



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С МАССОВЫМИ СИЛАМИ

Д.А. Иванычев

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 30 октября 2018 г.

Принята: 10 мая 2019 г.

Опубликована: 28 июня 2019 г.

Ключевые слова:

метод граничных состояний, трансверсально-изотропные тела, массовые силы, краевые задачи, пространство состояний, контактная задача, осесимметричные задачи.

АННОТАЦИЯ

Представлена методика решения контактных осесимметричных задач для ограниченных тел вращения из трансверсально-изотропного материала, находящихся одновременно под действием массовых сил.

Методика предполагает развитие энергетического метода граничных состояний, основу которого составляют понятия пространств внутренних и граничных состояний, сопряженных изоморфизмом, что позволяет установить взаимно однозначное соответствие между элементами этих пространств. Во внутреннее состояние входят компоненты тензора напряжений, деформаций и вектора перемещений. В граничное состояние входят усилия и перемещения на границе и массовые силы. Доказан изоморфизм пространств состояний, отыскание внутреннего состояния сводится к исследованию изоморфного ему граничного состояния. Базис формируется, основываясь на общем решении краевой задачи для трансверсально-изотропного тела вращения и способе создания базисных векторов перемещения в задаче по определению состояния от непрерывных неконсервативных массовых сил. Проводится ортогонализация пространств состояний, где в качестве скалярных произведений в пространстве внутренних состояний применяется двойная внутренняя энергия упругого деформирования; в пространстве граничных состояний используется работа внешних и массовых сил. Окончательно, отыскание искомого состояния сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье.

Представлено решение задачи контакта без трения в контактирующих поверхностях для кругового в плане цилиндра. Материал цилиндра – трансверсально-изотропный алевролит с осью анизотропии, совпадающей с геометрической осью симметрии. На тело действуют массовые силы, имитирующие центробежные силы инерции и силы тяжести. Механические характеристики имеют аналитический полиномиальный вид. Представлены явные и косвенные признаки сходимости решения задач и графическая визуализация результатов.

© ПНИПУ

© Иванычев Дмитрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доц., e-mail: Lsivdmal@mail.ru, [iD: 0000-0002-7736-9311](https://orcid.org/0000-0002-7736-9311)

Dmitriy A. Ivanychev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

e-mail: Lsivdmal@mail.ru, [iD: 0000-0002-7736-9311](https://orcid.org/0000-0002-7736-9311)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

THE CONTACT PROBLEM SOLUTION OF THE ELASTICITY THEORY FOR ANISOTROPIC ROTATION BODIES WITH MASS FORCES

D.A. Ivanychev

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 30 October 2018

Accepted: 10 May 2019

Published: 28 June 2019

Keywords:

boundary state method, transversely isotropic bodies, mass forces, boundary value problems, state space, contact problem, axisymmetric problems.

ABSTRACT

In this paper presents a developed method aimed to solve contact axisymmetric problems for limited bodies of revolution from transversely isotropic material which are simultaneously under the action of mass forces.

The method involves the development of the energy method of boundary states, which is based on the concepts of spaces of internal and boundary states conjugated by isomorphism, which allows us to establish a one-to-one correspondence between the elements of these spaces. The internal state includes stress tensor components, deformation tensor components and displacement vector. The boundary state includes efforts and moving boundary points and mass forces. The isomorphism of the state spaces is proved, which allows finding the internal state to be reduced to the study of a boundary state that is isomorphic to it. The basis is formed based on the general solution of the boundary value problem for a transversely isotropic body of revolution and based on the method of creating basic displacement vectors while determining the state from continuous nonconservative mass forces. The orthogonalization of the state spaces is carried out, where the double internal energy of elastic deformation is used as scalar products in the space of internal states; in the space of boundary states, the work of external and mass forces is used. Finally, the problem of finding a desired state is reduced to solving an infinite system of algebraic equations regarding the Fourier coefficients.

The solution of the contact problem without friction in contacting surfaces for a circular in terms of the cylinder is presented. The material of the cylinder is a transversely isotropic siltstone with the anisotropy axis coinciding with the geometric axis of symmetry. Mass forces act on the body, imitating centrifugal forces of inertia and gravity. Mechanical characteristics have analytical polynomial view. Explicit and indirect convergence patterns of the problem solving and graphical visualization of the results are presented.

© PNRPU

Введение

Контактное взаимодействие является наиболее распространенным случаем механического взаимодействия деталей машин. Последние в целях повышения прочностных и технологических параметров могут быть изготовлены из современных материалов. К ним относятся эластомеры, поликристаллические металлы, металлокерамика, а также композитные материалы, обладающие различием в упругих свойствах для разных направлений. Одновременно в процессе работы детали пребывают в сложных кинематических условиях. С точки зрения теории упругости на них действуют внешние и массовые силы, а на участках поверхности наложены кинематические условия. Определение напряженно-деформированного состояния от совокупности таких воздействий, а также в силу сложной физической природы материалов составляет актуальную научную задачу.

Основоположником контактных задач считается Г. Герц [1], давший первое решение контактного взаимодействия упругих тел. Дальнейшее развитие математического аппарата, например теория функций комплексного переменного Н.И. Мусхелишвили, математический аппарат А.М. Ляпунова, позволило расширить класс решаемых контактных задач; здесь важную роль играют работы И.Я. Штаермана, В.М. Абрамова, Л.А. Галина, А.Ю. Ишлинского, Н.А. Кильчевского, М.Я. Леонова,

А.И. Лурье, В.И. Моссаковского, Г.Н. Савина, Д.И. Шермана и др. Приближенные аналитические решения различных классов контактных задач были разработаны в работах F.W. Carter [2], C. Cattaneo [3], R.D. Mindlin [4]. Далее теория контактных взаимодействий развивалась в таких направлениях, как статические и динамические, плоские и пространственные, температурные контактные задачи, рассматривались как упругие материалы, так и вязкоупругие.

На сегодняшний день исследуются более частные аспекты контактных задач. Например, в работе [5] изучена пространственная контактная задача с неизвестной областью контакта для трансверсально-изотропного упругого полупространства. Для решения задачи применялся численный метод Галанова, позволяющий одновременно определить область контакта и давление в этой области. В работе [6] с помощью невариационного численного подхода решена контактная задача двух упругих тел с трением. Контакт тел из разных материалов с трением рассматривался и в работе [7]. В работе [8] рассмотрена осесимметричная контактная задача линейной теории упругости о действии жесткого кольцевого банджа конечной длины на бесконечный полый круговой цилиндр. В работе [9] с помощью двухстороннего асимптотического метода решена задача о внедрении в функционально-градиентное упругое полупространство осесимметричного штампа. В работе

[10] представлен метод решения задач о контакте двух цилиндров и цилиндра с плоской плитой при наличии перекоса между ними с использованием модели упругого основания. В работе [11] представлен расчет контакта цилиндров конечной длины с учетом действия краевого эффекта, влияния его на площадку контакта и напряжения. В работе [12] рассмотрены пространственные контактные задачи об одновременном действии на грани упругого клина эллиптического в плане штампа и сосредоточенной силы, приложенной вне области контакта на ребре клина. В работе [13] показано применение метода Лагранжа для решения двумерных контактных задач. В работе [14] проведен сравнительный анализ аналитического решения контакта двух цилиндров с численным методом. В работе [15] рассмотрено численное моделирование упругого деформирования двумерных твердых тел с учетом контактного взаимодействия на основе метода Шварца.

Метод граничных состояний применен в решении контактных задач для изотропных ограниченных тел [16–18]. Что касается класса анизотропных задач, методом граничных состояний исследовано упругое деформирование протяженного цилиндрического тела [19].

