



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.03

УДК 539.374

## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССОВ МОНОТОННЫХ И ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЙ. ЭКСПЕРИМЕНТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

В.С. Бондарь, Д.Р. Абашев

Московский политехнический университет, Москва, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 30 октября 2018 г.

Принята: 10 мая 2019 г.

Опубликована: 28 июня 2019 г.

### Ключевые слова:

монотонные и циклические нагружения, теория пластичности, изотропное и анизотропное упрочнение, поверхность памяти, базовый эксперимент, метод идентификации.

### АННОТАЦИЯ

На основе анализа результатов экспериментальных исследований образцов из нержавеющей стали 12Х18Н10Т при жестком (контролируемые деформации) процессе деформирования, включающем последовательности монотонных и циклических режимов нагружения, в условиях одноосного растяжения-сжатия и нормальной температуры выявлены некоторые особенности и различия процессов изотропного и анизотропного упрочнения при монотонных и циклических нагружениях. Для описания этих особенностей в рамках теории пластичности (модель Бондаря), относящейся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении, в пространстве тензора пластических деформаций вводится критерий смены направления пластического деформирования и поверхность памяти, позволившие разделить процессы монотонного и циклического деформирования. Для описания переходных процессов от монотонного к циклическому и от циклического к монотонному формулируются эволюционные уравнения для параметров изотропного и анизотропного упрочнений. Базовый эксперимент, на основе которого определяются материальные функции, состоит из трех этапов – циклического нагружения, монотонного нагружения и последующего циклического вплоть до разрушения. Приводится метод идентификации материальных функций по результатам базового эксперимента. Для нержавеющей стали 12Х18Н10Т на основе базового эксперимента и метода идентификации определены материальные функции при комнатной температуре. Приводятся результаты сравнения расчетных и экспериментальных исследований нержавеющей стали на этапах циклических нагружений, состоящем из пяти этапов: циклического, монотонного, циклического, монотонного и циклического вплоть до разрушения. Сравняются расчетная и экспериментальная кинетика напряженно-деформированного состояния по всему процессу деформирования. Анализируются изменения размаха и среднего напряжения цикла на этапах циклических нагружений. На этих этапах имеет место посадка петли гистерезиса. Получено надежное соответствие расчетных и экспериментальных результатов. Достаточно адекватное описание теорией процессов изменения кинетики, размахов и среднего напряжения цикла при жестком нагружении позволяет предположить возможность более адекватного описания и процессов мягкого нагружения особенно при нестационарных несимметричных режимах нагружения.

© ПНИПУ

© Бондарь Валентин Степанович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., e-mail: [tm@mami.ru](mailto:tm@mami.ru), [iD: 0000-0002-1047-7211](https://orcid.org/0000-0002-1047-7211)

Абашев Дмитрий Рустамович – к.ф.-м.н., доц., e-mail: [tm@mami.ru](mailto:tm@mami.ru), [iD: 0000-0002-1626-0662](https://orcid.org/0000-0002-1626-0662)

Valentin S. Bondar – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department,

e-mail: [tm@mami.ru](mailto:tm@mami.ru), [iD: 0000-0002-1047-7211](https://orcid.org/0000-0002-1047-7211)

Dmitry R. Abashev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

e-mail: [tm@mami.ru](mailto:tm@mami.ru), [iD: 0000-0002-1626-0662](https://orcid.org/0000-0002-1626-0662)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## SOME FEATURES OF MONOTONIC AND CYCLIC LOADINGS. EXPERIMENT AND MODELING

V.S. Bondar, D.R. Abashev

Moscow Polytechnical University, Moscow, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 30 October 2018

Accepted: 10 May 2019

Published: 28 June 2019

#### Keywords:

monotonic and cyclic loads, plasticity theory, isotropic and anisotropic hardening, memory surface, basic experiment, identification method.

### ABSTRACT

Having analyzed the experimental studies of samples of 12X18H10T stainless steel with a hard (controlled deformation) deformation process including sequences of monotonic and cyclic loading modes, under uniaxial tension-compression and normal temperature, we found some features and differences of isotropic and anisotropic hardening processes under monotonic and cyclic loads. To describe these features in the framework of the plasticity theory (Bondar model) belonging to the class of flow theories with combined hardening, the criterion of changing the direction of plastic deformation and the memory surface allowing the separation of monotonic and cyclic deformations is introduced in the plastic strain tensor space. For the description of transient processes from monotonic to cyclic and from cyclic to monotonic ones, the evolutionary equations are formulated for the parameters of isotropic and anisotropic hardening. The basic experiment, on the basis of which the material functions are determined, consists of three stages, i.e. cyclic loading, monotonic loading and subsequent cyclic up to destruction. The method of material functions identification according to the results of the basic experiment is given. For stainless 12X18H10T steel, the material functions at room temperature were determined on the basis of the basic experiment and the identification method. The comparison of the calculated and experimental results for the stainless steel under rigid loading, was made and consisted of a sequence of five stages: cyclic, monotonic, cyclic, monotonic and cyclic up to destruction, are given. The calculated and experimental kinetics of the stress-strain state throughout the deformation process are compared. Changes in the range and average stress of the cycle at the stages of cyclic stress are analyzed. At these stages there is a landing hysteresis loop. A reliable agreement between the calculated and experimental results was obtained. A sufficiently adequate description by the theory of the processes of change in the kinetics, range and average stress of a cycle under hard loading suggests the possibility of a more adequate description and processes of soft loading, especially in non-stationary asymmetric loading conditions.

