



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.04

УДК 539.3

ГИДРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ВЫПОЛНЕННЫХ ИЗ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

С.А. Бочкарёв, С.В. Лекомцев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 11 марта 2019 г.
Принята: 20 июня 2019 г.
Опубликована: 28 июня 2019 г.

Ключевые слова:

коаксиальные цилиндрические оболочки, пьезоэлектрический материал, потенциальная жидкость, метод конечных элементов, устойчивость, дивергенция, флаттер.

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена численному исследованию динамического поведения электроупругих коаксиальных оболочек, в кольцевом зазоре между которыми течет сжимаемая жидкость. Решение задачи осуществляется с использованием полуаналитического варианта метода конечных элементов. Оболочки выполнены из материала, обладающего пьезоэлектрическими свойствами и поляризованного в радиальном направлении, и рассматриваются в рамках классической теории, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, а также уравнений линейной электроупругости. Распределение электрического потенциала по толщине принимается линейным. Движение сжимаемой невязкой жидкости описывается волновым уравнением, которое совместно с условиями непроницаемости и соответствующими граничными условиями преобразуются с помощью метода Бубнова–Галёркина. Давление жидкости на деформируемые тела вычисляется из линеаризованного уравнения Бернулли. Математическая постановка задачи динамики тонкостенных конструкций основана на вариационном принципе возможных перемещений. Оценка устойчивости базируется на вычислении и анализе комплексных собственных значений связанной системы уравнений, сформированной относительно неизвестных величин для упругой и жидкой сред. Электрические переменные исключаются на элементарном уровне и оказывают влияние на динамические характеристики конструкции в виде присоединенной жесткости. Достоверность полученных результатов подтверждена путем сопоставления с известными данными для случая изотропных оболочек. Представлены исследования границ устойчивости при различных геометрических размерах, вариантах кинематических граничных условий (свободное опирание и жесткая заделка на обоих краях, консольное закрепление) и разной величине кольцевого зазора между оболочками. Оценено влияние электрических граничных условий, задаваемых на электродированных поверхностях внутренней и наружной оболочек, на критические скорости потока жидкости и формы потери устойчивости.

© ПНИПУ

© Бочкарев Сергей Аркадьевич – к.ф.-м.н., с.н.с., e-mail: bochkarev@icmm.ru, [iD: 0000-0002-9722-1269](https://orcid.org/0000-0002-9722-1269)
Лекомцев Сергей Владимирович – к.ф.-м.н., н.с., e-mail: lekomtsev@icmm.ru, [iD: 0000-0002-8331-2979](https://orcid.org/0000-0002-8331-2979)

Sergey A. Bochkarev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: bochkarev@icmm.ru, [iD: 0000-0002-9722-1269](https://orcid.org/0000-0002-9722-1269)

Sergey V. Lekomtsev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: lekomtsev@icmm.ru, [iD: 0000-0002-8331-2979](https://orcid.org/0000-0002-8331-2979)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

HYDROELASTIC STABILITY OF COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS MADE OF PIEZOELECTRIC MATERIAL

S.A. Bochkarev, S.V. Lekomtsev

Institute of Continuous Media Mechanics RAS, Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 11 March 2019

Accepted: 20 June 2019

Published: 28 June 2019

Keywords:

coaxial cylindrical shell, piezoelectric material, potential fluid, finite element method, stability, divergence, flutter.

ABSTRACT

The paper numerically investigates the dynamic behavior of electroelastic coaxial shells containing a compressible flowing fluid in the annular gap between them. The solution of the problem is carried out using a semi-analytical version of the finite element method. The shells are made of a material with piezoelectric properties, which is polarized in the radial direction. The behavior of the system is studied in the framework of the classical theory based on the Kirchhoff – Love hypotheses and equations of linear electroelasticity. The distribution of the electric potential through the thickness is assumed to be linear. The motion of a compressible non-viscous fluid is described by the wave equation, which, together with the impenetrability conditions and the corresponding boundary conditions, is transformed using the Bubnov – Galerkin method. The pressure exerted by the fluid on the deformable bodies is calculated from the linearized Bernoulli equation. The mathematical formulation of the problem of the thin-walled structure dynamics is based on the variational principle of virtual displacements. The stability estimate is obtained from the calculation and analysis of complex eigenvalues of a coupled system of equations, developed for unknown quantities of elastic and liquid media. The electrical variables are eliminated at the element level and produce an effect on the dynamic characteristics of the structure in the form of added stiffness. The reliability of the obtained results is evaluated by comparing them with the known data for isotropic shells. The estimation of the stability boundaries are carried out for systems with different geometrical dimensions, variants of kinematic boundary conditions (shells with simply supported edges, clamped at both edges and cantilevered) and different annular gap sizes. It has been shown that the critical velocities of the fluid flow and the form of the loss of stability depend on the electric boundary conditions set on the electrode surfaces of the inner and outer shells.

© PNRPU

Введение

Электроупругие материалы, внедренные в инженерные конструкции или присоединенные к ним, уже значительное время используются в различных областях техники с целью повышения эксплуатационных характеристик изделий в целом. Построенные на их основе интеллектуальные системы пассивного или активного управления динамическим поведением способствуют снижению уровня механических колебаний или акустического шума. Библиография основных работ с описанием различных подходов, используемых при моделировании конструкций с пьезоэлементами, как и примеры их практического использования, изложены в монографии [1]. В [2] отмечается, что успешное практическое применение пьезоэлектриков, контактирующих с жидкой или газообразной средой, возможно только при надлежащем описании их совместного отклика. В случае тонкостенных конструкций для этих целей может быть использована предложенная в работе [3] модель, которая основана на однослойном представлении перемещений упругого тела и послойном описании пьезоэлектрических свойств. Данный подход был использован как при моделировании пластин и оболочек, в том числе контактирующих с неподвижной жидкостью, так и упругих конструкций с внешними накладками, полностью или частично изготовленных из электроупругого материала [4–7]. В случае конечно-

элементного моделирования и линейного распределения электрических свойств по толщине тела описанный метод позволяет упростить решение за счет исключения электрических составляющих на элементном уровне. Исследование конструкций с текущей жидкостью осуществлено в работах [8, 9]. В первой из них продемонстрирована возможность активного демпфирования колебаний слоистой оболочки с накладками из пьезокерамики с помощью системы с обратной связью. Во второй в рамках трехмерной теории упругости и линейной теории пьезоупругости анализируется влияние электрических граничных условий на критические скорости потери устойчивости оболочки, состоящей из электроупругого материала.

Содержащие жидкость или газ коаксиальные цилиндрические оболочки уже значительное время выступают в качестве объекта разнообразных теоретических исследований. Бесконечно длинные оболочки рассматриваются в статьях [10, 11]. В первой из них определяются критические скорости потока газа, текущего между двумя оболочками, одна из которых является абсолютно жесткой. Во второй впервые предложено аналитическое решение для такой системы, при которой несжимаемая жидкость течет не только в кольцевом канале, но и во внутренней оболочке. Коаксиальные оболочки конечной длины, как с абсолютно жесткой, так и с упругой наружной оболочкой, были наиболее полно исследованы в [12, 13] в случае жесткого закреп-

ления с двух торцов и консольного закрепления. В работах [13] и [14] рассматриваются конструкции с аналогичными граничными условиями, но в рассмотрение вводятся стационарные силы вязкого сопротивления. Показано, что они оказывают существенное влияние на критические скорости течения жидкости. В рамках аналогичной модели в [15] выполнено исследование влияния на устойчивость ряда системных параметров при кольцевом течении жидкости. Расхождение аналитических и экспериментальных результатов, обусловленное несовершенствами формы оболочки, выявлено в [16]. В [17] решение трехмерных линеаризованных уравнений Навье–Стокса, описывающих движение вязкой жидкости, ищется в виде суммы скалярного и векторного потенциалов. Здесь анализируются сложности в реализации граничных условий, задаваемых на стенке оболочки при моделировании течения вязкой жидкости. Показано, что для свободно опертых оболочек влияние нестационарных вязкостных сил возрастает с уменьшением ширины кольцевого канала. В работе [18] предложена и обоснована возможность использования простой приближенной теории для оценки динамического поведения системы опертых коаксиальных оболочек, взаимодействующих с несжимаемой жидкостью. В [19] представлена модель, учитывающая как стационарные, так и нестационарные силы вязкого сопротивления, которые определяются из линеаризованных уравнений Навье–Стокса с использованием численной процедуры, основанной на конечно-разностном методе. Показано, что эта модель лучше согласуется с экспериментальными данными, представленными в работах [16, 20], чем модель, учитывающая только стационарные силы вязкого сопротивления. Исследование колебаний оболочек с неоднородными ограничениями в кольцевом потоке в случае как невязкой, так и вязкой жидкости осуществлено в [21, 22]. Для этих целей применяется метод Релея–Ритца, в котором в качестве допустимых функций использованы формы колебаний свободно опертых оболочек в вакууме. Численное решение задачи методом конечных элементов (МКЭ) представлено в работах [23–25]. В первых двух выявлено существенное расхождение с известными численно-аналитическими решениями для тех случаев, когда потеря устойчивости осуществляется на высоких модах колебаний. Параметрический анализ устойчивости коаксиальных оболочек, имеющих разнообразные комбинации граничных условий и взаимодействующих с двумя потоками идеальной сжимаемой жидкостью, выполнен в [25]. Исследование коаксиальных оболочек, содержащих идеальную или вязкую жидкость, текущую только в кольцевом канале, в том числе с учетом влияния температурных эффектов, представлено в работах [26, 27]. Динамическое поведение горизонтально ориентированных соосных оболочек, кольцевой цилиндрической зазор между которыми полностью или частично заполнен текущей сжимаемой жидкостью, изучено в трехмерной постановке в недавно опубликованной работе [28]. Более обширная библио-

графия, посвященная анализу коаксиальных оболочек, взаимодействующих как с неподвижной, так и с текущей жидкостью, представлена в монографии [29].

