

Дорошенко О.В., Кириллова Е.В., Фоменко С.И. Асимптотическое решение гиперсингулярного граничного интегрального уравнения, моделирующего рассеяние плоских волн на интерфейсной полосовой трещине // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 86-99. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.07

Doroshenko O.V., Kirillova E.V., Fomenko S.I. An asymptotic solution of the hypersingular boundary integral equation simulating wave scattering by the interface strip-like crack. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 86-99. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.07



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.07

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ГРАНИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, МОДЕЛИРУЮЩЕГО РАССЕЯНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН НА ИНТЕРФЕЙСНОЙ ПОЛОСОВОЙ ТРЕЩИНЕ

О.В. Дорошенко¹, Е.В. Кириллова², С.И. Фоменко¹

¹Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

²Университет прикладных наук, Висбаден, ФРГ

О СТАТЬЕ

Получена: 13 октября 2018 г.

Принята: 10 мая 2019 г.

Опубликована: 28 июня 2019 г.

Ключевые слова:

полосовая трещина, дифракция на трещине, метод граничных интегральных уравнений, гиперсингулярность, асимптотическое решение.

АННОТАЦИЯ

Одним из методов обнаружения и идентификации внутренних повреждений материалов и конструкций, широко применяемых на практике в различных областях машиностроения и геофизики, является неразрушающий ультразвуковой контроль. Для успешного использования данного метода необходима разработка математических моделей, описывающих рассеяние упругих волн на различных дефектах и неоднородностях. Современные композитные материалы делают актуальной задачу определения производственных или усталостных повреждений, расположенных на внутренних границах раздела разнородных сред. Для моделирования рассеяния упругих волн интерфейсными трещинами в настоящей работе используется аналитически ориентированный метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). В рамках этого метода неизвестная функция раскрытия берегов трещины раскладывается в ряд ортогональных функций, и интегральное уравнение проецируется на некоторый набор функций. Регуляризация гиперсингулярных ГИУ методом Бубнова-Галеркина производится путем повторного интегрирования по берегам трещины. В данной работе с помощью метода ГИУ строится асимптотическое решение задачи о дифракции плоских упругих волн на полосовой интерфейсной трещине, расположенной между двумя разнородными полупространствами. Для рассеянного поля строится интегральное представление в терминах Фурье-образов матрицы Грина. Скачок перемещений на полосовой трещине раскладывается в ряд по полиномам Чебышева второго порядка. Предположение о малости характерного размера дефекта по сравнению с длиной падающей волны позволяет построить асимптотические представления для ядра интегрального уравнения в нуле и бесконечно удаленных точках. С помощью метода Бубнова-Галеркина находится асимптотическое зависящее от частоты решение ГИУ, которое имеет более широкий частотный диапазон сходимости по сравнению с известным квазистатическим решением. Хорошая согласованность построенного асимптотического решения с численным решением демонстрируется для разных пар материалов. Построенная асимптотика позволяет повысить эффективность МГИУ за счет уменьшения вычислительных затрат на расчет интегралов, а также может быть применена в рамках модели Бострема-Викхема для описания динамического поврежденных интерфейсов в более широком частотном диапазоне.

© ПНИПУ

© Дорошенко Ольга Валерьевна – к.ф.-м.н., доц., e-mail: oldorosh@mail.ru, ID: [0000-0002-8037-2976](https://orcid.org/0000-0002-8037-2976)

Кириллова Евгения Вадимовна – к.ф.-м.н., проф., e-mail: evgenia.kirillova@hs-rm.de

Фоменко Сергей Иванович – к.ф.-м.н., доц., e-mail: sfom@yandex.ru, ID: [0000-0003-0087-4448](https://orcid.org/0000-0003-0087-4448)

Olga V. Doroshenko – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

e-mail: oldorosh@mail.ru, ID: [0000-0002-8037-2976](https://orcid.org/0000-0002-8037-2976)

Evgenia V. Kirillova – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: evgenia.kirillova@hs-rm.de,

Sergey I. Fomenko – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: sfom@yandex.ru,

ID: [0000-0003-0087-4448](https://orcid.org/0000-0003-0087-4448)



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

AN ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE HYPERSINGULAR BOUNDARY INTEGRAL EQUATION SIMULATING WAVE SCATTERING BY THE INTERFACE STRIP-LIKE CRACK

O.V. Doroshenko¹, E.V. Kirillova², S.I. Fomenko¹

¹Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation

²University of Applied Science, Wiesbaden, Germany

ARTICLE INFO

Received: 13 October 2018

Accepted: 10 May 2019

Published: 28 June 2019

Keywords:

strip-like crack, diffraction by crack, boundary integral equation method, hypersingularity, asymptotic solution.