© PNRPU

### Введение

Нестационарные и несимметричные процессы циклического деформирования состоят из последовательности монотонных и циклических режимов нагружения. Математическое моделирование таких процессов в условиях жесткого (контролируемые деформации) нагружения и особенно мягкого (контролируемые напряжения) нагружения представляют собой весьма сложную задачу. К тому же при реализации таких режимов возникают трудно описываемые процессы посадки и вышагивания (ratcheting) петли гистерезиса. Что же касается оценки и прогнозирования ресурса в условиях нестационарных и несимметричных циклических нагружений, то в этих случаях накопление повреждений необходимо определять по всему процессу деформирования, учитывая, что накопление повреждений существенно нелинейно.

Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях строится в основном на вариантах теорий пластичности, относящихся к классу теорий пластического течения при комбинированном (изотропном и анизотропном) упрочнении, обзор и анализ которых содержатся в работах [1–32]. В настоящей работе математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений базируется на варианте те-

рии пластичности – модели Бондаря [2–5, 25–27], который, как показано в работе [33], является наиболее адекватным вариантом описания процессов деформирования и разрушения при циклических нагружениях по сравнению с моделями Коротких [6–10] и Шабоша [11, 14, 18, 20]. В работе приводятся основные уравнения модели Бондаря.

Для выявления особенностей деформирования при нестационарном и несимметричном циклическом нагружении рассматривается жесткое нагружение в условиях растяжения-сжатия образцов из нержавеющей стали 12X18H10T, которое представляет собой последовательность пяти этапов: циклическое, монотонное, циклическое, монотонное, циклическое вплоть до разрушения. Анализ переходных процессов от циклического к монотонному и от монотонного к циклическому показывает необходимость разделения процессов монотонного и циклического деформирования. Для этого в пространство пластических деформаций вводится критерий смены направления пластического деформирования и поверхность памяти, разделяющая циклические и монотонные процессы деформирования. Далее в уравнения теории пластичности Бондаря вводятся уравнения эволюции параметров изотропного и анизотропного упрочнений для монотонных и циклических режимов нагружения.

Разделение процессов монотонного и циклического деформирования имеет место и в модели Коротких [6], но только для описания эволюции изотропного упрочнения. Поверхность памяти в этой модели строится в пространстве девиатора микронапряжений с определением в процессе деформирования максимального значения интенсивности микронапряжений. В работах [6, 7, 34] для описания эволюции анизотропного упрочнения в пространство девиатора пластических деформаций вводится поверхность памяти с определением в процессе деформирования интенсивности максимальной амплитуды пластической деформации. Далее в работе [35] для описания эволюции анизотропного упрочнения используется такая же поверхность памяти, как и ранее для изотропного упрочнения. Все эти подходы [6, 7, 34, 35] обладают одним существенным недостатком – достигнутый размер поверхности памяти имеет возможность в конце цикла и уменьшиться, и увеличиться, и это приводит к тому, что в конце каждого цикла возможно как монотонное, так и циклическое нагружение. К тому же, согласно эволюционному уравнению для максимальной интенсивности микронапряжений при циклическом нагружении, эта величина всегда уменьшается, хотя она должна оставаться постоянной на стабилизированном цикле. В заключение следует также сказать, что достаточного обоснования рассматриваемых подходов [6, 7, 34, 35] в литературе нет

С учетом выявленных особенностей монотонных и циклических нагружений для уточненных уравнений модифицированной теории пластичности Бондаря определен базовый эксперимент и сформулирован метод идентификации материальных функций. Получены материальные функции нержавеющей стали 12Х18Н10Т при комнатной температуре. Приводится сравнение результатов расчетных и экспериментальных исследований нержавеющей стали 12Х18Н10Т при жестком нагружении, состоящем из последовательности монотонных и циклических режимов нагружения. Анализируется кинетика напряженно-деформированного состояния, рассматриваются изменения размаха и среднего напряжения цикла в процессе этапов циклических нагружений.

## 1. Основные уравнения теории пластичности

Рассматривается весьма простой вариант теории пластичности [25, 26, 33], являющийся частичным вариантом теории неупругости [2, 3, 5]. Вариант теории пластичности относится к классу одноповерхностных теорий течения при комбинированном упрочнении. Область применимости варианта теории пластичности ограничивается малыми деформациями начально изотропных металлов при температурах, когда нет фазовых превращений, и скоростях деформаций, когда динамическими и реологическими эффектами можно пренебречь.

Далее приводится сводка основных уравнений варианта теории пластичности.

$$1. \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p.$$

$$2. \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} \left[ \dot{\sigma}_{ij} - \nu (3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}) \right].$$

$$3. f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} (s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C^2 = 0.$$

$$4. \dot{C} = q_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad \dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \left( \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$5. \dot{a}_{ij} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_{ij}^{(m)}.$$

$$6. \dot{a}_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} g^{(1)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(1)} a_{ij}^{(1)} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p.$$

$$7. \dot{a}_{ij}^{(2)} = \frac{2}{3} g^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(2)} a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p.$$

$$8. \dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (m = 3, \dots, M).$$

$$9. \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \lambda = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij},$$

$$\sigma_u^* = \left( \frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^* \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$10. \dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{1}{E_*} \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^*}, \quad E_* = q_\varepsilon \sum_{m=1}^M g^{(m)} + \sum_{m=1}^2 g_a^{(m)} a_{u^*}^{(m)*},$$

$$a_{u^*}^{(m)*} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* a_{ij}^{(m)}}{\sigma_u^*}.$$

$$11. \dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{1}{E_* + 3G} 3G \frac{s_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}}{\sigma_u^*}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

$$12. \sigma_u^* < C \cup \dot{\varepsilon}_{u^*}^p \leq 0 \quad - \text{упругость},$$

$$\sigma_u^* = C \cap \dot{\varepsilon}_{u^*}^p > 0 \quad - \text{упругопластичность}.$$

$$13. \dot{\omega} = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{a_{ij}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{W_a}, \quad \alpha = \left( \sigma_a^{(2)} / a_u^{(2)} \right)^{n_a},$$

