схемы замещения с учетом влияния основной конструкции нашли особенно широкое применение в задачах, связанных с расчетом эффективности устройств для сбора и накопления энергии (energy harvesting) на основе пьезоэлектрических материалов как малых альтернативных источников энергии [33], в которых крайне важно понимать рабочую производительность, обусловленную механическим и электрическим взаимодействием. Сами устройства моделируются, как правило, консольной балкой [34–35] и сложными электрическими схемами. В настоящее время подход, основанный на замещении конструкции ее электрическим аналогом в форме эквивалентной электрической схемы, нашел особенно широкое применение в таких приложениях, в которых

крайне важно понимать рабочую производительность системы, обусловленную механическим и электрическим взаимодействием [28, 33–34].

Поскольку эквивалентная электрическая схема отражает реальную конструкцию и ее динамические характеристики при определенных граничных условиях, существует большое количество эквивалентных электрических схем, являющихся электрическим аналогом рассматриваемых систем, ориентированных на решение конкретных задач, и перенос ранее разработанных другими авторами схем на конструкции другой геометрии и другое внешнее воздействие зачастую просто невозможен.

Несмотря на то, что эквивалентные схемы замещения не только пьезоэлемента, но и всей конструкции с пьезоэлементом применяются все чаще, например [22, 36–37], не найдено работ, в которых электрические аналоги электроупругих тел с внешними электрическими цепями применяются для нахождения оптимальных параметров внешних электрических цепей, обеспечивающих максимальное демпфирование колебаний на заданных частотах, на основе использования задачи о собственных колебаниях конструкций.

В рамках данной работы предложено осуществлять анализ динамических характеристик электромеханической системы, представляющей собой конструкцию с пьезоэлементом, к электродированным поверхностям которого присоединена внешняя электрическая цепь, на основе электрического аналога в виде эквивалентной электрической схемы, представляющей собой дискретную электрическую систему с сосредоточенными параметрами. Полученная дискретная система является полным аналогом исходной электромеханической системы с точки зрения частотных характеристик и протекающих в ней электрических процессов. Предложенный подход позволил существенно сократить время численных исследований и на их основе получить математические зависимости связи предельных величин, определяющих динамические характеристики рассматриваемых систем (границы диапазона изменения собственных частот колебаний, максимально достижимый показатель демпфирования, значение резонансной частоты системы при подключении резистивной электрической цепи), со значениями собственных частот колебаний исходной конструкции с пьезоэлементом в режимах холостого хода и короткого замыкания.

1. Дискретный электрический аналог электроупругого тела с внешними электрическими цепями

При определении динамических характеристик конструкций, представляющих собой континуальную среду с элементом, выполненным из пьезоэлектрического материала, к электродированным поверхностям которого подключена внешняя электрическая цепь (электромеханическая система), не всегда удобно и целесообразно

решать задачу о собственных колебаниях в полной континуальной математической постановке [5].

В расчетной схеме этой системы внешняя электрическая цепь представляет собой совокупность элементов с сосредоточенными параметрами и электрическими степенями свободы. Для уменьшения размерности решаемой задачи привлекательным является подход, позволяющий представить исходную конструкцию с присоединенным к ней пьезоэлементом в виде аналогичной дискретной системы с электрическими степенями свободы. Для этого предлагается воспользоваться моделью для описания кварцевого резонатора (рис. 1, а), предложенной в 1925 году Van Dyke [8], распространив ее на все деформируемое тело с пьезоэлементом.

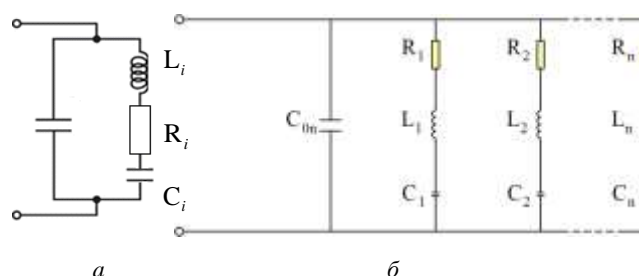


Рис. 1. Эквивалентная электрическая схема, предложенная Van Dyke [8] для кварцевого резонатора (а); электрический аналог электроупругого тела в форме эквивалентной схемы замещения (б)

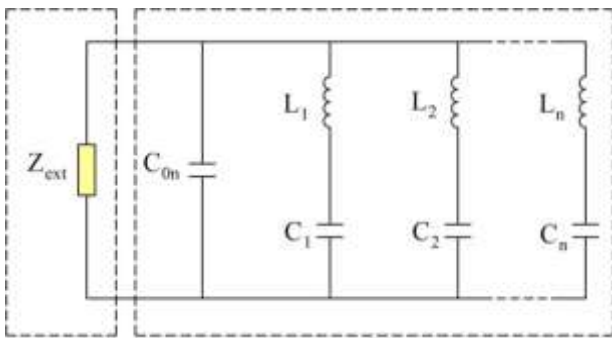
Fig. 1. Equivalent circuit proposed by Van Dyke [8] for a quartz resonator (a); equivalent circuits for electroelastic body in the form of equivalent substitution scheme (b)

Данная модель (см. рис. 1, а) представляет собой параллельное соединение последовательно соединенных емкости C_i , индуктивности L_i , сопротивления R_i и емкости пьезоэлектрика C_{0i} . Индекс i указывает на то, что эта модель описывает поведение рассматриваемого объекта вблизи i -го резонанса. При исследовании динамического поведения конструкции не в окрестности какого-либо отдельного резонанса, а в некотором частотном диапазоне, в котором может находиться несколько резонансных частот колебаний, эквивалентная модель модифицируется путем добавления параллельно имеющимся элементам (ветвям) последовательных колебательных контуров (рис. 1, б). В результате можно получить электрическую схему, описывающую динамику рассматриваемой системы в любом частотном диапазоне. Если рассматриваемое деформируемое тело с включением из пьезоматериала является упругим, то в эквивалентной схеме будут отсутствовать сопротивления R_i .

Рассмотрим математическую постановку задачи о собственных колебаниях электрического аналога упругого тела с присоединенным к его поверхности пьезоэлементом в форме эквивалентной электрической схемы.