Массовые силы в задачах механики твердых тел просматривались в следующих работах. В работе [20] построено численно-аналитическое решение плоской задачи теории упругости с использованием метода взвешенных невязок в форме метода граничного решения. Найдено распределение напряжений и смещений в упругом теле, подверженном действию заданной системы объемных сил и заданных напряжений или смещений на границах. В [21] исследовались вынужденные деформации в виде суммы воздействий поверхностных и объемных сил. В работе [22] рассматривались задачи теории упругости с заданными объемными и поверхностными силами в функциональных энергетических пространствах тензоров напряжений и деформаций; методом ортогональных проекций решены конкретные задачи. В работе [23] для перемещений получено условие эквивалентности поверхностных и объемных сил посредством вариационного уравнения Лагранжа. В [24] представлено построение поля перемещений для изотропного упругого тела, ограниченного концентрическими сферами и находящегося под действием осесимметричных нестационарных объемных сил. В работе [25] получены точные аналитические решения задач о равновесии толстостенных трансверсально-изотропных составных сфер с жестко закрепленной или закрепленной только в радиальном направлении внешней поверхности, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления. Для трансверсально-изотропного тела была предпринята попытка определения упругого поля несимметричной задачи статики с помощью фундаментального решения для среды [26].

Ряд работ посвящен обратному методу определения напряженно-деформированного состояния изотропных упругих тел от действия непрерывных непотенциальных объемных сил [27, 28, 29].

Метод граничных состояний с участием объемных сил для изотропной среды применен в работе [30]. В [31] продемонстрирован прием включения в круг расчетных вопросов метода граничных состояний объемных сил упругой среды, составляющих линейную комбинацию «эталонных» воздействий на односвязное ограниченное тело. В работе [32] разработана методика получения полнопараметрических решений для анизотропных тел, где возникновение фиктивных массовых сил являлось следствием применения метода Пуанкаре.

Особенность решения состоит в том, что упругие поля, полученные в краевой задаче и в задаче от действия массовых сил, не просто суммируются, а встроены в результирующее поле таким образом, что его след на границе одновременно удовлетворяет заданным условиям на поверхности тела и внутри области.

1. Постановка задачи

Исследуется равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения из трансверсально-изотропного материала под действием массовых сил \mathbf{X} . На поверхности тела заданные осесимметричные граничные условия (ГУ) имеют вид:

$$\{u_n, p_\tau\} \in S_u; \mathbf{p} \in S_p,$$

где S_u – поверхность контакта; S_p – остальная часть поверхности.

Рассматривается двухсторонний контакт по нормали к одной или нескольким поверхностям без трения, т.е. для контактирующей поверхности $p_\tau = 0$. Причем контакт происходит по симметричной относительно оси z поверхности целиком или ее части (рис. 1) и не обязательно $u_n = 0$.

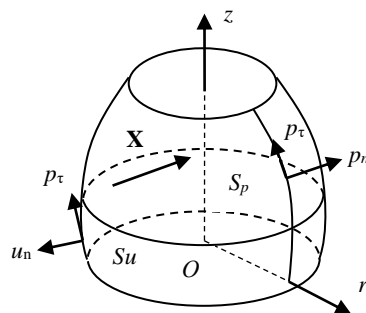


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

Fig. 1. Transversely isotropic rotation body

Поставленная задача может быть решена следующим путем: сначала решить краевую задачу механики от внешних условий, затем отдельно решить задачу по определению упругого состояния от массовых сил, а полученные поля механических характеристик сложить. Однако в этом случае суммарное упругое поле не будет удовлетворять одновременно условиям на границе и массовым силам.

Целью работы является развитие метода граничных состояний на класс контактных осесимметричных задач теории упругости для трансверсально-изотропных тел вращения, в которых упругое поле от массовых сил не просто суммируется с полем от граничных условий (физических и геометрических), а входит в состав решения, позволяя получить упругое поле, удовлетворяющее заданным условиям как на границе, так и внутри области. Для ее достижения необходимо выполнить корректную постановку задачи, обезразмеривание физических констант, выбрать метод решения с построением определяющей теории и ее реализации в решении конкретных задач.

2. Определяющие соотношения для среды

Для однородной трансверсально-изотропной среды в цилиндрических координатах имеют место следующие соотношения.

Дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрической системе координат z, r, θ имеют вид [33]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} + Z &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + Q &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где R, Z, Q – массовые силы.

Соотношения Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обобщенный закон Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)], \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z, \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}, \end{aligned} \quad (3)$$

где E_z и E_r – модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии; ν_z – коэф-

фициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль r при растяжении вдоль оси z ; ν_r – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскостях изотропии при растяжении в этих же плоскостях; G_r и G_z – модуль сдвига в плоскостях изотропии и перпендикулярных к ним.

3. Задача эластостатики

В монографии [33] с помощью метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных).

В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация, возникающая в цилиндрах, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости zy (направление $\eta \perp$ плоскости zy) [33]:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{pl} &= -\text{Re}[\gamma_1^2 \dot{\varphi}_1(\zeta_1) + \gamma_2^2 \dot{\varphi}_2(\zeta_2)], \\ \sigma_y^{pl} &= \text{Re}[\dot{\varphi}_1(\zeta_1) + \dot{\varphi}_2(\zeta_2)], \\ \sigma_{zy}^{pl} &= -\text{Re}[\gamma_1 \dot{\varphi}_1(\zeta_1) + \gamma_2 \dot{\varphi}_2(\zeta_2)], \\ \sigma_\eta^{pl} &= \nu_r \sigma_y^{pl} + \nu_z \frac{E_r}{E_z} \sigma_z^{pl}; \tau_{z\theta} = 0, \\ u_z^{pl} &= \text{Re}[p_1 \varphi_1(\zeta_1) + p_2 \varphi_2(\zeta_2)], \\ u_y^{pl} &= \text{Re}[iq_1 \varphi_1(\zeta_1) + iq_2 \varphi_2(\zeta_2)], \end{aligned} \quad (4)$$

где константы q_1 и p_1 определены упругими параметрами материала; $\zeta_j = z/\gamma_j + iy$, γ_j – комплексные корни характеристического уравнения [34]; функции $\varphi_j(\zeta_j)$ – аналитические по своим переменным.

Переход к осесимметричному пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям [34, 35]

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_z^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \sigma_{zr} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{zy}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy, \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{r^2 - y^2}} dy, \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \\ u &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_z^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; v = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sigma_{z\theta} = \sigma_{r\theta} = 0.$$

4. Метод решения

Для решения поставленной задачи прибегнем к понятиям метода граничных состояний (МГС) [36].

Основу метода составляют пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}. \quad (6)$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений:

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}. \quad (7)$$

Воспользуемся при построении решения основных задач механики уравнением Клапейрона [37]

$$\int_V \mathbf{X} \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{P}_v \mathbf{u}_v dS - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0. \quad (8)$$

Придание перемещениям возможных вариаций $\delta \mathbf{u}$, преобразует последнее уравнение в вариационное уравнение Лагранжа [38].

Запишем уравнение (8) в виде

$$\int_V (\sigma_{ij}^i \varepsilon_{ij}^j + \sigma_{ij}^j \varepsilon_{ij}^i) dV = \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{P}_v^i \mathbf{u}_v^j dS + \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_S \mathbf{P}_v^j \mathbf{u}_v^i dS \quad (9)$$

и будем определять скалярные произведения в базисе внутренних состояний следующим образом (например, для 1-го и 2-го внутреннего состояний):

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V (\varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1) dV, \quad (10)$$

причем в силу коммутативности состояний среды

$$\begin{aligned} (\xi_1, \xi_2) &= (\xi_2, \xi_1) = \int_V (\varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1) dV = \\ &= \int_V (\varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2) dV. \end{aligned}$$

Граничное состояние γ_k в зависимости от традиционного $\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k\}$, определяемого в [36], будем формировать наборами компонент вектора перемещения точек границы u_{vi} , поверхностными усилиями p_i и массовыми силами X_i (последнее условно в силу того, что массовые силы не относятся к элементу поверхности тела):

$$\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k, X_i^k\}, p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j, \quad (11)$$

где n_j – компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний Γ согласно (9) скалярное произведение выражает двойную работу внешних сил по поверхности тела S и работу массовых сил на перемещениях u_i внутренних точек тела:

$$\begin{aligned} (\gamma_1, \gamma_2) &= \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV + \\ &+ \int_S p_i^2 u_{vi}^1 dS + \int_V X_i^2 u_i^1 dV, \end{aligned} \quad (12)$$

причем в силу тождества Бетти и соотношения Клапейрона $(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1)$.

