



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.02

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

И.В. Богачев¹, А.О. Ватульян^{1,2}, В.В. Дударев¹, Р.Д. Недин¹

¹ Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Ростов-на-Дону, Россия

² Южный математический институт, Владикавказ, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 04 декабря 2018 г.

Принята: 17 мая 2019 г.

Опубликована: 28 июня 2019 г.

Ключевые слова:

вязкоупругость, предварительные напряжения, остаточные деформации, неоднородность, принцип соответствия, комплексный модуль, стержень, труба, акустический метод.

АННОТАЦИЯ

Представлена новая общая постановка задачи об установившихся колебаниях неоднородного вязкоупругого тела с учетом предварительно напряженно-деформированного состояния (ПНДС). Для ее формулировки были использованы теория комплексных модулей и принцип соответствия, позволяющий записывать задачи об установившихся колебаниях вязкоупругих тел в таком же виде, что и соответствующие задачи теории упругости, заменяя упругие характеристики соответствующими комплексными функциями от частоты колебаний. Для описания вязкоупругого поведения использовалась трехпараметрическая модель стандартного вязкоупругого тела, в состав которой входят мгновенный и длительный модули, а также время релаксации.

На основе представленной постановки рассмотрены модельные задачи о расчете колебаний для неоднородных вязкоупругих стержня и трубы с учетом наличия как предварительных напряжений, так и остаточных деформаций. В задаче для вязкоупругого стержня рассматривались продольные колебания, при этом свойства стержня, предварительные напряжения и остаточные деформации считались функциями продольной координаты. При рассмотрении задачи для вязкоупругой трубы рассматривалось плоское напряженно-деформированное состояние, колебания возбуждались радиальной нагрузкой, свойства цилиндра и ПНДС считались зависящими от радиальной координаты. Численное решение в обоих случаях было основано на методе пристрелки.

Для обеих модельных задач на основе проведения вычислительных экспериментов представлены результаты сравнительного анализа влияния предварительных напряжений и остаточных деформаций на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ). Также проанализировано влияние каждого из факторов на значения частот, в которых АЧХ имеют максимумы. Проведенное исследование показало, что и для стержня и для трубы остаточные деформации оказывают существенно большее влияние на АЧХ, чем предварительные напряжения. Данный вывод соответствует результатам, полученным ранее для упругих объектов.

© ПНИПУ

© **Богачев Иван Викторович** – к.ф.-м.н., н.с., e-mail: bogachev89@yandex.ru, [iD: 0000-0002-4725-5102](#)

Ватульян Александр Ованесович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: vatulyan@math.rsu.ru, vatulyan@aaanet.ru,

[iD: 0000-0003-0444-4496](#)

Дударев Владимир Владимирович – к.ф.-м.н., доц., e-mail: dudarev_vv@mail.ru, [iD: 0000-0003-2378-7574](#)

Недин Ростислав Дмитриевич – к.ф.-м.н., ст. преп., e-mail: rdn90@bk.ru, [iD: 0000-0003-4366-9591](#)

Ivan V. Bogachev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: bogachev89@yandex.ru,

[iD: 0000-0002-4725-5102](#)

Alexander O. Vatulyan – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor., Head of Department,

e-mail: vatulyan@math.rsu.ru, vatulyan@aaanet.ru, [iD: 0000-0003-0444-4496](#)

Vladimir V. Dudarev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

e-mail: dudarev_vv@mail.ru, [iD: 0000-0003-2378-7574](#)

Rostislav D. Nedin – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer,

e-mail: rdn90@bk.ru, [iD: 0000-0003-4366-9591](#)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE INVESTIGATION OF THE INITIAL STRESS-STRAIN STATE INFLUENCE ON MECHANICAL PROPERTIES OF VISCOELASTIC BODIES

I.V. Bogachev¹, A.O. Vatulyan^{1,2}, V.V. Dudarev¹, R.D. Nedin¹

¹ Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of I.I. Vorovich, Rostov-on-Don, Russian Federation

² Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 04 December 2018
Accepted: 17 May 2019
Published: 28 June 2019

Keywords:

viscoelasticity, residual stress, residual strain, inhomogeneity, correspondence principle, complex modulus, rod, pipe, acoustic method.

ABSTRACT

We present a new general statement of the problem on steady-state oscillations of a non-uniform viscoelastic body, taking into account the residual stress-strain state. To derive it, we use the theory of complex modules and the correspondence principle which makes it possible to write down the problem for viscoelastic bodies in the same form as the corresponding elasticity problems by replacing the elastic characteristics with the complex functions of vibration frequency. To describe the viscoelastic behavior, we employ a three-parameter model of the standard viscoelastic body consisting of instantaneous and long-term modules, as well as relaxation time.

On the basis of the statement proposed, we consider the model problems on vibrations of inhomogeneous viscoelastic rods and pipes taking into account the presence of both pre-stress and residual strain. Within the problem for the viscoelastic rod, we analyze the longitudinal oscillations and consider the pre-stress and residual strain as functions of the longitudinal coordinate. Regarding the problem for the viscoelastic pipe, we consider the plane stress-strain state and assume that the oscillations are excited by the radial load; the mechanical properties of the cylinder and the residual stress-strain state depend on the radial coordinate. The numerical solutions in both cases are based on the shooting method.

For both models problems under study, we present and observe the results of the comparative analysis of the effect of pre-stress and residual deformations on the amplitude-frequency characteristics (AFC), based on the computational experiments. We also provide the analysis of such an influence of each factor on the most sensitive frequencies values. The study conducted shows that for both rod and pipe the residual strain fields have a significantly greater effect on the AFC than the pre-stress fields do. This conclusion correlates with the results obtained previously for elastic bodies.