$$a_u^{(2)} = \left( \frac{3}{2} a_{ij}^{(2)} a_{ij}^{(2)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  – тензоры скоростей полной, упругой и пластической деформаций;  $\sigma_{ij}$ ,  $s_{ij}$ ,  $s_{ij}^*$ ,  $a_{ij}$  – тензор напряжений, девиаторы напряжений, активных напряжений и микронапряжений;  $\varepsilon_{u^*}^p$  – накопленная пластическая деформация;  $\omega$  – поврежденность;  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона;  $C$  – радиус (размер) поверхности нагружения;  $a_{ij}^{(1)}$ ,  $a_{ij}^{(2)}$ ,  $a_{ij}^{(m)}$  – микронапряжения (девиатор смещения центра поверхности нагружения) первого, второго и третьего типов;  $q_\varepsilon$ ,  $g^{(m)}$ ,  $g_a^{(m)}$  – определяющие функции, связь которых с материальными будет приведена ниже.

## 2. Монотонное и циклическое нагружения нержавеющей стали 12X18H10T

Рассматриваются результаты экспериментальных исследований нержавеющей стали 12X18H10T при одноосном жестком нагружении, включающем в себя этапы монотонных и циклических нагружений. Эксперимент состоит из 5 этапов нагружения:

- 1-й этап включает в себя циклическое нагружение при  $\varepsilon_m^{(1)} = 0$ ,  $\Delta\varepsilon^{(1)} = 0,016$  и  $N^{(1)} = 20$  циклов;
- 2-й этап включает в себя монотонное растяжение до  $\varepsilon^{(2)} = 0,05$ ;
- 3-й этап включает в себя циклическое нагружение при  $\varepsilon_m^{(3)} = 0,05$ ,  $\Delta\varepsilon^{(3)} = 0,012$  и  $N^{(3)} = 200$  циклов;
- 4-й этап включает в себя монотонное растяжение до  $\varepsilon^{(4)} = 0,1$ ;
- 5-й этап включает в себя циклическое нагружение при  $\varepsilon_m^{(5)} = 0,1$ ,  $\Delta\varepsilon^{(5)} = 0,012$  и  $N^{(5)} = N_f$  циклов до разрушения.

Здесь  $\varepsilon_m^{(i)}$  – средняя деформация цикла;  $\Delta\varepsilon^{(i)}$  – размах деформации цикла;  $\varepsilon^{(i)}$  – достигаемая деформация при монотонном нагружении;  $N^{(i)}$  – число циклов.

На рис. 1 приведена экспериментальная диаграмма деформирования стали 12X18H10T, включающая все пять этапов нагружения. На циклических диаграммах первого, третьего и пятого этапов показаны петли для первого и последнего циклов. Далее анализируются полученные экспериментальные результаты.

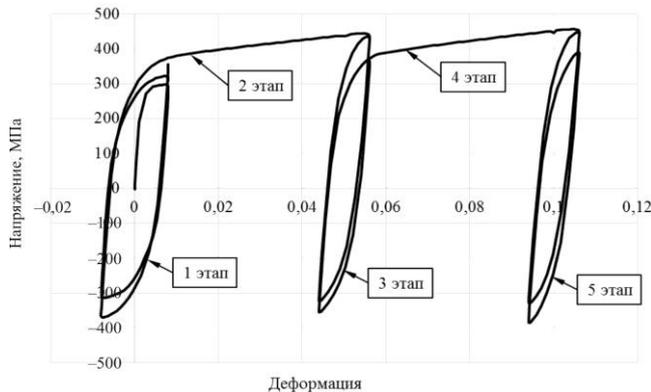


Рис. 1. Диаграмма деформирования стали 12X18H10T

Fig. 1. 12X18H10T steel deformation diagram

Циклическое деформирование на первом этапе показывает, что сталь 12X18H10T на начальной стадии циклически упрочняется с последующим замедлением процесса циклического упрочнения до незначительного ( $dC_p / d\varepsilon_{u*}^p \approx 1 \text{ МПа}$ ) и становится практически циклически стабильной.

На третьем и пятом этапах циклического деформирования имеет место посадка петли гистерезиса. При этом процессы посадки на этих этапах идентичны – как

будто и не было предварительной истории деформирования. Таким образом, модуль  $E_a$ , входящий в эволюционное уравнение для микронапряжений первого типа и обеспечивающий процесс посадки петли, должен иметь одинаковое начальное значение  $E_a = E_{a0}$ . То есть на этапах монотонного нагружения после циклических нагружений, на которых происходит падение  $E_a$  практически до нуля, должен происходить быстрый возврат модуля  $E_a$  к своему начальному значению  $E_{a0}$ .

На втором и четвертом этапах монотонных нагружений упрочнение является одинаковым и постоянным. Упрочнение здесь определяется модулем  $E_{a0}$  и в меньшей степени некоторым модулем монотонного изотропного упрочнения.

Таким образом, поведение модуля  $E_a$ , характеризующего анизотропное упрочнение, и, соответственно, поведение параметров изотропного упрочнения существенно зависит от режима процесса деформирования – циклического или монотонного.

Для разделения процессов монотонного и циклического деформирования в пространстве тензора пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$  вводится поверхность памяти, ограничивающая область циклического деформирования. Поверхность определяется положением ее центра  $\xi_{ij}$  и ее радиусом (размером)  $C_\varepsilon$ . Для вычисления центра и размера поверхности вводится два тензора пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^{p(1)}$  и  $\varepsilon_{ij}^{p(2)}$ , определяющие границы поверхности. В начале деформирования эти переменные равны нулю. Определение смещения и размера поверхности памяти происходит в момент смены направления пластического деформирования. В качестве критерия смены направления принимается следующее условие:

$$\dot{\varepsilon}_{ij(t)}^p \dot{\varepsilon}_{ij(t-0)}^p < 0, \quad (1)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{ij(t)}^p$  – тензор скоростей пластической деформации в текущий момент времени;  $\dot{\varepsilon}_{ij(t-0)}^p$  – тензор скоростей пластической деформации в предшествующий момент времени.