Целью настоящей работы является исследование влияния электрических граничных условий на границы устойчивости тонкостенных коаксиальных оболочек, в кольцевом зазоре между которыми течет идеальная сжимаемая жидкость.

1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассматриваются выполненные из электроупругого материала (пьезокерамики) коаксиальные оболочки длиной L , радиусами $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, толщинами $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ (рис. 1). Пространство между ними заполнено сжимаемой жидкостью, текущей со скоростью U . Здесь и далее верхние индексы «(1)» и «(2)» характеризуют внутреннюю и внешнюю оболочки соответственно. Необходимо исследовать влияние электрических граничных условий, задаваемых для оболочек, на критические скорости потери устойчивости при различных кинематических граничных условиях, величине кольцевого зазора между оболочками и геометрических размерах.

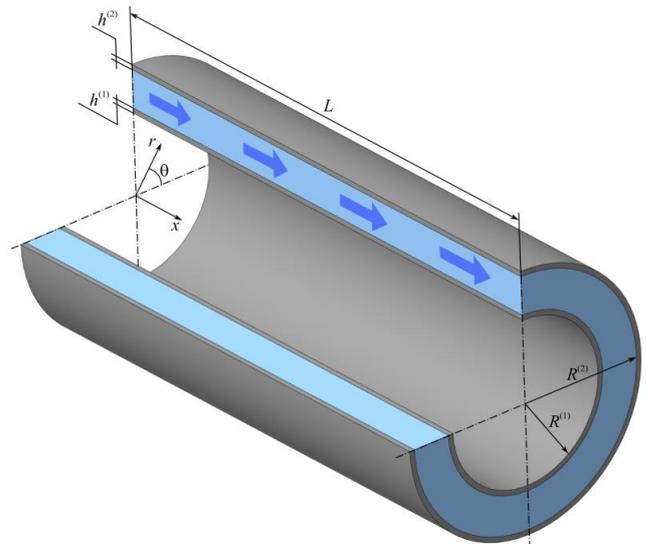


Рис. 1. Пьезоэлектрические коаксиальные цилиндрические оболочки, взаимодействующие с кольцевым потоком жидкости

Fig. 1. Piezoelectric coaxial cylindrical shells interacting with an annular fluid flow

Потенциальное движение идеальной сжимаемой жидкости описывается волновым уравнением, которое в цилиндрических координатах (r, θ, x) записывается в виде [30]

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \phi, \quad (1)$$

где ϕ – потенциал возмущения скорости; c – скорость звука в жидкой среде.

Потенциал возмущения скорости на входе и выходе из кольцевого канала между оболочками подчиняется следующим граничным условиям:

$$x = 0: \phi = 0, \quad x = L: \partial\phi/\partial x = 0. \quad (2)$$

На смоченных поверхностях $S_\sigma^{(i)} = S_f \cap S_s^{(i)}$ ($i = 1, 2$) задаются условия непроницаемости

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = - \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} + U \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial t} + U \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} \right) \quad (4)$$

для внутренней и внешней оболочек соответственно. Здесь $w^{(i)}$ – нормальная компонента вектора перемещений внутренней и внешней оболочек; S_f , $S_s^{(i)}$ – поверхности, ограничивающие объем жидкости V_f и оболочек.

Гидродинамическое давление p , действующее со стороны жидкости на оболочки, вычисляется из уравнения Бернулли

$$p^{(i)} = \pm \rho_f \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + U \frac{\partial\phi}{\partial x} \right), \quad (5)$$

где ρ_f – плотность жидкости, а знак перед формулой зависит от направления вектора нормали к внешней поверхности оболочек.

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2)–(4) преобразуются с помощью метода Бубнова–Галёркина к слабой форме [31]

$$\begin{aligned} & \int_{V_f} \left(\frac{\partial\phi_a}{\partial r} \frac{\partial F_k}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\phi_a}{\partial\theta} \frac{\partial F_k}{\partial\theta} + (1 - M^2) \frac{\partial\phi_a}{\partial x} \frac{\partial F_k}{\partial x} \right) dV + \\ & + \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \frac{\partial^2\phi_a}{\partial x \partial t} F_k dV + \int_{V_f} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi_a}{\partial t^2} F_k dV - \int_{S_\sigma^{(1)}} \frac{\partial w_a^{(1)}}{\partial t} F_k dS + \\ & + \int_{S_\sigma^{(1)}} U \frac{\partial w_a^{(1)}}{\partial x} F_k dS + \int_{S_\sigma^{(2)}} \frac{\partial w_a^{(2)}}{\partial t} F_k dS - \\ & - \int_{S_\sigma^{(2)}} U \frac{\partial w_a^{(2)}}{\partial x} F_k dS = 0, \quad k = 1, m_f. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь ϕ_a , $w_a^{(i)}$ – аппроксимации потенциала возмущения скорости и нормальных компонент вектора перемещений оболочек; F_k , m_f – базисные функции и их количество; $M = U/c$ – число Маха.

В общем случае поведение электроупругого тела описывается уравнениями состояния, пьезоэффекта и соотношениями электростатики [32, 33]

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E}, \quad (7)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{d}\mathbf{E}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\psi. \quad (10)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{E} , \mathbf{D} – векторы напряжений, линейной деформации, напряженности электрического поля и электрической индукции; \mathbf{c} , \mathbf{e} , \mathbf{d} – матрицы упругих констант, пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов; ψ – электростатический потенциал. В случае тонкостенных тел с радиальной поляризацией, находящихся в условиях плоского напряженного состояния, соотношения (7)–(10) могут быть упрощены. В частности, в векторах напряженности электрического поля и электрической индукции отличными от нуля остаются только компоненты E_z и D_z , а уравнения (7) и (8) в координатной системе (s, θ, z) записываются следующим образом [34–35]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & 0 \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{s\theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{s\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{d}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где $\bar{c}_{lk} = c_{lk} - c_{l3}c_{k3}/c_{33}$ ($l, k = 1, 2$); $\bar{e}_{3l} = e_{3l} - e_{33}c_{l3}/c_{33}$ ($l = 1, 2$); $\bar{c}_{66} = c_{66}$, $\bar{d}_{33} = d_{33} + e_{33}^2/c_{33}$.

Предполагается, что поверхности оболочек покрыты тонкими невесомыми электродами, которые могут быть либо закорочены, что соответствует граничному условию $\psi = 0$ (Вариант «А»), либо разомкнуты, $D_z = 0$ (Вариант «В»). Из уравнений (8)–(10) может быть получено следующее интегральное соотношение [5]:

$$\int_{V_s} \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon}\delta\mathbf{E}dV + \int_{V_s} \mathbf{d}\mathbf{E}\delta\mathbf{E}dV = 0, \quad (13)$$

где V_s – объем, занимаемый упругим телом.

Оболочки рассматриваются на основе гипотез Кирхгофа–Лява, согласно которым компоненты вектора деформации срединной поверхности, изменения кривизны и кручения записываются следующим образом [36]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^{(i)} &= \frac{\partial u_i}{\partial s}, \quad \varepsilon_\theta^{(i)} = \frac{1}{R^{(i)}} \left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + w^{(i)} \right), \\ \varepsilon_{s\theta}^{(i)} &= \frac{1}{R^{(i)}} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial s}, \quad \kappa_s^{(i)} = -\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial s^2}, \\ \kappa_\theta^{(i)} &= \frac{1}{R^{(i)} R^{(i)}} \left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \theta^2} \right), \\ \kappa_{s\theta}^{(i)} &= \frac{1}{R^{(i)}} \left(\frac{\partial v^{(i)}}{\partial s} - \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial s \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $u^{(i)}, v^{(i)}$ – меридиональные и окружные составляющие вектора перемещений оболочек.

