

Абдеев Б.М., Байгереев С.Р., Гурьянов Г.А. Обобщенная динамическая теория измельчения частицы твердого вещества импульсно-силовым сжатием двумя недеформируемыми шарами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 278-289. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.25

Abdeev B.M., Baigereyev S.R., Guryanov G.A. Generalized dynamic theory of a solid particle grinding by pulse-force compression with two non-deformable balls. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 4, pp. 278-289. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.25



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2018

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.25

УДК 539.3/6:531.662:539.4

ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ТВЕРДОГО ВЕЩЕСТВА ИМПУЛЬСНО-СИЛОВЫМ СЖАТИЕМ ДВУМЯ НЕДЕФОРМИРУЕМЫМИ ШАРАМИ

Б.М. Абдеев, С.Р. Байгереев, Г.А. Гурьянов

Восточно-Казахстанский государственный технический университет
им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан

О СТАТЬЕ

Получена: 24 июля 2018 г.
Принята: 10 декабря 2018 г.
Опубликована: 28 декабря 2018 г.

Ключевые слова:

прочность, удар, разрушение, частица, измельчение, напряжение, деформация, энергия, сжатие, растяжение, твердость, однородность, изотропность.

АННОТАЦИЯ

Среди технологического оборудования для измельчения материалов широко используются машины, использующие сферические мелющие тела в качестве передатчика энергии разрушения обрабатываемым частицам (шаровые, вибрационные, планетарные, бисерные и т.д.). Рационализация процесса измельчения, заключающаяся в обеспечении необходимого размера частиц материала при оптимальных показателях энергоэффективности и производительности, ставит перед проектировщиками новую задачу по усовершенствованию указанных видов машин, дополняя их системой регулирования режима измельчения с учетом физико-механических свойств обрабатываемого материала. Учитывая довольно сложный режим движения мелющих тел, необходима новая теория измельчения частицы материала, позволяющая достаточно точно и адекватно с помощью простых физико-математических зависимостей оценивать напряженно-деформированное состояние частицы при взаимодействии с мелющими телами.

На основе комплексного применения классических аналитических зависимостей Герца-Штаермана о силовом контакте тел сферической формы и закона сохранения энергии (способ Рейли-Юнга) авторами получено новое общее решение фундаментально-прикладной многофункциональной задачи сопротивления материалов о прямом неупругом соударении двух одинаковых шаров заданной массы и большой жесткости, движущихся навстречу друг другу, с изотропным невесомым шаром малого диаметра. В соответствующей квазистатической физико-математической модели учитывались: местные деформации в пределах закона Гука; собственный вес шарообразных измельчителей; время удара и радиальные размеры взаимодействующих элементов конструктивно-нелинейной механической системы. Для количественной оценки несущей способности измельчаемой частицы и определения силы дробления использовался известный критерий прочности Галилея-Лейбница, интерпретируемый наибольшим растягивающим напряжением, который достаточно адекватно характеризует предельное состояние при разрушении широкого класса хрупких однородных твердых веществ. Результаты разработанной теории доведены до расчетных формул, позволяющих регулировать и оптимизировать процесс помола каменных материалов.

© ПНИПУ

© Абдеев Борис Масгутович – к.т.н., доц., e-mail: m.abdeeva@mail.ru, [ID 0000-0003-2867-152X](#)
Байгереев Самат Рахимгалиевич – магистр, e-mail: samat.baigereyev@mail.ru, [ID 0000-0002-7773-5457](#)
Гурьянов Георгий Александрович – к.т.н., доц., e-mail: gguryanov@mail.ru, [ID 0000-0003-3657-3735](#)

Boris M. Abdeev – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: m.abdeeva@mail.ru,
[ID 0000-0003-2867-152X](#)

Samat R. Baigereyev – MD, e-mail: samat.baigereyev@mail.ru, [ID 0000-0002-7773-5457](#)

Georgiy A. Guryanov – CSc in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: gguryanov@mail.ru,
[ID 0000-0003-3657-3735](#)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

GENERALIZED DYNAMIC THEORY OF A SOLID PARTICLE GRINDING BY PULSE-FORCE COMPRESSION WITH TWO NON-DEFORMABLE BALLS

B.M. Abdeev, S.R. Baigereyev, G.A. Guryanov

D. Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

ARTICLE INFO

Received: 24 July 2018
Accepted: 10 December 2018
Published: 28 December 2018

Keywords:

strength, impact, destruction, particle, grinding, stress, deformation, energy, compression, tension, hardness, homogeneity, isotropy.

ABSTRACT

Machines such as ball mill, vibrating mill, planetary mill, and stirred mill using spherical grinding media as a destruction energy transmitter are widely used among the manufacturing equipment for materials grinding. Providing a necessary product particle size at an optimal energy efficiency and productivity during grinding makes it necessary to investigate new ways of improving the mentioned types of mills, supplementing them with a system for regulating the grinding regime, taking into account the physical and mechanical properties of the feed particle. As the grinding media motion is quite complicated, it is necessary to develop a new theory of a particle grinding for an accurate and adequate evaluation of a particle stress-strain state with the grinding media using simple physical and mathematical relations.

So, we obtained a new general solution of the fundamental-applied multifunctional problem of materials resistance during a direct inelastic collision of two identical isotropic weightless balls of a small diameter and high rigidity with a given form moving towards each other. The solution is based on a complex application of classical Hertz-Staerman analytic dependences on the force contact of the spherical grinding media and the energy conservation law (the Reilly-Young method). In the corresponding quasi-static physical and mathematical model we considered local deformations within the framework of Hooke's law, own weight of spherical media, the impact time and the radial dimensions of the interacting elements of the constructively nonlinear mechanical system. To calculate the bearing capacity of the grinded particle and determine the crushing force, the well-known Galilei-Leibniz strength criterion is used. The criterion is interpreted by the largest tensile stress, which adequately characterizes the limiting state when a wide class of brittle homogeneous solids is destroyed. The results of the developed theory are presented by the formulae aimed to regulate and optimize the grinding process of stone materials.

© PNRPU

Введение

На сегодняшний день повышение эффективности процесса измельчения материалов является одним из актуальных вопросов во многих сферах производства. Несмотря на широкий ассортимент существующих конструкций измельчительных машин, принципиально отличающихся друг от друга спецификой измельчения, потребность в совершенствовании последних остается на прежнем уровне [1]. Прежде всего это связано с современной тенденцией к миниатюризации, идея которой заключается в нанотехнологическом открытии и исследовании совершенно новых свойств наночастиц веществ.

В связи с этим возросли и требования к проектируемым измельчительным машинам. С одной стороны, проектируемая технологическая машина должна обеспечивать необходимый минимальный размер так называемой «частицы-продукта» (т.е. конечный размер частицы после помола), а с другой – обладать высокой энергоэффективностью и производительностью.

Данный подход поставил перед проектировщиками измельчительной техники ряд новых перспективных задач, связанных не только с обеспечением процесса измельчения как такового, но и с созданием инновационных машин, позволяющих адаптировать режим дроб-

ления к конкретному измельчаемому материалу с учетом особенностей его физико-механических свойств.

Поставленная задача требует разработки соответствующего математического аппарата (метода расчета) для определения фактического значения прилагаемой нагрузки, необходимой для разрушения материала, от которой, в свою очередь, зависит энергоемкость процесса измельчения. При этом следует учесть ряд индивидуальных параметров обрабатываемого материала, связанных с исходным размером частиц, их прочностными свойствами, условиями разрушения и т.д.