В этот момент изменение границ, центра и размера поверхности нагружения описывается на основе следующих соотношений:

$$\varepsilon_{ij}^{p(2)} = \varepsilon_{ij}^{p(1)}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij}^{p(1)} = \varepsilon_{ij}^p, \quad (3)$$

$$\xi_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}^{p(1)} + \varepsilon_{ij}^{p(2)}}{2}, \quad (4)$$

$$C_\varepsilon = \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{\varepsilon_{ij}^{p(1)} - \varepsilon_{ij}^{p(2)}}{2} \right) \left( \frac{\varepsilon_{ij}^{p(1)} - \varepsilon_{ij}^{p(2)}}{2} \right) \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Тогда условием циклического деформирования является деформирование в пределах поверхности памяти

$$\left[ \frac{2}{3} (\varepsilon_{ij}^p - \xi_{ij}) (\varepsilon_{ij}^p - \xi_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon. \quad (6)$$

Вне поверхности памяти деформирование является монотонным.

На основании изложенных выше особенностей монотонных и циклических нагружений для модуля  $E_a$  и определяющих функций для микронапряжений формулируются следующие уравнения:

$$g^{(1)} = E_a, \quad g^{(2)} = \beta^{(2)} \sigma_a^{(2)}, \quad g_a^{(2)} = -\beta^{(2)}, \quad (7)$$

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)}, \sigma_a^{(m)}, \\ 0, \text{ если } a_u^{(m)} \geq \sigma_a^{(m)} \cap a_{ij}^{(m)} s_{ij}^* > 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$a_u^{(m)} = \left( \frac{3}{2} a_{ij}^{(m)} a_{ij}^{(m)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad m = 3, \dots, M,$$

$$\dot{E}_a = \begin{cases} -K_E \left( \frac{E_a}{E_{a0}} \right)^{n_E} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p & \text{при циклическом нагружении,} \\ M_E \left( \frac{E_{a0} - E_a}{E_{a0}} \right) \dot{\varepsilon}_{u^*}^p & \text{при монотонном нагружении,} \end{cases} \quad (9)$$

$$g_a^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{E_a} \frac{d E_a}{d \varepsilon_{u^*}^p} & \text{при циклическом нагружении,} \\ 0 & \text{при монотонном нагружении.} \end{cases} \quad (10)$$

Итак, для описания микронапряжений надо определить следующие материальные функции:

$E_{a0}, \sigma_a^{(m)}, \beta^{(m)}$  – модули анизотропного упрочнения;

$K_E, n_E, M_E$  – параметры анизотропного упрочнения при циклическом и монотонном деформировании.

Для определения этих материальных функций используются результаты эксперимента на рис. 1.

Модуль анизотропного упрочнения  $E_{a0}$  определяется по формуле

$$E_{a0} = \frac{\sigma_m^{(3)}}{\varepsilon_m^{p(3)}}, \quad (11)$$

где  $\sigma_m^{(3)}$  – среднее напряжение на первом цикле третьего этапа;  $\varepsilon_m^{p(3)}$  – средняя пластическая деформация на первом цикле третьего этапа.

Модули анизотропного упрочнения  $\sigma_a^{(m)}$  и  $\beta^{(m)}$  определяются из обработки циклической диаграммы последнего полуцикла первого этапа по методике, описанной в работах [5, 25].

Параметры анизотропного упрочнения  $K_E$  и  $n_E$  определяются на основе результатов посадки петли гистерезиса на третьем и пятом этапах. Для этого строится зависимость в координатах

$$Y_E = \ln \left[ \frac{\sigma_m(N-1) - \sigma_m(N)}{2 \Delta \varepsilon^p \varepsilon_m^p} \right], \quad (12)$$

$$X_E = \ln \left[ \frac{\sigma_m(N)}{\varepsilon_m^p E_{a0}} \right], \quad (13)$$

где  $N$  – номер цикла;  $\sigma_m(N)$  – среднее напряжение  $N$ -го цикла;  $\Delta \varepsilon^p$  – размах пластической деформации;  $\varepsilon_m^p$  – средняя пластическая деформация. Полученная зависимость аппроксимируется линейной функцией

$$Y_E = a_E X_E + b_E. \quad (14)$$

Тогда

$$K_E = \exp(b_E), \quad n_E = a_E. \quad (15)$$

Параметр анизотропного упрочнения  $M_E$  при монотонном нагружении определяется из соображения восстановления параметра  $E_a$  с 0 до значения  $E_{a0}$  при изменении пластической деформации при монотонном нагружении за  $\varepsilon_{st}^p$ . Тогда параметр  $M_E$  будет определяться по формуле

$$M_E = \frac{E_{a0}}{\varepsilon_{st}^p}. \quad (16)$$

Определив микронапряжения по всему процессу от первого до пятого этапа нагружения, можно определить поведение размера (радиуса) поверхности нагружения, т.е. изменение изотропного упрочнения в переходных процессах от циклического к монотонному и от монотонного к циклическому деформированию.

На рис. 2 приведено изменение размера поверхности нагружения (функционала  $C$ ) по всему процессу деформирования от первого до пятого этапа нагружения.