© PNRPU

Введение

Среди активно развивающихся отраслей механики новых материалов стоит выделить создание современных функционально-градиентных и композитных материалов, к главным преимуществам которых относится возможность их проектирования с широким диапазоном заранее определенных свойств, которые в зависимости от практического предназначения могут значительно изменяться по объему образцов. При этом стоит иметь в виду, что многие технологические процессы изготовления ФГМ [1] и композитов [2] предполагают возникновение неоднородных полей предварительных напряжений (ПН) и остаточных деформаций [3–6], которые могут влиять на надежность и работоспособность изделий. В частности, это характерно для вязкоупругих полимерных композитов, при изготовлении которых используется технология автоклава с последующим отверждением полученного материала, что, с одной стороны, позволяет избежать появления микродефектов, трещин и отслоений в композите, с другой стороны, такая технология ведет к образованию остаточных напряжений и деформаций, которые существенно влияют на механические характеристики композита. Уровень и распределение предварительно напряженно-деформированного состояния по объему изделия обусловлены протеканием

процессов полимеризации, кристаллизации и охлаждения готового изделия, а также последующей ползучести и релаксации [7], характерных для вязкоупругих тел [8]. В связи с этим можно выделить важные практические задачи:

- создание моделей вязкоупругих материалов, учитывающих наличие ПНДС;
- определение влияния предварительных состояний в телах и конструкциях из таких материалов на их механические свойства и прочностные характеристики;
- идентификация уровня и законов распределения предварительных состояний.

Исследованию предварительных состояний в вязкоупругих полимерных материалах, в частности композитах, в последнее время посвящено достаточно много работ. В статье [9] отражено моделирование остаточного напряжения, возникающего в деталях, изготавливаемых методом послойной фотополимеризации с помощью 3D-печати. Результатом избыточного ПН в данном случае становится значительное отклонение их конечной формы от заданной. В результате моделирования удалось произвести расчет усадочных ПН, возникающих при поэтапной фотополимеризации. В работе [10] описано построение аналитического решения двумерной задачи строительства тяжелой полукруглой арки из предварительно напряженного вязкоупругого

стареющего материала. Показано, что наличие ПН позволяет значительно уменьшить контактные напряжения в основании конструкции, что обеспечивает ее большую устойчивость по сравнению с конструкцией из элементов без ПН.

В статье [11] представлена специализированная методика определения предварительных напряжений и остаточных деформаций в композитных автомобильных деталях. Теоретическая часть методики основана на конечномерном моделировании с помощью специальных программных пакетов, практическая – на методе термического анализа и сверлении лунок. Термический анализ позволяет проводить долгосрочное прогнозирование поведения изготавливаемых деталей в процессе эксплуатации. В исследовании [12] представлен метод сверления отверстий для определения предварительных напряжений в образцах из поликарбоната. Тестирование метода производилось на модельном эксперименте, в котором поле предварительных напряжений создавалось путем изгиба поликарбонатного листа. В результате анализа сделан вывод о повышении сопротивляемости поликарбоната растрескиванию при создании в нем определенных полей сжимающих ПН. Трехмерное моделирование композитной полимерной пластины с использованием модели вязкоупругости для определения остаточных напряжений проведено в работе [13].

В работе [14] приведен анализ возникновения растрескиваний в зубных протезах на этапе охлаждения и отверждения в результате возникающих предварительных напряжений. Протез моделировался в виде трехмерного вязкоупругого объекта с помощью конечно-элементного пакета ABAQUS. Полученная модель позволила прогнозировать возникновение ПН, результаты моделирования достаточно точно описывают проведенные реальные эксперименты для протезов. В статье [15] также был использован ABAQUS для конечноэлементного моделирования остаточного напряжения, возникающего при отверждении вязкоупругих композитов. Для описания вязкоупругого материала использовалась обобщенная модель Максвелла из n элементов. Исследованию влияния сжимающих ПН на поведение вязкоупругих композитов из полимерной матрицы посвящена работа [16].

В работе [17] исследованы остаточные напряжения, возникающие в процессе эксплуатации полиэтиленовых труб, как важный фактор, влияющий на срок их службы. Разработанная методика основана на конечноэлементном моделировании и применима для круговых образцов с учетом возможного перехода их к эллиптической форме. Полученные результаты сравнивались с экспериментальными исследованиями образцов из полиэтилена различных марок. В результате анализа можно дать оценку остаточного ресурса труб.

Стоит отметить, что исследование влияния ПНДС на физические свойства объектов производилось авторами в ряде более ранних работ для упругих и пьезоупругих объектов [18, 19], таких как стержни [20, 21],

цилиндры и трубы [22–24], пластины и полосы [25, 26] и др. Также ранее проводились исследования колебаний вязкоупругих тел и обратных задач идентификации их свойств [27].

В данной работе на основе сформулированной общей линеаризованной постановки задачи о движении предварительно напряженно-деформированного упругого анизотропного тела с использованием теории комплексных модулей и принципа соответствия получена общая постановка задачи о колебаниях неоднородного вязкоупругого тела, учитывающая как предварительные напряжения, так и остаточные деформации. В качестве примеров рассмотрены две задачи для конкретных областей при наличии неоднородного ПНДС: 1) задача о колебаниях неоднородного вязкоупругого стержня и 2) задача о колебаниях неоднородной вязкоупругой трубы. В задаче для стержня рассматривалось одноосное предварительное состояние, зависящее, как и характеристики стержня, от продольной координаты. Для трубы рассмотрен случай плоской деформации и предполагалось, что ПНДС и механические свойства зависят от радиальной координаты. Для обеих задач представлен сравнительный анализ влияния предварительных напряжений и остаточных деформаций на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и значения частот, в которых АЧХ имеют максимумы. В упругом случае такие частоты соответствуют резонансным частотам. Основным результатом анализа в обоих примерах являлось существенно более значительное влияние на АЧХ остаточных деформаций, чем предварительных напряжений, что согласуется с полученными ранее результатами для упругих объектов [21, 24].

1. Уравнения движения вязкоупругого тела с учетом ПНДС

Рассмотрим линеаризованную постановку задачи об установившихся колебаниях предварительно напряженно-деформированного анизотропного тела с плотностью ρ , ограниченного поверхностью $S = S_u \cup S_\sigma$, где на части S_u тело жестко зашпелено, а на части S_σ тело нагружено периодически меняющейся нагрузкой $P_i e^{-i\omega t}$. Уравнения, определяющие соотношения и граничные условия имеют вид [7, 28, 29]

$$T_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad (1.1)$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,n} \sigma_{nj}^0 + u_{i,n}^0 \sigma_{nj}, \quad (1.2)$$

$$T_{ij} n_j |_{S_\sigma} = P_i, u_i |_{S_u} = f_i. \quad (1.3)$$

В постановке (1.1)–(1.3) величины с верхним индексом «0» относятся к начальному состоянию, величины без индекса – компоненты соответствующих возмущений – добавочных векторов и тензоров: u_i – компоненты вектора перемещений; σ_{ij} – компоненты симмет-

ричного тензора напряжений Кирхгофа; T_{ij} – компоненты несимметричного добавочного тензора напряжений Пиолы.