С учетом принятых упрощений физические соотношения, устанавливающие связь между вектором обобщенных усилий и моментов $\mathbf{T}^{(i)} = \{T_s^{(i)}, T_\theta^{(i)}, T_{s\theta}^{(i)},$

$M_s^{(i)}, M_\theta^{(i)}, M_{s\theta}^{(i)}\}^T$, векторами обобщенных деформаций

$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \{\varepsilon_s^{(i)}, \varepsilon_\theta^{(i)}, \varepsilon_{s\theta}^{(i)}, \kappa_s^{(i)}, \kappa_\theta^{(i)}, 2\kappa_{s\theta}^{(i)}\}^T$ и напряженности

электрического поля, представляются в матричном виде:

$$\mathbf{T}^{(i)} = \bar{\mathbf{D}}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} - \mathbf{G}^{(i)} \mathbf{E}^{(i)} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^{(i)} & \bar{\mathbf{B}}^{(i)} \\ \bar{\mathbf{B}}^{(i)} & \bar{\mathbf{C}}^{(i)} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} - \mathbf{G}^{(i)} \mathbf{E}^{(i)}, \quad (15)$$

где коэффициенты, входящие в матрицы жесткостей $\bar{\mathbf{D}}^{(i)}$, вычисляются как

$$(\bar{\mathbf{A}}_{lk}^{(i)}, \bar{\mathbf{B}}_{lk}^{(i)}, \bar{\mathbf{C}}_{lk}^{(i)}) = \int_{h^{(i)}} (1, z, z^2) \bar{c}_{lk}^{(i)} dz, \quad (l, k = 1, 2, 6),$$

а структура матриц $\mathbf{G}^{(i)}$ будет представлена далее.

Математическая формулировка задачи динамики упругих тел основана на вариационном принципе возможных перемещений, который с учетом соотношений (5) и работы сил инерции в матричном виде записывается как

$$\int_{S_s^{(i)}} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)})^T \mathbf{T}^{(i)} dS + \int_{V_s^{(i)}} \rho_s^{(i)} (\delta \mathbf{u}^{(i)})^T \ddot{\mathbf{u}}^{(i)} dV - \int_{S_\sigma^{(i)}} (\delta \mathbf{u}^{(i)})^T \mathbf{P}^{(i)} dS = 0, \quad (16)$$

где $\rho_s^{(i)}$ – плотность материалов оболочек; $\mathbf{u}^{(i)}$ и $\mathbf{P}^{(i)} = \{0, 0, p^{(i)}\}^T$ – векторы обобщенных перемещений и поверхностных нагрузок.

2. Численная реализация

Следуя [5], разобьем оболочки по толщине на N слоев и для каждого слоя k представим компоненту поля E_z в следующем виде (опустив нижний индекс):

$$E_k^{(i)} = -V_k^{(i)} / h_k^{(i)}, \quad (17)$$

где $h_k^{(i)} = z_k^{(i)} - z_{k-1}^{(i)}$ – толщина слоя; $z^{(i)}$ – координата, отсчитываемая от срединной поверхности оболочки $-h^{(i)}/2 \leq z^{(i)} \leq h^{(i)}/2$; $V_k^{(i)} = \psi_k^{(i)} - \psi_{k-1}^{(i)}$ – разница между электростатическими потенциалами на верхней и нижней поверхностях слоя, которая вместе с компонентами вектора перемещений оболочек и потенциалом возмущения скорости становится искомой величиной.

Численное решение задачи осуществляется с использованием полуаналитического варианта МКЭ [37], основанного на представлении решения в виде ряда Фурье по окружной координате θ .

$$(u^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}, V_k^{(i)}) = \sum_{j=0}^{\infty} (u_j^{(i)}, w_j^{(i)}, \phi_j^{(i)}, V_{kj}^{(i)}) \cos j\theta,$$

$$v^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} v_j^{(i)} \sin j\theta, \quad (18)$$

где j – номер гармоники.

Выражая в (18) искомые переменные через их узловые значения, получим матричные соотношения (опуская нижний индекс j)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(i)} &= \{u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}\}^T = \mathbf{N}^{(i)} \mathbf{u}_e^{(i)}, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{F} \mathbf{f}^e, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} &= \mathbf{B}^{(i)} \mathbf{u}_e^{(i)}, \quad \mathbf{E}_e^{(i)} = -\mathbf{B}_\psi^{(i)} \boldsymbol{\Phi}_e^{(i)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\mathbf{N}^{(i)}$ и \mathbf{F} – матрицы функций формы конечных элементов оболочек и потенциала возмущения скорости;

$\mathbf{u}_e^{(i)}$ и \mathbf{f}^e – векторы узловых значений; \mathbf{B} – матрица связи деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ с узловыми значениями;

$\mathbf{E}_e^{(i)} = \{E_1^{(i)}, \dots, E_k^{(i)}, \dots, E_N^{(i)}\}^T$; $\boldsymbol{\Phi}_e^{(i)} = \{V_1^{(i)}, \dots, V_k^{(i)}, \dots, V_N^{(i)}\}^T$;

$\mathbf{B}_\psi^{(i)} = \text{diag}(1/h_1^{(i)}, \dots, 1/h_k^{(i)}, \dots, 1/h_N^{(i)})$. С учетом (15)

и (16) матрица $\mathbf{G}^{(i)}$ в уравнении (13) формируется следующим образом:

$$\mathbf{G}^{(i)} = \begin{bmatrix} \hat{z}_{11}^{(i)} & \dots & \hat{z}_{1k}^{(i)} & \dots & \hat{z}_{1N}^{(i)} \\ \hat{z}_{21}^{(i)} & \dots & \hat{z}_{2k}^{(i)} & \dots & \hat{z}_{2N}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \bar{z}_{11}^{(i)} & \dots & \bar{z}_{1k}^{(i)} & \dots & \bar{z}_{1N}^{(i)} \\ \bar{z}_{21}^{(i)} & \dots & \bar{z}_{2k}^{(i)} & \dots & \bar{z}_{2N}^{(i)} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где $\hat{z}_{lm}^{(i)} = h_m^{(i)} \bar{e}_{3l}^{(i)m}$ и $\bar{z}_{lm}^{(i)} = 1/2 [(z_m^{(i)})^2 - (z_{m-1}^{(i)})^2] \bar{e}_{3l}^{(i)m}$.

Дискретизация оболочки осуществляется с использованием высокоточного конечного элемента в виде усеченного конуса с аппроксимацией меридиональной и окружной компонент вектора перемещений кубическим полиномом, а нормальной компоненты – полиномом седьмой степени [38]. Для жидкости применяется треугольный конечный элемент с линейной аппроксимацией потенциала возмущения скорости [37].

Стандартные операции МКЭ из соотношений (6), (13) и (16) с учетом (19)–(20) позволяют получить связанную систему уравнений, описывающую совместное взаимодействие электроупругих оболочек и жидкости, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_s^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^{(1)} \\ \ddot{\Psi}^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{u}}^{(2)} \\ \ddot{\Psi}^{(2)} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{C}_{sf}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{sf}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{C}_{fs}^{(1)} & 0 & \mathbf{C}_{fs}^{(2)} & 0 & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^{(1)} \\ \dot{\Psi}^{(1)} \\ \dot{\mathbf{u}}^{(2)} \\ \dot{\Psi}^{(2)} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s^{(1)} & -\mathbf{K}_{sv}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{K}_{sv}^{(1)})^T & \mathbf{K}_\psi^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_s^{(2)} & -\mathbf{K}_{sv}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{K}_{sv}^{(2)})^T & \mathbf{K}_\psi^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{A}_{sf}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_{sf}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_{fs}^{(1)} & 0 & \mathbf{A}_{fs}^{(2)} & 0 & \mathbf{A}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \Psi^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \Psi^{(2)} \\ \phi \end{Bmatrix} = 0, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s^{(i)} &= \sum_{m_s^{(i)}} \int_{S_s^{(i)}} (\mathbf{B}^{(i)})^T \bar{\mathbf{D}}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} dS, \mathbf{K}_f = \\ &= \sum_{m_f} \int_{V_f} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dV, \\ \mathbf{M}_s^{(i)} &= \sum_{m_s^{(i)}} \int_{V_s^{(i)}} (\mathbf{N}^{(i)})^T \rho_s^{(i)} \mathbf{N}^{(i)} dV, \mathbf{M}_f = \\ &= \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}{c^2} dV, \mathbf{A}_{sf}^{(i)} = \sum_{m_s^{(i)}} \int_{S_s^{(i)}} \rho_f U (\bar{\mathbf{N}}^{(i)})^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} dS, \\ \mathbf{A}_{fs}^{(i)} &= -\sum_{m_s^{(i)}} \int_{S_s^{(i)}} U \mathbf{F}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}^{(i)}}{\partial s} dS, \mathbf{A}_f = \\ &= -\sum_{m_f} \int_{V_f} M^2 \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} dV, \mathbf{C}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \mathbf{F} dV, \\ \mathbf{C}_{sf}^{(i)} &= \sum_{m_s^{(i)}} \int_{S_s^{(i)}} \rho_f (\bar{\mathbf{N}}^{(i)})^T \mathbf{F} dS, \mathbf{C}_{fs}^{(i)} = \\ &= -\sum_{m_s^{(i)}} \int_{S_s^{(i)}} \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{N}}^{(i)} dS, \mathbf{K}_{sv}^{(i)} = \sum_{m_s^{(i)}} \int_{V_s^{(i)}} (\mathbf{B}^{(i)})^T \mathbf{G}^{(i)} \mathbf{B}_\psi^{(i)} dV, \\ \mathbf{K}_\psi^{(i)} &= \sum_{m_s^{(i)}} \int_{V_s^{(i)}} (\mathbf{B}_\psi^{(i)})^T \mathbf{H}^{(i)} \mathbf{B}_\psi^{(i)} dV. \end{aligned}$$

Здесь $m_s^{(i)}$ – число конечных элементов, на которые разбиваются оболочки; ϕ и $\Psi^{(i)}$ – векторы узловых значений потенциала возмущения скорости и разниц электростатических потенциалов оболочек; $\bar{\mathbf{N}}^{(i)}$ – матрицы функций

формы нормальных составляющих векторов перемещения оболочек; $\mathbf{H}^{(i)} = \text{diag}(h_1^{(i)} \bar{d}_{33}^{(i)1}, \dots, h_k^{(i)} \bar{d}_{33}^{(i)k}, \dots, h_N^{(i)} \bar{d}_{33}^{(i)N})$.