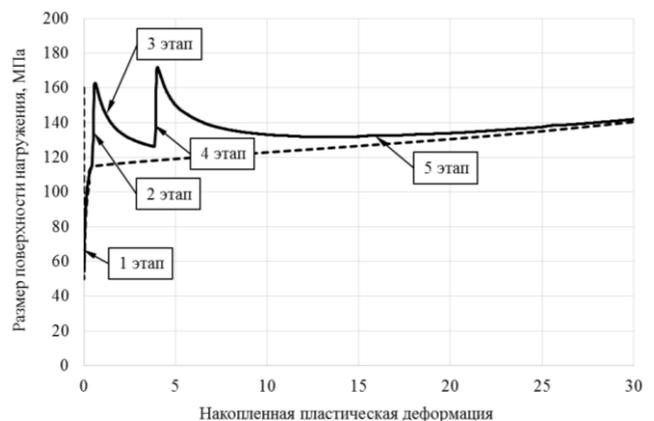


Рис. 2. Изменение размера поверхности нагружения

Fig. 2. Changing the size of the loading surface

Пунктиром на рис. 2 показана функция изотропного упрочнения  $C = C_p(\varepsilon_{u*}^p)$  при циклическом нагружении. Анализ результатов, приведенных на рис. 2, показывает, что при переходе от циклического деформирования к монотонному (второй и четвертый этапы) происходит увеличение интенсивности изотропного упрочнения, а при переходе от монотонного к циклическому (третий и пятый этапы) происходит медленное уменьшение изотропного упрочнения и оно стремится к изотропному  $C = C_p(\varepsilon_{u*}^p)$  при циклическом деформировании.

На основании изложенных выше особенностей изменения изотропного упрочнения при циклических и монотонных нагружениях для определяющей функции изотропного упрочнения принимается следующая зависимость:

$$q_\varepsilon = \begin{cases} \left[ \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u*}^p} - K_C \left( \frac{C - C_p}{C_p} \right)^{n_C} \right] & \text{при циклическом} \\ & \text{нагружении,} \\ \left[ \frac{dC_p}{d\varepsilon_{u*}^p} + M_C \right] & \text{при монотонном} \\ & \text{нагружении.} \end{cases} \quad (17)$$

Итак, для описания изотропного упрочнения надо определить следующие материальные функции:

$C_p(\varepsilon_{u*}^p)$  – функция изотропного упрочнения при циклическом нагружении;

$K_C, n_C, M_C$  – модули изотропного упрочнения при циклическом и монотонном нагружении.

Для определения этих материальных функций используются результаты эксперимента на рис. 2.

Функция изотропного упрочнения при циклическом нагружении  $C_p(\varepsilon_{u*}^p)$  определяется на основе изменения

размера поверхности на первом, третьем и пятом этапах – пунктирная кривая на рис. 2.

Параметры изотропного упрочнения  $K_C$  и  $n_C$  при циклическом нагружении определяются на основе результатов уменьшения размера поверхности нагружения на третьем и пятом этапах нагружения. Для этого строится зависимость в координатах

$$Y_C = \ln \left[ \frac{d(C_p - C)}{d\varepsilon_{u*}^p} \right], \quad (18)$$

$$X_C = \ln \left[ \frac{(C - C_p)}{C_p} \right]. \quad (19)$$

Полученная зависимость аппроксимируется линейной функцией

$$Y = a_C X_C + b_C.$$

Тогда

$$K_C = \exp(b_C), \quad n_C = a_C \quad (20)$$

Параметр изотропного упрочнения  $M_C$  при монотонном нагружении определяется по наклону кривой деформирования на втором и четвертом этапах по формуле

$$M_C = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} - E_{a0} - \frac{dC_p}{d\varepsilon^p}. \quad (21)$$

### 3. Материальные функции нержавеющей стали 12X18H10T

На основе результатов экспериментальных исследований нержавеющей стали 12X18H10T при комнатной температуре получены материальные функции, которые приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Материальные функции стали 12X18H10T

Table 1

Material functions of 12X18H10T steel

$E, \text{МПа}$	$\nu$	$E_{a0}, \text{МПа}$	$\sigma_a^{(2)}, \text{МПа}$	$\beta^{(3)}$	$K_E, \text{МПа}$	$n_E$	$M_E, \text{МПа}$	$K_C, \text{МПа}$	$n_C$	$M_C, \text{МПа}$
$2 \cdot 10^5$	0.3	800	140	260	$1,4 \cdot 10^4$	3.5	$4 \cdot 10^4$	148	1.4	960

Таблица 1. Продолжение

Table 1. Continuation

$\sigma_a^{(3)}, \text{МПа}$	$\beta^{(3)}$	$\sigma_a^{(4)}, \text{МПа}$	$\beta^{(4)}$	$\sigma_a^{(5)}, \text{МПа}$	$\beta^{(5)}$	$W_a, \text{МДж/м}^3$	$n_a$
45	5000	41	2000	36	1100	1830	1.5

Функция изотропного упрочнения стали 12X18H10T

Table 2

The function of isotropic hardening of 12X18H10T steel

$\varepsilon_{i**}^p$	0	0,0003	0,0006	0,0014	0,0045	0,006	0,01	0,025
$C_p$ , МПа	160	125	110	100	65	50	51	57

Таблица 2. Продолжение

Table 2. Continuation

$\varepsilon_{i**}^p$	0,1	0,15	0,3	0,45	0,6	1	8	25	45
$C_p$ , МПа	85	90	105	110	115	115	121	135	159

**4. Верификация модифицированной теории пластичности**

С целью верификации модифицированной теории пластичности проводится расчет кинетики напряженно-деформированного состояния нержавеющей стали 12X18H10T при жестком циклическом и монотонном нагружении по программе (пять этапов), изложенной во втором подразделе. Для расчетов использовались материальные функции, приведенные в третьем разделе. Сравнения расчетных (сплошные кривые) и экспериментальных (светлые кружки) результатов приведены на рис. 3–7. Пунктирными кривыми обозначены результаты расчетов на основе варианта [33] модифицированной модели Бондаря. На рис. 3 показана циклическая диаграмма первого цикла первого этапа; на рис. 4 – 20-й цикл (последний) первого этапа, монотонное нагружение на втором этапе и первый цикл третьего этапа; на рис. 5 – 200-й (последний) цикл третьего этапа, монотонное нагружение на четвертом этапе и первый цикл пятого этапа. Изменения размаха напряжения и среднего напряжения циклов на первом, третьем и пятом этапах нагружения приведены на рис. 6, 7.