ABSTRACT

The ultrasonic non-destructive testing is widely used in different civil and engineering applications as one of the most effective and convenient method of structural health monitoring. It is necessary to have a reliable mathematical model simulating scattering caused by defects and inhomogeneities in order to apply effective ultrasonic methods. Modern composite materials used in manufacturing have a laminated structure; therefore it is important to detect damages occurrence located between two materials. Scattering caused by interface cracks can be investigated using the boundary integral equation (BIE), the method which is analytically oriented. The unknown function of the crack opening displacement in the BIE is expanded in terms of orthogonal polynomials. Then the integral equation is projected onto a set of polynomials. Regularization of the hypersingular BIE using the Bubnov-Galerkin scheme is obtained through a repeated integration on the crack faces. This paper uses the BIE method to derive an asymptotic solution describing the elastic wave diffraction by the strip-like crack located at the interface between two dissimilar elastic half-spaces. The Fourier transformation of Green's matrix is applied to obtain a scattered field. Asymptotic representations of the equation kernel around zero and at infinity are derived with the assumption that the crack size is much less than a wavelength of an incident wave. The Bubnov-Galerkin scheme is used to obtain the frequency dependent asymptotic solution of BIE which has a wider accuracy frequency range than the existing quasi-static solution. A good agreement of the derived asymptotic solution with the numerical solution is shown for different materials of the considered structure. The asymptotic solution allows increasing the BIE method potency by reducing the computational cost of integrals. It can also be used to describe dynamic damaged interfaces in the Bostrom-Wickham model's term.

© PNRPU

Введение

Материалы, используемые в промышленности или строительстве, могут содержать дефекты в виде микротрещин или микропустот, которые возникли либо на стадии производства, либо в процессе их эксплуатации. Наличие таких дефектов оказывает влияние на прочность или даже на целостность изготовленных из этих материалов конструкций. Для обнаружения внутренних дефектов достаточно эффективно используются методы ультразвукового неразрушающего контроля [1–7], реализация которых основывается на математических моделях, описывающих дифракцию и рассеяние волн на дефектах в упругом волноводе [3–5, 8–11]. Существуют различные подходы к построению решения задачи рассеяния упругих волн на трещинах, среди которых одним из наиболее широко применимых является метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) [12–22]. Эффективность этого метода заключается в уменьшении размерности задачи, в возможности получения полуаналитического решения, а в некоторых случаях и асимптотического решения [11, 20–27], а также в его высокой точности.

Контакт между материалами с разными упругими свойствами увеличивает вероятность формирования микротрещин [28]. При прохождении через волновод

упругих волн свойства зондирующего сигнала различны для сплошной и трещиноватой среды [29–31], кроме того, упругие волны рассеиваются на границе раздела сред, представляющей собой, как правило, клеевые соединения [32, 33], что дополнительно усложняет идентификацию дефектов. При наличии зон концентрации микродефектов на границе раздела двух разнородных сред применяются граничные условия пружинного типа, которые моделируют поврежденный интерфейс [18–23, 32–37]. Другой подход рассматривает поврежденный интерфейс как стохастически распределенный набор микродефектов, при использовании которого необходимо на первом этапе построить решение на одиночной трещине [10, 20, 21, 23].

При моделировании упругих тел с трещинами предполагается известным падающее поле и необходимо определить рассеянное на трещине поле. В рамках линейной теории упругости на концах трещин имеется сингулярность напряжений [16, 38]. В работах [3, 15, 16, 38, 39] получены граничные интегральные уравнения, которые в силу наличия особенности деформаций на концах трещины являются гиперсингулярными. Для получения решения ГИУ необходимо провести регуляризацию, одним из вариантов которой является выделение главной части ядра и далее применение численной схемы интегрирования [17, 40]. В методе Галеркина

регуляризация гиперсингулярных ГИУ происходит автоматически в результате повторного интегрирования по берегам трещины [15, 18, 41]. При решении ГИУ методом Бубнова-Галеркина неизвестная функция раскрытия берегов трещины раскладывается в бесконечный ряд по ортогональным многочленам, выбор которых зависит от формы трещины. Например, полиномы Чебышева и Лежандра учитывают поведение решения в окрестности краев прямоугольной и круговой трещин соответственно. В том случае, если для ядра интегрального уравнения можно построить асимптотику, в результате чего интегральные уравнения решаются аналитически, то можно найти асимптотическое представление для скачка перемещений на трещине в частотном диапазоне, при котором характерный размер дефекта соизмерим с длиной падающей волны [20–23].