Выражая величины, связанные с электростатическим потенциалом, через перемещения оболочек

$$\Psi^{(i)} = (-\mathbf{K}_\psi^{(i)})^{-1} (\mathbf{K}_{sv}^{(i)})^T \mathbf{u}^{(i)},$$

получим вместо (21) уравнения, записанные относительно степеней свободы упругих тел и жидкости:

$$\mathbf{M} \left\{ \ddot{\mathbf{u}}^{(1)}, \ddot{\mathbf{u}}^{(2)}, \ddot{\phi} \right\}^T + \mathbf{C} \left\{ \dot{\mathbf{u}}^{(1)}, \dot{\mathbf{u}}^{(2)}, \dot{\phi} \right\}^T +$$

$$+ (\mathbf{K} + \mathbf{A}) \left\{ \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \phi \right\}^T = 0,$$

$$\mathbf{K} = \text{diag} \left(\mathbf{K}_s^{(1)} + \mathbf{K}_{sv}^{(1)} (\mathbf{K}_\psi^{(1)})^{-1} (\mathbf{K}_{sv}^{(1)})^T, \right.$$

$$\left. \mathbf{K}_s^{(2)} + \mathbf{K}_{sv}^{(2)} (\mathbf{K}_\psi^{(2)})^{-1} (\mathbf{K}_{sv}^{(2)})^T, \mathbf{K}_f \right),$$

$$\mathbf{M} = \text{diag} \left\{ \mathbf{M}_s^{(1)}, \mathbf{M}_s^{(2)}, \mathbf{M}_f \right\},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mathbf{A}_{sf}^{(1)} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{sf}^{(2)} \\ -\mathbf{A}_{fs}^{(1)} & \mathbf{A}_{fs}^{(2)} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mathbf{C}_{sf}^{(1)} \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{sf}^{(2)} \\ -\mathbf{C}_{fs}^{(1)} & \mathbf{C}_{fs}^{(2)} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Используя представление для движения оболочек и жидкости в виде $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \phi) = (\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}, \tilde{\phi}) \exp(i\lambda t)$,

уравнение (22) может быть записано следующим образом:

$$(-\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{A}) \left\{ \tilde{\mathbf{u}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}, \tilde{\phi} \right\}^T = 0, \quad (23)$$

где $\tilde{\mathbf{d}}^{(1)}$, $\tilde{\mathbf{d}}^{(2)}$ и $\tilde{\phi}$ – некоторые функции координат, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ – характеристический показатель, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Решение задачи о гидроупругой устойчивости электроупругих коаксиальных оболочек сводится к определению и анализу комплексных собственных значений λ системы (23), для вычисления которых применяется итерационный алгоритм на основе метода Мюллера [39]. Для повышения его вычислительной эффективности использовалась перенумерация степеней свободы системы (23), основанная на обратном алгоритме Катхилла–Макки [40].

3. Результаты расчетов

В рассмотренных далее примерах анализируются коаксиальные цилиндрические оболочки ($L = 1$ м, $R^{(2)} = 0,1$ м, $h^{(1)} = h^{(2)} = h$), взаимодействующие со сжимаемой жидкостью ($\rho_f = 1000$ кг/м³, $c = 1500$ м/с). Однородные комбинации граничных условий в виде свободного опирания ($v = w = 0$; SS) и жесткой заделки ($u = v = w = \partial w / \partial s = 0$; CC) на обоих краях ($x = 0, L$), или консольного закрепления (CF), задаются для обеих оболо-

чек, выполненных из пьезокерамики PZT-5Н со следующими физико-механическими характеристиками [5]:

$$\begin{aligned}
 c_{11} = c_{22} &= 126 \text{ ГПа}, \quad c_{12} = 79,5 \text{ ГПа}, \\
 c_{13} = c_{23} &= 84,1 \text{ ГПа}, \quad c_{33} = 117 \text{ ГПа}, \\
 c_{66} &= 23,3 \text{ ГПа}, \quad e_{31} = e_{32} = -6,5 \text{ Кл/м}^2, \\
 e_{33} &= 23,3 \text{ Кл/м}^2, \quad d_{33} = 130 \times 10^{-10} \text{ Ф/м}, \\
 \rho_s &= 7500 \text{ кг/м}^3.
 \end{aligned}$$

Расчеты выполнялись при различной величине кольцевого зазора между внешней и наружной оболочками $\kappa = (R^{(2)} - R^{(1)})/R^{(1)}$. Все вычисления осуществлены при 40 конечных элементах для каждого из упругих тел. Количество элементов для жидкости определялось величиной зазора κ и не превышало 1000.

В представлении полученных результатов используются безразмерные критические скорости потери устойчивости Λ ,

$$\Lambda = U\xi \times 10^3, \quad \xi = \sqrt{\rho_s/c_{11}}.$$

3.1. Тестирование алгоритма

В случае пьезоупругого материала верификация описанного численного алгоритма осуществляется для пустой и заполненной неподвижной жидкостью однослойной оболочки ($L = 5 \text{ м}, R = 1 \text{ м}, h = 0,02 \text{ м}$), свободно опертой на обоих краях. Характеристики материала и жидкой среды приведены выше. В табл. 1 показаны собственные частоты колебаний λ_1 (Гц), полученные в настоящей работе и статье [5] для различных электрических граничных условий. Здесь через m обозначено число полуволн в меридиональном направлении. Граничные условия для жидкости были приняты следующими: $\phi = 0$ при $x = 0$ и $x = L$. В [5] решение задачи также осуществляется в рамках полуаналитического варианта метода конечных элементов, но поведение жидкости описывается линейризованными уравнениями Эйлера, в которых в качестве искомой величины выступает давление. Имеющиеся незначительные расхождения могут быть в том числе объяснены и тем, что в [5] не указаны формулы, согласно которым осуществляется перевычисление коэффициентов, входящих в матрицы уравнений (11) и (12).

Таблица 1

Сравнение собственных частот колебаний λ_1 (Гц) свободно опертой пьезоэлектрической оболочки с различными электрическими граничными условиями

Table 1

Comparison of natural vibrations λ_1 (Hz) of simply supported piezoelectric coaxial shells for different electric boundary condition

j	Пустая оболочка				Оболочка с жидкостью					
	m	Условие «А»		Условие «В»		m	Условие «А»		Условие «В»	
		Работа [5]	Расчет	Работа [5]	Расчет		Работа [5]	Расчет	Работа [5]	Расчет
1	1	87,8060	88,0205	93,3700	93,6699	1	45,4450	44,5981	49,4910	48,0973
	2	216,127	216,945	228,162	229,269	2	108,920	107,937	115,311	116,127
	0	278,711	280,221	278,711	280,522	3	154,565	155,584	166,237	167,428
	3	312,564	313,596	331,697	333,099	4	191,016	191,679	209,635	206,467
	4	368,995	369,815	383,703	384,658	5	220,018	220,451	236,253	237,719
2	1	36,7050	36,7003	39,4890	39,8654	1	19,6370	19,5347	21,0010	21,2789
	2	113,540	113,764	121,979	122,559	2	62,4970	62,3163	66,9280	67,4525
	3	193,357	193,896	207,472	208,586	3	108,109	108,818	116,416	117,645
	4	259,338	260,112	278,508	280,049	4	148,610	150,039	161,251	162,178
	5	308,942	309,680	332,121	333,941	5	182,892	184,675	197,330	199,684

Оценка достоверности в случае течения жидкости только в кольцевом канале затруднена в связи с тем, что в случае осесимметричной постановки отсутствуют публикации с доказанной достоверностью представленных результатов. Вместо этого осуществлено сравнение с результатами работы [28], где решение аналогичной задачи для изотропных оболочек ($h = 5 \times 10^{-4} \text{ м}, E^{(1)} = E^{(2)} = E = 2 \times 10^{11} \text{ Па}, \nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu = 0,3, \rho_s^{(1)} = \rho_s^{(2)} = \rho_s = 7800 \text{ кг/м}^3$) осуществлено в пространственной постановке. Дополнительно рассматривается

конфигурация, при которой внешняя оболочка является абсолютно жесткой (из уравнения (23) исключаются неизвестные с верхним индексом «2»). Результаты приведены в табл. 2, где показаны безразмерные критические скорости кольцевого потока жидкости Λ ($\xi = [\rho_s(1 - \nu^2)/E]^{0,5}$), полученные для жестко закрепленных коаксиальных оболочек различными методами.