К электродированным поверхностям пьезоэлемента подключена внешняя цепь, состоящая из различным

образом соединенных индуктивных (L_k) или резистивных (R_k) элементов, с общим электрическим импедансом Z_{ext} . Предположим, что колебания тока во внешней цепи происходят с частотой колебаний всей электроупругой системы. Тогда схема электрического аналога, описывающая поведение дискретной системы (конструкция, пьезоэлемент и внешняя электрическая цепь) в диапазоне, включающем n резонансных частот колебаний, будет иметь вид, представленный на рис. 2. Здесь емкость C_{0n} и параллельные ветви $L_i C_i$ относятся непосредственно к упругому телу с пьезоэлементом, а элемент Z_{ext} описывает внешнюю электрическую цепь.



Внешняя электрическая цепь Упругая конструкция с пьезоэлементом

Рис. 2. Эквивалентная схема электрического аналога электроупругого тела с внешней электрической цепью
 Fig. 2. Equivalent circuits of an electrical analogue for electroelastic body with external electric circuit

Далее решается задача о собственных колебаниях электрического аналога рассматриваемой системы. На основании законов Кирхгофа для электрических цепей [38–39] i -й электрический контур $C_i L_i C_{0i}$ в данной схеме (см. рис. 2), образованный емкостью C_{0n} с каждой параллельной ветвью $C_i L_i$, описывается дифференциальным уравнением относительно электрического заряда. В результате для n контуров имеем n дифференциальных уравнений (1):

$$L_i \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \frac{1}{C_i} q_i + \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_{0n}} q_j = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Получим уравнения для внешней электрической цепи. Пусть внешняя электрическая цепь представляет собой последовательно соединенные сопротивление R_{ext} и индуктивность L_{ext} . Тогда уравнения баланса напряжений для контура внешней цепи будут иметь следующий вид (2):

$$L_{ext} \frac{d^2 q_{ext}}{dt^2} + R_{ext} \frac{dq_{ext}}{dt} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{q_j}{C_{0n}} = 0. \quad (2)$$

Подставляя в систему (1)–(2) решение вида $q_i = \bar{q}_{0i} e^{\lambda t}$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных зарядов в ветвях эквивалентной схемы электрического аналога (3), где $\lambda = \lambda_{Re} + i\lambda_{Im}$ – комплексная частота колебаний.

$$\begin{aligned} \bar{q}_{0i} \lambda^2 L_i + \frac{\bar{q}_{0i}}{C_i} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\bar{q}_{0j}}{C_{0n}} &= 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \bar{q}_{0ext} \lambda^2 L_{ext} + \bar{q}_{0ext} \lambda R_{ext} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\bar{q}_{0j}}{C_{0n}} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь мнимая часть комплексной частоты λ_{Im} представляет собой круговую частоту колебаний, а действительная часть λ_{Re} – показатель демпфирования.

Из решения характеристического уравнения для данной системы относительно λ получаем $n+1$ пару комплексно-сопряженных собственных значений. Исходя из физических соображений в дальнейшем рассматриваем только комплексные частоты колебаний с положительной мнимой частью λ_{Im} и отрицательной действительной частью λ_{Re} (обеспечивающей демпфирование колебаний).

Подробно математическая постановка задачи о собственных колебаниях для предложенного электрического аналога рассматриваемой системы приведена в [40].

При использовании эквивалентных электрических схем для анализа динамического поведения электроупругих систем основной проблемой является определение значений параметров $C_i L_i$ и C_{0i} составляющих ее элементов. Для определения данных параметров предлагается использовать следующий численный алгоритм.

На первом этапе определяется статическая емкость C_0 на основе решения статической задачи о деформировании конструкции с пьезоэлементом под действием приложенной разности потенциалов V с учетом заземления одной из электродированных поверхностей:

$$C_0 = \frac{Q_s}{V}. \quad (4)$$

Здесь Q_s – значение суммарного электрического заряда, образующегося на незаземленной электродированной поверхности, при приложении заданной разности потенциалов V .

Далее находятся собственные частоты колебаний упругой конструкции с пьезоэлементом без внешней цепи в режиме короткого замыкания электродированных поверхностей пьезоэлемента на основе решения задачи о собственных колебаниях при помощи любого пакета прикладных программ, например ANSYS. В результате решения получаем спектр собственных частот колебаний, на основе которого определяются искомые параметры $C_i L_i$ и C_{0i} .

Для упругого тела с включениями из упругого пьезоматериала все собственные частоты колебаний являются чисто мнимыми. Тогда параметры эквивалентной цепи $C_i L_i$ и C_{0i} для каждой резонансной частоты определяются следующим образом:

$$C_i = \left(\frac{Q_i}{\lambda_{s/c}^i} \right)^2, \quad L_i = \frac{1}{C_i (\lambda_{s/c}^i)^2}, \quad C_{0i} = C_0 - \sum_i C_i \quad (5)$$

где $\lambda_{s/c}^i$ – собственная частота колебаний конструкции с пьезоэлементом, работающим в режиме короткого замыкания (short circuit).

Количество колебательных контуров, необходимых для описания динамических характеристик электроупругой конструкции, определяется на основе анализа сходимости получаемых результатов в выбранном для исследования диапазоне частот. Сходимость оценивалась по значениям собственных частот колебаний, полученным на основе решения задачи о собственных колебаниях электроупругой конструкции с внешней электрической цепью методом конечных элементов (МКЭ) [5].

При некоторых модах колебаний конструкции деформация прикрепленного к ее поверхности пьезоэлемента может либо отсутствовать, либо быть симметричной. В этом случае на его электродированных поверхностях не будет генерироваться электрический потенциал, необходимый для работы внешней электрической цепи. Поэтому на таких модах колебаний внешняя электрическая цепь ни при каких значениях параметров не может быть использована с целью управления динамическим поведением конструкции. Возникновение таких ситуаций можно предотвратить соответствующим подбором расположения пьезоэлемента на конструкции [41].

Проведенные исследования показали, что учет в электрическом аналоге контуров, соответствующих модам колебаний, при которых на пьезоэлементе не генерируется электрический потенциал, не влияет на точность получаемых результатов, но при этом увеличивает порядок разрешающей системы уравнений. Поэтому для дальнейшего удобства при построении электрического аналога рассматриваемой механической системы в форме эквивалентной электрической схемы контуры, соответствующие таким частотам колебаний, исключались из рассмотрения [40].

2. Результаты численного моделирования

Достоверность определения динамических характеристик электромеханических систем на основе использования их электрического аналога подтвердим на двух примерах.