В настоящей работе рассматривается задача о рассеянии упругих волн полосовой трещиной, расположенной на границе раздела двух изотропных сред, обладающих разными упругими свойствами. В работе [8] решалась задача дифракции плоских волн на полосовой трещине в изотропном волноводе, а в работе [25] – в анизотропном волноводе, причем в обеих работах рассматривались волноводы, состоящие из одного материала. При нормальном угле падения задача распадается на антиплоскую [20] и плоскую [21], и при условии малых размеров трещины по сравнению с длиной падающих волн строится асимптотика функций раскрытия берегов одиночной полосовой трещины. Аналогичное квазистатическое, а также частотно-зависимое решение для круговой трещины, при построении которого также используется асимптотика ядра ГИУ, можно найти в работе [23]. В работах [21, 36] рассматриваются периодические массивы полосовых трещин, в работах [20, 21] – стохастически распределенные массивы полосовых трещин, с последующим определением коэффициентов пружинной жесткости, а в работе [42] – резонансные эффекты в слоистом периодическом композите с полосовой трещиной. В данной статье приводится зависящее от частоты асимптотическое решение для скачка перемещений на интерфейсной трещине, сходимость которого исследуется для случаев однородных и разнородных сред.

1. Постановка задачи

Рассматривается рассеяние упругих волн на плоской полосовой трещине полуширины l , расположенной между двумя изотропными разнородными полупространствами V_1 и V_2 в плоскости $z=0$. Ось Oz проходит через центр отслоения $\Omega = \{|x| \leq l, |y| < \infty, z = 0\}$. Свойства сред, между которыми расположена трещина, определяются плотностью ρ_j и константами Ляме λ_j, μ_j . Индекс $j = 1$ соответствует нижнему $V_1 (z < 0)$ и $j = 2$ верхнему $V_2 (z > 0)$ полупространствам.

Предполагается, что источник колебаний в безграничной среде достаточно удален от интерфейса и волновое поле, генерируемое этим источником, можно приближенно описать плоской волной, падающей под нормальным углом к интерфейсу. Рассматривается прохождение плоских продольной P и сдвиговых SV упругих волн из нижнего полупространства в верхнее с трещиной на границе раздела двух сред. Плоская волна частично проходит, а частично отражается интерфейсом и трещиной. Следовательно, волновое поле представляется суперпозицией поля в отсутствие трещины (в дальнейшем обозначается верхним индексом in) и поля, рассеянного полосовой трещиной Ω (верхний индекс sc). В рассматриваемом случае волновое поле без дефекта имеет вид

$$\mathbf{u}^{in} = \begin{cases} \mathbf{p}_m \left(e^{ik_1 m z} + R_m e^{-ik_1 m z} \right), & z < 0, \\ \mathbf{p}_m T_m e^{ik_2 m z}, & z > 0, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\tau}^{in} = \begin{cases} i c_{1m} k_{1m} \mathbf{p}_m \left(e^{ik_1 m z} - R_m e^{-ik_1 m z} \right), & z < 0, \\ i c_{2m} k_{2m} \mathbf{p}_m T_m e^{ik_2 m z}, & z > 0, \end{cases}$$

где R_m и T_m – коэффициенты отражения и прохождения; \mathbf{p}_m – единичный вектор, определяющий направление распространения волны, а индекс $m = \{P, S\}$ задает тип падающей волны: $\mathbf{p}_P = (1, 0)$ при падении P -волны и $\mathbf{p}_S = (0, 1)$ для случая падающей SV -волны. Здесь параметрами $c_{jP} = \lambda_j + 2\mu_j$ и $c_{jS} = \mu_j$ обозначаются модули упругости, и соответствующие волновые числа связаны соотношениями

$$k_{jP} = \frac{\omega}{v_{jP}} = \omega \sqrt{\frac{\rho_j}{\lambda_j + 2\mu_j}} \quad \text{и} \quad k_{jS} = \frac{\omega}{v_{jS}} = \omega \sqrt{\frac{\rho_j}{\mu_j}},$$

где ω – круговая частота; а v_{jP} и v_{jS} – скорости P - и SV -волн в полупространствах.