Определяющие соотношения для упругого материала при наличии полей ПНДС имеют вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k} + u_{n,l} u_{n,k}^0 + u_{n,l}^0 u_{n,k}) = (C_{ijkl} + C_{ijnl} u_{k,n}^0) u_{k,l}. \quad (1.4)$$

Здесь компоненты C_{ijkl} образуют тензор классических упругих постоянных; ε_{ij} – компоненты нелинейного добавочного тензора деформаций.

Ввиду того, что рассматриваются установившиеся колебания, воспользуемся принципом соответствия и заменим компоненты тензора упругих модулей C_{ijkl} компонентами тензора комплексных модулей G_{ijkl} , описывающими вязкоупругое поведение материала на основе модели стандартного вязкоупругого тела [30, 31], которые определяются по формуле

$$G_{ijkl}(\omega) = \frac{-E_{ijkl} n i \omega + H_{ijkl}}{-n i \omega + 1}. \quad (1.5)$$

Здесь H_{ijkl} – длительные модули; E_{ijkl} – мгновенные модули, причем ($E_{ijkl} > H_{ijkl} > 0$); $n > 0$ – время релаксации.

Тогда компоненты тензора напряжений для определяющего соотношения (1.4) примут вид

$$\sigma_{ij} = (G_{ijkl}(\omega) + G_{ijnl}(\omega) u_{k,n}^0) u_{k,l}. \quad (1.6)$$

Для удобства отделения вещественной и мнимой частей введем коэффициенты

$$K_1 = \frac{1}{n^2 \omega^2 + 1}, K_2 = \frac{n^2 \omega^2}{n^2 \omega^2 + 1}, K_3 = \frac{n \omega}{n^2 \omega^2 + 1}. \quad (1.7)$$

Выражение (1.5) можно записать в виде

$$G_{ijkl}(\omega) = K_1 H_{ijkl} + K_2 E_{ijkl} - i K_3 (E_{ijkl} - H_{ijkl}). \quad (1.8)$$

Таким образом, задачи об установившихся колебаниях вязкоупругих тел при наличии ПНДС можно решать формально тем же способом, что и соответствующие задачи теории упругости, заменяя упругие характеристики соответствующими комплексными функциями от частоты колебаний.

Замечание. В настоящей работе далее будем считать, что в вязкоупругом материале зависимость предварительного состояния от времени в рассматриваемый момент весьма незначительная и происходящие процессы релаксации весьма медленные относительно скорости процессов, возникающих при прикладывании зондирующих нагрузок. В связи с этим будем считать функции предварительного напряжения и остаточного

смещения вещественнозначными функциями, зависящими только от пространственных координат и не зависящими от времени (и частоты колебаний). Такая постановка задачи является вполне естественной, так как обычно на практике требуется определить значения полей ПНДС в вязкоупругих телах спустя значительное время после снятия воздействия, вызывавшего его [17]. Поля ПНДС при этом уже слабо зависят от времени и практически не меняются в процессе зондирования, что позволяет считать их зависящими лишь от пространственных координат.

Далее на основе постановки (1.1)–(1.3) и определяющего соотношения (1.6) будут рассмотрены два модельных примера по исследованию установившихся колебаний вязкоупругих стержня и трубы при наличии полей ПНДС.

2. Продольные колебания вязкоупругого стержня в условиях ПНДС

Рассмотрим установившиеся продольные колебания неоднородного вязкоупругого стержня при наличии одноосного ПНДС, характеризующегося предварительным напряжением $\sigma_{11}^0 = \tau \sigma_0(x)$ и начальным смещением $u_1^0 = \tau u_0(x)$. Для удобства дальнейшего анализа здесь

введен безразмерный коэффициент $\tau = \frac{\max_{x \in [0,1]} \sigma_0(x)}{H(1)}$, ха-

рактеризующий уровень ПНДС, где $H(x)$ – длительный модуль упругости, входящий в состав комплексного модуля $G(x, i\omega)$, зависящий от продольной координаты x . Запишем уравнения колебаний и граничные условия в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} & \left[[G(x, i\omega)(1 + \tau u_0')^2 + \tau \sigma_0(x)] u' \right]' + \kappa^2 u = 0, \\ & u(0) = 0, \\ & \left[G(x, i\omega)(1 + \tau u_0')^2 + \tau \sigma_0(x) \right] u' \Big|_{x=1} = p. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь κ – безразмерный параметр, характеризующий частоту колебаний.

Перепишем постановку (2.1) с учетом упрощения $(1 + \tau u_0')^2 \approx 1 + 2\tau u_0'$, вытекающего из малости уровня ПНДС τ :

$$\begin{aligned} & \left[[G(x, i\omega)(1 + 2\tau u_0') + \tau \sigma_0(x)] u' \right]' + \kappa^2 u = 0, \\ & u(0) = 0, \\ & \left[G(x, i\omega)(1 + 2\tau u_0') + \tau \sigma_0(x) \right] u' \Big|_{x=1} = p. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для реализации численного решения задачи (2.2) отделим вещественную и мнимую части в постановке (2.2) с помощью формул (1.6)–(1.7) и разложения $u(x, \omega) = u_1(x, \omega) + i u_2(x, \omega)$:

$$\left[[(K_1 H(x) + K_2 E(x))(1 + 2\tau u_0') + \tau \sigma_0(x)] u_1'(x, \omega) + \right.$$