Первый пример – жестко заземленная по краю упругая пластинка (рис. 3, а) с размерами $l_1 = 210$ мм, $b_1 = 26$ мм, $h_1 = 0,5$ мм. Пьезоэлемент выполнен в форме прямоугольника с размерами $l_p = 50$ мм,

$b_p = 20$ мм, $h_p = 0,36$ мм и расположен в 12 мм от закрепленного края пластинки симметрично относительно оси пластинки. Пластинка выполнена из материала со следующими физико-механическими характеристиками: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; удельная плотность $\rho = 7800$ кг/м³. В качестве материала пьезоэлемента выбрана пьезо керамика PZT-4 с поляризацией в направлении оси z . Ниже приведены значения физико-механических характеристик: коэффициенты анизотропной матрицы упругих констант: $C_{11} = C_{22} = 13,9 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{12} = 7,78 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{13} = C_{23} = 7,43 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{33} = 11,5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{44} = 3,06 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{55} = C_{66} = 2,56 \cdot 10^{10}$ Н/м²; коэффициенты матрицы пьезоэлектрических модулей $\beta_{31} = \beta_{32} = -5,2$ Кл/м², $\beta_{33} = 15,1$ Кл/м², $\beta_{52} = \beta_{61} = 12,7$ Кл/м²; коэффициенты матрицы диэлектрической проницаемости $e_{11} = e_{22} = 6,45 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $e_{33} = 5,62 \cdot 10^{-9}$ Ф/м; удельная плотность $\rho = 7700$ кг/м³. Оси z соответствует индекс «3» у компонент матриц. Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы.

В качестве второго примера рассматривается тонкостенная оболочка в форме полуцилиндра, жестко заземленная по торцам и свободно опертая по образующей (рис. 3, б). Оболочка имеет следующие размеры: $r_1 = 76$ мм, $l_1 = 300$ мм, $h_1 = 0,25$ мм. К поверхности оболочки прикреплен пьезоэлемент в форме сегмента кольца с размерами $r_p = 76,25$ мм, $\varphi_p = 15,08^\circ$, $h_p = 0,36$ мм. Центр масс пьезоэлемента расположен на расстоянии 15 мм от заземленных торцов и смещен на 90° по угловой координате от свободно опертых образующих. Оболочка выполнена из упругого изотропного материала со следующими физико-механическими характеристиками: модуль упругости $E = 1,96 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, удельная плотность $\rho = 7700$ кг/м³. Пьезоэлемент выполнен из пьезо керамики PZT-4. Направление поляризации совпадает с направлением оси r . Физико-механические характеристики в этом случае приводятся в цилиндрической системе координат: коэффициенты матрицы упругих констант: $C_{11} = 11,5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{12} = C_{13} = 7,43 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{23} = 7,78 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{22} = C_{33} = 13,9 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{44} = C_{66} = 2,56 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{55} = 3,06 \cdot 10^{10}$ Н/м²; коэффициенты матрицы пьезоэлектрических модулей $\beta_{11} = \beta_{21} = -5,2$ Кл/м², $\beta_{31} = 15,1$ Кл/м², $\beta_{42} = \beta_{63} = 12,7$ Кл/м²; коэффициенты матрицы диэлектрической проницаемости $e_{11} = 5,62 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $e_{22} = e_{33} = 6,45 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, удельная плотность $\rho = 7700$ кг/м³. Оси r соответствует индекс «1» у компонент матриц. Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы.

Для обеих конструкций проведены численные расчеты и сравнения получаемых комплексных собствен-

ных частот колебаний при помощи решения задачи о собственных колебаниях электроупругой конструкции с внешней электрической цепью методом конечных элементов [5] и предлагаемого подхода моделирования динамического поведения электроупругих конструкций с внешними электрическими цепями на основе их электрического аналога. Для решения задачи методом конечных элементов использовались трехмерные

20-узловые конечные элементы с квадратичной аппроксимацией узловых неизвестных. Для моделирования электрической цепи использовались специальные двухузловые конечные элементы с линейной аппроксимацией узловых неизвестных. Для получения решения использовалась численная реализация алгоритма МКЭ, приведенная в [5].

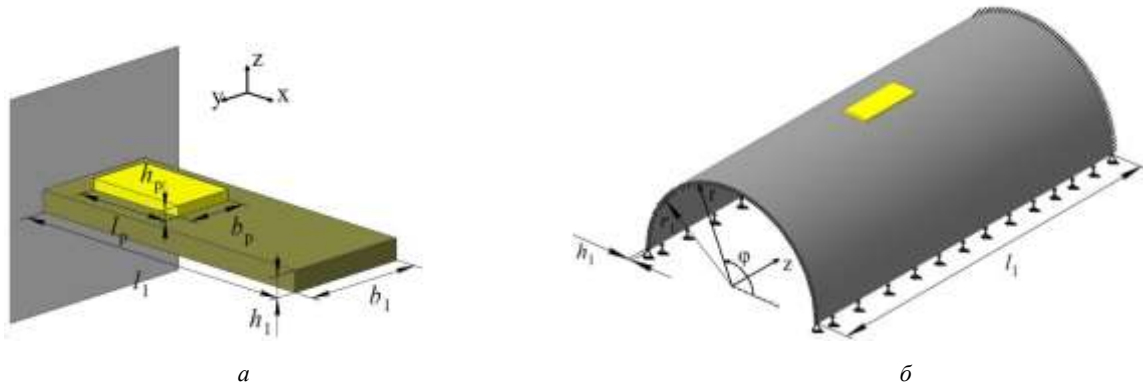


Рис. 3. Расчетные схемы конструкций с пьезоэлементом: пластинка (а) и оболочка (б)
 Fig. 3. Calculation schemes of structures with a piezoelectric element: plate (a) and shell (b)

Количество возможных для определения собственных частот колебаний при расчетах методом конечных элементов в полной математической постановке задачи определяется размерностью разрешающей системы уравнений. При этом могут существовать такие моды колебаний, реализуемые при некоторых собственных частотах, на которых электрический потенциал на электродированных поверхностях пьезоэлемента не генерируется. Для сравнения выбирались только те частоты колебаний, при которых генерируется электрический потенциал на электродированных поверхностях пьезоэлемента. Эти частоты колебаний пронумерованы в порядке возрастания их величины.

При расчетах с помощью электрического аналога рассматриваемой системы количество ветвей $C_i L_i$ определялось степенью сходимости получаемых результатов к результатам, полученным при решении задачи о собственных колебаниях в полной математической постановке.

В табл. 1 приведено сравнение первой и четвертой собственных частот колебаний для пластинки и оболочки, полученных обоими способами.