Одним из прогрессивных направлений совершенствования процесса измельчения является разрушение твердого вещества посредством многократного приложения силы переменной (периодической) величины [2–8]. Известно, что при циклической нагрузке разрушение материала возможно и в основном реализуется при напряжениях ниже предела текучести [9] в области упругих деформаций [10]. Можно констатировать, что эффективность применения данного принципа усиливается при использовании в процессе дробления мелющих тел, имеющих, как правило, сферическую форму. К таким машинам-измельчителям относятся шаровые, вибрационные, бисерные, планетарные и другие мельницы [1], в которых помол материала происходит при его интенсивном контактном взаимодействии с мелющими телами-шарами, выполняющими функцию передатчика

потенциальной энергии разрушения частицам измельчаемого вещества. Количество энергии, требуемой для измельчения камня до определенного размера, зависит от размера, формы, взаимного расположения частиц, прочности, хрупкости, однородности, изотропности исходного материала и т.д. Поэтому установить аналитическое соотношение между энергоемкостью и механическими характеристиками измельчаемого вещества можно лишь приближенно. Следует также отметить, что движение мелющих шаров осуществляется в довольно сложном (хаотичном) режиме. Эти обстоятельства создают определенные трудности для разработки соответствующей механико-математической модели, позволяющей достаточно точно и адекватно оценивать напряженно-деформированное состояние и прочность твердого хрупкого вещества при его разрушении в процессе измельчения, зависящем от многих факторов случайного характера, трудно поддающихся расчету [10–13]. Сложность процесса помола, исключающая возможность создания единой универсальной теории, привела к появлению общепринятых гипотетических предположений о замене действительных кусков материала самой разнообразной формы идеализированными расчетными схемами кубического или шарообразного вида [10]. Как показал анализ экспериментально-теоретических исследований в этой проблемной области, наблюдается отсутствие конкретных физико-математических зависимостей, реалистично аппроксимирующих процесс измельчения [1, 10].

Представленная статья посвящена математическому описанию процесса помола невесомой сферической модели частицы измельчаемого хрупкого материала радиусом R_q [10] путем ее соударения с шарообразными абсолютно твердыми телами большого радиуса $R \gg R_q$ и массой m (рис. 1). На механическую систему, изображенную на рис. 1, действуют в противоположных направлениях некоторые внешние уравновешенные массы m_0 , имеющие заданную скорость v_0 в начальный момент времени $t = 0$, предшествующий присоединению m_0 к m .

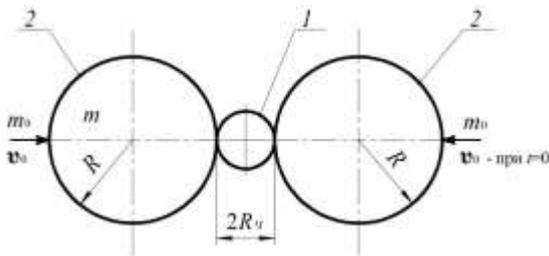


Рис. 1. Общая расчетно-конструктивная модель взаимодействия разрушаемой частицы 1 с шарами-измельчителями 2

Fig. 1. General computational and constructive model of interaction of the destroyed particle 1 with the grinding balls 2

Исследование ударных процессов относится к числу наиболее востребованных практикой фундаментально-прикладных разделов сопротивления материалов и тео-

ретической механики, посвященных оценке поведения различных конструкций в условиях интенсивного силового воздействия импульсного характера. Такие динамические нагрузки имеют место при эксплуатации многих современных сооружений, машин, механизмов и приборов [14–16].

Сформулированный в названии статьи вопрос является предельным частным случаем [14] конструктивно-нелинейной [17] задачи механики сплошной твердой среды об ударно-силовом контактировании двух шаров [15, 18, 19], движущихся вдоль оси, соединяющей их центры, со скоростями v_1 и v_2 после их точечного соприкосновения. В ее основе – классическая аналитическая зависимость Герца-Штаермана [18, 20] о реактивной статической нагрузке P , возникающей между сферическими телами, когда $v_1 = v_2 = 0$ (рис. 2):

$$P = \frac{4}{3} \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 \cdot u^{\frac{3}{2}}, \quad (1)$$

где R_1, R_2 – радиусы шаров; u – сближение взаимодействующих тел в результате их локальной (контактной) деформации; μ_1, μ_2, E_1, E_2 – соответственно коэффициенты Пуассона и модули упругости контактирующих материалов.

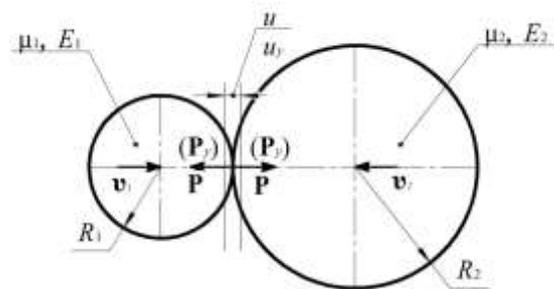


Рис. 2. Классическая схема соударения шарообразных элементов по Герцу [18–21]

Fig. 2. The classical scheme of the spherical elements collision according to Hertz [18–21]

В известной фундаментальной теоретической публикации [18] Г. Герц высказал основополагающее предположение, подтвержденное экспериментальной проверкой [14, 15, 22], что «комбинируя статическое сжатие в частях тел, лежащих непосредственно у места соприкосновения, с общими уравнениями движения для остальных частей тел, мы, вероятно, могли бы получить закон для соударения тел любой формы». В то же время следует учитывать в настоящее время тот очевидный факт, что точная теория удара, основанная на местных деформациях и колебательно-волновом распространении напряжений в упругом теле, оказывается пока еще очень сложной задачей [15, 21]. Поэтому ниже излагается прикладная математическая модель ударно-силового импульса, возникающего в контактирующих шарообразных элементах (см. рис. 1).

Принимая во внимание допущение о недеформируемости мелющих шаров, а также симметрию и буквенные обозначения схемы рис. 1, представляем формулу (1) в более компактном упрощенном виде:

$$\mathbf{P} = \frac{4E}{3(1-\mu^2)} \left(\frac{R_q \cdot R}{R_q + R} \right)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{2}}, \quad (2)$$

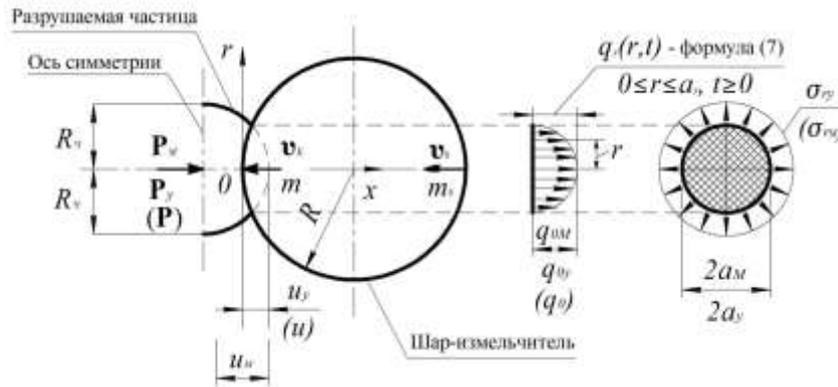


Рис. 3. Уточненное моделирование соударения шаров
Fig. 3. Detailed modeling of ball collisions

В основе рассматриваемой теории измельчения используем теорему об изменении кинетической энергии движущейся со скоростью v_0 массы m_0 [15, 24], формулу (2) и следующие классические предпосылки [15, 18, 22, 24]:

а) материал измельчаемой частицы – однородный, сплошной, изотропный и физически линейный, т.е. подчиняется закону Гука [17, 23, 25], а его прочностные свойства соответствуют хрупкому напряженному состоянию с разными временными сопротивлениями при сжатии $\sigma_{вс}$ и растяжении $\sigma_{вр} \ll \sigma_{вс}$ [25, 26], что характерно, например, для мрамора, гранита, песчаника и т.п. [26, 27];

б) соударяющиеся поверхности предполагаются совершенно гладкими [15];

в) удар является неупругим при нулевом коэффициенте восстановления [24, 28];

г) характер аналитических соотношений между усилиями \mathbf{P} , $\mathbf{P}_y = \mathbf{P}_y(t)$ и перемещениями u , $u_y = u_y(t)$ остается неизменным при статической \mathbf{P} и динамической $\mathbf{P}_y(t)$ силах, где t – время, т.е. (рис. 3)

$$\mathbf{P}_y = \mathbf{P}_y(t) = \frac{4E}{3 \cdot (1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{R_q \cdot R}{R_q + R} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot u_y^{\frac{3}{2}}, \quad (4)$$

а стационарная функция $\mathbf{P} = \mathbf{P}(u)$ выражается формулой (2);

после выполнения замен

$$R_1 = R_q, R_2 = R, \mu_1 = \mu, E_1 = E, E_2 = \infty, \quad (3)$$

где μ, E – упругие постоянные измельчаемой частицы.

На рис. 3 дана конкретизированная схематизация процесса помола, адаптированная к решению поставленной динамической контактной задачи теории упругости, базирующейся на соотношении (2) и модели рис. 1.

д) физико-механические характеристики μ, E измельчаемого вещества остаются постоянными в условиях динамического нагружения, что допустимо для скоростей соударения $v_0 \leq 100 \frac{M}{c}$ [22];

е) установлено [14, 22], что вибрации и колебания, возникающие в движущемся шаре при ударе, не оказывают заметного влияния на его продолжительность t_y и на величину напряжений в материале;

ж) время $t_M = 0,5t_y$ завершения активной фазы ударного импульса (рис. 4) [22] адекватно моменту достижения наибольшей абсолютной динамической деформации $u_M = u_y(t_M)$ (рис. 3), соответствующей, в свою очередь, скорости перемещения суммарной массы $m_0 + m$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_M) = \left[\frac{du_y}{dt} \right]_{t=t_M} = 0, \quad (5)$$

иными словами, в случае $t = t_M$ реактивная продольная сила удара

$$\mathbf{P}_y(t_M) = \mathbf{P}_M = \max, \quad (6)$$

а при $t \geq t_y$ равнодействующая $\mathbf{P}_y = \mathbf{P}_y(t)$ эллиптической функции контактного давления [9, 10]

$$q_y = q_y(r,t) = q_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a_y} \right)^2}, \quad 0 \leq r \leq a_y, \quad 0 \leq t \leq t_y \quad (7)$$

с экстремумом

$$q_{oy} = q_{oy}(0, t) = \frac{3P_y}{2\pi a_y^2} \quad (8)$$

в центре $r = 0$ круговой площадки (на рис. 3 она заштрихована) радиусом

$$a_y \ll R_{\text{ч}}, \Rightarrow u_y \ll R_{\text{ч}} \quad (9)$$

становится равной нулю ($P_y(t) = 0, t \geq t_y$, рис. 4);

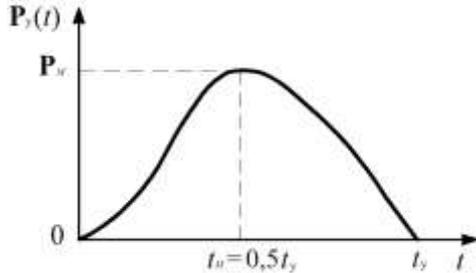


Рис. 4. Обобщенный вид графика ударно-силового импульса
Fig. 4. Generalized view of the pulse-force pulse graph

з) пренебрегаем собственным весом $G_{\text{ч}}$ частицы, по сравнению с весовой составляющей $G \gg G_{\text{ч}}$ шара-измельчителя (при $R \gg R_{\text{ч}}$);

и) в процессе математической аппроксимации напряженного состояния разрушаемого материала учитываются только местные (контактные) деформации, и это допущение является обоснованным, с общепринятой в настоящее время точки зрения, применительно к сферической модели (рис. 1–3) [14, 15, 18, 22];

к) определяющим фактором при оценке общей несущей способности шаровой расчетной схемы измельчаемой частицы из хрупкого вещества согласно [21] является наибольшее главное σ_1 растягивающее напряжение:

$$\sigma_{\text{г}} \equiv \sigma_1 = \frac{1-2\mu}{3} q_{oy}, \quad 0 \leq t \leq t_M, \quad (10)$$

действующее в радиальном направлении на круговой границе поверхности контакта радиусом $r = a_y$ (см. рис. 3).

Продолжая решение задачи, находим скорость v_K в момент времени $t = 0$ точечного соприкосновения шарообразного мелющего тела и сферической поверхности частицы (см. рис. 3), применяя для неупругого удара по допущению в) теорему о равенстве количества движения взаимодействующих тел до и после соударения [24, 28]:

$$m_0 v_0 = (m_0 + m) v_K, \quad (11)$$

откуда

$$v_K = \frac{m_0}{m_0 + m} v_0 = \frac{\frac{P}{g} v_0}{\frac{P}{g} + \frac{G}{g}} = \frac{v_0}{1 + \frac{4\pi \cdot \gamma_c \cdot R^3}{3P}}, \quad (12)$$

где $P \equiv P_{\text{и}}$ – искомый внешний статический нагрузочный параметр, тождественный силе измельчения $P_{\text{и}}$, когда $v_0 = 0$; γ_c, V, G – соответственно плотность [26], объем [29] и вес стального шара-измельчителя (см. рис. 3),

$$\left. \begin{aligned} \gamma_c &= 0,00000785 \left(\frac{\text{кг}}{\text{мм}^3} \right) 9,81 = 7,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Н}}{\text{мм}^3}, \\ V &= \frac{4}{3} \pi R^3, G = \gamma_c \cdot V = \frac{4}{3} \pi \cdot \gamma_c \cdot R^3, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$g = 9,81 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} = 9810 \frac{\text{ММ}}{\text{с}^2} \text{ – ускорение силы тяжести.}$$

Для определения максимального сближения $u_M = u_y(t_M)$ (см. рис. 3) воспользуемся известным оригинальным способом Рейли-Юнга [14, 30, 31], основанным на законе сохранения механической энергии [24, 28]

$$K + U = \text{const}, \quad (14)$$

где $K = K(t)$ – кинетическая составляющая выражения (14) от массы $m_0 + m$; $U = U(t)$ – потенциальная энергия локальной деформации $u_y = u_y(t)$ разрушаемой частицы (см. рис. 3).