$$+K_3(E(x) - H(x))(1 + 2\tau u_0')u_2'(x, \omega) \Big] + \kappa^2 u_1(x, \omega) = 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left[(K_1 H(x) + K_2 E(x))(1 + 2\tau u_0') + \tau \sigma_0(x) \right] u_2'(x, \omega) - \right. \\ & \left. - K_3(E(x) - H(x))(1 + 2\tau u_0')u_1'(x, \omega) \right] + \kappa^2 u_2(x, \omega) = 0, \\ & u_1(0, \omega) = 0, \quad u_2(0, \omega) = 0, \\ & \left[\left[(K_1 H(x) + K_2 E(x))(1 + 2\tau u_0') + \tau \sigma_0(x) \right] u_1'(x, \omega) + \right. \\ & \left. + K_3(E(x) - H(x))(1 + 2\tau u_0')u_2'(x, \omega) \right]_{x=1} = p, \\ & \left[\left[(K_1 H(x) + K_2 E(x))(1 + 2\tau u_0') + \tau \sigma_0(x) \right] u_2'(x, \omega) - \right. \\ & \left. - K_3(E(x) - H(x))(1 + 2\tau u_0')u_1'(x, \omega) \right]_{x=1} = 0. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Были проведены эксперименты по решению прямой задачи об определении модуля функции смещения $|u(x, \kappa)| = \sqrt{u_1^2(x, \kappa) + u_2^2(x, \kappa)}$ для анализа влияния уровня τ начального смещения и предварительного напряжения на модуль АЧХ. Численное решение задачи (2.3)–(2.4) осуществлялось с помощью метода пристрелки [32], который был протестирован для модельного случая однородного стержня и однородного поля ПНД, при котором задача имеет аналитическое решение, и показал высокую точность (погрешность не превосходила 10^{-6}).

Анализ влияния предварительных напряжений и остаточных деформаций на модуль АЧХ производился в окрестности первого максимума (частота которого соответствует резонансной в упругом случае) путем рассмотрения двух наборов модельных вычислительных экспериментов. В качестве безразмерных функций предварительного напряжения и начального смещения выбиралось решение задачи о растяжении консольно защемленного стержня приложенной к свободному краю силой P в виде

$$\sigma_0(x) = P, \quad u_0(x) = \int_0^x \frac{P}{H(\xi)} d\xi. \quad (2.5)$$

Набор экспериментов 2.1. В первом наборе экспериментов исследовано изменение модуля АЧХ стержня при наличии только поля ПН (2.5) в зависимости от его уровня ($\tau = 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}$) без учета поля остаточных деформаций ($u_0(x) = 0$). Построенные графики модуля АЧХ $|u(1, \kappa)|$ приведены на рис. 1, а. Найденные при этом частоты максимумов АЧХ приведены в табл. 1, столбец κ_1 . Заметим, что данная модель ПНДС, учитывающая только предварительные напряжения, является довольно распространенной в литературе и используется в работах Трусделла, Гузя, Хогера, Робертсона и др. [33–35].

Примечание. Обзор различных моделей ПН представлен в работе [29].

Набор экспериментов 2.2. Во втором наборе экспериментов рассматривалось изменение модуля АЧХ стержня только при наличии неоднородного поля остаточных деформаций, характеризующихся начальным смещением (2.5), в зависимости от его уровня ($\tau = 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}$) без учета поля ПН ($\sigma_0(x) = 0$). Графики соответствующих модулей АЧХ $|u(1, \kappa)|$ приведены на рис. 1, б, значения частот максимумов приведены в табл. 1, столбец κ_2 .

Замечание. В обоих наборах проведенных экспериментов рассмотрены модельные ситуации, в которых нарушена связь между ПН и остаточными деформациями за счет обнуления одного из факторов. Такой подход позволяет дать более адекватную оценку отдельного учета каждого фактора ПНДС при анализе изменения АЧХ.

На обоих рисунках АЧХ, соответствующая решению задачи для стержня свободного от ПНДС, обозначена сплошной линией.

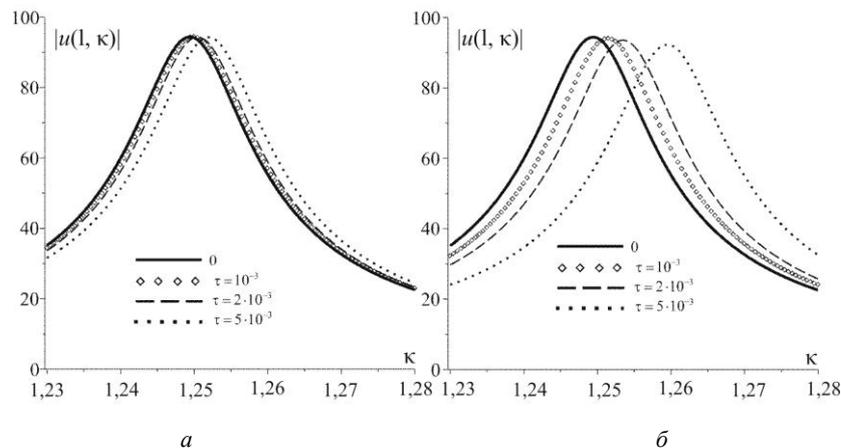


Рис. 1. Графики модуля АЧХ вязкоупругого стержня для набора экспериментов 2.1 (а) и набора экспериментов 2.2 (б)

Fig. 1. Graphs of the frequency response module of a viscoelastic rod for a set of experiments 2.1 (a) and a set of experiments 2.2 (b)

Таблица 1

Частоты максимумов АЧХ вязкоупругого стержня для набора экспериментов 2.1 (κ_1) и набора экспериментов 2.2 (κ_2)

Table 1

Frequencies of the maximum frequency response of a viscoelastic rod for a set of experiments 2.1 (κ_1) and a set of experiments 2.2 (κ_2)

τ	κ_1	$\kappa_1 - \kappa_0$	κ_2	$\kappa_2 - \kappa_0$
10^{-3}	1.25109	0.00103	1.25187	0.00181
$2 \cdot 10^{-3}$	1.25187	0.00181	1.25351	0.00345
$5 \cdot 10^{-3}$	1.25203	0.00197	1.25812	0.00806

Примечание. В колонках $\kappa_1 - \kappa_0$ и $\kappa_2 - \kappa_0$ приведена разница между рассчитанной частотой максимума для каждого значения τ и частотой максимума $\kappa_0 = 1,25006$, соответствующей нулевому ПНДС.

Из построенных графиков и найденных частот максимумов АЧХ видно, что остаточные деформации, определяемые начальным смещением $u_0(x)$, оказывают большее влияние на АЧХ, чем предварительные напряжения, что соответствует результатам, полученным ранее в упругом случае для полосы [21] и трубы [24], находящихся под действием ПНДС.