В случае гладкой границы и в силу (8) оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. По определению каждому элементу $\xi_k \in \Xi$ соответствует единственный элемент $\gamma_k \in \Gamma$, причем это соответствие взаимно-однозначное: $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$. Это позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от граничных условий (ГУ).

Ортонормирование базиса пространства Ξ осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [39], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимается (10).

Проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомых внутреннего ξ и граничного γ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \\ \varepsilon_{ij} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k; X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^k. \end{aligned} \quad (13)$$

Ортонормированный базис позволяет записать для элементов базиса граничных состояний следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + 2 \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS + 2 \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS + \\
 & + 2 \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + 2 \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS + 2 \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS = 2\delta_{ij}, \\
 & 2 \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + 2 \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS + 2 \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS = \\
 & = - \left[2 \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + 2 \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS + 2 \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS \right], i \neq j. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Представим слагаемые из (14) в следующем виде (нижний индекс v в развернутых выражениях опущен):

$$\begin{aligned}
 \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS &= \int_{Su} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p = \\
 &= \int_{Su} p_\tau^i u_\tau^j dS_u + \int_{Su} p_n^i u_n^j dS_u + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p, \\
 \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS &= \int_{Su} p_\tau^j u_\tau^i dS_u + \int_{Su} p_n^j u_n^i dS_u + \int_{Sp} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p,
 \end{aligned}$$

и, подставляя их в (14), получим

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + 2 \int_{Su} p_\tau^i u_\tau^j dS_u + 2 \int_{Su} p_n^i u_n^j dS_u + \\
 & + 2 \int_{Sp} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p + 2 \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + 2 \int_{Su} p_\tau^j u_\tau^i dS_u + \\
 & + 2 \int_{Su} p_n^j u_n^i dS_u + 2 \int_{Sp} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p = 2\delta_{ij}.
 \end{aligned}$$

Группируя слагаемые и обозначая

$$\begin{aligned}
 \beta_{ij} &= 2 \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + 2 \int_{Su} p_\tau^i u_\tau^j dS_u + \\
 & + 2 \int_{Su} p_n^j u_n^i dS_u + 2 \int_{Sp} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p, \\
 \lambda_{ij} &= 2 \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + 2 \int_{Su} p_\tau^j u_\tau^i dS_u + \\
 & + 2 \int_{Su} p_n^i u_n^j dS_u + 2 \int_{Sp} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p, \quad (15)
 \end{aligned}$$

легко убедиться, что $\beta_{ij} + \lambda_{ij} = 2\delta_{ij}$.

Преобразуем λ_{ij} следующим образом: базисные механические характеристики \mathbf{X}^j , p_τ^j , u_n^j заменяем заданными и перебор будем осуществлять по индексу j , образуя тем самым матрицы коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 \alpha_j &= 2 \int_V \mathbf{X}^j dV + 2 \int_{Su} p_\tau^j dS_u + \\
 & + 2 \int_{Su} p_n^j dS_u + 2 \int_{Sp} \mathbf{p}_v^j dS_p, \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$A = [\alpha_j]_N; \quad B = [\beta_{ij}]_{N \times N}.$$

Следует отметить, что матрица B является кососимметричной ($\beta_{ij} = -\beta_{ji}$, $i \neq j$). Коэффициенты Фурье $c = \{c_k\}_N$ рассчитываются так:

$$c = \{c_k\}_N = B^{-1}A, \quad (17)$$

где N – число используемых элементов базиса.

Окончательно решение имеет вид (13).

Тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой одного из базисных элементов с соответствующими ГУ в качестве заданного, при этом должны выполняться условия $c_n = 1$, n – номер тестируемого элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

5. Формирование базиса

Основную сложность формирования решения в МГС представляет конструирование базиса внутренних состояний, которое опирается на общее или фундаментальное решение для среды; также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

В работе [19] изложена методика определения напряженно-деформированного состояния изотропных тел от действия объемных сил.

Для построения поля перемещений от массовых сил для плоских вспомогательных состояний применяется фундаментальная система многочленов $y^\alpha z^\beta$, которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения $\mathbf{u}^{pl}(y, z)$, образуя некоторое допустимое упругое плоское вспомогательное состояние:

$$\mathbf{u}^{pl} = \left\{ \left\{ y^\alpha z^\beta, 0, \right\}, \left\{ 0, y^\alpha z^\beta \right\} \right\}.$$

Перебор всевозможных вариантов в пределах $\alpha + \beta \leq n$, ($n = 1, 2, 3 \dots$) позволяет получить множество состояний. Далее согласно (5) определяются компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}(r, z)$ пространственного осесимметричного состояния, и по цепочке (2), (3), (1) определяются соответствующие тензоры деформаций, напряжений и массовые силы, образуя конечномерный базис в задаче от массовых сил:

$$\Xi^X = \left\{ \xi_1^X, \xi_2^X, \xi_3^X, \dots, \xi_k^X, \dots \right\}.$$

Базисные наборы в задаче эластостатики можно конструировать, генерируя возможные варианты для двух аналитических функций $\Phi_1(\zeta_1)$ и $\Phi_2(\zeta_2)$ плоско-го вспомогательного состояния (4), придавая им последовательно следующие наборы:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(\zeta_1) \\ \Phi_2(\zeta_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\zeta_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\zeta_2^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, определяются все механические характеристики плоского вспомогательного состояния, и далее следует переход к трехмерному состоянию по зависимостям (5), образуя конечномерный базис в пространственной осесимметричной задаче эластостатики:

$$\Xi^S = \{ \xi_1^S, \xi_2^S, \xi_3^S, \dots, \xi_k^S, \dots \}.$$

Окончательно базис (6) представляет собой объединение

$$\Xi = \{ \xi_1^S, \xi_2^X, \xi_3^S, \xi_4^X, \dots, \xi_{k-1}^S, \xi_k^X, \dots \},$$

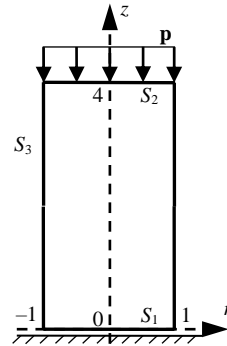
поскольку ГУ совместно с массовыми силами образуют сложное напряженно-деформированное состояние тела, которое одними «уравновешенными» или «неуравновешенными» (напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия с массовыми силами) базисными состояниями приблизить нельзя.

6. Решение задач для цилиндра

Апробацию предложенной методики проведем на исследовании упругого состояния трансверсально-изотропного кругового в плане цилиндра из горной породы алеволита крупного темно-серого [37]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи, которую приводить не будем, цилиндр занимает область $V = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 4\}$ и упругие характеристики материала: $E_z = 6,21$; $E_r = 5,68$; $G_z = 2,55$; $\nu_z = 0,22$; $\nu_r = 0,24$.

Граничные условия имитируют контакт одного из торцов цилиндра со скольжением (рис. 2). На тело действуют массовые силы \mathbf{X} .