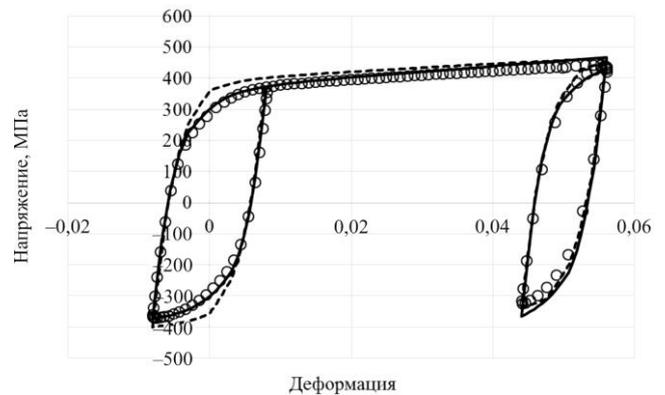


Рис. 4. Последний цикл первого этапа, второй этап и первый цикл третьего этапа нагружения

Fig. 4. The last cycle of the first stage, the second stage and the first cycle of the third stage of loading

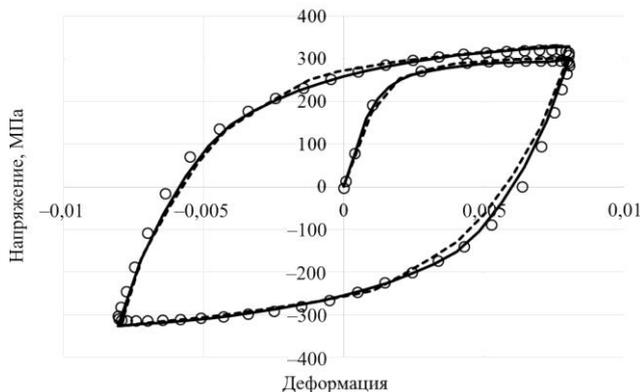


Рис. 3. Первый цикл первого этапа нагружения

Fig. 3. The first cycle of the first loading stage

Наблюдается значительное улучшение описания кинетики напряженно-деформированного состояния на основе предложенного здесь варианта по сравнению с предыдущей [33] модифицированной моделью.

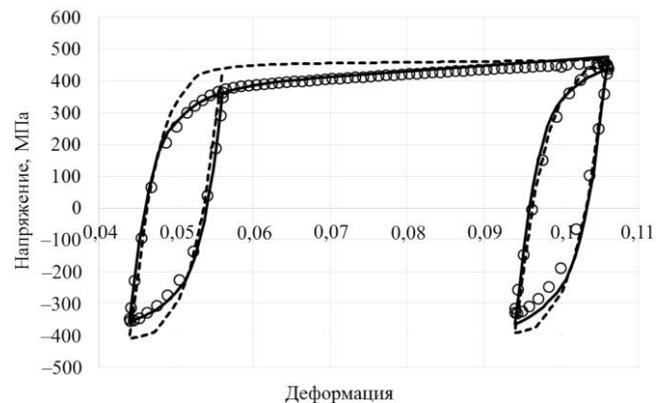


Рис. 5. Последний цикл третьего этапа, четвертый этап и первый цикл пятого этапа нагружения

Fig. 5. The last cycle of the third stage, the fourth stage and the first cycle of the fifth stage of loading

Что же касается изменений размаха и среднего напряжения циклов, то предложенный вариант достаточно адекватно описывает и эти довольно сложные процессы.

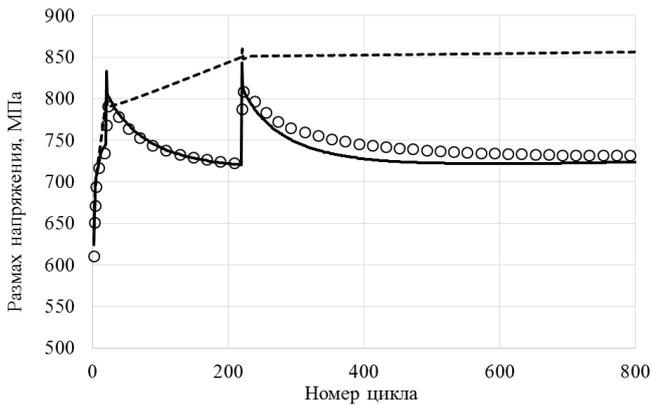


Рис. 6. Размах напряжения

Fig. 6. Stress range

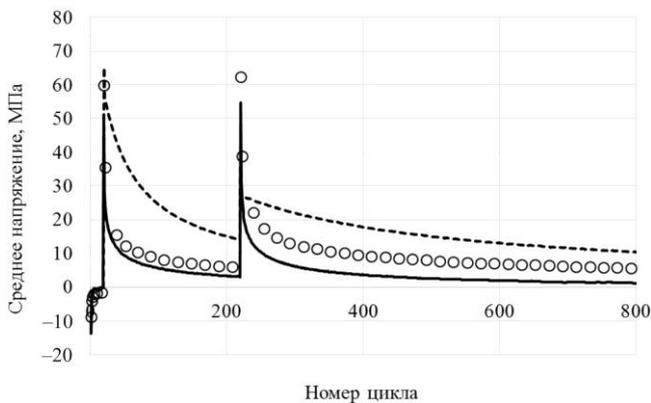


Рис. 7. Среднее напряжение

Fig. 7. Average stress

## Библиографический список

- Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 224 с.
- Бондарь В.С. Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкций при сложном неизотермическом нагружении: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М.: Изд-во МАМИ, 1990. – 314 с.
- Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.
- Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: Физматлит, 2008. – 176 с.
- Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. – New York: Begell House, 2013. – 194 p.
- Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
- Прикладная теория пластичности / Ф.М. Митенков [и др.]. – М.: Физматлит, 2015. – 284 с.
- Прикладная теория вязкопластичности: моногр. / И.А. Волков [и др.]. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. – 318 с.
- Волков И.А., Игумнов Л.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. – М.: Физматлит, 2017. 304 с.
- Капустин С.А., Чурилов Ю.А., Горохов В.А. Моделирование нелинейного деформирования и разрушения кон-