Отраженное и прошедшее волновое поле представляет собой суперпозицию продольных и поперечных волн и описывается двумерным вектором $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$. Заметим, что рассматриваются только гармонически установившиеся колебания и фактор $e^{-i\omega t}$, описывающий зависимость от времени, опускается из рассмотрения. На бесконечности перемещения и напряжения стремятся к нулю и выполняется условие излучения [13, 38]. В изотропном твердом теле уравнение движения при отсутствии объемных сил описывается уравнением Ляме

$$k_{jP}^{-2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - k_{jS}^{-2} \nabla (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Граничное условие на интерфейсе при условии, что компоненты вектора напряжений $\boldsymbol{\tau} = \{\sigma_{xz}, \sigma_{zz}\}$ и вектора перемещений связаны законом Гука

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = (\sigma_{xz}, \sigma_{zz})|_{z=0} = (q_1, q_2). \quad (2)$$

Граничное условие на трещине чаще всего состоит в том, что трещина открытая, т.е. свободна от напряжений:

$$\boldsymbol{\tau}_1(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}_2(\mathbf{x}) = 0, \quad z = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3)$$

Иногда используются другие граничные условия, например, более общими граничными условиями являются граничные условия пружинного типа [19–23, 35], при которых все компоненты непрерывны и связаны соотношением

$$\boldsymbol{\tau}_1(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}_2(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2(\mathbf{x})).$$

Здесь $\boldsymbol{\kappa}$ – квадратная диагональная матрица в изотропном случае, вид элементов которой определяется типом и характером повреждения. При $\boldsymbol{\kappa} \equiv 0$ условия вырождаются в граничные условия (3).

В работе используется условие (3) для описания рассеянного поля, которое характеризуется непрерывным напряжением и неизвестным скачком перемещений на трещине:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1^{\text{sc}} = \mathbf{u}_1^{\text{sc}}, & |x| > l, \\ \boldsymbol{\tau}_1^{\text{sc}} = \boldsymbol{\tau}_2^{\text{sc}}, & |x| > l, \\ \boldsymbol{\tau}_1^{\text{sc}} = \boldsymbol{\tau}_2^{\text{sc}} = -\boldsymbol{\tau}_1^{\text{in}}, & |x| < l. \end{cases} \quad (4)$$

2. Построение граничного интегрального уравнения

Задача о плоских гармонических колебаниях $\mathbf{u}(x, z, \omega)$ в плоскости xOz упругого тела, неограниченного вдоль оси Ox , в рамках интегрального подхода [13] решается с помощью преобразования Фурье

$$\mathbf{U}(\alpha, z, \omega) = F_x[\mathbf{u}(x, z, \omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(x, z, \omega) \cdot e^{i\alpha x} dx,$$

которое применяется к уравнению (1) и граничному условию (2). Тогда рассеянное поле может быть представлено в виде обратного преобразования Фурье $F_x^{-1}(\mathbf{U})$

$$\mathbf{u}^{\text{sc}}(x, z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_1(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, & z < 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_2(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, & z > 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $\mathbf{Q}(\alpha) = F_x(\boldsymbol{\tau}^{\text{sc}}(x, 0))$ является Фурье-преобразованием напряжения на границе раздела сред. Построение Фурье-образа трехмерной матрицы Грина можно найти в [4], в двумерной постановке матрица имеет вид

$$\mathbf{K}_j(\alpha, z) = \begin{pmatrix} M_j(\alpha, z) & i P_j(\alpha, z) \\ i S_j(\alpha, z) & R_j(\alpha, z) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$M_j(\alpha, 0) = (-1)^j \frac{\gamma_{jS} k_{jS}^2}{\Delta_j}, \quad R_j(\alpha, 0) = (-1)^j \frac{\gamma_{jP} k_{jS}^2}{\Delta_j},$$

$$P_j(\alpha, 0) = \frac{\alpha}{\Delta_j} (2\gamma_{jP} \gamma_{jS} - 2\alpha^2 + k_{jS}^2),$$

$$S_j(\alpha, 0) = -P_j(\alpha, 0), \quad \gamma_{jm} = \sqrt{\alpha^2 - k_{jm}^2},$$

$$\Delta_j = \mu_j \left[(2\alpha^2 - k_{jS}^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_{jP} \gamma_{jS} \right].$$