После процедуры ортонормирования и исключения линейно-зависимых элементов базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в табл. 1 (показано 5 элементов). Истинное значение показанной величины в табл. 1 и 2 равно показанному значению, умноженному на κ .



$$\begin{aligned} p_r = 0, w = 0, S_1 \mid z = 0, 0 \leq r \leq 1, \\ p_r = 0, p_z = -1, S_2 \mid z = 4, 0 \leq r \leq 1, \\ \mathbf{p} = 0, S_3 \mid r = 1, 0 \leq z \leq 4, \\ \mathbf{X} \in \{r, z\}. \end{aligned}$$

Рис. 2. Граничные условия к первой задаче для цилиндра

Fig. 2. Boundary conditions for the first problem for a cylinder

Таблица 1

Перемещения ортонормированного базиса ($\kappa = 10^{-2}$)

Table 1

Displacements of an orthonormal basis ($\kappa = 10^{-2}$)

	u	w
ξ_1	0	18,66z
ξ_2	13,1017r	-7,37448z
ξ_3	0	-32,32z + 8,08z ²
ξ_4	-20,4149r + 10,2074rz	4,5644r ² + 11,4809z - 2,8727z ²
ξ_5	-9,90943r + 4,95471rz	-22,3952r ² + 5,5776z - 1,3944z ²

Усеченная до $N = 9$ матрица коэффициентов β_{ij} (15) представлена в табл. 2 (i – строка, j – столбец).

Таблица 2

Матрица коэффициентов β_{ij} ($\kappa = 10^{-2}$)

Table 2

Coefficients matrix β_{ij} ($\kappa = 10^{-2}$)

1	0	0	-3,057	15,002	8,041	5,226	26,336	2,548
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	5,296	-25,984	-13,928	-9,051	-45,615	-4,413
3,057	0	-5,296	1	0	-3,612	5,806	0,4556	0,5651
-15,002	0	25,984	0	1	17,722	-28,49	-2,235	-2,773
-8,041	0	13,928	3,612	-17,722	1	-21,444	-32,31	-4,496
-5,226	0	9,051	-5,806	28,49	21,444	1	49,234	3,873
-26,336	0	45,615	-0,455	2,235	32,1	-49,234	1	-4,488
-2,548	0	4,413	-0,565	2,773	4,496	-3,873	4,488	1

При решении использовался базис в 30 элементов. Приведем значения для девяти коэффициентов Фурье (17):

$$c_1 = -0,14934; c_2 = -0,37767; c_3 = -1,72357;$$

$$c_4 = 0,61621; c_5 = 0,28092; c_6 = 0,53341;$$

$$c_7 = -0,18391; c_8 = -0,30161; c_9 = -0,10455.$$

Рис. 3 представляет собой график, иллюстрирующий «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя). Это является косвенным признаком сходимости решения.

Искомые характеристики определяются по зависимостям (13). Приведем выражения для восстановленных массовых сил:

$$R = [99724,3r + 216,898r^3 + 216,076rz - 55,1951rz^2]10^5,$$

$$Z = [50,3475 + 8,0256r^2 + 99852,1z - 14,8378r^2z + 100,384z^2 - 17,9696z^3]10^5.$$

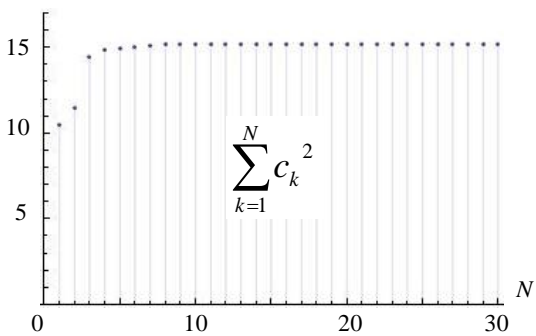
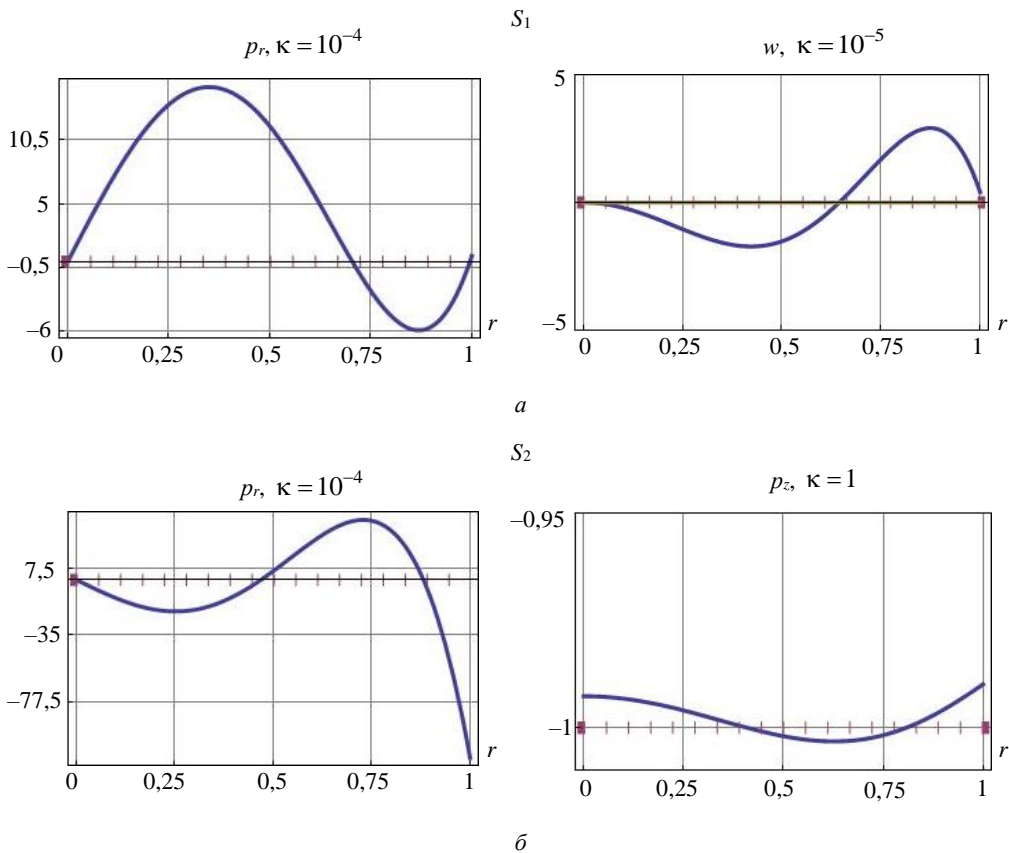


Рис. 3. Сумма Бесселя в задаче для цилиндра

Fig. 3. The Bessel sum in the problem for the cylinder

Проверка результата и оценка точности осуществляется сопоставлением заданных ГУ с восстановленными в результате решения (рис. 4). Здесь и далее на графиках заданные (| | | |) и восстановленные (—) ГУ изображены в масштабе. Например, истинное значение p_r на левом графике рис. 4, а равно значению на графике, умноженному на коэффициент κ .

Остальные механические характеристики, имеющие полиномиальный вид, представим в виде изолиний (в явном виде необозримы) (рис. 5). В силу осевой симметрии показана область $0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 4$. Истинное значение показанной величины равно соответствующему значению на изолиниях, умноженному на κ (если не указан, то показана истинная величина).