Таблица 2

Сравнение безразмерных критических скоростей течения в кольцевом канале $\Lambda \times 10^{-1}$ для различных методов решения

Table 2

Comparison of dimensionless critical velocities in the annular channel $\Lambda \times 10^{-1}$ for different methods of solution

Метод решения	Упругая и жесткая оболочки			Обе оболочки упругие		
	Кольцевой зазор κ					
	1/2	1/10	1/100	1/2	1/10	1/100
2D, МКЭ, расчет	2,808	1,349	0,432	2,044	0,951	0,305
3D, МКЭ, [28]	2,826	1,356	0,433	2,053	0,955	0,306

На основании анализа результатов, приведенных в табл. 2, можно заключить, что критические скорости, вычисленные в рамках осесимметричной реализации, хорошо согласуются с данными, полученными с помощью пространственной модели. Незначительные расхождения в результатах могут быть объяснены тем, что в трехмерной постановке в связи со значительным ростом размерности разрешающей системы уравнений оптимальный выбор между точностью решения и его эффективностью имеет существенное значение.

3.2. Устойчивость коаксиальных оболочек

В отличие от варианта с неподвижной жидкостью, устойчивость коаксиальных оболочек только с кольцевым потоком текущей жидкости остается фактически не исследованной. В имеющихся единичных работах (например, [26, 27]) отсутствует полноценное исследование ряда системных параметров, а достоверность решений не подтверждается представленными результатами. В частности, не оценено влияние размера кольцевого зазора на границы устойчивости. Такое исследование в случае пьезоэлектрических оболочек с закороченными электродами (Вариант «А») будет представлено ниже

($R^{(2)}/h = 200$, $L/R^{(2)} = 10$).

Известно [29], что характер неустойчивости оболочек, взаимодействующих с текущей средой, строго зависит от граничных условий, задаваемых на краях как оболочек, так и потока жидкости. Оболочки, жестко защемленные или свободно опертые с двух краев, теряют устойчивость в виде дивергенции. При увеличении скорости течения жидкости собственные значения уменьшаются до тех пор, пока действительная часть какой-либо моды не станет равной нулю. При этом у этого собственного значения появляется пара одинаковых, но противоположных по знаку мнимых частей, что и означает наступление потери устойчивости в виде дивергенции. Оболочки, защемленные на краю, где входит поток, и свободные на другом, обладают демпфированием даже при минимальной скорости среды и теряют устойчивость в виде флаттера по одной форме колебаний. В этом случае рост скорости приводит

к появлению отрицательной мнимой части у какого-либо собственного значения. Задание для потенциала возмущения скорости граничных условий (2) обеспечивает потерю устойчивости в виде флаттера по одной форме колебаний, наблюдаемой в экспериментальных исследованиях консольных оболочек [29]. Аналогичная зависимость вида неустойчивости от граничных условий имеет место и в случае коаксиальных оболочек с тем отличием, что в случае узких зазоров характер потери устойчивости может изменяться, в том числе и на критических гармониках (т.е. таких гармониках, где скорость жидкости имеет минимальное значение).

При анализе конструкций с двумя упругими оболочками необходимо отметить характерные особенности собственных форм колебаний, присущих таким системам. О них впервые было заявлено при анализе осесимметричных тел, содержащих неподвижную жидкость, в статье [41], где было продемонстрировано существование синфазных (направление и количество меридиональных полуволн m совпадает для обеих оболочек) и противофазных (направления противоположны) форм колебаний. В дополнение к ним в работе [42] установлена возможность появления смешанных (количество меридиональных полуволн не совпадает для обеих оболочек) форм. Как установлено авторами, возникновение смешанных форм возможно и для оболочек с текущей жидкостью, что существенно усложняет анализ устойчивости в связи с возможностью миграции от одной формы потери устойчивости к другой даже при достаточно близких по величине кольцевых зазорах. Еще один вид форм колебаний выявлен в [43] при решении задачи в пространственной постановке. Здесь показано, что при частичном заполнении кольцевого зазора количество окружных волн для внутренней и наружной оболочек может различаться и, следовательно, необходимо говорить о смешанных формах в окружном направлении.

На рис. 2 показаны зависимости безразмерных критических скоростей Λ от номера гармоники в окружном направлении j , полученные при различной величине кольцевого зазора κ для оболочек с разными граничными условиями. Представленные данные демонстрируют существенное отличие в поведении систем с дивергентной (рис. 2, а) и флаттерной (рис. 2, б) потерей устойчивости. В частности, зависимости для жестко закрепленных оболочек обладают ярко выраженным локальным минимумом, который не меняется с уменьшением зазора. Наоборот, при консольном закреплении критические скорости потери устойчивости близки для ряда гармоник, и этот диапазон смещается в более высокую область вместе со снижением размера зазора. Немонотонный характер кривой для этих же граничных условий при $\kappa = 1/2$ обусловлен различной степенью влияния размера зазора на условия возникновения неустойчивости для разных гармоник. Динамика изменения частоты колебаний, соответствующей форме потери устойчивости, весьма об-

ширна. Ее низкое значение на низших гармониках ($j < 2$) скачкообразно увеличивается при переходе к средним ($3 < j < 7$), а затем обратно снижается при высоких номерах j ($j > 8$). Данное поведение может быть еще более сложным для других зазоров, что отражается на границе устойчивости, приведенной ниже.

Более детально зависимость безразмерной скорости Λ от безразмерного кольцевого зазора $R^{(2)}/R^{(1)}$ представлена на рис. 3. Здесь показаны границы устойчивости, определенные для конструкций с различными вариантами граничных условий. Для оболочек с дивергентной потерей устойчивости (СС, SS) характерно наличие диапазона зазоров с минимальным снижением критических скоростей, который сменяется участком с их монотонным падением. В случае консольного за-

крепления (CF) наблюдается более сложное поведение. После незначительного понижения происходит рост критической скорости и, следовательно, сужающийся кольцевой зазор до определенного размера оказывает стабилизирующее воздействие. Скачкообразное возрастание Λ на этом диапазоне отражает многообразие форм потери устойчивости для различных окружных гармоник, вплоть до того, что на некоторых участках приобретает пилообразный характер (на рисунке не отражено). За расширенным диапазоном зазоров, стабилизирующих систему, следует участок с более резким падением критической скорости, на котором флаттерный вид потери устойчивости сменяется дивергентным (отмечено пунктирной линией), а критический номер гармоники возрастает до $j = 10$.

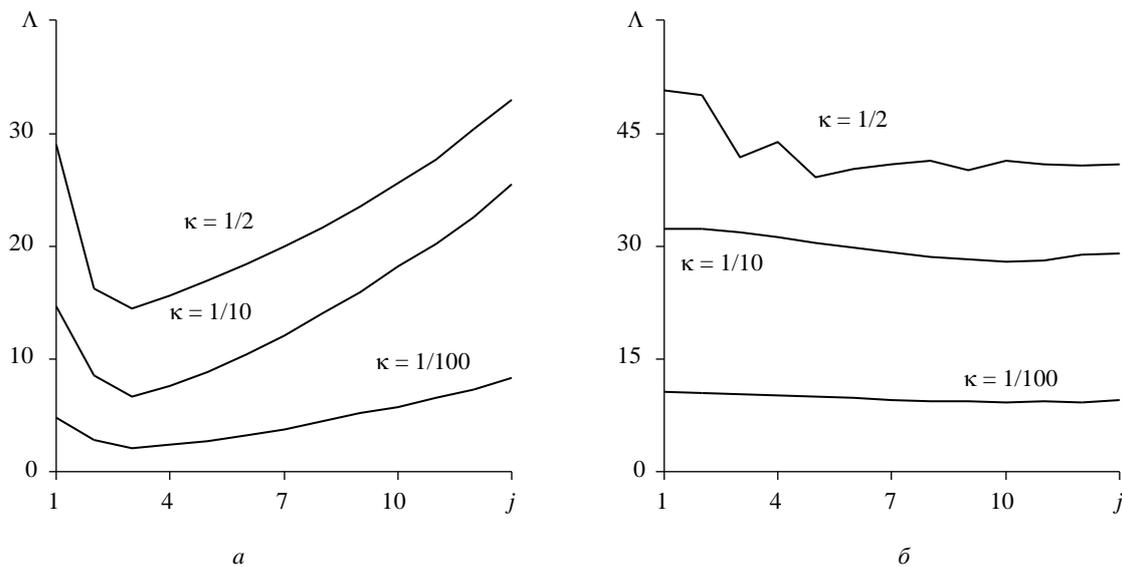


Рис. 2. Зависимости безразмерной критической скорости Λ от номера гармоники j , полученные при различной величине кольцевого зазора κ для жестко закрепленных (а) и консольных (б) коаксиальных оболочек

Fig. 2. Plots of dimensionless critical velocity Λ versus harmonic number j , obtained at different values of the annular gap κ for rigidly clamped (a) and cantilevered (b) coaxial shells