Используя непрерывность перемещений между двумя полупространствами, можно выразить Фурье-преобразование напряжения на интерфейсе $\mathbf{Q}(\alpha)$ через Фурье-преобразование $\Delta \mathbf{U}(\alpha)$ неизвестного скачка смещений $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2(\mathbf{x})$ на трещине:

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha) \Delta \mathbf{U}(\alpha),$$

$$\mathbf{L}(\alpha) = [\mathbf{K}_1(\alpha, 0) - \mathbf{K}_2(\alpha, 0)]^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{M}(\alpha) & i\tilde{P}(\alpha) \\ i\tilde{S}(\alpha) & \tilde{R}(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\tilde{M}(\alpha) = \frac{R}{MR + PS}$, $\tilde{R}(\alpha) = \frac{M}{MR + PS}$, $\tilde{P}(\alpha) = -\tilde{S}(\alpha) = -\frac{P}{MR + PS}$, при пересчете $M = M_1(\alpha, 0) - M_2(\alpha, 0)$, $P = P_1(\alpha, 0) - P_2(\alpha, 0)$ и т.д. для всех остальных элементов матрицы.

Подстановка интегрального представления (5) для $\boldsymbol{\tau}^{\text{sc}}$ в (4) с учетом формулы (7) дает следующее граничное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{L}(\alpha) \Delta \mathbf{U}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = -\boldsymbol{\tau}_1^{\text{in}}. \quad (8)$$

Контур интегрирования Γ почти всюду совпадает с вещественной осью, кроме полюсов функций ядра (7), где он отклоняется в комплексную плоскость в соответствии с принципом предельного поглощения [13]. Решение гиперсингулярного интегрального уравнения (8) ищется методом Бубнова-Галеркина, для чего компоненты вектора скачка перемещений $\Delta \mathbf{u} = (\Delta u^{(1)}, \Delta u^{(2)})$ раскладываются в ряд по базисным функциям с неизвестными коэффициентами разложения:

$$\Delta \mathbf{u}_m(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{c}_{mt} p_t(x). \quad (9)$$

В качестве базисных функций выбираются полиномы Чебышева второго рода с весом, учитывающие геометрию трещины

$$p_t(x) = U_t\left(\frac{x}{l}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2},$$

$$U_t(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{t+1} - \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{t+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Интегральные уравнения (8) проектируются на ту же систему ортогональных полиномов, а в результате дискретизации получается система

$$\sum_{t=0}^N \mathbf{A}_{tt'} \cdot \mathbf{c}_t = \mathbf{g}_{t'}, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{A}_{tt'} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{L}(\alpha) P_t(\alpha l) P_{t'}^*(\alpha^* l) d\alpha, \quad \mathbf{g}_{t'm} = - \int_{-l}^l \tau_{lm}^{\text{in}} p_{t'}(x) dx.$$

$$P_t(\alpha l) = i^t \pi(k+1) \frac{J_{t+1}(\alpha l)}{\alpha}.$$

3. Асимптотика ядра интегрального уравнения

Интегралы уравнения (7) имеют плохую сходимость на бесконечности [3], поскольку элементы $\mathbf{L}(\alpha)$ растут как $O(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Поэтому растущие как α и убывающие как α^{-1} на бесконечности элементы ядра выделяются в явном виде. Однако выделенные убывающие на бесконечности асимптотические слагаемые дают интегралы в системе (10), плохо сходящиеся в нуле. Поэтому для вычисления коэффициентов системы (10) область интегрирования разбивается на три области: $(-\infty, a]$, $[-a, a]$ и $[a, \infty)$. Соответственно, для ядра интегрального уравнения (7) строится асимптотика в окрестности нуля при $\alpha \rightarrow 0$ и в бесконечно удаленных точках при $\alpha \rightarrow \infty$.