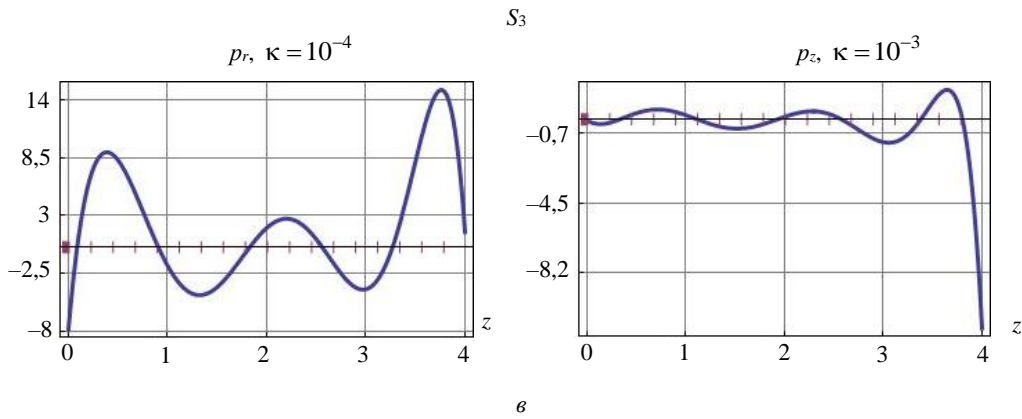


Рис. 4. Верификация граничных условий: *a* – на участке поверхности S_1 ; *b* – на участке поверхности S_2 ; *в* – на участке поверхности S_3

Fig. 4. Verification of boundary conditions: *a* – on the surface S_1 ; *b* – on the surface S_2 ; *c* – on the surface S_3

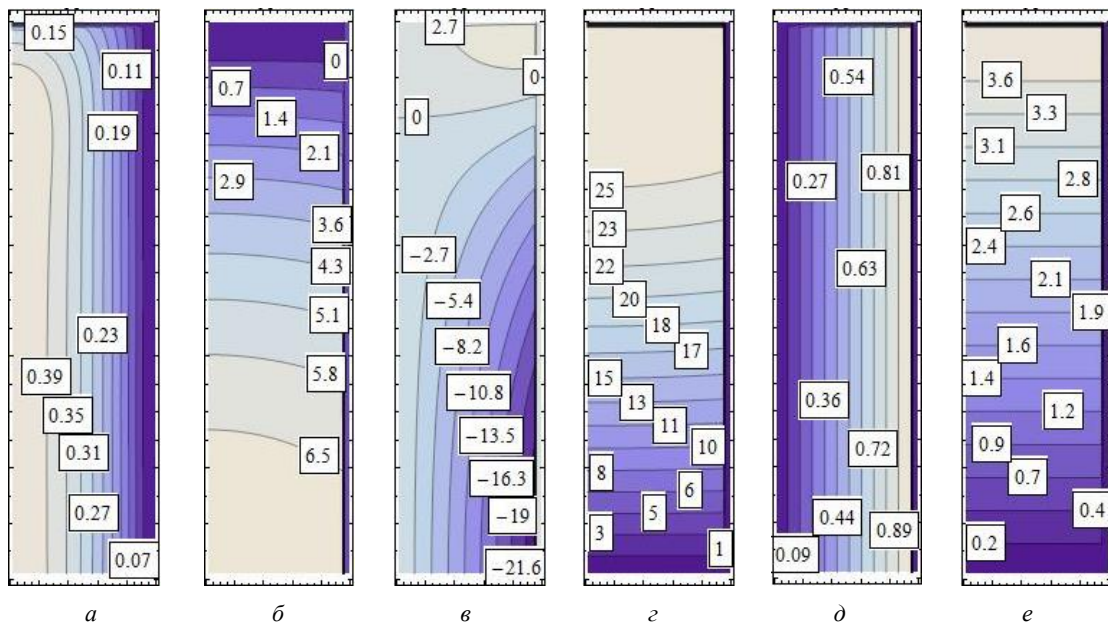


Рис. 5. Механические характеристики: *a* – компонента тензора напряжений σ_{rr} ; *b* – компонента тензора напряжений σ_{zz} ; *в* – компонента вектора перемещения u , $\kappa=10^{-2}$; *г* – компонента вектора перемещения w , $\kappa=10^{-1}$; *д* – компонента массовой силы R ; *е* – компонента массовой силы Z

Fig. 5. Mechanical characteristics: *a* – the component of stress tensor σ_{rr} ; *b* – component of the stress tensor σ_{zz} ; *c* – the component of displacement vector u , $\kappa=10^{-2}$; *d* – the component of the displacement vector w , $\kappa=10^{-1}$; *e* – the component of the mass force R ; *f* – the component of the mass force Z

Рассмотрим еще одну задачу для кругового цилиндра при оговоренных выше геометрии и физических параметрах среды. Здесь контакт цилиндра происходит по двум торцам, а на боковой поверхности заданы усилия, приводящие к неоднородному сжатию (рис. 6).

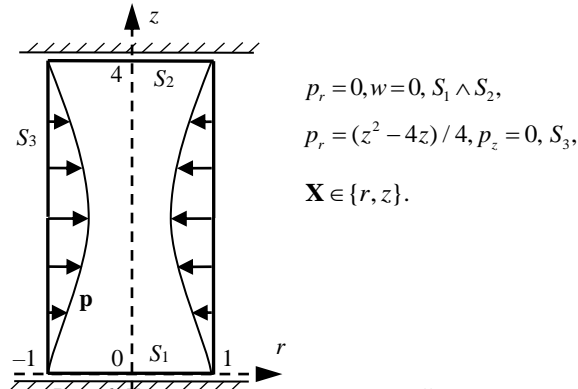


Рис. 6. Граничные условия ко второй задаче для цилиндра

Fig. 6. Boundary conditions for the second problem for the cylinder

Ортонормированный базис внутренних состояний зависит только от геометрии тела, поэтому он строится один раз и может использоваться для решения различных краевых задач контактного типа.

При решении задачи использовалось 30 коэффициентов ряда Фурье. Приведем выражения для восстановленных массовых сил:

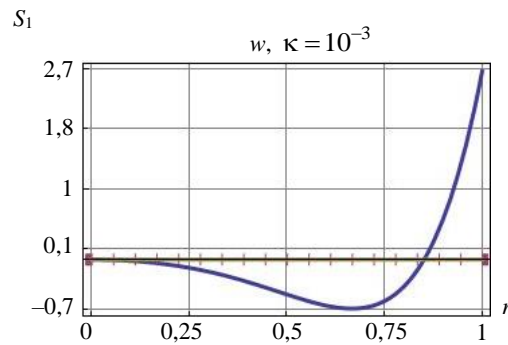
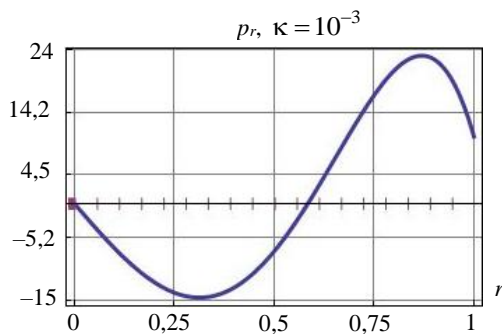
$$R = [102061r - 13029,3r^3 + 5274,92rz - 1270,01rz^2]10^{-5},$$

$$Z = [-3073,92 + 5403,03r^2 + 101773z - 21086,1r^2z - 167,791z^2 - 10,639z^3]10^5.$$

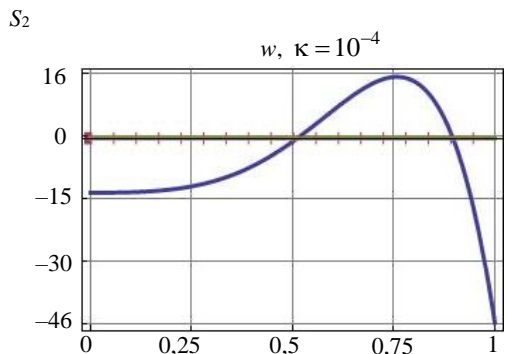
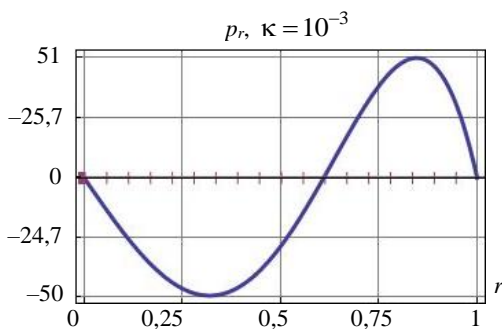
Для оценки точности полученных результатов приведем сравнение заданных ГУ с полученными (рис. 7).

Изолинии восстановленных механических характеристик и контур деформированного состояния в гипертрофированном виде представлены на рис. 8 (показана область $0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 4$).