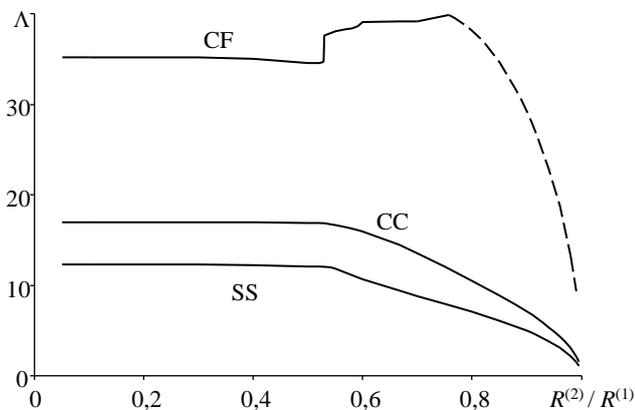


Рис. 3. Зависимости безразмерной критической скорости Λ от безразмерного зазора $R^{(2)}/R^{(1)}$, полученные для коаксиальных оболочек с различными граничными условиями

Fig. 3. Plots of dimensionless critical velocity Λ versus dimensionless gap $R^{(2)}/R^{(1)}$, obtained for coaxial shells with different boundary conditions

3.3. Исследование влияния электрических граничных условий

В табл. 3–5 приведены безразмерные критические скорости кольцевого потока жидкости Λ в системе коаксиальных цилиндрических оболочек с разными вариантами кинематических граничных условий. Представленные данные получены при различных значениях кольцевого зазора κ и линейных размерах (длина L и радиус внешней оболочки $R^{(2)}$ остаются неизменными, остальные размеры варьируются). В таблицах в столбцах ЭГУ указаны варианты электрических граничных условий, задаваемых для каждой из оболочек.

В скобках приведены соответствующие номера окружающих гармоник j .

Из представленных в таблицах данных следует, что электрические граничные условия в виде разомкнутых электродов (условие «В») оказывают стабилизирующее воздействие, что качественно совпадает с результатами, полученными в случае одиночной оболочки в работе [9]. Рост критической скорости может достигать 20 %, если указанный вид граничных условий задан для обеих оболочек одновременно. В этом случае совокупное увеличение скорости значительно превышает те значения, которые имеют место при задании условия «В» отдельно для каждой оболочки, следовательно, оно носит аддитивный характер. Влияние условия «В», задаваемого для оболочек по отдельности, зависит от конкретной конфигурации. В случае узких зазоров в тонкостенных оболочках комбинация граничных условий «АВ» приводит, как правило, к большему повышению границы устойчивости, чем комбинация «ВА». Тогда как для более широких зазоров в толстостенных оболочках эта зависимость носит противоположный характер. В большей степени такое поведение определяется различием в радиусах внутренней и наружной оболочек. Возможны конфигурации, при которых электрическое граничное условие «В», заданное

для внутренней оболочки, оказывает незначительное дестабилизирующее воздействие. Из табличных результатов также можно заключить, что качественные отличия во влиянии электрических граничных условий на критические скорости потери устойчивости не прослеживаются для оболочек с различными кинематическими ограничениями.

Отметим, что отличия между оболочками с разными граничными условиями проявляются в форме потери устойчивости. Если для свободно опертых или жестко закрепленных оболочек электрические граничные условия фактически не оказывают влияния на форму потери устойчивости, то в случае консольных оболочек такое влияние, как правило, присутствует. Приведенные в табл. 4 критические номера окружающих гармоник позволяют оценить многообразие комбинаций волновых чисел (j, m) , определяемых линейными размерами, жесткостью оболочек и присутствием в системе гидродинамического демпфирования, при которых консольно закрепленные оболочки могут терять устойчивость. В частности, можно отметить, что короткие коаксиальные оболочки с узким кольцевым зазором ведут себя подобно балке (см. табл. 4, $L/R^{(2)} = 5$, $\kappa < 1/10$).

Таблица 3

Безразмерные критические скорости Λ системы жестко закрепленных коаксиальных оболочек (СС) при различных геометрических размерах и электрических граничных условиях

Table 3

Dimensionless critical velocities Λ of the system of clamped coaxial shells (CC) with different geometrical dimensions and electric boundary conditions

κ	ЭГУ	$L/R^{(2)} (R^{(2)}/h = 200)$			$R^{(2)}/h (L/R^{(2)} = 10)$		
		5	10	15	100	300	500
1/2	АА	19,28 (4)	14,49 (3)	11,91 (2)	24,42 (2)	10,61 (3)	7,133 (4)
	АВ	19,74 (4)	14,94 (3)	12,87 (2)	25,75 (2)	11,08 (3)	7,250 (4)
	ВА	20,79 (4)	15,59 (3)	12,87 (2)	25,37 (2)	11,21 (3)	7,661 (3)
	ВВ	21,52 (4)	16,24 (3)	13,15 (2)	26,92 (2)	11,83 (3)	8,027 (4)
1/10	АА	9,559 (4)	6,742 (3)	5,974 (2)	12,23 (3)	5,108 (3)	3,476 (4)
	АВ	10,06 (4)	7,109 (3)	6,240 (2)	12,84 (2)	5,360 (3)	3,676 (4)
	ВА	10,05 (4)	7,097 (3)	6,216 (2)	12,79 (2)	5,340 (3)	3,681 (4)
	ВВ	10,64 (4)	7,530 (3)	6,516 (2)	13,40 (2)	5,630 (3)	3,921 (4)
1/100	АА	3,085 (4)	2,162 (3)	1,902 (3)	3,822 (3)	1,661 (3)	1,105 (4)
	АВ	3,240 (4)	2,274 (3)	2,023 (3)	4,062 (3)	1,738 (3)	1,167 (4)
	ВА	3,239 (4)	2,273 (3)	2,024 (3)	4,064 (3)	1,737 (3)	1,167 (4)
	ВВ	3,419 (4)	2,404 (3)	2,135 (2)	4,353 (3)	1,825 (3)	1,240 (4)

Таблица 4

Безразмерные критические скорости Λ системы консольно закрепленных коаксиальных (СФ) оболочек при различных геометрических размерах и электрических граничных условиях

Table 4

Dimensionless critical velocities Λ of the system of cantilevered coaxial (CF) shells with different geometrical dimensions and electric boundary conditions

κ	ЭГУ	$L/R^{(2)} (R^{(2)}/h = 200)$			$R^{(2)}/h (L/R^{(2)} = 10)$		
		5	10	15	100	300	500
1/2	АА	40,82 (6)	39,18 (5)	32,94 (2)	57,39 (4)	23,69 (15)	13,81 (16)

	AB	39,77 (6)	38,76 (5)	36,99 (4)	55,77 (4)	23,69 (15)	13,81 (16)
	BA	44,56 (4)	39,31 (3)	37,83 (2)	60,59 (2)	27,43 (15)	14,89 (15)
	BB	48,27 (7)	45,00 (3)	42,68 (4)	64,20 (2)	23,48 (13)	14,89 (15)
1/10	AA	39,75 (1)	27,90 (10)	22,29 (10)	48,59 (5)	20,14 (12)	13,35 (16)
	AB	41,99 (1)	29,13 (10)	23,47 (10)	50,56 (5)	20,97 (12)	14,03 (16)
	BA	42,62 (1)	29,33 (11)	23,34 (11)	51,20 (5)	21,05 (13)	13,87 (17)
1/100	BB	45,41 (1)	30,49 (10)	24,64 (10)	53,47 (4)	22,23 (13)	14,51 (15)
	AA	14,22 (1)	9,332 (10)	7,326 (10)	16,11 (4)	6,797 (12)	4,514 (17)
	AB	15,05 (1)	9,633 (10)	7,614 (10)	16,86 (4)	6,977 (13)	4,700 (16)
	BA	15,07 (1)	9,634 (11)	7,716 (9)	16,88 (4)	6,981 (13)	4,704 (17)
	BB	16,07 (1)	10,24 (10)	8,030 (10)	17,71 (4)	7,386 (12)	4,908 (16)

Таблица 5

Безразмерные критические скорости Λ системы свободно опертых коаксиальных оболочек (SS) при различных геометрических размерах и электрических граничных условиях

Table 5

Dimensionless critical velocities Λ of the system of simply supported coaxial shells (SS) with different geometrical dimensions and electric boundary conditions