В приведенных расчетах результаты, полученные двумя способами, как по действительной, так и по мнимой частям комплексных частот колебаний, отличаются не более чем на 1% для пластинки и на 2% для оболочки.

Таблица 1

Собственные частоты колебаний конструкций с пьезоэлементом и последовательной RL -цепью

Table 1

Eigenfrequencies of structures with a piezoelectric element and a series-connected RL -circuit

Номер λ	Параметры цепи		Расчет МКЭ		Расчет по электрическому аналогу	
	R_{ext} (кОм)	L_{ext} (Гн)	Количество узловых неизвестных	$\frac{\lambda_{Re} + i\lambda_{Im}}{2\pi}$	Число контуров n	$\frac{\lambda_{Re} + i\lambda_{Im}}{2\pi}$
Пластинка						
1	456,4	11054	5462	-0,85 + $i \cdot 13,79$	1	-0,85 + $i \cdot 13,79$
4	10,5	13,86		-22,21 + $i \cdot 408,83$	8	-22,39 + $i \cdot 408,76$
Оболочка						
1	5,4	7,12	3808	-18,63 + $i \cdot 563,87$	11	-19,05 + $i \cdot 563,78$
4	1,0	1,3		-27,14 + $i \cdot 1239,19$	27	-26,83 + $i \cdot 1239,75$

Поскольку решение задачи с помощью электрического аналога позволяет многократно уменьшить требования к вычислительным и временным ресурсам, то это дает возможность на порядок увеличить количество

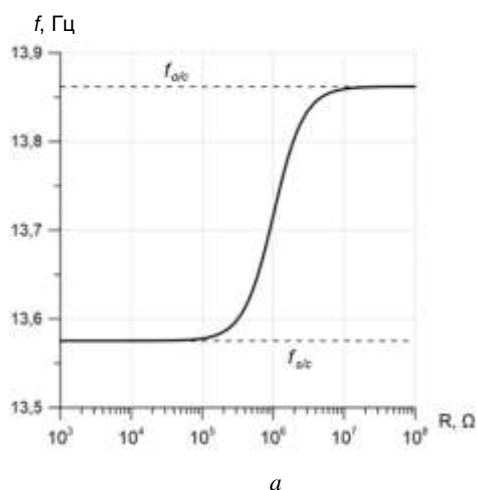
рассматриваемых вариантов при численных исследованиях электромеханических систем в широком диапазоне изменения параметров внешней электрической цепи.

Присоединение внешней электрической цепи к конструкции с пьезоэлементом приводит к изменению ее спектра собственных частот колебаний. Изменение заключается в том, что чисто мнимые комплексные частоты колебаний упругой конструкции становятся комплексными, попарно сопряженными. При этом в спектр собственных частот колебаний в случае последовательной внешней резонансной электрической цепи добавляется еще одна дополнительная комплексная частота колебаний. Эта частота может существенно меняться при изменении параметров электрической цепи (осуществляя настройку внешней электрической цепи на заданную частоту). При сближении этой дополнительной частоты колебаний с собственной частотой колебаний конструкции с пьезоэлементом последняя также изменяется по величине.

Накопленная в ходе многочисленных исследований информация позволила выявить закономерности, позволяющие определить границы возможного влияния изменения параметров электрической цепи на динамические характеристики системы, на основе значений собственных частот колебаний конструкции с пьезоэлементом в режимах холостого хода $\lambda_{o/c}$ и короткого замыкания $\lambda_{s/c}$ при отсутствии внешней электрической цепи.

Во-первых, представляют интерес границы диапазона, в котором возможно изменение действительных частей собственных частот колебаний системы в зависимости от параметров внешней электрической цепи:

а) при резистивной R -цепи (состоящей только из резистора сопротивлением R) изменение сопротивления вызывает изменение собственных круговых частот колебаний конструкции в пределах от $\lambda_{s/c}$ до $\lambda_{o/c}$:



а

б) при резонансной RL -цепи (состоящей из резистора сопротивлением R , катушки индуктивности L и конденсатора C , роль которого выполняет пьезоэлемент, обладающий емкостными свойствами) максимальное изменение i -й собственной частоты колебаний системы в области изменения параметров внешней цепи приближенно определяется формулой

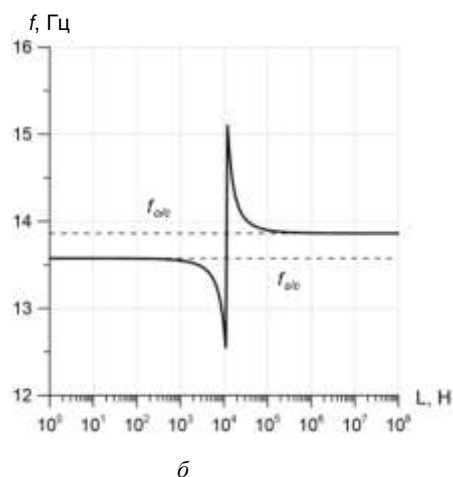
$$\Delta\lambda_{lm}^i = \lambda_{lm}^{i\max} - \lambda_{lm}^{i\min} \approx 2\lambda_{s/c}^i \sqrt{\frac{\lambda_{o/c}^i - \lambda_{s/c}^i}{\lambda_{o/c}^i + \lambda_{s/c}^i}}, \quad (7)$$

где

$$\lambda_{lm}^{i\max} \approx \frac{\lambda_{o/c}^i + \lambda_{s/c}^i}{2} + \lambda_{s/c}^i \sqrt{\frac{\lambda_{o/c}^i - \lambda_{s/c}^i}{\lambda_{o/c}^i + \lambda_{s/c}^i}},$$

$$\lambda_{lm}^{i\min} \approx \frac{\lambda_{o/c}^i + \lambda_{s/c}^i}{2} - \lambda_{s/c}^i \sqrt{\frac{\lambda_{o/c}^i - \lambda_{s/c}^i}{\lambda_{o/c}^i + \lambda_{s/c}^i}}.$$

На рис. 4 приведены границы изменения первой собственной частоты колебаний пластинки при наличии резистивной (рис. 4, а) и резонансной (рис. 4, б) внешних электрических цепей. В случае резонансной цепи на графике приведено влияние изменения индуктивности при малом значении сопротивления (принято $R = 10^{-5}$ Ом). Таким образом, в случае резонансной цепи диапазон изменения i -й собственной частоты шире диапазона от $\lambda_{s/c}$ до $\lambda_{o/c}$, указанного в работе [2].