В момент равновесия $t = 0$ компонента $U(0) = 0$, а скорость $v(0) = v_K = \text{max}$, и, следовательно, кинетическая энергия $K(0) = K_{\text{max}}$. При $t = t_M$ (см. рис. 4) система взаимодействующих шаров получает экстремальное перемещение $u_M = u_y(t_M) = \text{max}$ и соответствующую потенциальную энергию $u(t_M) = u_{\text{max}}$, когда $v(t_M) = 0$ и $K(t_M) = 0$. Поэтому уравнение (14) можно записать в такой форме для этих двух граничных значений времени $t = 0$ и $t = t_M$:

$$K_{\text{max}} + 0 = \text{const} \quad (15)$$

или

$$0 + U_{\text{max}} = \text{const}, \quad (16)$$

следовательно,

$$U_{\text{max}} = K_{\text{max}}. \quad (17)$$

Учитывая нелинейный характер функции (4) в зависимости от u_y [32], раскрываем равенство (17), используя (4) при $P \equiv P_{\text{и}}$, (12), (13) и [14, 22, 29, 30]:

$$\left. \begin{aligned}
 U_{\max} &= \int_0^{u_M} \mathbf{P}_y \cdot du_y = \frac{4E}{3(1-\mu^2)} \left(\frac{R_q \cdot R}{R_q + R} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{u_M} u_y^{\frac{3}{2}} \cdot du_y = \\
 &= \frac{4E}{3(1-\mu^2)} \left(\frac{R_q \cdot R}{R_q + R} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{5} u_M^{\frac{5}{2}} = K_{\max} = \\
 &= \frac{(m_0 + m) v_K^2}{2} = \frac{\mathbf{P}_n \left(1 + \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{P}} \right)}{2\mathbf{g}} \cdot \frac{v_0^2}{\left(1 + \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{P}} \right)^2} = \\
 &= \frac{\mathbf{P}_n}{2\mathbf{g}} \cdot \frac{v_0^2}{\left(1 + \frac{4\pi \cdot \gamma_c \cdot R^3}{3\mathbf{P}_n} \right)}
 \end{aligned} \right\} (18)$$

Из энергетического баланса (18) получаем

$$u_M = \left[\frac{15 \left(\frac{1-\mu^2}{E} \right) \cdot \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{g} \left(1 + \frac{4\pi \cdot \gamma_c \cdot R^3}{3\mathbf{P}_n} \right)}}{\left(\frac{R_q + R}{R_q \cdot R} \right)^{\frac{1}{5}}} \right]^{\frac{2}{5}} v_0^{\frac{4}{5}}. \quad (19)$$

Имея в соответствии с (19) сближение u_M , находим согласно (4), (8) и зависимости [21]

$$a_M = \left(u_M \frac{R_q \cdot R}{R_q + R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

искомые максимальные динамические параметры (см. рис. 3):

$$\mathbf{P}_M = \frac{4}{3} \frac{K_1^{\frac{5}{2}} \cdot v_0^{\frac{6}{5}}}{\beta^{\frac{5}{2}} K_2^{\frac{5}{2}}}, \quad (21)$$

$$q_{0M} = \frac{2}{\pi} \frac{K_1^{\frac{1}{4}} K_2^{\frac{3}{4}} \cdot v_0^{\frac{2}{5}}}{\beta^{\frac{5}{4}}}, \quad (22)$$

для продолжительности контакта (см. рис. 4) [15, 22]

$$\begin{aligned}
 t_y = 2t_M &= 2 \frac{u_M}{v_0} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{4}{5} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)} \frac{u_M}{v_0} = \\
 &= 2,9432 \frac{u_M}{v_0} = 2,9432 (\beta \cdot K_1)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{K_2}{v_0} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

где $\beta = \beta(\mu, E)$ – упругая константа материала частицы $\left(\frac{\text{мм}^2}{\text{Н}} \right)$,

$$\beta = \frac{1-\mu^2}{E}; \quad (24)$$

$K_1 = K_1(\mathbf{P}_n, R)$ – физико-механический функциональный коэффициент $\left(\frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{мм}} \right)$,

$$K_1 = \frac{15}{16} \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{g} \left(1 + \frac{4\pi \cdot \gamma_c \cdot R^3}{3\mathbf{P}_n} \right)}; \quad (25)$$

$K_2 = K_2(R_q, R)$ – геометрическая характеристика модели рис. 3, мм^{-1} ,

$$K_2 = \frac{R_q + R}{R_q \cdot R} = \frac{R_q \left(1 + \frac{R}{R_q} \right)}{R_q \cdot R} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_q}; \quad (26)$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)$, $\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)$ – значения гамма-функций или эллиптических интегралов второго рода [29, 33]:

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} = 1,77245; \\
 \Gamma\left(\frac{2}{5}\right) &= 2,21815; \\
 \Gamma\left(\frac{9}{10}\right) &= 1,06863.
 \end{aligned} \quad (27)$$

Для определения статического усилия измельчения \mathbf{P}_n используем прежде всего формулу (10), при $t = 0$ и $v_0 = 0$

$$\sigma_r \equiv \sigma_1 = \frac{1-2\mu}{3} q_0, \quad (28)$$

где q_0 – максимальное реактивное давление (см. рис. 3),

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{6\mathbf{P}_n \left(\frac{E}{1-\mu^2} \right)^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_q} \right)^2} = \\
 &= 0,5784 \mathbf{P}_n^{\frac{1}{3}} \left(\frac{K_2}{\beta} \right)^{\frac{2}{3}}
 \end{aligned} \quad (29)$$

от равнодействующей силы \mathbf{P}_n [21,26], учитывая обозначения коэффициентов (24) и (26).

С целью математического описания предельного состояния измельчаемого шара применяем критерий прочности Галилея–Лейбница [21] в виде равенства [25–27]

$$\sigma_s = |\sigma_1| = \sigma_{вп} \quad (30)$$

с наибольшим по модулю эквивалентным статическим напряжением σ_s , которое широко распространено в проектно-технических расчетах для весьма хрупких материалов, по-разному сопротивляющихся сжатию и

растяжению ($\sigma_{bc} \gg \sigma_{вр}$, см. предпосылку а)). В справочно-нормативной литературе [26] формула (30) известна как гипотеза максимальных растягивающих [21] нормальных напряжений (первая теория прочности).

Подстановка выражений (28), (29) в условие несущей способности (30) приводит к алгебраическому уравнению относительно $P_{и}$

$$\sigma_3 = \frac{1-2\mu}{3} 0,5784 P_{и}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{K_2}{\beta} \right)^{\frac{2}{3}} = \sigma_{вр}, \quad (31)$$

из решения которого

$$P_{и} = \left(\frac{3}{1-2\mu} \right)^3 \frac{\beta^2 \cdot \sigma_{вр}^3}{0,1935 K_2^2}. \quad (32)$$

Повторяя алгоритм (28)–(31), для ударного действия наибольшей инерционной силы $P_M = P_y(t_M)$ (см. рис. 4), соответствующей статической нагрузке (32), будем иметь, учитывая (22), (24)–(26), главное функциональное соотношение решаемой задачи, представляющее собой критерий разрушения твердого хрупкого материала при его измельчении по гипотезе Галилея–Лейбница [25–27]:

$$\sigma_{3M} = \frac{1-2\mu}{3} q_{0M} = \frac{1-2\mu}{3} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{K_1^{\frac{1}{5}}}{\beta^{\frac{4}{5}}} K_2^{\frac{3}{5}} \cdot v_0^{\frac{2}{5}} \geq \sigma_{вр}. \quad (33)$$

Для граничного случая

$$\sigma_{3M} = \sigma_{вр}, \quad (34)$$

аналогичного (30), находим в общем виде предельное значение скорости $v_{0п}$, меньше которой частица заданного радиуса $R_ч$ не будет измельчаться с учетом допущения д) [22]:

$$v_{0п} = \left[\frac{3\pi \cdot \sigma_{вр}}{2(1-2\mu)} \right]^{\frac{5}{2}} \frac{\beta^2}{K_1^{\frac{1}{2}} \cdot K_2^{\frac{3}{2}}} \leq 10^5 \left(\frac{мм}{с} \right), \quad (35)$$