3. Радиальные колебания вязкоупругой трубы с ПНДС

Во втором модельном примере рассмотрим установившиеся радиальные колебания неоднородной изотропной вязкоупругой трубы в условиях плоской деформации с учетом неоднородного плоского поля ПНДС. Колебания с частотой ω вызываются нагрузкой p , приложенной к внешней границе $r = r_2$. Внутренняя граница $r = r_1$ свободна от нагрузок. Подобная задача рассматривалась ранее [24] в случае упругого материала, механические характеристики которого считались постоянными.

Уравнение движения задачи (1.1) и граничные условия в цилиндрической системе координат примут вид

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) + \rho\omega^2 u = 0, \quad (3.1)$$

$$T_{rr}|_{r=r_1} = 0, \quad T_{rr}|_{r=r_2} = -p.$$

Так как рассматриваются условия плоской деформации $u_r = u(r)$, $u_\varphi = 0$, $u_z = \text{const}$, то на основе определяющего соотношения (1.4) ненулевые компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)(1 + u^0)'u' + \lambda \left(1 + \frac{u^0}{r}\right) \frac{u}{r},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda(1 + u^0)'u' + (\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{u^0}{r}\right) \frac{u}{r}, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad (3.2)$$

где $u^0 = u^0(r)$ – радиальная компонента начального смещения; $\varepsilon_{rr}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial r}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}^0 = \frac{u^0}{r}$ – ненулевые компоненты тензора остаточных деформаций; $\sigma_{rr}^0(r) \neq 0$, $\sigma_{\varphi\varphi}^0(r) \neq 0$ – ненулевые компоненты тензора предварительных напряжений.

На основе принципа соответствия для рассматриваемого вязкоупругого материала функции параметров Ляме заменяются функциями комплексных модулей $\mu(r, i\omega) = \frac{i\omega\mu_2(r) + \mu_1(r)}{1 + i\omega}$, $\lambda(r, i\omega) = \frac{i\omega\lambda_2(r) + \lambda_1(r)}{1 + i\omega}$, которые могут быть как гладкими положительными функциями, так и иметь конечное число разрывов первого рода (что моделирует слоистые композиты). Функции $\mu_1(r)$, $\lambda_1(r)$ и $\mu_2(r)$, $\lambda_2(r)$ – мгновенные и длительные модули упругости соответственно; n – время релаксации.

Компоненты несимметричного добавочного тензора напряжений Пиолы с учетом соотношений (3.1) записываются в виде

$$T_{rr} = \sigma_{rr}(1 + u^0)' + \sigma_{rr}^0 \frac{u}{r} =$$

$$= \left[(\lambda + 2\mu)(1 + u^0)'u' + \lambda \left(1 + \frac{u^0}{r}\right) \frac{u}{r} \right] (1 + u^0)' + \sigma_{rr}^0 u',$$

$$T_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} \left(1 + \frac{u^0}{r}\right) + \sigma_{\varphi\varphi}^0 \frac{u}{r} =$$

$$= \left[\lambda(1 + u^0)'u' + (\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{u^0}{r}\right) \frac{u}{r} \right] \left(1 + \frac{u^0}{r}\right) + \sigma_{\varphi\varphi}^0 \frac{u}{r}. \quad (3.3)$$

Подставляя выражения (3.3) в уравнение движения (3.2), получим постановку задачи об установившихся колебаниях трубы в виде

$$\begin{aligned}
 & ((\lambda + 2\mu)(1 + u^0)^2 + \sigma_{rr}^0)u'' + \\
 & + \left[((\lambda + 2\mu)(1 + u^0)^2 + \sigma_{rr}^0)' + \frac{(\lambda + 2\mu)(1 + u^0)^2 + \sigma_{rr}^0}{r} \right] u' + \\
 & + \left[\rho\omega^2 + \frac{\lambda}{r} \left(\left(1 + \frac{u^0}{r} \right) (1 + u^0) \right) \right] \cdot \\
 & - \frac{1}{r^2} \left((\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{u^0}{r} \right) + \sigma_{\varphi\varphi}^0 \right) \Big] u = 0, \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$\left[(\lambda + 2\mu)(1 + u^0)^2 + \sigma_{rr}^0 \right] u' + \lambda \left(1 + \frac{u^0}{r} \right) (1 + u^0) \frac{u}{r} \Big|_{r=r_1} = 0,$$

$$\left[(\lambda + 2\mu)(1 + u^0)^2 + \sigma_{rr}^0 \right] u' + \lambda \left(1 + \frac{u^0}{r} \right) (1 + u^0) \frac{u}{r} \Big|_{r=r_2} = p.$$

Введем следующие допущения: $(u^0)^2 \approx 0$, $(u^0)^2 \approx 0$, вытекающие из малости уровня ПНДС, тогда $u^0, \frac{u^0}{r} \approx 0$, $(1 + u^0)^2 \approx 1 + 2u^0$, $\left(1 + \frac{u^0}{r} \right)^2 \approx 1 + 2\frac{u^0}{r}$,

$(1 + u^0) \left(1 + \frac{u^0}{r} \right) \approx 1 + \frac{u^0}{r} + u^0$. Также введем следующие

безразмерные параметры и функции: $r = r_2 \xi$, $\xi_0 = \frac{r_1}{r_2} < 1$,

$u = r_2 U$, $u^0 = r_2 \tau U^0$, $\kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 r_2^2}{\Lambda}$, $\lambda^*(\xi, i\kappa) = \frac{\lambda(r, i\omega)}{\Lambda}$,

$\mu^*(\xi, i\kappa) = \frac{\mu(r, i\omega)}{\Lambda}$, $p^* = \frac{p}{\Lambda}$, $\sigma_{rr}^0 = \tau\varphi(\xi)$, где

$\tau = \frac{\max_{\xi \in [\xi_0, 1]} \sigma_{rr}^0}{\Lambda}$, $\Lambda = \max_{r \in [r_1, r_2]} \lambda_1(r)$. Дополнительно учитыва-