Таким образом, метод граничных состояний показал свою эффективность в плане решения осесимметричных контактных задач для ограниченных transversально-изотропных тел вращения с учетом массовых сил. Сложность задачи заключается в том, что восстановление искомого упругого поля осуществляется одновременно по четырем направлениям (четыре интеграла в выражении для α_i (16)): массовые силы \mathbf{X} , поверхностные усилия на участке S_p , компоненты p_τ и u_n на участке S_u .



a



б

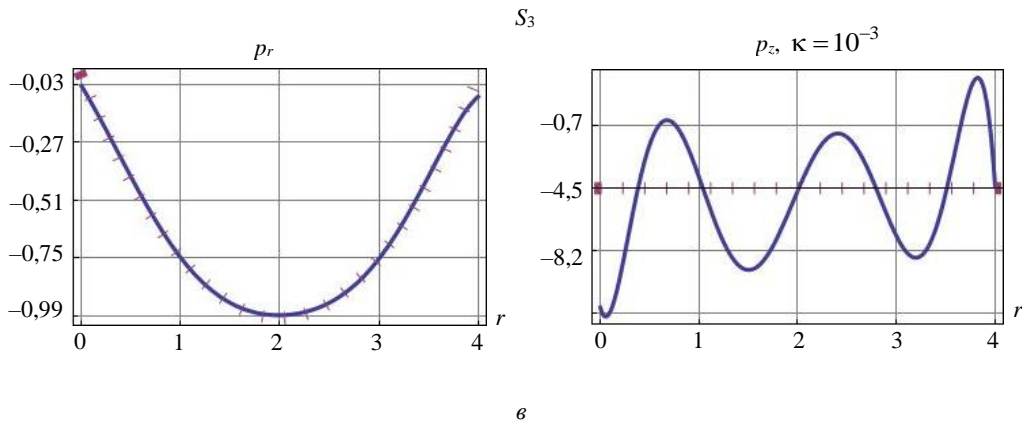


Рис. 7. Сопоставление граничных условий: a – на участке поверхности S_1 ; b – на участке поверхности S_2 ; c – на участке поверхности S_3

Fig. 7. Comparison of the boundary conditions: a – on the surface S_1 ; b – on the surface S_2 ; c – on the surface S_3

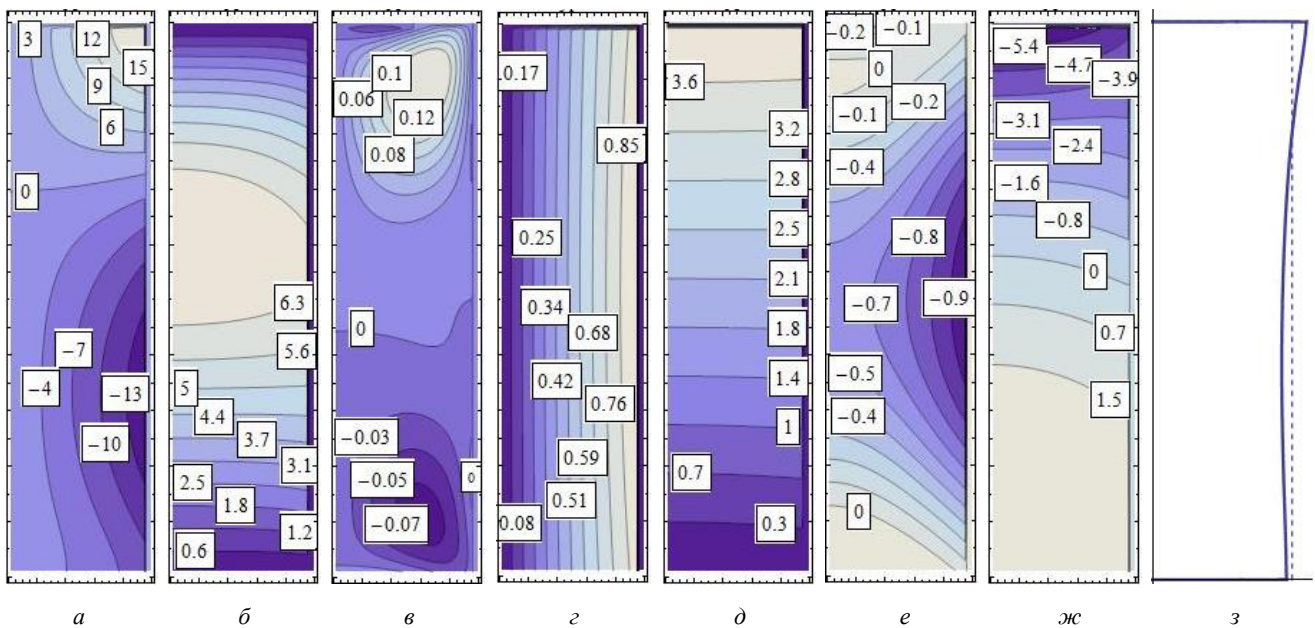


Рис. 8. Механические характеристики: a – компонента вектора перемещения u , $\kappa=10^{-2}$; b – компонента вектора перемещения w , $\kappa=10^{-1}$; c – компонента тензора напряжений σ_{xr} ; d – компонента массовых сил R ; e – компонента массовых сил Z ; f – компонента тензора напряжений σ_{rr} ; g – компонента тензора напряжений σ_{zz} ; z – контур деформированного состояния

Fig. 8. Mechanical characteristics: a – the component of the displacement vector u , $\kappa=10^{-2}$; b – the component of the displacement vector w , $\kappa=10^{-1}$; c – the component of the stress tensor σ_{xr} ; d – the component of mass forces R ; e – the component of mass forces Z ; f – the component of the stress tensor σ_{rr} ; g – the component of the stress tensor σ_{zz} ; h – the contour of the deformed state

Благодарность

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "p_a".

Acknowledgment

The study was carried out with the financial support of RFBR and the Lipetsk Region as part of the research project No. 19-41-480003 "p_a".