откуда после исключения K_1 на основании (25) и (32),

$$v_{0п} = 0,4543 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{g}{K_2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{9\beta^2 \sigma_{вр}^2}{(1-2\mu)^2} + \frac{4\pi \cdot \gamma_c \cdot R^3 (1-2\mu) \cdot 0,1935 K_2^2}{9\sigma_{вр}}}. \quad (36)$$

Последующую расчетно-исследовательскую апробацию условий (33), (36) целесообразно выполнять в конкретном численном виде, зависящем от скорости v_0 и радиального размера $R_ч$ сферической модели разрушаемого материала. С этой целью рассмотрим измельчаемое вещество из высокопрочного гранита, име-

ющего физико-механические константы [26, 27, 34] $\sigma_{вр} = 2,943 \text{ МПа} \left(\frac{Н}{мм^2} \right) \ll \sigma_{bc} = 255 \text{ МПа} \left(\frac{Н}{мм^2} \right)$, $E = 48060 \text{ МПа} \left(\frac{Н}{мм^2} \right)$, $\mu = 0,15$ при скорости соударения v_0 , изменяющейся в пределах

$$0 \leq v_0 \leq 1200 \frac{мм}{с}, \quad (37)$$

радиусах поверхностей контакта

$$R = 20 \text{ мм} \gg R_ч = 0..0,12 \text{ мм} \quad (38)$$

и удельном весе (13) мелющих шаров $\gamma_c = 7,7 \cdot 10^{-5} \frac{Н}{мм^3}$ (см. рис. 3). Уточняем также допущение з) условиями

$$R \geq 20R_ч, \Rightarrow 0 < R_ч \leq 0,05R, \Rightarrow 0 < K_2 \leq \frac{1,05}{R_ч}, \quad (39)$$

учитываемыми предполагаемые конструктивно-технологические особенности процесса помола.

Воспользовавшись приведенными количественными данными,

– вычисляем постоянную β в соответствии с (24):

$$\beta = \frac{1 - (0,15)^2}{48060} = 0,00002034 \frac{мм^2}{Н}; \quad (40)$$

– находим зависимость $P_{и} = P_{и}(K_2)$, руководствуясь (32) и (40):

$$P_{и} = \left(\frac{3}{1-2 \cdot 0,15} \right)^3 \frac{(0,00002034)^2 \cdot (2,943)^3}{0,1935 \cdot K_2^2} = \frac{0,00000429}{K_2^2}, \text{ Н}; \quad (41)$$

– определяем согласно (26), (38) значения функции $K_2 = K_2(R_ч)$, когда $0 \leq R_ч \leq 0,12 \text{ мм}$ (табл. 1).

$$K_2 = \frac{1}{20} + \frac{1}{R_ч} = 0,05 + \frac{1}{R_ч}. \quad (42)$$

Таблица 1

Результаты расчета геометрического параметра K_2

Table 1

The results of calculation the geometric parameter K_2

$R_ч, \text{ мм}$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12
$K_2, \text{ мм}^{-1}$	∞	50,05	25,05	16,72	12,55	10,05	8,38

Далее, непосредственно проверяя соотношение (36) для каменных материалов с очень малыми величинами коэффициента $\beta \ll 1$ (см. результат (40)) и предел

прочности $\sigma_{вр}$ на растяжение, можно убедиться, что в подкоренном выражении (36) первое слагаемое всегда многократно – на несколько порядков меньше второго, т.е.

$$\sqrt{\frac{9\beta^2 \cdot \sigma_{вр}^2 + 4\pi \cdot \gamma_c \cdot R^3 (1-2\mu) 0,1935 K_2^2}{(1-2\mu)^2}} \approx \frac{2}{3} R \cdot K_2 \sqrt{\frac{0,1935\pi \cdot \gamma_c \cdot R (1-2\mu)}{\sigma_{вр}}}, \quad (43)$$

и на основании (43) формула (36) принимает упрощенный вид:

$$\begin{aligned} v_{0п} &= v_{0п}(R_ч) = \\ &= 72,32762R \sqrt{\frac{\gamma_c (1-2\mu)}{\sigma_{вр}} \left(1 + \frac{R}{R_ч}\right)} \leq 10^5, \left(\frac{\text{мм}}{\text{с}}\right), \quad (44) \end{aligned}$$

после подстановки физико-математических констант $g = 9810 \frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$, $\pi = 3,1416$ и замены суммарной кривизны K_2 контактирующих поверхностей (см. рис. 3) в соответствии с (26) при выполнении условия $0 < R_ч \leq 0,05R$ (см. (39)).

Потребовав соблюдения равенства

$$v_{0п} = v_{0п}^{(\max)} = 10^5 \frac{\text{мм}}{\text{с}}, \quad (45)$$

возможно количественно оценить тот минимально допустимый размер $R_ч^{(\min)}$ частицы, при котором обеспечивается механико-математическая корректность и точность выведенных аналитических зависимостей (33), (44), содержащих физические постоянные E , μ , $\sigma_{вр}$. Заменяем предел прочности $\sigma_{вр}$ в общей формуле (33) и коэффициенты K_1 , β для гранита, используя выражения (25), (40), (41). В итоге получаем два функциональных соотношения:

$$\sigma_{эМ} = \sigma_{эМ}(v_0, R_ч) = 0,779745 \frac{v_0^{2/5}}{K_2^{1/5}(R_ч)}, \quad (46)$$

откуда при $\sigma_{эМ} = \sigma_{вр} = 2,943 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$ и $R = 20 \text{ мм}$ имеем

$$\begin{aligned} v_{0п} &= v_{0п}(R_ч) = 27,67542 \sqrt{K_2} = \\ &= 27,67542 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_ч}\right)^{\frac{1}{2}} = 27,67542 \left(0,05 + \frac{1}{R_ч}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (47) \end{aligned}$$

а из равенства (45) или

$$27,67542 \left(0,05 + \frac{1}{R_ч^{(\min)}}\right) = 10^5 \left(\frac{\text{мм}}{\text{с}}\right)$$

находим

$$\frac{1}{R_ч^{(\min)}} = \frac{10^{10}}{(27,67542)^2} - 0,05, \Rightarrow R_ч^{(\min)} = 7,66 \cdot 10^{-8} \text{ мм}. \quad (48)$$

Графики функций $\sigma_{эМ} = \sigma_{эМ}(v_0)$, $\sigma_{эМ} = \sigma_{эМ}(R_ч)$, $v_0 = v_0(R_{чп})$, построенные по данным табл. 1, 2, 3, 4, изображены на рис. 5 и 6. Соответствующие расчеты проведены по представленным ниже формулам, в основе которых зависимости (46), (47):

• при $R_ч = 0,02 \text{ мм}$, $\Rightarrow K_2 = 50,05 \text{ мм}^{-1}$ (см. табл. 1 и 2)

$$\begin{cases} \sigma_{эМ} = \sigma_{эМ}(v_0; 0,02) = 0,35651 v_0^{0,4} \left(\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}\right), \\ 0 \leq v_0 \leq 1200 \frac{\text{мм}}{\text{с}}, \\ \text{где } v_{0п} = 27,67545 (50,05)^{0,5} = 195,8 \frac{\text{мм}}{\text{с}}; \end{cases} \quad (49)$$