ется условие, что компоненты σ_{rr}^0 и $\sigma_{\varphi\varphi}^0$ связаны уравнением равновесия $\sigma_{\varphi\varphi}^0 = r(\sigma_{rr}^0)' + \sigma_{rr}^0 = \xi(\tau\varphi(\xi))' + \tau\varphi(\xi)$. С учетом введенных обозначений постановка (3.4) примет вид

$$\begin{aligned}
 & ((\lambda^* + 2\mu^*)(1 + 2\tau U^0) + \tau\varphi)U'' + \\
 & + \left(((\lambda^* + 2\mu^*)(1 + 2\tau U^0) + \tau\varphi)' + \frac{((\lambda^* + 2\mu^*)(1 + 2\tau U^0) + \tau\varphi)}{\xi} \right) U' + \\
 & + \left(\kappa^2 + \frac{\lambda^*}{\xi} \left(\tau U^0 + \frac{\tau U^0}{\xi} - \frac{\tau U^0}{\xi^2} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\xi^2} ((\lambda^* + 2\mu^*) \left(1 + \frac{2\tau U^0}{\xi} \right) + \tau\xi\varphi' + \tau\varphi) \right) U = 0, \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ((\lambda^* + 2\mu^*)(1 + 2\tau U^0) + \tau\varphi)U' + \\
 & + \frac{\lambda^*}{\xi} \left(1 + \tau U^0 + \frac{\tau U^0}{\xi} \right) U \Big|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ((\lambda^* + 2\mu^*)(1 + 2\tau U^0) + \tau\varphi)U' + \\
 & + \frac{\lambda^*}{\xi} \left(1 + \tau U^0 + \frac{\tau U^0}{\xi} \right) U \Big|_{\xi=1} = p^*. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Далее для удобства записи символ * будем опускать.

Для численной реализации решения краевой задачи (3.5)–(3.7) были отделены вещественная и мнимая части с помощью формул (1.6)–(1.7) и разложения $U(x, \omega) = U_1(x, \omega) + iU_2(x, \omega)$, и решение прямой задачи осуществлялось методом пристрелки. Общий вид (3.5)–(3.7) с отделенными вещественной и мнимой частями в данной статье не приводится из-за его значительной громоздкости.

Далее представлен аналогичный проведенному для стержня анализ влияния предварительных напряжений и остаточных деформаций на модуль АЧХ окрестности первого максимума в виде двух наборов модельных вычислительных экспериментов. В данных наборах экспериментов функции предварительного напряжения и начального смещения являлись решением задачи о раздувании трубы внутренним давлением, которая распространена на практике. Ввиду того что характеристики трубы являются переменными, решение задачи получено в численном виде и соответствующие функции предварительного напряжения и начального смещения были аппроксимированы сплайн-функциями.

Набор экспериментов 3.1. Исследована зависимость модуля АЧХ вязкоупругой трубы от уровня ($\tau = 10^{-3}$, $2 \cdot 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-3}$) поля ПН без учета поля остаточных деформаций ($U^0(\xi) = 0$). Графики АЧХ $|U(1, \kappa)|$ приведены на рис. 2, а. Частоты максимумов АЧХ приведены в табл. 2, столбец κ_1 .

Набор экспериментов 3.2. Исследована зависимость модуля АЧХ вязкоупругой трубы от уровня ($\tau = 10^{-3}$, $2 \cdot 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-3}$) остаточной деформации без учета полей предварительных напряжений ($\varphi(\xi) = 0$). Графики соответствующих АЧХ $|U(1, \kappa)|$ приведены на рис. 2, б. Частоты максимумов АЧХ приведены в табл. 2, столбец κ_2 .

Таблица 2

Частоты максимумов АЧХ вязкоупругой трубы для набора экспериментов 3.1 (κ_1) и набора экспериментов 3.2 (κ_2)

Table 2

Frequencies of the maximum frequency response of a viscoelastic pipe for a set of experiments 3.1 (κ_1) and a set of experiments 3.2 (κ_2)

τ	κ_1	$\kappa_1 - \kappa_0$	κ_2	$\kappa_2 - \kappa_0$
10^{-3}	2.27710	0.00022	2.28094	0.00406
$2 \cdot 10^{-3}$	2.27859	0.00171	2.28511	0.00823
$5 \cdot 10^{-3}$	2.27992	0.00304	2.29516	0.01828

Примечание. В колонках $\kappa_1 - \kappa_0$ и $\kappa_2 - \kappa_0$ приведена разница между рассчитанной частотой максимума для каждого

значения τ и частотой максимума $\kappa_0 = 2,27688$, соответствующей нулевому ПНДС.

В итоге были получены аналогичные результаты, что и в задачах для вязкоупругого стержня и упругой трубы: остаточные деформации в данной постановке также значительно сильнее влияют на АЧХ, чем предварительные напряжения.

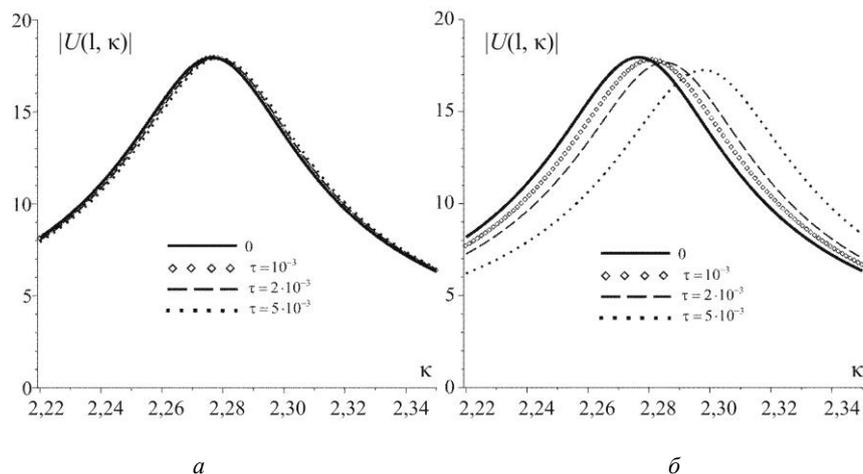


Рис. 2. Графики модуля АЧХ вязкоупругой трубы для набора экспериментов 3.1 (а) и набора экспериментов 3.2 (б)

Fig. 2. Graphs of the frequency response of a viscoelastic pipe for a set of experiments 3.1 (a) and a set of experiments 3.2 (b)

Заключение

Сравнительный анализ влияния предварительных напряжений и остаточных деформаций на амплитудно-частотные характеристики вязкоупругих тел, проведенный в двух модельных случаях – для вязкоупругих стержня и трубы, показал, что остаточные деформации оказывают значительно более существенное влияние на АЧХ, чем предварительные напряжения. Таким образом, имеется возможность рассмотрения обратных задач идентификации уровня и вида остаточных дефор-

маций, возникшей в вязкоупругих телах, на основе данных об АЧХ в окрестности ее максимумов.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке РФФ (код проекта 18-71-10045).