3.1. Построение асимптотики ядра интегрального уравнения в бесконечно удаленных точках

При $\alpha \rightarrow \infty$ для ядра интегрального уравнения $\mathbf{L}(\alpha)$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\mathbf{L}(\alpha) = \mathbf{L}_{as} + \hat{\mathbf{L}}(\alpha), \quad \hat{\mathbf{L}}(\alpha) = O(\alpha^{-5}). \quad (11)$$

Для нахождения асимптотической матрицы \mathbf{L}_{as} функции, входящие в элементы матрицы (6), выражаются через арифметические квадратные корни γ_{jm} , которые раскладываются в ряд по α на бесконечности:

$$\gamma_{jm} = \alpha - \frac{k_{jm}^2}{2\alpha} - \frac{k_{jm}^4}{8\alpha^3} + O(\alpha^{-4}).$$

Используя эти аппроксимации, выводим асимптотические представления элементов Фурье-образа матрицы Грина (6)

$$M(\alpha) \approx \frac{m_1}{\alpha} + \frac{s_1}{\alpha^3} \omega^2, \quad R(\alpha) \approx \frac{m_1}{\alpha} + \frac{s_2}{\alpha^3} \omega^2,$$

$$P(\alpha) = -S(\alpha) \approx \frac{m_3}{\alpha} + \frac{s_3}{\alpha^3} \omega^2,$$

где

$$m_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)} \right),$$

$$m_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2} \right),$$

$$s_1 = \frac{1}{8} \left(\frac{(\lambda_1^2 + 4\lambda_1\mu_1 + 5\mu_1^2)\rho_1}{(\lambda_1 + \mu_1)^2 \mu_1^2} + \frac{(\lambda_2^2 + 4\lambda_2\mu_2 + 5\mu_2^2)\rho_2}{(\lambda_2 + \mu_2)^2 \mu_2^2} \right),$$

$$s_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{(3\lambda_1^2 + 8\lambda_1\mu_1 + 7\mu_1^2)\rho_1}{(\lambda_1 + \mu_1)^2 \mu_1^2} + \frac{(3\lambda_2^2 + 8\lambda_2\mu_2 + 7\mu_2^2)\rho_2}{(\lambda_2 + \mu_2)^2 \mu_2^2} \right),$$

$$s_3 = \frac{1}{8} \left(\frac{(\lambda_1^2 + 4\lambda_1\mu_1 + 5\mu_1^2)\rho_1}{(\lambda_1 + \mu_1)^2 \mu_1^2} - \frac{(\lambda_2^2 + 4\lambda_2\mu_2 + 5\mu_2^2)\rho_2}{(\lambda_2 + \mu_2)^2 \mu_2^2} \right).$$

Таким образом, для ядра (11) граничного интегрального уравнения (8) получается следующее асимптотическое представление в бесконечно удаленных точках (при $\alpha \rightarrow \infty$):

$$\mathbf{L}_{as} = \alpha \mathbf{L}_{as}^{(1)} + \frac{\omega^2}{\alpha} \mathbf{L}_{as}^{(2)} = \alpha \begin{pmatrix} \text{sgn}(\alpha) B_1 & i B_2 \\ -i B_2 & \text{sgn}(\alpha) B_1 \end{pmatrix} + \frac{\omega^2}{\alpha} \begin{pmatrix} \text{sgn}(\alpha) C_1 & i C_2 \\ -i C_2 & \text{sgn}(\alpha) C_3 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$B_1 = \frac{m_1}{m_1^2 - m_3^2}, \quad B_2 = \frac{m_3}{m_3^2 - m_1^2},$$

$$C_1 = \frac{2m_1 m_3 s_3 - m_1^2 s_1 - m_3^2 s_2}{(m_3^2 - m_1^2)^2},$$

$$C_2 = \frac{m_1 m_3 (s_1 + s_2) - s_3 (m_1^2 + m_3^2)}{(m_3^2 - m_1^2)^2},$$

$$C_3 = \frac{2m_1 m_3 s_3 - m_1^2 s_2 - m_3^2 s_1}{(m_3^2 - m_1^2)^2}.$$

На рис. 1 изображен модуль отношений элементов асимптотического представления ядра, найденных по формуле (12), к элементам ядра (7) для разных пар ма-

териалов, значения параметров которых приведены в таблице. В качестве материала первого полупространства ($j=1$) выбран алюминий. Материалами второго полупространства ($j=2$) являются алюминий, сталь, свинец и оксид алюминия.