Библиографический список

1. Hertz H. Uber die Berührung fester elastischer Körper (On contact problem of elastic solids) // *J. Reine Angew. Math.* – 1881. – 92. – P. 156–171.
2. Carter F.W. On the action of a locomotive driving wheel // *Proc. Roy. Soc., Ser. A.* – 1926. – Vol. 112. – P. 151–157.
3. Cattaneo C. Sul contatto di due copri elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei.* – 1938. – Vol. 27. – Ser. 6. – P. 342–348.
4. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact // *J. Appl. Mech.* – 1949. – Vol. 16. – No. 3. – P. 259–268.
5. Пожарский Д.А. Контактная задача для трансверсально-изотропного полупространства с неизвестной зоной контакта // *Докл. акад. наук.* – 2014. – Т. 455, № 2 – С. 158–161. DOI: 10.7868/80869565214080118
6. Бокій І.Б. Численний підхід к решению контактной задачи взаимодействия двух упругих тел с учетом трения и истории приложения внешнего нагружения / *Вестн. ЯГУ.* – 2006. – Т. 3, № 3.
7. Ищенко А.А., Ширяев А.В., Дегтяренко И.А. Исследование контактных напряжений упругих тел при наличии сил трения на площадке контакта // *Вісник Приазовського державного технічного університету. Серія: Технічні науки.* – 2012. – Вип. 24.
8. Золотов Н.Б., Пожарская Е.Д., Пожарский Д.А. К контактным задачам для цилиндра // *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.* – 2017. – № 2. DOI: 10.23683/0321-3005-2017-2-12-14
9. Айзикович С.М., Крнев Л.И., Трубчик И.С. Контактные задачи для упругих оснований с функционально-градиентными покрытиями сложной структуры // *Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика.* – 2009. – Т. 9. – Вып. 4, ч. 2.
10. Напряженно-деформированное состояние при контакте цилиндров в условиях перекоса / Ф.Г. Нахатакян [и др.] // *Изв. ТулГУ. Технические науки.* – 2016. – Вып. 4.
11. Привалихин Р.С. Напряженное состояние в зоне контакта двух цилиндрических тел конечной длины // *Изв. Самар. науч. центра РАН.* – 2011. – Т. 13, № 1(3). – С. 599–603.
12. Молчанов А.А., Пожарский Д.А. Обобщения контактной задачи Галина и взаимодействие штампов // *Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского.* – 2011. – № 4 (4). – С. 1636–1638.
13. Сравнение вариантов метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач / М.П. Галанин [и др.] // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* – 2017. – № 5. – С. 35–48. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-5-35-48
14. Азаров А.Д., Журавлев Г.А., Пискунов А.С. Сравнительный анализ аналитического и численного методов решения плоской задачи о контакте упругих цилиндров // *Инновационная наука: междунар. науч. журн.* – 2015. – № 1–2. – С. 5–13.
15. Яковлев М.Е. Выбор итерационных параметров при использовании метода Шварца для решения контактных задач // *Universum: Технические науки: электрон. научн. журн.* – 2018. – № 6 (51).
16. Пеньков В.Б., Рожков А.Н. Метод граничных состояний в основной контактной задаче теории упругости // *Изв. ТулГУ.* Сер. Математика. Механика. Информатика. Механика. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. – Т. 11. – Вып. 2. – С. 101–106.
17. Пеньков В.Б., Саталкина Л.В., Теплова С.С. Контактное взаимодействие шара со сфероидом по полной границе // *Вестн. Лип. гос. техн. ун-та.* – 2012. – № 1 (20). – С. 36–41.
18. Пеньков В.Б., Саталкина Л.В., Теплова С.С. Метод граничных состояний в контактной задаче теории упругости // *Современные проблемы математики, механики, информатики*, посвященная 90-летию профессора Л.А. Толоконникова: материалы междунар. науч. конф. (Россия, Тула, 16-20.09. 2013). – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2013. – С. 436–439.
19. The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length / D.A. Ivanychev [et al.] // *International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies.* – 2019. – Vol. 10. – No. 2. – P. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18
20. Голоскоков Д.П., Данилюк В.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // *Вестн. гос. ун-та морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова.* – 2013. – № 1.
21. Агаханов Э.К. О развитии комплексных методов решения задач механики деформируемого твердого тела // *Вестн. Даг. гос. техн. ун-та. Технические науки.* – 2013. – № 2 (29). – С. 39–45.
22. Стружанов В.В. О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // *Математическое моделирование систем и процессов.* – 2004. – № 12.
23. Агаханов Э.К., Магомедэминов Н.С. Условия эквивалентности воздействий для перемещений // *Вестн. Даг. гос. техн. ун-та. Технические науки.* – 2007. – № 12. – С. 27–28.
24. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругой толстостенной сферы под действием объемных сил // *Прикладная механика и техническая физика.* – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 59–69.
25. Фукалов А.А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // *XI Всерос. съезд по фундамент. пробл. теор. и прикл. мех.* – Казань, 2015. – С. 3951–3953.
26. Иваницhev Д.А., Пеньков В.Б. Фундаментальное решение как подход к решению анизотропных задач статики // *Наука и бизнес: пути развития.* – 2017. – № 8 (74). – С. 52–56.
27. Кузьменко Н.В., Левина Л.В. Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных // *XI Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. докл.* – Казань, 2015. – С. 2276–2278.
28. Пеньков В.Б., Левина Л.В., Кузьменко Н.В. Анализ напряженно-деформированного состояния массива, ослабленного взаимодействующими подземными хранилищами газа // *Успехи современного естествознания.* – 2017. – № 9 – С. 95–101.
29. Пеньков В.Б., Кузьменко Н.В., Левина Л.В. Решение задач изотропной теории упругости при наличии массовых непрерывных сил // *Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы междунар. науч. конф.* – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – С. 259–265.

30. Пеньков В.Б., Пеньков В.В., Викторов Д.В. Учет массовых сил в методе граничных состояний // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2005. – Т. 11. – Вып. 2. – С. 94–100.

31. Пеньков В.Б., Новикова О.С., Левина Л.В. Состояние упругого тела при нагружении комбинацией объемных сил // Вестн. Лип. гос. техн. ун-та. – 2017. – № 4. – С. 25–56.

32. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations / V.B. Penkov [et. al.] // Journal of Physics: Conf. Series 973. – 2018. – 012015. – DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012015

33. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 464 с.

34. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в приложениях к осесимметричным задачам для анизотропных тел // Вести высших учебных заведений Черноземья: науч.-техн. и производ. журн. – Липецк, 2014. – № 1. – С. 19–26.

References

1. Hertz H. Uber die Berührung fester elastischer Körper (On contact problem of elastic solids). *J. Reine Angew.* 1881, pp. 156-171

2. Carter F.W. On the action of a locomotive driving wheel. *Proc. Roy. Soc., Ser. A.* 1926. vol. 112, pp. 151-157.

3. Cattaneo C. Sul contatto di due copri elastici: distribuzione locale degli sforzi. *Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei*, 1938. vol.27. Ser.6, pp. 342-348.

4. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact. *J. Appl. Mech.* 1949, vol.16, no.3, pp. 259-268.

5. Pozharskiy D.A. Kontaktnaya zadacha dlya transversal'no-izotropnogo poluprostranstva s neizvestnoy zonoj kontakta [The contact problem for a transversely isotropic half-space with an unknown contact zone]. *Doklady akademii nauk*, 2014, vol, 455, no. 2, pp. 158-161. DOI: 10.7868/80869565214080118.

6. Bokiy I.B. Chislennykh podkhod k resheniyu kontaktnoy zadachi vzaimodeystviya dvukh uprugikh tel s uchetom treniya i istorii prilozheniya vneshnego nagruzheniya [Numerical approach to the solution of the contact problem of the interaction of two elastic bodies, taking into account friction and the history of external load]. *Vestnik YAGU*, 2006, vol. 3, no. 3.

7. Ishchenko A.A., Shiryayev A.V., Degtyarenko I.A. Issledovaniye kontaktnykh napryazheniy uprugikh tel pri nalichii sil treniya na poverkhnosti kontakta [Investigation of the contact stresses of elastic bodies in the presence of friction on the contact area]. *Visny Priazovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Tekhnicheskkiye nauki*, 2012, iss. 24.

8. Zolotov N.B., Pozharskaya Ye.D., Pozharskiy D.A. K kontaktnym zadacham dlya tsilindra // *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskiy region* [To contact problems for the cylinder]. *Yestestvennyye nauki*, 2017, no. 2. DOI: 10.23683/0321-3005-2017-2-12-14

9. Ayzikovich S.M., Krenev L.I., Trubchik I.S. Kontaktnyye zadachi dlya uprugikh osnovaniy s funktsional'no-gradiyentnymi pokryiyami slozhnoy struktury [Contact problems for elastic bases with functionally gradient coatings of complex structure]. *Izv. Sarat. un-ta, Vol. 9. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2009, iss. 4, part. 2

10. Nakhatakyan F.G. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye pri kontakte tsilindrov v usloviyakh perekosa [Stress-

strain state at contact of cylinders in conditions of skew]. *News of TSU. Technical science*, 2016, vol. 4.

11. Privalikhin R.S. Napryazhennoye sostoyaniye v zone kontakta dvukh tsilindricheskikh tel konechnoy dliny [The stress state in the contact zone of two cylindrical bodies of finite length]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tseentra Rossiyskoy akademii nauk*, 2011, vol. 13, no. 1(3), pp. 599-603.

12. Molchanov A.A., Pozharskiy D.A. Obobshcheniya kontaktnoy zadachi Galina i vzaimodeystviye shtampov [Generalizations of the contact problem Galina and interaction of stamps]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2011, no. 4 (4), pp. 1636-1638.