Acknowledgment

The work was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 18-71-10045).

Библиографический список

- Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials // Materials Science and Engineering: A. – 2003. – Vol. 362. – P. 81–106.
- Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: учеб. пособие / М.Л. Кербер, В.М. Виноградов, Г.С. Головкин [и др.]; под ред. А.А. Берлина. – СПб.: Профессия, 2008. – 560 с.
- Schajer G.S. Practical Residual Stress Measurement Methods. – Wiley, 2013. – 560 p.
- Methods of measuring residual stresses in components / N.S. Rossini, M. Dassisti [et al.] // Materials and Design – 2012. – Vol. 35. – P. 572–588.

- Guz A.N. Stability of elastic bodies under finite deformations. – Kiev: Naukova dumka, 1973. – 272 p.
- Ogden R.W. Nonlinear elastic deformations. – Ellis Horwood / Halsted Press: Chichester / New York, 1984. – 562 p.
- Радченко В.П., Саушкин М.Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. – М.: Машиностроение-1, 2005. – 226 с.
- Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: Иностран. лит., 1963. – 535 с.
- Determination of Residual Stresses in Products in Additive Production by the Layer-by-Layer Photopolymerization Method / P.S. Bychkov, V.M. Kozintsev, A.V. Manzhurov [et al.] // Mechanics of Solids. – 2017. – Vol. 52. – No 5. – P. 524–529.

10. Manzhurov A.V., Parshin D.A. Application of prestressed structural elements in the erection of heavy viscoelastic arched structures with the use of an additive technology // *Mechanics of Solids*. – 2016. – Vol. 51. – No. 6. – P. 692–700.

11. Residual stresses and viscoelastic deformation of an injection molded automotive part / S.H. Kim, C.H. Kim [et al.] // *Korea-Australia rheology journal*. – 2007. – Vol. 19. – No. 4. – P. 183–190.

12. Magnier A., Scholtes B., Niendorf T. On the reliability of residual stress measurements in polycarbonate samples by the hole drilling method // *Polymer Testing* – 2018. – Vol. 71. – P. 329–334.

13. Zhang J.T., M. Zhang, Li S.X. Residual stresses created during curing of a polymer matrix composite using a viscoelastic model // *Composites Science and Technology* – 2016. – Vol. 130. – P. 20–27.

14. Viscoelastic Finite Element Analysis of Residual Stresses in Porcelain-Veneered Zirconia Dental Crowns / J. Kim, S. Dhital, P. Zhivago [et al.] // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. – 2018. – Vol. 82. – P. 202–209.

15. A three-dimensional thermo-viscoelastic analysis of process-induced residual stress in composite laminates / A. Ding, S. Li, J. Wang, L. Zu // *Composite Structures*. – 2015. – Vol. 129. – P. 60–69.

16. Wang B., Fancey K. Viscoelastically prestressed polymeric matrix composites: An investigation into fibre deformation and prestress mechanisms // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. – 2018. – Vol. 111. – P. 106–114.

17. Residual stress in polyethylene pipes / J. Poduška, P. Huťařa, J. Kučerac [et al.] // *Polymer Testing*. – 2016. – Vol. 54. – P. 288–295.

18. Dudarev V., Nedin R., Vatulyan A. Vibrations of inhomogeneous piezoelectric bodies in conditions of residual stress–strain state // *Applied Mathematical Modelling*, – 2018. – Vol. 16. – P. 212–243.

19. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnutkin R.M. Determination of the Inhomogeneous Preliminary Stress–Strain State in a Piezoelectric Disk // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2018. – Vol. 59. – No. 3. – P. 181–190.

20. Dudarev V., Nedin R., Vatulyan A. Nondestructive identification of inhomogeneous residual stress state in deformable bodies on the basis of the acoustic sounding method // *Adv. Mater. Res.* – 2014. – Vol. 996. – P. 409–414.

21. Ватульян А.О., Недин Р.Д. Сравнительный анализ предварительного состояния в неоднородных балках // *Вестн.*

С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2016. – Т. 3, № 1. – С. 110–119.

22. Vatul'yan A.O., Dudarev V.V., Bogachev I.V. Determination of the prestressed state in a tube // *Doklady Physics*. – 2014. – Vol. 59. – No. 5. – P. 241–243.

23. Vatulyan A., Dudarev V., Mnutkin R. Vibration of a prestressed tube in the presence of plastic zone // *Journal of Sound and Vibration*. – 2016. – Vol. 374. – No. 4. – P. 92–101.

24. Detection of nonuniform residual strain in a pipe / I.V. Bogachev, V.V. Dudarev, R.D. Nedin, A.O. Vatulyan // *International Journal of Solids and Structures*. – 2018. – Vol. 139–140. – P. 121–128.

25. Nedin R., Vatulyan A. Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. – Iss. 50. – P. 2107–2114.

26. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Bogachev I.V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model // *Math. Meth. Appl. Sci.* – 2018. – Vol. 41. – No. 4. – P. 1600–1618.

27. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer // *International Journal of Solids and Structures*. – 2014. – Vol. 51. – No. 11–12. – P. 2238–2243.

28. Kuang Z.-B., *Theory of Electroelasticity*. – Springer: Heidelberg, New York, 2014. – 426 p.

29. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress // *Engineering Structures*. – 2017. – Vol. 151. – P. 391–405.

30. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1974. – 338 с.

31. Методы прикладной вязкоупругости / А.А. Адамов, В.П. Матвеевко, Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2003. – 411 с.

32. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

33. Truesdell C.A. A first course in rational continuum mechanics. – Baltimore. Maryland: The John Hopkins University, 1972. – 417 p.

34. Hoger A. On the determination of residual stress in an elastic body // *Journal of Elasticity*. – 1986. – Vol. 16. – P. 303–324.