## Закключение

На основе анализа результатов экспериментальных исследований нержавеющей стали установлено, что изотропное и анизотропное упрочнения существенно различны при монотонном и циклическом деформировании. Также имеют место переходные процессы упрочнения при смене процессов монотонного и циклического, циклического и монотонного деформирования.

С учетом выявленных особенностей монотонных и циклических нагружений уточнены уравнения модифицированной теории пластичности Бондаря. Определен базовый эксперимент, сформулирован метод идентификации материальных функций и получены материальные функции нержавеющей стали 12Х18Н10Т при комнатной температуре.

Проведено сравнение результатов расчетных и экспериментальных исследований нержавеющей стали 12Х18Н10Т при жестком нагружении, состоящем из последовательности монотонных и циклических режимов нагружения. Анализировалась кинетика напряженно-деформированного состояния, рассматривались изменения размаха и среднего напряжения цикла в процессе циклических нагружений. Получено надежное соответствие расчетных и экспериментальных результатов.

Достаточно адекватное описание теорией процессов изменения кинетики, размаха и среднего напряжения цикла при жестком нагружении позволяет предположить возможность более адекватного описания и процессов мягкого нагружения особенно при нестационарных несимметричных режимах нагружения.

струкций в условиях многофакторных воздействий на основе МКЭ. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. 347 с.

11. Нелинейная механика материалов / Ж. Бессон [и др.]. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397 с.

12. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation // *Int. J. of Plasticity*. – 2002. – Vol. 18. – P. 873–894.

13. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. // *Int. J. of Plasticity*. – 2009. – Vol. 26(3). – P. 441–465. DOI:10.1016/j.ijplas.2009.08.005

14. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // *Int. J. of Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1692.

15. Rahman S.M., Hassan T., Corona E. Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure // *Int. J. of Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1756–1791.

16. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting // *Int. J. of Plasticity*. – 2009. – Vol. 25. – P. 1560–1587.

17. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting // *Int. J. of Plasticity*. – 2010. – Vol. 26. – P. 711–730.

18. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions // *Int. J. of Plasticity*. – 2012. – Vol. 35. – P. 44–66.

19. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models // *Int. J. Plasticity*. – 2008. – Vol. 24. – P. 1863–1889.

20. Effect of dynamic strain aging on isotropic hardening in low cycle fatigue for carbon manganese steel / Z.Y. Huang, J.L. Chaboche, Q.Y. Wang, D. Wagner, C. Bathias // *Materials Science and Engineering*. – 2014. – A589. – P. 34–40.

21. Kang G., Kan Q. Constitutive modeling for uniaxial time-dependent ratcheting of SS304 stainless steel // *Mech. Mater.* – 2007. – Vol. 39. – P. 488–499.

22. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep // *Int. J. Plasticity*. – 2011. – Vol. 27 (12). – P. 1936–1958.

23. Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control // *Int. J. Plasticity*. – 2013. – Vol. 43. – P. 1–19.

24. Taleb L., Cailletaud G., Saï K. Experimental and numerical analysis about the cyclic behavior of the 304L and 316L stainless steels at 350 °C // *Int. J. Plasticity*. – 2014. – Vol. 61. – P. 32–48.

25. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 125–152.

26. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термопластичности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 2. – С. 21–35. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.02

27. Бондарь В.С., Даншин В.В., Кондратенко А.А. Вариант теории термовязкопластичности // Вестник Пермского

национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 1. – С. 39–56. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.0.

28. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect // CEGB Report No. RD/B/N/ 731. – 1966.

29. Кадашевич Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ. – 1967. – Вып. 6. – С. 39–45.

30. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. – 1954. – Т. 6, вып. 3. – С. 314–324.

31. Prager W. The theory of plasticity: A Survey of Recent Achievements // *Proc. Inst. Mech. Engrs.* – London, 1955. – 169.41.

32. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior // *International Journal of Plasticity*. – 1993. – Vol. 9. – P. 375–390.

33. Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Петров В.К. Сравнительный анализ вариантов пластичности при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 2. – С. 23–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.02

34. Коротких Ю.Г. Описание процессов накопления повреждений материала при неизотермическом вязкопластическом деформировании // Проблемы прочности. – 1985. – № 1. – С. 18–23.

35. Моделирование усталостной долговечности поликристаллических конструкционных сплавов при блочном несимметричном малоцикловом нагружении / И.А. Волков, Л.А. Игумнов, И.С. Тарасов, Д.Н. Шишулин, М.Т. Маркова // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – Т. 80, № 1. – С. 15–30.

## References

1. Novozhilov V.V., Kadashevich Iu.I. Mikronapriazheniia v konstruktivnykh materialakh [Backstresses in structural materials]. *Leningrad, Mashinostroenie*, 1990, 224 p.

2. Bondar' V.S. Neuprugoe povedenie i razrushenie materialov i konstruktii pri slozhnom neizotermicheskom nagruzhenii [Inelastic behavior and fracture of materials and structures with complex non-isothermal loading]: *dis...d-ra fiz.-mat. nauk. Moscow, Izd-vo MAMI*, 1990, 314 p.