13. Galanin M.P. Sravneniye variantov metoda mnozhitel'nykh Lagranzha dlya resheniya dvumernykh kontaktnykh zadach [Comparison of variants of the Lagrange multipliers method for solving two-dimensional contact problems]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Yestestvennyye nauki*, 2017, no. 5, pp. 35-48. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-5-35-48.

14. Azarov A.D., Zhuravlev G.A., Piskunov A.S. Sravnitel'nyy analiz analiticheskogo i chislennogo resheniy resheniy ploskoy zadachi o kontakte uprugikh tsilindrov [Comparative analysis of analytical and numerical methods for solving the plane contact problem of elastic cylinders]. *Mezhdunarodnyy nauchnyy zhurnal «Innovatsionnaya nauka»*, 2015, no. 1-2. pp. 5-13.

15. Yakovlev M.Ye. Vybory iteratsionnykh parametrov pri ispol'zovanii metoda Shvartsa dlya resheniya kontaktnykh zadach [Selection of iterative parameters when using the Schwartz method for solving contact problems] [Elektronnyy dokument]. *Universum: Tekhnicheskkiye nauki: elektron. nauchn. zhurn*, 2018, no. 6(51), available at: 7universum.com/ru/tech/archive/item/6068.

16. Penkov V.B., Rozhkov A.N. Metod granichnykh sostoyaniy v osnovnoy kontaktnoy zadache teorii uprugosti [The method of boundary states in the main contact problem of the theory of elasticity]. *Tula, TulGU, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika. Mekhanika*, 2005, vol. 11, iss. 2, pp. 101-106.

17. Penkov V.B., Satalkina L.V., Teplova S.S. Kontaktnoye vzaimodeystviye shara so sferoidom po polnoy granice [Contact interaction of a sphere with a spheroid on the full boundary]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2012, no. 1 (20), pp. 36-41.

18. Penkov V.B., Satalkina L.V., Teplova S.S. Metod granichnykh sostoyaniy v kontaktnoy zadache teorii uprugosti [The method of boundary states in the contact problem of the theory of elasticity]. Tula, *Izd-vo TulGU, Materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Sovremennyye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki", posvyashchennaya 90-letiyu professora L.A. Tolokonnikova (Rossiya, Tula, 16-20.09. 2013)*, 2013, p. 603, pp. 436-439.
19. Ivanychev D.A. The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length. *International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies*, 2019, vol.10, no.2, pp. 183-191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.
20. Goloskokov D.P., Daniliuk V.A. Modelirovanie napriazhenno-deformirovannogo sostoianii uprugikh tel s pomoshch'iu polinomov [Modeling of the stress-strain state of elastic bodies with the help of polynomials]. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova*, 2013, no. 1.
21. Agakhanov E.K. O razvitiy kompleksnykh metodov resheniya zadach mekhaniki deformiruемого tverdogo tela [On the development of complex methods for solving the problems of mechanics of a deformable solid]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2013, no. 2 (29), pp. 39-45.
22. Struzhanov V.V. O reshenii kraevykh zadach teorii uprugosti metodom ortogonal'nykh proektsii [On the solution of boundary value problems of the theory of elasticity by the method of orthogonal projections]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*, 2004, no. 12.
23. Agakhanov E.K., Magomedeminov N.S. Usloviia ekvivalentnosti vozeistvii dlia peremeshchenii [Equivalence conditions for impacts for displacements]. *Vestnik DGTU. Tekhnicheskie nauki*, 2007, no. 12, pp. 27-28.
24. Vestyak V.A., Tarlakovskii D.V. Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of volume forces [Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of bulk forces]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. pp. 59-69.
25. Fukalov A.A. Zadachi ob uprugom ravnesovmestii sostavnykh tolstostennykh transversal'no-izotropnykh sfer, nakhodyashchikhsya pod deystviyem massovykh sil i vnutrennego davleniya, i ikh prilozheniya [Problems of elastic equilibrium of composite thick-walled transversely isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their applications]. *Kazan', XI Vserossiyskiy s"yezd po fundamental'nykh problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki*, 2015, pp. 3951-3953.
26. Ivanychev D.A., Penkov V.B. Fundamental'noe reshenie kak podkhod k resheniyu anizotropnykh zadach statiki [A fundamental solution as an approach to the solution of anisotropic static problems]. *Nauka i biznes: puti razvitiya*, 2017, no. 8 (74), pp. 52-56.
27. Kuz'menko N.V., Levina L.V. Obratnyi metod effektivnogo analiza sostoianii uprugogo tela ot massovykh sil iz klassa nepreryvnykh [The inverse method of effective analysis of the state of an elastic body from mass forces from the class of continuous]. *Kazan', KHI Vserossiyskiy s"yezd po fundamental'nykh problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki: sbornik dokladov*. 2015, pp. 2276-2278.
28. Penkov V.B., Levina L.V., Kuz'menko N.V. Analiz napriazhenno-deformirovannogo sostoianii massiva, oslablenogo vzaimodeystviyushchimi podzemnymi khranilishchami gaza [Analysis of the stress-strain state of the massif weakened by the interacting underground gas storages]. *Zhurnal Uspekhi sovremenno estestvoznaniya*, 2017, no. 9, pp. 95-101.
29. Penkov V.B., Kuz'menko N.V., Levina L.V. Reshenie zadach izotropnoi teorii uprugosti pri nalichii massovykh nepreryvnykh sil [The solution of problems of the isotropic theory of elasticity in the presence of mass continuous forces]. Tula, *Izd-vo TulGU Materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Sovremennyye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki»*, 2014, pp. 259-265.
30. Penkov V.B., Penkov V.V., Viktorov D.V. Uchet massovykh sil v metode granichnykh sostoianii [The account of mass forces in a method of boundary conditions]. *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2005. vol. 11, pp. 94-100.
31. Penkov V.B., Novikova O.S., Levina L.V. Sostoianie uprugogo tela pri nagruzhении kombinatsiei ob'emnykh sil [The state of an elastic body when loaded by a combination of volume forces]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2017, no.4, pp. 25-56.
32. Penkov V.B. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations. *Journal of Physics, Conf. Series*, 2018, 012015. DOI :10.1088/1742-6596/973/1/012015.
33. Aleksandrov A.Ia., Solov'ev Iu.I. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo) [Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. *Moscow, Nauka. Glavnaia redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury*, 1978, 464 p.
34. Ivanychev D.A. Metod granichnykh sostoianii v prilozhenii k osesimetricnym zadacham dlia anizotropnykh tel [The method of boundary states in application to axisymmetric problems for anisotropic bodies]. *Lipetsk, LGTU Vesti vysshikh uchebnykh zavedenii Chernozem'ia. Nauchno-tekhnicheskii i proizvodstvennyi zhurnal.*, 2014, no. 1, pp. 19-26.
35. Ivanychev D.A. Issledovaniia ravnesovmestii transtropnogo uprugogo tsilindra metodom granichnykh sostoianii [Studies of the equilibrium of a transstrip elastic cylinder by the method of boundary conditions]. Tula, *Izd-vo TulGU Materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Sovremennyye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki»*, 2012, pp. 145-149.
36. Penkov V.B. Metod granichnykh sostoianii dlia resheniya zadach lineinoi mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115-137.
37. Lekhnitskii S.G. Teoriia uprugosti anizotropnogo tela [The theory of elasticity of an anisotropic body]. *Moscow, Nauka*, 1977, 416 p.
38. Novatskii V. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. *Moscow, Mir*, 1975, p. 872.
39. Satalkina L.V. Narashchivanie bazisa prostranstva sostoianii pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoemkosti vychislenii [Expansion of the basis of the state space with severe limitations on the energy consumption of computations]. *Lipetsk, LGTU, Sbornik tezisev dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2007, pp. 130-131.
40. Ivanychev D.A. Metod granichnykh sostoianii v zadachakh teorii anizotropnoi uprugosti [The method of boundary states in problems of the theory of anisotropic elasticity]. *Saarbrücken, Germany LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG Dudweiler Landstr.* p. 99, 66123.