κ	ЭГУ	$L/R^{(2)} (R^{(2)}/h = 200)$			$R^{(2)}/h (L/R^{(2)} = 10)$		
		5	10	15	100	300	500
1/2	AA	13,26 (3)	9,391 (2)	7,576 (2)	15,64 (2)	7,256 (3)	4,698 (3)
	AB	13,90 (3)	9,933 (2)	7,924 (2)	16,39 (2)	7,391 (3)	4,857 (3)
	BA	13,94 (3)	9,752 (2)	8,072 (2)	16,59 (2)	7,520 (2)	5,047 (3)
	BB	14,78 (3)	10,38 (2)	8,516 (2)	17,54 (2)	7,981 (2)	5,270 (3)
1/10	AA	6,542 (3)	4,739 (2)	3,410 (2)	7,166 (2)	3,300 (3)	2,181 (3)
	AB	6,854 (3)	4,949 (2)	3,589 (2)	7,531 (2)	3,500 (3)	2,297 (3)
	BA	6,827 (3)	4,929 (2)	3,575 (2)	7,502 (2)	3,512 (3)	2,289 (3)
	BB	7,185 (3)	5,168 (2)	3,784 (2)	7,926 (2)	3,758 (3)	2,426 (3)
1/100	AA	2,130 (4)	1,531 (3)	1,101 (2)	2,322 (2)	1,037 (3)	0,703 (3)
	AB	2,236 (3)	1,624 (2)	1,154 (2)	2,432 (2)	1,099 (3)	0,738 (3)
	BA	2,235 (3)	1,624 (2)	1,154 (2)	2,431 (2)	1,099 (3)	0,738 (3)
	BB	2,345 (3)	1,698 (2)	1,216 (2)	2,558 (2)	1,174 (3)	0,778 (3)

Заключение

Устойчивость пьезоупругих коаксиальных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с кольцевым потоком сжимаемой жидкости, исследована в осесимметричной постановке с помощью предложенной математической модели и ее численной реализации на основе метода конечных элементов. Пространство внутренней оболочки заполнено вакуумом. Воздействие присоединенных электрических цепей не принималось во внимание. С использованием разработанного численного алгоритма проанализировано влияние размера кольцевого зазора и электрических граничных условий, задаваемых на электродированных поверхностях оболочек, на критические скорости потери устойчивости. Соответствующие зависимости и новые качественные закономерности получены при различных кинематических граничных условиях и геометрических параметрах. Установлено, что электрическое условие, эмулирующее разомкнутые электроды, оказывает стабилизирующее воздействие. Его одновременное использование для наружной и внутренней оболочек приводит к росту критических скоростей потери устойчивости до 20 %. Продемонстрировано, что для консольно закрепленных оболочек изменение электрического граничного условия может приводить к смене формы потери устойчивости в зависимости от заданных геометрических размеров и величины кольцевого зазора.

рующее разомкнутые электроды, оказывает стабилизирующее воздействие. Его одновременное использование для наружной и внутренней оболочек приводит к росту критических скоростей потери устойчивости до 20 %. Продемонстрировано, что для консольно закрепленных оболочек изменение электрического граничного условия может приводить к смене формы потери устойчивости в зависимости от заданных геометрических размеров и величины кольцевого зазора.

Благодарность

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10054).

Acknowledgment

The research was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 18-71-10054).

Библиографический список

1. Abramovich H. Intelligent Materials and Structures. – Berlin: De Gruyter, 2016. – 378 p.

2. Kaljevic I., Saravanos D.A. Steady-state response of acoustic cavities bounded by piezoelectric composite shell struc-

- tures // *J. Sound Vib.* – 1997. – Vol. 204. – No. 3. – P. 459–476. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0911
3. Saravanas D.A. Mixed laminate theory and finite element for smart piezoelectric composite shell structures // *AIAA J.* – 1997. – Vol. 35. – No. 8. – P. 1327–1333. DOI: 10.2514/2.264
 4. Lammering R., Mesecke-Rischmann S. Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells // *Smart Mater. Struct.* – 2003. – Vol. 12. – No. 6. – P. 904–913. DOI: 10.1088/0964-1726/12/6/007
 5. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Vibration of axisymmetric composite piezoelectric shells coupled with internal fluid // *Int. J. Num. Meth. Eng.* – 2007. – Vol. 71. – No. 12 – P. 1412–1435. DOI: 10.1002/nme.1987
 6. Deü J.-F., Larbi W., Ohayon R. Piezoelectric structural acoustic problems: Symmetric variational formulations and finite element results // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 2008. – Vol. 197. – No. 19-20. – P. 1715–1724. DOI: 10.1016/j.cma.2007.04.014
 7. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Finite element formulation of smart piezoelectric composite plates coupled with acoustic fluid // *Compos. Struct.* – 2012. – Vol. 94. – No. 2. – P. 501–509. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.08.010
 8. Ray M.C., Reddy J.N. Active damping of laminated cylindrical shells conveying fluid using 1-3 piezoelectric composites // *Compos. Struct.* – 2013. – Vol. 98. – P. 261–271. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.09.051
 9. Miramini S.M., Ohadi A. Three-dimensional vibration of fluid-conveying laminated composite cylindrical shells with piezoelectric layers // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* – 2019. – Vol. 19. – 19500263. DOI: 10.1142/S0219455419500263
 10. Кудрявцев Е.П. О колебаниях коаксиальных упругих цилиндрических оболочек, между которыми течет сжимаемая жидкость // *Теория оболочек и пластин.* – АН АрмССР. – Ереван, 1964. – С. 606–612.
 11. Козаров М., Младенов К. Гидроупругая устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек // *Прикладная механика.* – 1981. – Т. 17, № 5. – С. 57–65,
 12. Païdoussis M.P., Chan S.P., Misra A.K. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid // *J. Sound Vib.* – 1984. – Vol. 97. – P. 201–235. DOI: 10.1016/0022-460X(84)90319-5
 13. Païdoussis M.P., Nguyen V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.* – 1991. – Vol. 5. P. 127–164. DOI: 10.1016/0889-9746(91)90454-W
 14. Païdoussis M.P., Misra A.K., Chan S.P. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid // *Appl. Mech.* – Vol. 52. – P. 389–396. DOI: 10.1115/1.3169059
 15. Païdoussis M.P., Misra A.K., Nguyen V.B. Internal- and annular-flow-induced instabilities of a clamped-clamped or cantilevered cylindrical shell in a coaxial conduit: the effects of system parameters // *J. Sound Vib.* – Vol. 159 – P. 193–205. DOI: 10.1016/0022-460X(92)90031-R
 16. El Chebair A., Païdoussis M.P., Misra A.K. Experimental study of annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells // *J. Fluids Struct.* – 1989. – Vol. 3. – P. 349–364. DOI: 10.1016/S0889-9746(89)80016-7
 17. El Chebair A., Misra A.K., Païdoussis M.P. Theoretical study of the effect of unsteady viscous forces on inner- and annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells // *J. Sound Vib.* – 1990. – Vol. 138 – P. 457–478. DOI: 10.1016/0022-460X(90)90599-U
 18. Horáček J. Approximate theory of annular flow-induced instabilities of cylindrical shells // *J. Fluids Struct.* – 1993. – Vol. 7. – P. 123–135. DOI: 10.1006/jfls.1993.1010
 19. Nguyen V.B., Païdoussis M.P., Misra A.K. A CFD-based model for the study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid // *J. Sound Vib.* 1994. – Vol. 176. – P. 105–125. DOI: 10.1006/jsvi.1994.1361
 20. Nguyen V.B., Païdoussis M.P., Misra A.K. An experimental study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.* – 1993. – Vol. 7. – P. 913–930. DOI: 10.1006/jfls.1993.1054
 21. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part II: Shells containing or immersed in axial flow // *J. Fluids Struct.* – 2002. – Vol. 16. – P. 31–51. DOI: 10.1006/jfls.2001.0402
 22. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.* – 2002. – Vol. 16. – P. 795–809. DOI: 10.1006/jfls.446
 23. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Динамическое поведение упругих коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих движущуюся в них жидкость // *ПММ.* – 2010. – Т. 74, № 4. – С. 655–666.
 24. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Анализ устойчивости нагруженных коаксиальных цилиндрических оболочек с внутренним течением жидкости // *Изв. РАН. МТТ.* – 2010. – Т. 45, № 6. – С. 29–45.
 25. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Parametric investigation of the stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid // *Eur. J. Mech. A Solids.* – 2014. – Vol. 47. – P. 174–181. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2014.04.003
 26. Ning W.B., Wang D.Z., Zhang J.G. Dynamics and stability of a cylindrical shell subjected to annular flow including temperature effects // *Arch. Appl. Mech.* – 2016. – Vol. 86. – P. 643–656. DOI: 10.1007/s00419-015-1052-1
 27. Ning W.B., Wang D.Z. Dynamic and stability response of a cylindrical shell subjected to viscous annular flow and thermal load // *Int. J. Str. Stab. Dyn.* – 2016. – Vol. 16. – 1550072. DOI: 10.1142/S0219455415500728
 28. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells / S.A. Bochkarev [и др.] // *Acta Mech.* – 2019. DOI: 10.1007/s00707-019-02453-4
 29. Païdoussis M.P. *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow.* Vol. 2. 2nd ed. – London: Elsevier Academic Press, 2016. – 923 p.
 30. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
 31. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // *Изв. РАН. МТТ.* – 2008. – № 3. – С. 189–199.
 32. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
 33. Rogacheva N.N. *The theory of piezoelectric shells and plates.* – London: CRC Press, 1994. – 249 p.
 34. Sheng G.G., Wang X. Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells // *Appl. Math. Model.* – 2010. – Vol. 34. – No. 9. – P. 2630–2643. DOI: 10.1016/j.apm.2009.11.024
 35. Yao G., Li F.-M. The stability analysis and active control of a composite laminated open cylindrical shell in subsonic airflow //

J. Intel. Mat. Sys. Struct. – 2014. – Vol. 25. – No. 3. – P. 259–270. DOI: 10.1177/1045389X13491020

36. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.

37. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.

38. Shivakumar K.N., Krishna Murty A.V. A high precision ring element for vibrations of laminated shells // J. Sound Vib. – 1978. – Vol. 58. – P. 311–318. DOI: 10.1016/S0022-460X(78)80040-6

39. Матвеенко В.П., Севодин М.А., Севодина Н.В. Приложение метода Мюллера и принципа аргумента к задачам на собственные значения в механике деформируемого твердого тела // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2014. – № 3. – С. 331–336. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.32

References

1. Abramovich H. *Intelligent Materials and Structures*. De Gruyter, Berlin, 2016, 378 p.

2. Kaljevic I., Saravanos D.A. Steady-state response of acoustic cavities bounded by piezoelectric composite shell structures. *J. Sound Vib.*, 1997, vol. 204, no. 3, pp. 459-476. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0911

3. Saravanos D.A. Mixed laminate theory and finite element for smart piezoelectric composite shell structures. *AIAA J.*, 1997, vol. 35, no. 8, pp. 1327-1333. DOI: 10.2514/2.264

4. Lammering R., Mesecke-Rischmann S. Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells. *Smart Mater. Struct.*, 2003, vol. 12, no. 6, pp. 904-913. DOI: 10.1088/0964-1726/12/6/007

5. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Vibration of axisymmetric composite piezoelectric shells coupled with internal fluid. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2007, vol. 71, no. 12, pp. 1412-1435. DOI: 10.1002/nme.1987

6. Deü J.-F., Larbi W., Ohayon R. Piezoelectric structural acoustic problems: Symmetric variational formulations and finite element results. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2008, vol. 197, no. 19-20, pp. 1715-1724. DOI: 10.1016/j.cma.2007.04.014

7. Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R. Finite element formulation of smart piezoelectric composite plates coupled with acoustic fluid. *Compos. Struct.*, 2012, vol. 94, no. 2, pp. 501-509. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.08.010

8. Ray M.C., Reddy J.N. Active damping of laminated cylindrical shells conveying fluid using 1-3 piezoelectric composites. *Compos. Struct.*, 2013, vol. 98, pp. 261-271. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.09.051

9. Miramini S.M., Ohadi A. Three-dimensional vibration of fluid-conveying laminated composite cylindrical shells with piezoelectric layers. *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, 2019, vol. 19, 19500263, DOI: 10.1142/S0219455419500263

10. Kudryavtsev E.P. О колебаниях коаксиальных упругих цилиндрических оболочек, между которыми течет сжимаемая жидкость [On the vibrations of coaxial elastic cylindrical shells with compressible fluid flow between them]. *Teoriya obolochek i plastin*, 1964, pp. 606-612.

11. Kozarov M., Mladenov K. Hydroelastic stability of coaxial cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.*, 1981, vol. 17, pp. 449-456. DOI: 10.1007/BF00885293

12. Paidoussis M.P., Chan S.P., Misra A.K. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid. *J. Sound Vib.*, 1984, vol. 97, pp. 201-235. DOI: 10.1016/0022-460X(84)90319-5

13. Paidoussis M.P., Nguyen V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells con-

veying fluid. *J. Fluids Struct.*, 1991, vol. 5, pp. 127-164. DOI: 10.1016/0889-9746(91)90454-W

14. Païdoussis M.P., Misra A.K., Chan S.P. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid. *Appl. Mech.*, vol. 52, pp. 389-396. DOI: 10.1115/1.3169059

15. Païdoussis M.P., Misra A.K., Nguyen V.B. Internal- and annular-flow-induced instabilities of a clamped-clamped or cantilevered cylindrical shell in a coaxial conduit: the effects of system parameters. *J. Sound Vib.*, vol. 159, pp. 193-205. DOI: 10.1016/0022-460X(92)90031-R

16. El Chebair A., Paidoussis M.P., Misra A.K. Experimental study of annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells. *J. Fluids Struct.*, 1989, vol. 3, pp. 349-364. DOI: 10.1016/S0889-9746(89)80016-7

17. El Chebair A., Misra A.K., Paidoussis M.P. Theoretical study of the effect of unsteady viscous forces on inner- and annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells. *J. Sound Vib.* 1990, vol. 138, pp. 457-478. DOI: 10.1016/0022-460X(90)90599-U

18. Horáček J. Approximate theory of annular flow-induced instabilities of cylindrical shells. *J. Fluids Struct.* 1993, vol. 7, pp. 123-135. DOI: 10.1006/jfls.1993.1010

19. Nguyen V.B., Paidoussis M.P., Misra A.K. A CFD-based model for the study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid. *J. Sound Vib.* 1994, vol. 176, pp. 105-125. DOI: 10.1006/jsvi.1994.1361

20. Nguyen V.B., Paidoussis M.P., Misra A.K. An experimental study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid. *J. Fluids Struct.*, 1993, vol. 7, pp. 913-930. DOI: 10.1006/jfls.1993.1054

21. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part II: Shells containing or immersed in axial flow. *J. Fluids Struct.*, 2002, vol. 16, pp. 31-51. DOI: 10.1006/jfls.2001.0402

22. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid. *J. Fluids Struct.*, 2002, vol. 16, pp. 795-809. DOI: 10.1006/jfls.446

23. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid. *J. Appl. Math. Mech.*, 2010, vol. 74, pp. 467-474. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2010.09.013

24. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Stability analysis of loaded coaxial cylindrical shells with internal fluid flow. *Mech. Sol.*, 2010, vol. 45, pp. 789-802. DOI: 10.3103/S002565441006004X

25. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Parametric investigation of the stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid. *Eur. J. Mech. A Solids.*, 2014, vol. 47, pp. 174-181. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2014.04.003

26. Ning W.B., Wang D.Z., Zhang J.G. Dynamics and stability of a cylindrical shell subjected to annular flow including temperature effects. *Arch. Appl. Mech.*, 2016, vol. 86, pp. 643-656. DOI: 10.1007/s00419-015-1052-1
27. Ning W.B., Wang D.Z. Dynamic and stability response of a cylindrical shell subjected to viscous annular flow and thermal load. *Int. J. Str. Stab. Dyn.*, 2016, vol. 16, 1550072, DOI: 10.1142/S0219455415500728
28. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P., Senin A.N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells. *Acta Mech.*, 2019. DOI: 10.1007/s00707-019-02453-4
29. Païdoussis M.P. *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, vol. 2, 2nd ed. Elsevier Academic Press, London, 2016, 923 p.
30. Volmir A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti* [Shells in Liquid and Gas Flow. Hydroelasticity problems]. Nauka, Moscow, 1979, 320 p.
31. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Numerical study of the influence of boundary conditions on the dynamic behavior of a cylindrical shell conveying a fluid. *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, pp. 477-486. DOI: 10.3103/S0025654408030187
32. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. *Mekhanika svyazannyh polej v elementah konstrukcij. T. 5. Elektrouprugost'* [Mechanics of Coupled Fields in Elements of Structures. vol. 5. Electroelasticity]. Naukova Dumka, Kiev, 1989, 280 p.
33. Rogacheva N.N. *The theory of piezoelectric shells and plates*. CRC Press, London, 1994, 249 p.
34. Sheng G.G., Wang X. Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells. *Appl. Math. Model.*, 2010, vol. 34, no. 9, pp. 2630-2643. DOI: 10.1016/j.apm.2009.11.024
35. Yao G., Li F.-M. The stability analysis and active control of a composite laminated open cylindrical shell in subsonic air-flow. *J. Intel. Mat. Sys. Struct.*, 2014, vol. 25, no. 3, pp. 259-270. DOI: 10.1177/1045389X13491020
36. Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennyh konstrukcij* [Mechanics of Thin-walled Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1977, 488 p.
37. Zienkiewicz O.C. *Finite element method in engineering science*. McGraw-Hill, New York, 1972, 432 p.
38. Shivakumar K.N., Krishna Murty A.V. A high precision ring element for vibrations of laminated shells. *J. Sound Vib.*, 1978, vol. 58, pp. 311-318. DOI: 10.1016/S0022-460X(78)80040-6
39. Matveenko V.P., Sevodin M.A., Sevodina N.V. Applications of Muller's method and the argument principle to eigenvalue problems in solid mechanics. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol.7, no. 3, pp. 331-336. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.32
40. George A., Liu J.W.H. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981, 324 p.
41. Chen S.S., Rosenberg G.S. Dynamics of a coupled shell-fluid system. *Nucl. Eng. Des.* 1975, vol. 32, no. 3, pp. 302-310. DOI: 10.1016/0029-5493(75)90101-6
42. Jeong K.-H. Natural frequencies and mode shapes of two coaxial cylindrical shells coupled with bounded fluid, *J. Sound Vib.*, 1998, vol. 215, no. 1, pp. 105-124. DOI: 10.1006/jsvi.1998.1648
43. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Senin A.N. Analysis of spatial vibrations of coaxial cylindrical shells partially filled with a fluid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol.11, no. 4, pp. 448-462. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.4.35