3. Bondar V.S. Neuprugost'. Varianty teorii [Inelasticity. Variants of the theory]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2004, 144 p.

4. Bondar V.S., Danshin V.V. Plastichnost'. Proporcional'nye i neproporcional'nye nagruzhenija [Plasticity. Proportional and disproportionate loading]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2008, 176 p.

5. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. *New York, Begell House*, 2013, 194 p.

6. Volkov I.A., Korotkih Ju.G. Uravnenija sostojaniia vjazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdenijami [The equation of state viscoplastic media with injuries]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2008, 424 p.

7. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A., Kaplivenko A.V., Korotkikh Iu.G., Panov V.A. Prikladnaia teoriia plastichnosti. *Moscow, FIZMATLIT*, 2015, 284 p.

8. Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkikh Iu.G. Prikladnaia teoriia vjazkoplastichnosti: *N. Novgorod, Izd-vo NNGU*, 2015, 318 p.

9. Volkov I.A., Igumnov L.A. Vvedenie v kontinualnuyu mehaniku povrezhdennoj sredy. [Introduction to conrinal mechanics of damaged media]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2007. 304 p.

10. Kapustin S.A., Churilov Yu.A., Gorohov V.A. Modelirovanie nelinejnogo deformirovaniia i razrusheniia kontstrukcij v uslovijah mnogofaktornykh vozdeystvij na osnove MKEH. [Simulation of nonlinear deformation and fracture of structures under conditions of multifactorial effects based on FEM] *N. Novgorod, Izd-vo NNGU*, 2015, 347 p.

11. Besson Zh., Kaeto Zh., J.-L. Chaboche, Forest T.S. Nelineinaia mekhanika materialov [Nonlinear mechanics of materials]. *Saint Petersburg, Izd-vo Politekhn. un-ta*, 2010, 397 p

12. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation. *Int. J. of Plasticity*, 2002, vol.18, pp. 873-894.

13. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol.26(3), pp.441-465. DOI:10.1016/j.ijplas.2009.08.005

14. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp.1642-1692.

15. Rahman S.M., Hassan T., Corona E., Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes

under cyclic bending and steady internal pressure. *Int. J. of Plasticity*, 2008, vol. 24, pp.1756-1791.

16. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratcheting. *Int. J. of Plasticity*, 2009, vol. 25, pp. 1560-1587.

17. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratcheting. *Int. J. of Plasticity*, 2010, vol. 26, pp. 711-730.

18. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions. *Int. J. of Plasticity*, 2012, vol. 35, pp. 44-66.

19. Hassan T., Taleb L., Krishna S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models. *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, pp.1863-1889.

20. Huang Z.Y., Chaboche J.L., Wang Q.Y., Wagner D., Bathias C. Effect of dynamic strain aging on isotropic hardening in low cycle fatigue for carbon manganese steel. *Materials Science and Engineering*, 2014, A589, pp. 34-40.

21. Kang G., Kan Q. Constitutive modeling for uniaxial time-dependent ratcheting of SS304 stainless steel. *Mech. Mater.*, 2007, vol. 39, pp.488-499.

22. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep. *Int. J. Plasticity*, 2011, vol. 27 (12), pp. 1936-1958.

23. Taleb L. About the cyclic accumulation of the inelastic strain observed in metals subjected to cyclic stress control. *Int. J. Plasticity*, 2013, vol.43, pp.1-19.

24. Taleb L., Cailletaud G., Saï K. Experimental and numerical analysis about the cyclic behavior of the 304L and 316L stainless steels at 350 °C. *Int. J. Plasticity*, 2014, vol.61, pp.32-48.

25. Bondar V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Mathematical modelling of deformation and damage accumulation under cyclic loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no.2, pp. 125-152.

26. Bondar V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. Version of the theory of thermoplasticity. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no.2, pp. 21-35. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.2.02

27. Bondar V.S., Danshin V.V., Kondratenko A.A. Variant of thermoviscoplasticity theory, *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016, no. 1, pp. 39-56. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.1.03

28. Armstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *CEGB Report*, 1966, no. RD/B/N/ 731.

29. Kadashevich Ju.I. O razlichnyh tenzorno-linejnyh sootnoshenijah v teorii plastichnosti [About the different tensor-linear correlations in the theory of plasticity]. *Issledovanija po uprugosti i plastichnosti – Studies in elasticity and plasticity*, Leningrad Izd-vo LGU, 1967, iss.6, pp. 39-45

30. Ishlinskij A.Ju. Obshhaja teorija plastichnosti s linejnym uprochneniem [General theory of plasticity with linear hardening]. *Ukrainian mathematical journal*, 1954, vol. 6 (3), pp. 314-324

31. Prager W. The theory of plasticity: A Survey of Recent Achievements. *Proc. Inst. Mech. Engrs*, London, 1955, 169.41.

32. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity*, 1993, vol. 9, pp. 375-390.

33. Bondar V.S., Abashev D.R., Petrov V.K. Comparative analysis of variants of plasticity theories under cyclic loading. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no.2 pp. 23-44. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.02.

34. Korotkih Yu.G. Opisanie processov nakoplenija povrezhdenij materiala pri neizotermicheskom vjazkoplasticheskom deformirovanii [Description of the processes of accumulation of material damage during non-isothermal viscoplastic deformation] *Problemy prochnosti*. 1985, №1, pp. 18-23.

35. Volkov I.A., Igumnov L.A., Tarasov I.S., Shishulin D.N., Markova M.T. Modelirovanie ustalostnoj dolgovechnosti polikristallicheskih konstrukcionnyh splavov pri blochnom nesimmetrichnom malociklovom nagruzhennii. [Simulation of the fatigue life of polycrystalline structural alloys with block non-symmetrical low-cycle loading]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2018, vol.80, no. 1, pp. 15-30.