б

Рис. 4. Зависимости мнимой части первой комплексной собственной частоты колебаний пластинки $f_{lm} = \lambda_{lm} / 2\pi$ от значения сопротивления для резистивной цепи (а) и от значения индуктивности для резонансной цепи при $R = 10^{-5}$ Ом (б); $f_{o/c} = \lambda_{o/c} / 2\pi$, $f_{s/c} = \lambda_{s/c} / 2\pi$

Fig. 4. Dependences of the imaginary part of the plate's first complex eigenfrequency $f_{lm} = \lambda_{lm} / 2\pi$ on the resistance value for the resistive circuit (a) and on the inductance value for the resonance circuit at $R = 10^{-5}\Omega$ (b), $f_{o/c} = \lambda_{o/c} / 2\pi$, $f_{s/c} = \lambda_{s/c} / 2\pi$

В качестве примера на рис. 5 приведен график изменения мнимой части первой комплексной собственной частоты колебаний оболочки (см. рис. 3, б) в зависимости от изменения параметров внешней электрической цепи R и L , полученный с помощью моделирования динамического поведения электроупругих конструкций с внешними электрическими цепями на основе их электрического аналога.

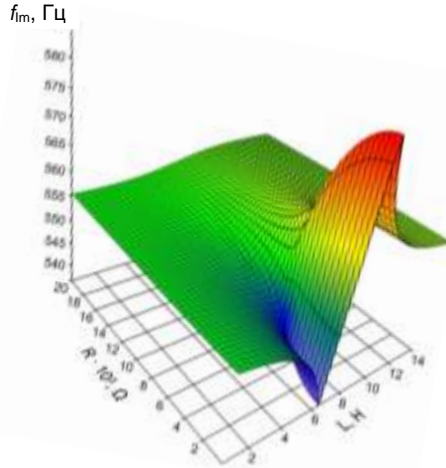


Рис. 5. Поведение мнимой части первой комплексной собственной частоты колебаний оболочки $f_{im} = \lambda_{im} / 2\pi$ в области параметров внешней электрической цепи R и L
 Fig. 5. The behaviour of the imaginary part of the shell's first eigenfrequency $f_{im} = \lambda_{im} / 2\pi$ in the field of the external electric circuit parameters R and L

Из графика, приведенного на рис. 5, видно, что максимальное изменение действительных частей комплексных собственных частот колебаний в случае резонансной цепи наблюдается в области около нулевых значений сопротивления. Таким образом, основное влияние на ширину диапазона изменения действительных частей оказывает именно величина индуктивности.

Другая важная характеристика рассматриваемой системы – максимально возможный показатель демпфирования i -й моды колебаний $\lambda_{Re}^{i\max}$:

а) при резистивной внешней цепи

$$\lambda_{Re}^{i\max} = -\frac{\lambda_{o/c}^i - \lambda_{s/c}^i}{2}; \tag{8}$$

б) при резонансной цепи

$$\lambda_{Re}^{i\max} \approx -\lambda_{s/c}^i \sqrt{\frac{\lambda_{o/c}^i - \lambda_{s/c}^i}{\lambda_{o/c}^i + \lambda_{s/c}^i}}. \tag{9}$$

При использовании задачи о собственных колебаниях для построения оптимизационных алгоритмов, связанных с подбором параметров внешних электрических цепей для наилучшего демпфирования колебаний, одним из вариантов целевой функции может являться значение показателя демпфирования для какой-либо конкретной частоты. В этом случае знание максимально возможного показателя демпфирования позволяет как существенно упростить сам процесс оптимизации, так и позволяет рассмотреть сценарии, при которых достижения максимальной степени демпфирования не требуется.

Помимо этого, знание максимально-достижимого значения показателя демпфирования позволяет оценить, насколько удачно подобраны параметры внешней цепи при использовании аналитических формул.

Кроме того, обнаружено, что при достижении максимального демпфирования в случае резистивной цепи комплексная резонансная частота системы λ_{rez}^i может быть определена по формуле

$$\lambda_{rez}^i = -\frac{\lambda_{o/c}^i - \lambda_{s/c}^i}{2} + i \frac{\lambda_{o/c}^i + \lambda_{s/c}^i}{2} \tag{10}$$

В табл. 2 для рассматриваемых конструкций (пластинка и оболочка) с пьезоэлементом и внешней резонансной RL -цепью приведены расчетные данные, полученные с помощью электрического аналога и по формулам (7) и (9).

Значения максимально возможного показателя демпфирования $\lambda_{Re}^{i\max}$ первой и четвертой мод колебаний пластинки и оболочки, полученные двумя способами, различаются менее чем на 3 %.

Таблица 2

Сравнение результатов, полученных по формулам (7) и (9) и на основе электрического аналога рассматриваемой системы

Table 2

Comparison of the results obtained by equations (7), (9) and by the electrical analogue of the system under consideration

Номер п/п	$\lambda_{o/c}$	$\lambda_{s/c}$	Диапазон изменения частот $\lambda_{Im}^{i\min} - \lambda_{Im}^{i\max}$		Показатель демпфирования $\lambda_{Re}^{i\max}$	
			Электрический аналог	Формула (7)	Электрический аналог	Формула (9)
Пластинка						
1	13,86	13,57	12,38–15,19	12,32–15,11	-1,42	-1,40
4	404,15	399,79	373,89–432,34	372,53–431,41	-29,83	-29,44
Оболочка						

1	557,41	554,25	527,81–585,78	526,28–585,38	–29,91	–29,55
4	1293,42	1287,62	1233,496–1349,62	1229,47–1351,57	–59,22	–61,05

Заключение

В рамках данной работы предложен подход к анализу собственных колебаний электромеханических систем с распределенными параметрами, представляющих собой конструкции, содержащие элементы, выполненные из пьезоэлектрических материалов, к электродированным поверхностям которых присоединены внешние электрические цепи, на основе их электрического аналога, представляемого в форме эквивалентной электрической схемы замещения в виде дискретной электрической системы с сосредоточенными параметрами.

Продемонстрирована эффективность предлагаемого подхода для определения динамических характеристик упругих систем с пьезоэлементами и внешними электрическими цепями в сравнении с вариантом численной реализации задачи о собственных колебаниях электроупругих тел с внешними электрическими цепями методом конечных элементов.

На примере определения собственных частот колебаний плоской и пространственной конструкций продемонстрированы достоверность и эффективность моделирования поведения электроупругих тел с внешними электрическими цепями на основе электрического аналога.