• при $R_ч = 0,1 \text{ мм}$, $\Rightarrow K_2 = 10,05 \text{ мм}^{-1}$ (см. табл. 1 и 2)

$$\begin{cases} \sigma_{эМ} = \sigma_{эМ}(v_0; 0,1) = 0,4915 \cdot v_0^{0,4} \left(\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}\right), \\ 0 \leq v_0 \leq 1200 \frac{\text{мм}}{\text{с}}, \\ \text{где } v_{0п} = 27,67545 \cdot (10,05)^{0,5} = 87,74 \frac{\text{мм}}{\text{с}}; \end{cases} \quad (50)$$

• при $v_{0п} = 195,8 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$ (см. табл. 1 и 3)

$$\begin{cases} \sigma_{эМ} = \sigma_{эМ}(195,8; R_ч) = \frac{6,43691}{K_2^{0,2}} \left(\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}\right), \\ 0 \leq R_ч \leq 0,12 \text{ мм}, \\ \text{где } R_{чп} = 0,02 \text{ мм}; \end{cases} \quad (51)$$

• при $v_{0п} = 87,74 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$ (см. табл. 1 и 3)

$$\begin{cases} \sigma_{эМ} = \sigma_{эМ}(87,74; R_ч) = \frac{4,66908}{K_2^{0,2}} \left(\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}\right), \\ 0 \leq R_ч \leq 0,12 \text{ мм}, \\ \text{где } R_{чп} = 0,1 \text{ мм}; \end{cases} \quad (52)$$

• при $0,002 \text{ мм} \leq R_{чп} \leq 0,02 \text{ мм}$ (см. табл. 4)

$$v_0 = 27,67545 \left(0,05 + \frac{1}{R_{чп}}\right)^{0,5} \left(\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}\right). \quad (53)$$

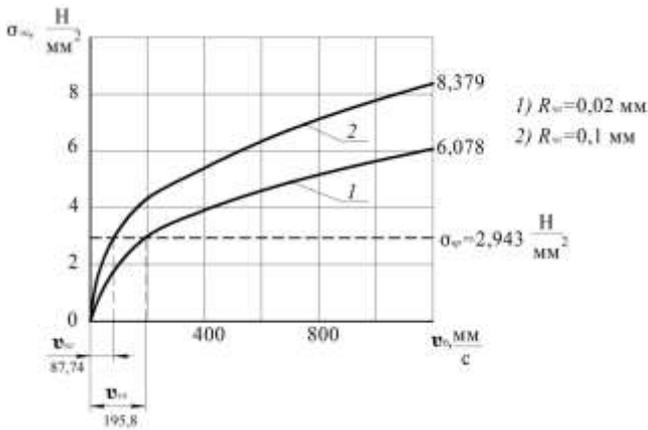
Таблица 2

Результаты вычислений функций (49), (50)

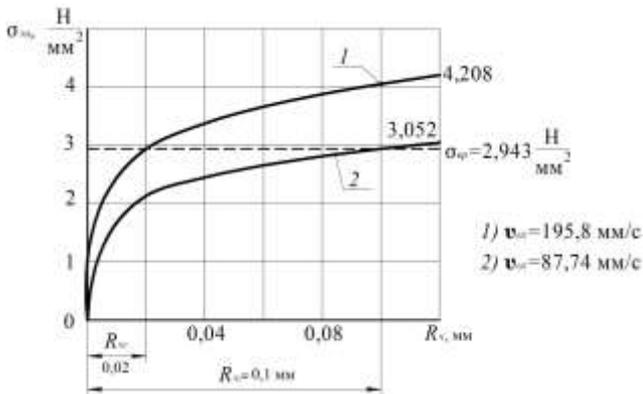
Table 2

The results of the calculations of the functions (49), (50)

$v_0, \frac{MM}{c}$	0	200	400	600	800	1000	1200
$\sigma_{\Sigma M}, \frac{H}{MM^2}$ $R_{\Sigma} = 0,02 MM$	0	2,968	3,916	4,606	5,168	5,65	6,078
$\sigma_{\Sigma M}, \frac{H}{MM^2}$ $R_{\Sigma} = 0,1 MM$	0	4,092	5,399	6,35	7,125	7,79	8,379



a



b

Рис. 5. Графическая иллюстрация функциональных формул (49)–(52): а – график зависимости эквивалентного напряжения $\sigma_{\Sigma M}$ от скорости v_0 ; б – график зависимости эквивалентного напряжения $\sigma_{\Sigma M}$ от радиуса частицы R_{Σ}

Fig. 5. Graphs of the functional formulae (49)–(52): а – graph of the dependence of the equivalent stress $\sigma_{\Sigma M}$ on the speed v_0 ;

б – graph of the dependence of the equivalent stress $\sigma_{\Sigma M}$ on the radius of the particle R_{Σ}

Таблица 3

Численная информация о функциональных зависимостях (51), (52)

Table 3

The calculations of the functional dependences (51), (52)

R_{Σ}, MM	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12
$\sigma_{\Sigma}, \frac{H}{MM^2}$ $v_{0n} = 195,8 \frac{MM}{c}$	0	2,943	3,38	3,665	3,881	4,057	4,208
$\sigma_{\Sigma}, \frac{H}{MM^2}$ $v_{0n} = 87,74 \frac{MM}{c}$	0	2,135	2,452	2,658	2,815	2,943	3,052

Таблица 4

Расчетные данные к функции (53)

Table 4

Calculation data for the function (53)

R_{Σ}, MM	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01	0,012	0,014	0,016	0,018	0,02
$v_0, \frac{MM}{c}$	618,9	437,6	354,3	309,5	276,8	252,7	234	218,9	206,4	195,8

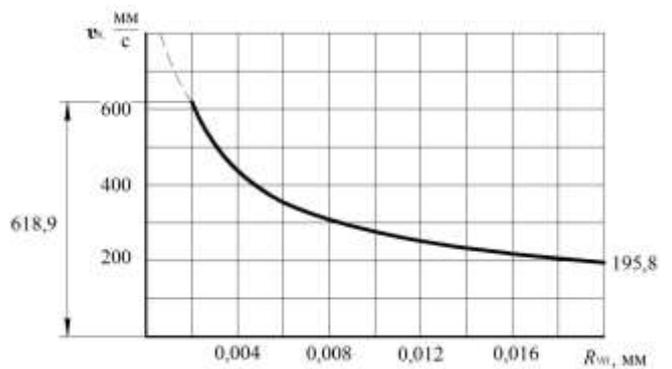


Рис. 6. Гиперболический график зависимости (53)

Fig. 6. The hyperbolic graph of the dependence (53)

Завершая данную статью, дополняем аналитические соотношения (19)–(23), (32), (33), (44) полуэмпирическими формулами, аппроксимирующими с высокой точностью ударно-силовой импульс в промежутке времени $0 \leq t \leq t_y$ (см. рис. 4) [22]:

$$\left. \begin{aligned} u_y &= u_y(t) = u_M \left(\sin \frac{\pi t}{2 t_M} \right)^{1,05}, \\ P_y &= P_y(t) = P_M \left(\sin \frac{\pi t}{2 t_M} \right)^{1,635}, \\ v &= v(t) = v_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\sin \frac{\pi t}{2 t_M} \right)^{2,725}}, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где $u_M = u_y(t_M)$, $P_M = P_y(t_M)$, t_M – динамические характеристики (19), (21), (23).