35. Robertson R.L., Determining residual stress from boundary. Measurements: A linearized approach // *Journal of Elasticity* – 1998. – Vol. 52. – P. 63–73.

References

1. Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials // *Materials Science and Engineering: A*, 2003, v. 362, pp. 81–106.

2. Kerber M.L., Vinogradov V.M., Golovkin G.S. Polimernye kompozicionnye materialy: struktura, svoystva, tekhnologiya: ucheb. posobie [Polymer composite materials: structure, properties, technology: a tutorial]. *Berlin, Saint Petersburg, Professia*, 2008, 560 p.

3. Schajer G.S. Practical Residual Stress Measurement Methods. *Wiley*, 2013, 560 p.

4. Rossini N.S., Dassisti M., et al. Methods of measuring residual stresses in components. *Materials and Design*, 2012, vol. 35, pp. 572–588.

5. Guz A.N. Stability of elastic bodies under finite deformations. *Kiev, Naukova dumka*, 1973, 272 p.

6. Ogden R.W. Nonlinear elastic deformations. *New York, Ellis Horwood. Halsted Press: Chichester*, 1984, 562 p.

7. Radchenko V.P., Saushkin M.N. Polzuchest' i relaksaciya ostatochnyh napryazhenij v uprochnennyh konstrukciyah [Creep and relaxation of residual stresses in hardened structures] *Moscow, Mashinostroenie-1*, 2005, 226 c.

8. Ferry J.D. Viscoelastic properties of polymers, *John Wiley & Sons*, 1980, 641 p.

9. Bychkov, P.S., Kozintsev, V.M., Manzhurov, A.V. Determination of Residual Stresses in Products in Additive Production by the Layer-by-Layer Photopolymerization Method. *Mechanics of Solids*. 2017, vol. 52, no 5, pp. 524–529.

10. Manzhurov A. V., Parshin D. A. Application of prestressed structural elements in the erection of heavy viscoelastic arched

structures with the use of an additive technology. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, no. 6, pp. 692-700.

11. Kim S.H., Kim C.H., et al. Residual stresses and viscoelastic deformation of an injection molded automotive part. *Korea-Australia rheology journal*, 2007, vol. 19, no. 4, pp. 183-190.

12. Magnier A., Scholtes B., Niendorf T. On the reliability of residual stress measurements in polycarbonate samples by the hole drilling method. *Polymer Testing*, 2018, vol. 71, pp. 329-334.

13. Zhang J.T., M.Zhang, Li S.X. Residual stresses created during curing of a polymer matrix composite using a viscoelastic model. *Composites Science and Technology*, 2016, vol. 130, pp. 20-27.

14. Kim J., Dhital S., Zhivago P., et al. Viscoelastic Finite Element Analysis of Residual Stresses in Porcelain-Veneered Zirconia Dental Crowns. *Journal of the Mechanical Behavior of Bio-medical Materials*, 2018, vol. 82, pp. 202-209.

15. Ding A., Li S., Wang J., Zu L. A three-dimensional thermo-viscoelastic analysis of process-induced residual stress in composite laminates. *Composite Structures*, 2015, vol. 129, pp. 60-69.

16. Wang B., Fancey, K. Viscoelastically prestressed polymeric matrix composites: An investigation into fibre deformation and prestress mechanisms. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2018, vol. 111, pp. 106-114.

17. Poduška J., Hutařa P., Kučerac J., et al. Residual stress in polyethylene pipes. *Polymer Testing*, 2016, vol. 54, pp. 288-295.

18. Dudarev, V., Nedin, R., Vatulyan, A.: Vibrations of inhomogeneous piezoelectric bodies in conditions of residual stress-strain state. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, vol. 16, pp. 212-243.

19. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M. Determination of the Inhomogeneous Preliminary Stress-Strain State in a Piezoelectric Disk. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, no 3, pp. 181-190.

20. Dudarev V., Nedin R., Vatulyan A., Nondestructive identification of inhomogeneous residual stress state in deformable bodies on the basis of the acoustic sounding method. *Adv. Mater. Res.*, 2014, vol. 996, pp. 409-414.

21. Vatulyan, A.O., Nedin, R.D., Comparative analysis of residual stress state in inhomogeneous rods. *Bull. St.-Petersbg. State Univ. Ser. I: Math. Mech. Astron*, 2016, vol. 3, no 1, pp. 110-119.

22. Vatul'yan A.O., Dudarev V.V., Bogachev I.V. Determination of the prestressed state in a tube. *Doklady Physics*, 2014, vol. 59, no. 5, pp. 241-243.

23. Vatulyan A., Dudarev V., Mnukhin R. Vibration of a prestressed tube in the presence of plastic zone. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, vol. 374, no. 4, pp. 92-101.

24. Bogachev I.V., Dudarev V.V., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Detection of nonuniform residual strain in a pipe. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 139-140, pp. 121-128.

25. Nedin, R., Vatulyan, A. Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, iss. 50, pp. 2107-2114.

26. R.D. Nedin, A.O. Vatulyan., I.V. Bogachev. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model. *Math Meth Appl Sci*, 2018, vol. 41, no. 4, pp. 1600-1618.

27. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, no. 11-12, pp. 2238-2243.

28. Kuang Z.-B., Theory of Electroelasticity. *New York, Springer: Heidelberg*, 2014, 426 p.

29. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress. *Engineering Structures*, 2017, vol. 151, pp. 391-405.

30. Kristensen R. Vvedenie v mekhaniku kompozitov. [Introduction to the mechanics of composites]. *Moscow, Mir Publ.*, 1974. 338 p.

31. Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shar-dakov I.N. Metody prikladnoj vyazkoupругosti [Methods of applied viscoelasticity]. *Ekaterinburg, UrO RAN*, 2003, 411 p.

32. Kalitkin N.N. Chislennye metody [Numerical methods] *Moscow, Nauka*, 1978 512c.

33. Truesdell C.A. A first course in rational continuum mechanics, Baltimore. *Maryland: The John Hopkins University*, 1972, 417 p.

34. Hoger A. On the determination of residual stress in an elastic body // *Journal of Elasticity*. 1986, vol. 16, pp. 303-324.

35. Robertson R.L., Determining residual stress from boundary. Measurements: A linearized approach. *Journal of Elasticity* 1998, vol. 52, pp. 63-73.