Библиографический список

1. Forward R.L. Electronic damping of vibrations in optical structures // *Applied Optics*. – 1979. – Vol. 18. – No. 5. – P. 690–697. DOI:10.1364/AO.18.000690
2. Hagood N., Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // *J. Sound and Vibration*. – 1991. – Vol. 146. – No. 2. – P. 243–268. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90762-9
3. Kligman E.P., Matveenko V.P. Natural Vibration Problem of Viscoelastic Solids as Applied to Optimization of Dissipative Properties of Constructions // *Int. J. Vibration and Control*. – 1997. – Vol. 3. – No. 1. – P. 87–102. DOI: 10.1177/107754639700300107
4. Моделирование и оптимизация динамических характеристик smart-структур с пьезоматериалами / В.П. Матвеевко [и др.] // *Физическая мезомеханика*. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 75–85. DOI: 10.1134/S1029959912020063
5. Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации / В.П. Матвеевко [и др.] // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 476–485. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.40
6. Firestone F.A. New analogy between mechanical and electrical systems // *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America*. – 1933. – No 4. – P. 249–267. DOI: 10.1121/1.1915605
7. Mason W.P. Electrical and Mechanical Analogies // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 1942. – No. 14. – P. 128. DOI: 10.1121/1.1902325
8. Dyke V. The electric network equivalent of a piezoelectric resonator // *Physical Review*. – 1925. – Vol. 25. – No. 6. – 895 Abs. No 52.

Накопленный материал результатов численных исследований на основе применения электрического аналога рассматриваемых электромеханических систем позволил обнаружить математические зависимости связи предельных величин, определяющих их динамические характеристики (границы диапазона изменения собственных частот колебаний, максимально достижимый показатель демпфирования, значение резонансной частоты системы при подключении резистивной электрической цепи), со значениями собственных частот колебаний конструкции с пьезоэлементом при отсутствии электрической цепи в режимах холостого хода и короткого замыкания.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-590152).

Acknowledgements

The work is carried out with the financial support from the Russian Foundation for Basic Research (Project Nr.17-01-590152).

9. Firestone F.A. The Mobility Method of Computing the Vibration of Linear Mechanical and Acoustical Systems: Mechanical Electrical Analogies // *J. Appl. Phys.* – 1938. – No. 9. – P. 373–387. DOI: 10.1063/1.1710432
10. Miles J. Applications and Limitations of Mechanical-Electrical Analogies. New and Old // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 1943. – Vol. 14. – P. 183–192. DOI: 10.1121/1.1916217
11. Ольсон Г. Динамические аналогии. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1947. – 224 с.
12. Moller M., Glocker C. Analogous Non-Smooth Models of Mechanical and Electrical Systems / in *Multiscale Problems in Multibody System Contacts* (ed. P. Eberhard). – Springer: Netherlands. – 2007. – P. 45–54. DOI: 10.1007/978-1-4020-5981-0_5
13. Жеребко К.В., Петров М.Р., Петрова А.Н. Применение электромеханических аналогий для расчета шарнирных стержневых систем с большими перемещениями узлов // *Учен. зап. Космопольского-на-Амуре гос. техн. ун-та*. – 2013. – № 1(13). – С. 37–41.
14. Janschek K. *Mechatronic Systems Design. Methods, Models, Concepts*. – Berlin: Springer, 2012. – 815 p. DOI: 10.1007/978-3-642-17531-2
15. Rinaldis A. de, Scherpen J. An Electrical Interpretation of Mechanical Systems via the Pseudo-inductor in the Brayton-Moser Equations // *Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference – Seville, Spain*. – 2005. – P. 5983–5988. DOI: 10.1109/CDC.2005.1583119
16. Хевер Р. Аналогии механических систем. Примеры составления электрических моделей // *Вестник АГТУ*. – 2007 – № 6 (41). – С. 174–177.