В то же время следует подчеркнуть, что параметры (54) и время t_y соударения (23) не имеют принципиального значения с практической точки зрения при изучении процесса помола материала. Однако необходимость их использования может возникнуть в случае уточненного математического моделирования разновидности удара, рассмотренной в этой статье (см. рис. 1 и 3), базируясь на фундаментальных положениях механики упругодеформируемого твердого тела [20] и колебательно-волновых теориях [14, 15, 21].

Комплексный анализ проведенных расчетно-теоретических исследований позволяет сделать следующие выводы:

1. В пределах ограничения скорости соударения $v_0 \leq 10^5 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$ [22] получено оригинальное инженерно-техническое решение динамической задачи теории упругости о контактном взаимодействии деформируемой неподвижной шаровой модели измельчаемого хрупкого материала с двумя абсолютно твердыми сфе-

рическими телами, имеющими заданную массу и максимальную кинетическую энергию (см. рис. 1).

2. Разработанная инновационная механико-математическая модель доведена до простых функциональных соотношений (24), (26), (32), (33), (44), наглядно проиллюстрированных (см. рис. 5, 6) численным примером определения несущей способности шара из гранита.

3. Установлено существование минимально допустимых значений радиуса частицы $R_{\text{шт}}$ и скорости $v_{0\text{н}}$ мелющего шара (формулы (33), (44), рис. 5), в пределах которых материал не будет разрушаться.

4. Выведенные формулы и алгоритм расчета можно непосредственно использовать при физико-математическом описании и регулировании процесса дробления строительных и рудных материалов измельчительными машинами ударно-вибрационного типа.

5. Степень помола теоретически варьируется и прогнозируется с помощью уравнения (44) по заданному предельному радиальному размеру частицы $R_{\text{шт}}$, соответствующему требуемой скорости соударения v_0 (рис. 1, 3 и 6; пример – формула (53)) при условии, что максимально допустимая величина $v_0^{(\text{max})} = 10^5 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$ адекватна очень мелкому измельчению твердого вещества, когда порядок $R_{\text{ч}}^{(\text{min})}$ оценивается 10^{-8} мм (48).

6. Результаты работы можно обобщить и модифицировать применительно к определению мощности и производительности реальной мельницы с подбором оптимальных проектно-технологических параметров: скорости удара v_0 , радиуса $R_{\text{ч}}$ разрушаемой частицы, диаметра $2R$ шара-измельчителя и частоты вынужденных колебаний привода-активатора.

Библиографический список

1. Байгереев С.Р., Гурьянов Г.А. Overview of existing fine grinding machines based on the mechanism of impact and attrition // Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана: материалы III Междунар. науч.-техн. конф. ВКГТУ. – Усть-Каменогорск, 2017. – С. 291–294.
2. Веригин Ю.А. Основные проблемы и направления приоритетных исследований в области приготовления и активации дисперсных сред // Междунар. НТК. «Интерстроймех-98»: сб. докл / Гос. арх.-стройт. акад. – Воронеж, 1998. – С. 85–91.
3. Ребиндер П.А. Физико-химическая механика новой области науки. – М.: Знание, 1958. – 63 с.
4. Ребиндер П.А. Поверхностные явления в дисперсных системах // Коллоидная химия: избр. тр. – М.: Наука, 1978. – 368 с.
5. Ходаков Г.С. Физика измельчения. – М.: Наука, 1972. – 307 с.
6. Сартаков А.В. Моделирование и интенсификация рабочих процессов вибрационных измельчителей: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.04. – Барнаул, 2004. – 177 с.
7. Лесин А.Д. Вибрационное измельчение материалов. Элементы теории и методика расчета основных параметров вибромельниц. – М.: Промстройиздат, 1957.
8. New vibroscreen with additional feed elements / A. Kim, M. Doudkin, A. Vavilov, G. Guryanov // Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2017. – Vol. 17. – P. 786–794. DOI: 10.1016/j.acme.2017.02.009.
9. Николаева Е.А. Основы механики разрушения. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – 103 с.
10. Артемьев К.А., Алексеева Т.В., Белокрылов В.Г. Дорожные машины: машины для устройства дорожных покрытий. – М.: Машиностроение, 1982. – 396 с.
11. Csoke B., Racz A. Application of the product related stress model for product dispersity control in dry stirred media milling // International Journal of Mineral Processing. – 2016. – Vol. 157. – P. 28–35. DOI: 10.1016/j.minpro.2016.09.005
12. Левенсон Л.Б., Цигельский П.М. Дробильно-сортировочные машины и установки. – М.: Госстройиздат, 1952. – 352 с.
13. Spatial distributions of media kinetic energy as measured by positron emission particle tracking in a vertically stirred media mill / S. Blackburn, N.A. Rowson, M. Riley, S. Pinkney // Miner-

als Engineering. – 2016. – Vol. 98. – P. 177–186. DOI: 10.1016/j.mineng.2016.08.004

14. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций // Избр. работы под ред. Э.И. Григolloка. – М.: Наука, 1975. – 704 с.

15. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел. – Киев: Наукова думка, 1969. – 248 с.

16. Гурьянов Г.А., Абдеев Б.М., Клименко Е.А. Прикладная модель измельчения твердой частицы простой формы ударом о жесткую поверхность // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. – 2018. – № 1. – С. 110–120. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.10

17. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.

18. Hertz H.R. Die Prinzipien der Mechanik. – Leipzig J.A. Barth, 1894. – 312 p.

19. A soft-sensor approach to impact intensity prediction in stirred mills guided by DEM models / L. McElroy, J. Bao, S.T. Jayasundara, R.Y. Yang, A.B. Yu // Powder Technology. – 2012. – Vol. 219. – P. 151–157. DOI: 10.1016/j.powtec.2011.12.031.

20. Штаерман И.Ф. Контактная задача теории упругости. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.

21. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. М.И. Рейтмана под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

22. Инженерные методы исследования ударных процессов / Г.С. Батыев, Ю.В. Голубков, А.К. Ефремов, А.А. Федосов. – М.: Машиностроение, 1969. – 251 с.

23. Гурьянов Г.А., Байгереев С.Р., Сулейменов А.Д. Анализ и выбор разрушающего воздействия для создания эффективных измельчителей тонкого помола [Электронный ресурс] // Электр. науч. журн. «Автомобиль. Дорога. Инфраструктура». – 2017. – № 1. – URL: http://www.adimadi.ru/madi/article/view/339/pdf_231 (дата обращения: 16.06.2018).

References

1. Baigereyev S.R., Guryanov G.A. Overview of existing fine grinding machines based on the mechanism of impact and attrition. Tvorchestvo molodykh – innovatsionnomu razvitiuu Kazakhstana: Materialy III Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii EKSTU, Ust'-Kamenogorsk, 2017, pp. 291-294.

2. Verigin Iu.A. Osnovnye problemy i napravleniia prioritnykh issledovaniy v oblasti prigotovleniia i aktivatsii dispersnykh sred [The main problems and directions of priority research in the field of preparation and activation of dispersed media]. *Mezhdunarodnaia NTK «Interstroimekh-98»: sb. dokl. / Gos. arkh.-stroit. akad.*, Voronezh, 1998, pp. 85–91.

3. Rehbinder P.A. Fiziko-khimicheskai mekhanika novoi oblasti nauki [Physicochemical mechanics of a new field of science], *Moscow, Znanie*, 1958, 63 p.

4. Rehbinder P.A. Poverkhnostnye iavleniia v dispersnykh sistemakh [Surface phenomena in disperse systems]. *Kolloidnaia khimiia: izbr. tr., Moscow, Nauka*, 1978, 368 p.