17. Кузнецов Н.К., Хань Ле Ба. Управление колебательными движениями мехатронных систем на основе задания дифференциальных уравнений движения исполнительных механизмов // Вестник ИрГТУ. – 2013. – № 6 (77). – С. 21–25.
18. Кузнецов Н.К., Иов И.А., Иов А.А. Разработка электромеханической модели механизма тяги шагающего экскаватора // Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. – 2017. – Т. 21, № 11. – С. 53–66. DOI: 10.21285/1814-3520-2017-11-53-66
19. Кузнецов Н.К., Хань Ле Ба. Синтез алгоритмов управления колебаниями мехатронных систем на основе использования метода электромеханических аналогий // Авиационное строительство и транспорт Сибири: материалы всерос. науч.-практ. конф. – Иркутск, 2014. – С. 376–382.
20. Hamill D.C. Lumped Equivalent Circuits of Magnetic Components: The Gyrator-Capacitor Approach // IEEE Transactions on power electronics. – 1993. – Vol. 8. – No. 2. – P. 97–103. DOI: 10.1109/63.223957
21. Guan M., Liao W.-H. Studies on the circuit models of piezoelectric ceramics // Proc. International Conference on Information Acquisition. – Hefei, China, 2004. – P. 26–31. DOI: 10.1109/ICIA.2004.1373314
22. An accurate equivalent circuit for the unloaded piezoelectric vibrator in the thickness mode / S. Sherrit [et al] // J. of Phys. D: Appl. Phys. – 1997. – Vol. 30. – No. 16. – P. 2354–2363. DOI: 10.1088/0022-3727/30/16/014
23. Park C.H. On the circuit model of piezoceramics // J. of Intelligent Material Systems and Structures – 2001. – Vol. 12. – No. 7. – P. 515–522. DOI: 10.1177/10453890122145302
24. Piezo-Electro Mechanical (PEM) Kirchhoff-Love plates / S. Alessandrini [et al] // European Journal of Mechanics, A/Solids. – 2004. – Vol. 23. – No. 4. – P. 689–702. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.03.003
25. Giorgio I., Culla A., Del Vescovo D. Multimode vibration control using several piezoelectric transducers shunted with a multiterminal network // Archive of Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 79. – P. 859–879. DOI: 10.1007/s00419-008-0258-x
26. Piezo-electromechanical Smart Materials with distributed arrays of Piezoelectric Transducers: current and upcoming applications / I. Giorgio [et al] // Int. J. of Appl. Electromagnetics and Mechanics. – 2015. – Vol. 47. – No. 4. – P. 1051–1084. DOI: 10.3233/JAE-140148
27. Mason W.P. Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics. – New York: Van Nostrand Mason, 1950. – 508 p.
28. Electrical modeling of piezoelectric ceramics for analysis and evaluation of sensory systems / J. Kim [et al] // Proc. IEEE Sensors Applications Symposium. – Atlanta, GA, USA, 2008. – P. 122–127.
29. Agnani A., Mastroddi F., Polli G.M.. Shunted piezoelectric patches in elastic and aeroelastic vibrations // Computers and Structures. – 2003. – Vol. 81. – No. 2. – P. 91–105. DOI: 10.1016/S0045-7949(02)00392-9
30. Caruso G. A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping // Smart Mater. Struct. – 2001. – № 10. – P. 1059–1068. DOI: 10.1088/0964-1726/10/5/322
31. Fleming A.J., Behrens S., Moheimani S.O.R. Reducing the inductance requirements of piezoelectric shunt damping systems // Smart Mater. Struct. – 2003. – No. 12. – P. 57–64. DOI: 10.1088/0964-1726/12/1/307
32. Thomas O., Ducarne J., Deu J.-F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction // Smart Mater. Struct. – 2012. – Vol. 21. – No. 1. – P. 015008. DOI: 10.1088/0964-1726/21/1/015008
33. Pang S., Li W., Kan J. Optimization analysis of interface circuits in piezoelectric energy harvesting systems // Journal of Power Technologies. – 2016. – Vol. 96. – No. 1. – P. 1–7.
34. Chen Y.-Y., Vasic D. Electrical interfacing circuit discussion of galloping-based piezoelectric energy harvester // Physics Procedia. – 2015. – Vol. 70. – P. 1017–1021. DOI: 10.1016/j.phpro.2015.08.212
35. A self-powered switching circuit for piezoelectric energy harvesting with velocity control / Y.-Y. Chen [et al] // European Physical Journal: Applied Physics, EDP Sciences. – 2012. – Vol. 57. – No. 3. – P. 1–7. DOI: 10.1051/epjap/2012110355
36. Equivalent circuit model of an impact-based piezoelectric energy harvester / S.H. Kim [et al] // Journal of Physics: Conference Series. – 2014. – Vol. 557. – article 012094. DOI: 10.1088/1742-6596/557/1/012094
37. Yang Y., Tang L. Equivalent Circuit Modeling of Piezoelectric Energy Harvesters // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2009. – Vol. 20. – P. 2223–2235. DOI: 10.1177/1045389X09351757
38. Charles K.A., Sadiku M.N.O. Fundamentals of electric circuits, 4th ed. – New York: The McGraw-Hill Companies Inc., 2009. – 1056 p.
39. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. – 296 с.
40. Modelling of vibrational processes in systems with piezoelements and external electric circuits on the basis of their electrical analogue / V.P. Matveenko [et al] // International Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2018. – No 6. – P. 1–12. – DOI: 10.1177/1045389X18781025
41. Sevodina N.V., Yurlova N.A., Oshmarin D.A. The optimal placement of the piezoelectric element in a structure based on the solution of the problem of natural vibrations // Solid State Phenomena. – 2015. – Vol. 243. – P. 67–74. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.243.67

References

1. Forward R.L. Electronic damping of vibrations in optical structures. Applied Optics, 1979, vol. 18, no.5, pp. 690-697. DOI: 10.1364/AO.18.000690
2. Hagood N., Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *J. Sound and Vibration*, 1991, vol. 146, no. 2, pp. 243-268. DOI:10.1016/0022-460X(91)90762-9
3. Kligman E.P., Matveenko V.P. Natural Vibration Problem of Viscoelastic Solids as Applied to Optimization of Dissipative Properties of Constructions. *Int. J. Vibration and Control*, 1997, vol. 3, no. 1, pp. 87-102. DOI: 10.1177/107754639700300107
4. Matveenko V.P. Simulation and optimization of dynamic characteristics of piezoelectric smart structures. *Physical Mesomechanics*, 2012, vol. 15, no. 3-4, pp. 190-199. DOI: 10.1134/S1029959912020063
5. Matveenko V.P. Zadacha o sobstvennykh kolebaniyakh elektroviazkouprugikh tel s vneshnimi elektricheskimi tsepiami i konechno-elementnye sootnosheniia dlia ee chislennoi realizatsii [Natural vibration problem for electroviscoelastic body with external electric circuits and finite-element relations for its numerical implementation]. *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 476-485. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.40
6. Firestone F.A. New analogy between mechanical and electrical systems. Citation: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1933, no 4, pp. 249- 267. DOI: 10.1121/1.1915605