5. Khodakov G.S. Fizika izmel'cheniia [Physics of grinding], *Moscow, Nauka*, 1972, 307 p.

6. Sartakov A.V. Modelirovanie i intensifikatsiia rabochikh protsessov vibratsionnykh izmel'chitelei: dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.05.04 [Modeling and intensification of working processes of vibratory mills: dis. ... cand. tech. sciences: 05.05.04], *Barnaul*, 2004, 177 p.

7. Lesin A.D. Vibratsionnoe izmel'chenie materialov. Elementy teorii i metodika rascheta osnovnykh parametrov vibromel'nits [Vibration grinding of materials. Elements of the theory

24. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 596 с.

25. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 1. – М.: Наука, 1975. – 832 с.

26. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1975. – 704 с.

27. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – 856 с.

28. Добронравов В.В., Никитин И.Н. Курс теоретической механики: учебник для машиностроительных специальностей вузов. – М.: Высшая школа, 1983. – 575 с.

29. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 608 с.

30. Yong Th. A course of lectures on natural philosophy and the Mechanical arts // London, printed for J. Johnson. – 1807. – Vol. 1. – XXIV. – P. 144.

31. Искрицкий Д.Е. Строительная механика элементов машин. – Л.: Судостроение, 1970. – 448 с.

32. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов / пер. с англ. Л.Г. Корнейчука; под ред. Э.И. Григolloка. – М.: Мир, 1976. – 672 с.

33. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы / пер. с англ. И.Г. Арамановича [и др.], под общ. ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

34. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1972. – 256 с.

35. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний: учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Высшая школа, 1975. – 248 с.

and methodology for calculating the basic parameters of vibratory mills]. *Moscow Promstroizdat*, 1957, 113 p.

8. Kim A., Doudkin M., Vavilov A., Guryanov G. New vibroscreen with additional feed elements, 2017, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 17 (4), pp. 786-794. DOI: 10.1016/j.acme.2017.02.009

9. Nikolaeva E.A. Osnovy mekhaniki razrusheniia [Fundamentals of destruction mechanics], *Perm': Izdatel'stvo Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2010, 103 p.

10. Artem'ev K.A., Alekseeva T.V., Belokrylov V.G. Dorozhnye mashiny: mashiny dlia ustroistva dorozhnykh pokrytii [Road machines: machines for paving]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1982, 396 p.

11. Csoke B., Racz A. Application of the product related stress model for product dispersity control in dry stirred media milling, 2016, *International Journal of Mineral Processing*, vol.157, pp. 28-35. DOI: 10.1016/j.minpro.2016.09.005

12. Levenson L.B., Tsigel'skii P.M. Drobil'no-sortirovochnye mashiny i ustanovki [Crushing and screening machines and plants], *Moscow, Gosstroizdat*, 1952, 352 p.

13. Blackburn S., Rowson N.A., Riley M., Pinkney S. Spatial distributions of media kinetic energy as measured by positron emission particle tracking in a vertically stirred media mill, 2016, *Minerals Engineering*, vol. 98, pp. 177-186. DOI: 10.1016/j.mineng.2016.08.004

14. Timoshenko S.P. Prochnost' i kolebaniia elementov konstruktssii [Strength and vibrations of structural elements]. *Moscow, Nauka*, 1975, 704 p.
15. Kil'chevskii N.A. Teoriia soudareniiia tverdykh tel [The theory of collision of solids]. *Kiev, Izdatel'stvo "Naukova dumka"*, 1969, 248 p.
16. Guryanov G.A., Abdeev B.M., Klimenko E.A. Applied grinding model of a solid particle with a simple shape on impact with a hard surface. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no 1, pp. 110-120. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.10.
17. Lukash P.A. Osnovy nelineinoi stroitel'noi mekhaniki [Fundamentals of nonlinear construction mechanics]. *Moscow, Stroizdat*, 1978, 204 p.
18. Hertz H.R. Die Prinzipien der Mechanik, *Leipzig J.A. Barth*, 1894, 312 p.
19. McElroy L., Bao J., Jayasundara S.T., Yang R.Y., Yu A.B. A soft-sensor approach to impact intensity prediction in stirred mills guided by DEM models, 2012, *Powder Technology*, vol.219, pp.151-157. DOI: 10.1016/j.powtec.2011.12.031
20. Shtaerman I.F. Kontaknaia zadacha teorii uprugosti [The contact problem of the theory of elasticity]. *Moscow, Leningrad, Gostekhizdat*, 1949, 270 p.
21. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1975, 576 p.
22. Batuev G.S., Golubkov Iu.V., Efremov A.K., Fedosov A.A. Inzhenernye metody issledovaniia udarnykh protsessov [Engineering methods for studying shock processes]. *Moscow, Mashinostroenie*, 1969, 251 p.
23. Guryanov G.A., Baigereyev S.R., Suleimenov A.D. Analiz i vybor razrushaiushchego vozdeistviia dlia sozdaniia effektivnykh izmel'chitelei tonkogo pomola [Analysis and selection of destructive ways for the creation of effective mills of fine grinding], *Elektronnyi nauchnyi zhurnal "Avtomobil'. Doroga. Infrastruktura"*, 2017, no. 1., available at: www.adimadi.ru/madi/article/view/339/pdf_231
24. Voronkov I.M. Kurs teoreticheskoi mekhaniki [Course of Theoretical Mechanics]. *Moscow, Gosudarstvennoe izd-vo fiziko-matematicheskoi literatury*, 1962, 596 p.
25. Filin A.P. Prikladnaia mekhanika tverdogo deformiruемого tela. Tom 1. [Applied mechanics of a solid deformable body. Part 1]. *Moscow, Nauka*, 1975, 832 p.
26. Pisarenko G.S., Iakovlev A.P., Matveev V.V. Spravochnik po soprotivleniiu materialov [Handbook on the resistance of materials]. *Kiev, Izd-vo "Naukova dumka"*, 1975, 704 p.
27. Beliaev N.M. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. *Moscow, Nauka*, 1965, 856 p.
28. Dobronravov V.V., Nikitin I.N. Kurs teoreticheskoi mekhaniki [Course of Theoretical Mechanics], *Moscow, "Vysshiaia shkola"*, 1983, 575 p.
29. Bronshtein I.N., Semendiaev K.A. Spravochnik po matematike dlia inzhenerov i uchashchikhsia vtuzov [A handbook on mathematics for engineers and students of technical colleges]. *Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury*, 1962, 608 p.
30. Yong Th. A course of lectures on natural philosophy and the Mechanical arts. *London, printed for J. Johnson*. 1807, vol. 1, XXIV, 144 p.
31. Iskritskii D.E. Stroitel'naia mekhanika elementov mashin [Building mechanics of machine elements]. *Leningrad, Izd-vo "Sudostroenie"*, 1970, 448 p.
32. Timoshenko S.P., Gere Dzh. Mekhanika materialov [Mechanics of materials]. *Moscow, Izd-vo "Mir"*, 1976, 672 p.
33. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov: Opredeleniia, teoremy, formuly [A Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, Formulas]. *Moscow, Nauka*, 1970, 720 p.
34. Koshkin N.I., Shirkevich M.G. Spravochnik po elementarnoi fizike [Handbook of Elementary Physics]. *Moscow, Nauka*, 1972, 256 p.
35. Iablonskii A.A., Noreiko S.S. Kurs teorii kolebani: Uchebnoe posobie dlia studentov vtuzov [Course of the theory of oscillations: A manual for students of technical colleges]. *Moscow, Vysshiaia shkola*, 1975, 248 p.