7. W.P. Mason Electrical and Mechanical Analogies. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1942, no 14, pp, 128. DOI: 10.1121/1.1902325
8. Dyke vol. The electric network equivalent of a piezoelectric resonator. *Physical Review*, 1925, vol. 25, no. 6, 895 abs. no 52.
9. Firestone F.A. The Mobility Method of Computing the Vibration of Linear Mechanical and Acoustical Systems: Mechanical Electrical Analogies. *J. Appl. Phys*, 1938, no.9, pp. 373-387. DOI: 10.1063/1.1710432
10. Miles J. Applications and Limitations of Mechanical-Electrical Analogies. New and Old. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1943, vol. 14, pp. 183-192. DOI: 10.1121/1.1916217
11. Olson H.F. Dynamical Analogies. *New York, UAS: D. Van Nostrand Company, Inc.*, 1943, 208p.
12. Moller M., Glocker C. Analogous Non-Smooth Models of Mechanical and Electrical Systems / in Multiscale Problems in Multibody System Contacts (ed. P. Eberhard)ю. *Netherlands: Springer*, 2007, pp. 45-54. DOI: 10.1007/978-1-4020-5981-0_5
13. Zhrebko K.vol., Petrov M.R., Petrova A.N. Primenenie elektromekhanicheskikh analogii dlia rascheta sharnirnykh sterzhnevnykh sistem s bolshimi peremeshcheniiami uzlov [Using electromechanical analogies for the calculation of hinged-rod systems with a large traverse]. *Uchenye zapiski Komsomolskogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2013, no. 1 (13), pp. 37-41.
14. Janschek K. Mechatronic Systems Design. Methods, Models, Concepts. *Berlin: Springer*, 2012, 815 p. DOI: 10.1007/978-3-642-17531-2
15. de Rinaldis A., Scherpen J. An Electrical Interpretation of Mechanical Systems via the Pseudo-inductor in the Brayton-Moser Equations. *Seville, Spain, Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, 2005, pp. 5983-5988. DOI: 10.1109/CDC.2005.1583119
16. Khever R. Analogii mekhanicheskikh sistem. Primery sostavleniia elektricheskikh modelei [Analogies of mechanical systems: examples of electric models building]. *Vestnik of Astrakhan state technical university*, 2007, no. 6 (41), pp. 174-177.
17. Kuznetsov N.K., Hanh Le Ba. Upravlenie kolebatelnymi dvizheniiami mekhatronnykh sistem na osnove zadaniia differentsialnykh uravnenii dvizheniia ispolnitelnykh mekhanizmov [Controlling oscillatory motions of mechatronic systems based on setting up differential equations of actuator motions]. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2013, no. 6 (77), pp. 21-25.
18. Kuznetsov N.K., Iov I.A., Iov A.A. Razrabotka elektromekhanicheskoi modeli mekhanizma tiagi shagaiushchego ekskavatora [Developing electromechanical model of walking dragline traction mechanism]. *Proceedings of Irkutsk State Technical University*, 2017, vol. 21, no. 11, pp. 53-66. DOI: 10.21285/1814-3520-2017-11-53-66
19. Kuznetsov N.K., Khan' Le Ba. Sintez algoritmov upravleniya kolebaniyami mekhatronnykh sistem na osnove ispol'zovaniya metoda elektromekhanicheskikh analogiy [Synthesis of control algorithms for oscillations of mechatronic systems based on the method of electromechanical analogies]. *Irkutsk, Aviamashinostroyeniye i transport Sibiri: materialy vseros. nauch.-prakt. Konf*, 2014, pp. 376-382.
20. Hamill D.C. Lumped equivalent circuits of magnetic components: the gyrator-capacitor approach. *IEEE Transactions on power electronics*, 1993, vol. 8, no. 2, pp. 97-103. DOI: 10.1109/63.223957
21. Guan M., Liao W.-H. Studies on the circuit models of piezoelectric ceramics. *Proc. International Conference on Information Acquisition. Hefei, China*, 2004, pp. 26-31. DOI: 10.1109/ICIA.2004.1373314
22. Sherrit S. An accurate equivalent circuit for the unloaded piezoelectric vibrator in the thickness mode. *J. of Phys. D: Appl. Phys.*, 1997, vol. 30, no. 16, pp. 2354-2363. DOI: 10.1088/0022-3727/30/16/014
23. Park C.H. On the circuit model of piezoceramics. *J. of Intelligent Material Systems and Structures*, 2001, vol. 12., no. 7, pp. 515-522. DOI: 10.1177/10453890122145302
24. Alessandrini S. Piezo-Electro Mechanical (PEM) Kirchhoff-Love plates. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2004, vol. 23, no. 4, pp. 689-702. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.03.003
25. Giorgio I., Culla A., Del Vescovo D. Multimode vibration control using several piezoelectric transducers shunted with a multiterminal network. *Archive of Applied Mechanics*, 2009, vol. 79, pp. 859-879. DOI: 10.1007/s00419-008-0258-x
26. Giorgio I. Piezo-electromechanical Smart Materials with distributed arrays of Piezoelectric Transducers: current and upcoming applications. *Int. J. of Appl. Electromagnetics and Mechanics*, 2015, vol. 47, no. 4, pp. 1051-1084. DOI: 10.3233/JAE-140148
27. Mason W.P. Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics. *New York, Van Nostrand Mason*, 1950, 508p.
28. Kim J. Electrical modeling of piezoelectric ceramics for analysis and evaluation of sensory systems. *Atlanta, GA, USA, Proc. IEEE Sensors Applications Symposium*, 2008, pp. 122-127.
29. Agneni A., Mastroddi F., Polli G.M.. Shunted piezoelectric patches in elastic and aeroelastic vibrations. *Computers and Structures*, 2003, vol. 81, no. 2, pp. 91-105. DOI: 10.1016/S0045-7949(02)00392-9
30. Caruso G. A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping. *Smart Mater. Struct.*, 2001, no. 10, pp. 1059-1068. DOI: 10.1088/0964-1726/10/5/322
31. Fleming A.J., Behrens S., Moheimani S.O.R. Reducing the inductance requirements of piezoelectric shunt damping systems. *Smart Mater. Struct.*, 2003, no.12, pp. 57-64. DOI: 10.1088/0964-1726/12/1/307
32. Thomas O., Ducarne J., Deu J.-F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Smart Mater. Struct.*, 2012, vol. 21, no.1, pp.015008. DOI: 10.1088/0964-1726/21/1/015008
33. Pang S., Li W., Kan J. Optimization analysis of interface circuits in piezoelectric energy harvesting systems. *Journal of Power Technologies*, 2016, vol. 96, no. 1, pp. 1-7.
34. Chen Y.-Y., Vasic D. Electrical interfacing circuit discussion of galloping-based piezoelectric energy harvester. *Physics Procedia*, 2015, vol. 70, pp. 1017-1021. DOI: 10.1016/j.phpro.2015.08.212
35. Y.Y. Chen A self-powered switching circuit for piezoelectric energy harvesting with velocity control. *European Physical Journal: Applied Physics, EDP Sciences*, 2012, vol.57, no. 3, pp. 1-7. DOI: 10.1051/epjap/2012110355
36. S.H. Kim Equivalent circuit model of an impact-based piezoelectric energy harvester. *Journal of Physics: Conference Series*, 2014, vol. 557, article 012094. DOI: 10.1088/1742-6596/557/1/012094
37. Yang Y., Tang L. Equivalent Circuit Modeling of Piezoelectric Energy Harvesters. *journal of intelligent material systems and structures*, 2009, vol. 20, pp. 2223-2235. DOI: 10.1177/1045389X09351757
38. Charles K.A., Sadiku M.N.O. Fundamentals of electric circuits, 4th ed. *New York: The McGraw-Hill Companies Inc.*, 2009, 1056p.

39. Hohlov A.B. Teoreticheskie osnovy radioelektroniki [Theoretical foundations of radio electronics], *Saratov: Izd-vo Saratovskogo un-ta*, 2005, 296s. (In Russian)

40. Modelling of vibrational processes in systems with piezoelements and external electric circuits on the basis of their electrical analogue / vol.P. Matveenko [et al]. *International Journal*

of Intelligent Material Systems and Structures, 2018, no 6, pp. 1-12, DOI: 10.1177/1045389X18781025

41. Sevodina N.vol., Yurlova N.A., Oshmarin D.A. The optimal placement of the piezoelectric element in a structure based on the solution of the problem of natural vibrations. *Solid State Phenomena*, 2015, vol. 243, pp. 67-74. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.243.67