При нормировании параметра преобразования Фурье α на частоту ω отношения элементов ядра интегрального уравнения (8) к элементам асимптотического ядра не зависят от частоты. Для пары *алюминий*

– *алюминий* демонстрируется наилучшая сходимость асимптотического представления ядра к исходному ядру интегрального уравнения. Можно заметить, что для любой пары материалов, начиная с некоторого нормированного значения параметра интегрирования α , все отношения стремятся к 1, что означает сходимость элементов асимптотического представления ядра (12) в бесконечно удаленных точках. Наиболее медленная сходимость наблюдается у пары *алюминий – свинец*.

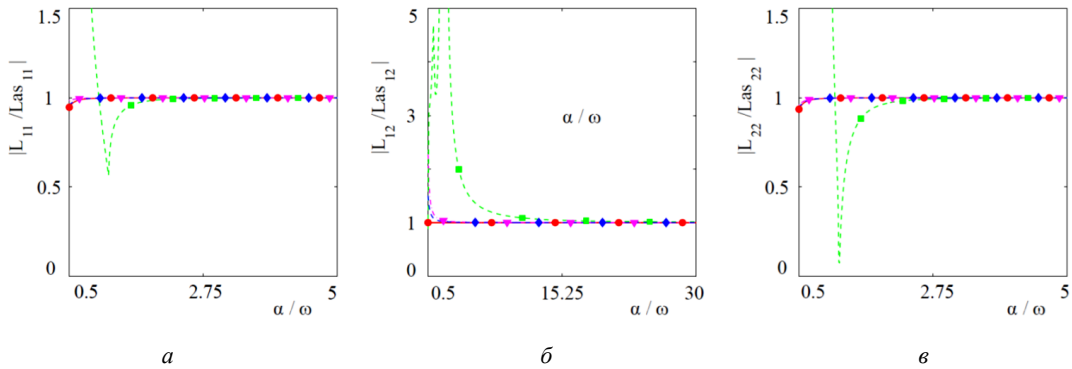


Рис. 1. Модули отношений элементов матриц ядра $L(\alpha)$ и асимптотического представления ядра L_{as} в бесконечно удаленных точках: —●— алюминий; —◆— сталь; —■— свинец; —▼— оксид алюминия

Fig. 1. The modules of the ratios between elements of the kernel $L(\alpha)$ and the asymptotic kernel L_{as} by points at infinity: —●— aluminum; —◆— steel; —■— lead; —▼— alumina

3.2. Построение асимптотики ядра интегрального уравнения в окрестности нуля

При $\alpha \rightarrow 0$ матрица ядра имеет следующее асимптотическое представление:

$$L(\alpha) = L_{as} + \hat{L}0(\alpha, \omega), \quad \|\hat{L}0(\alpha, \omega)\|_{\infty} = O(\alpha^5). \quad (13)$$

В этом случае арифметические корни γ_{mj} , входящие во все элементы матрицы (6), раскладываются в ряд по α в окрестности точки $\alpha = 0$:

$$\gamma_{jm} = -ik_{jm} + i \frac{\alpha^2}{2k_{mj}} + O(\alpha^3).$$

Соответственно, элементы Фурье-образа матрицы Грина (6) имеют следующие представления при $\alpha \rightarrow 0$:

$$M(\alpha) \approx \frac{m_{01}}{\omega} + \frac{s_{01}\alpha^2}{\omega^3}, \quad R(\alpha) \approx \frac{m_{02}}{\omega} + \frac{s_{02}\alpha^2}{\omega^3},$$

$$P(\alpha) = -S(\alpha) \approx \frac{m_{03}\alpha}{\omega^2} + \frac{s_{03}\alpha^3}{\omega^4},$$

где

$$m_{01} = \frac{i}{\rho_1 v_{1S}} + \frac{i}{\rho_2 v_{2S}}, \quad m_{02} = \frac{i}{\rho_1 v_{1P}} + \frac{i}{\rho_2 v_{2P}},$$

$$m_{03} = \frac{2v_{1S} - v_{1P}}{\rho_1 v_{1P}} - \frac{2v_{2S} - v_{2P}}{\rho_2 v_{2P}},$$

$$s_{01} = i \left(\frac{v_{1S}}{\rho_1} \cdot \frac{7v_{1P} - 8v_{1S}}{2v_{1P}} + \frac{v_{2S}}{\rho_2} \cdot \frac{7v_{2P} - 8v_{2S}}{2v_{2P}} \right),$$

$$s_{02} = i \left(\frac{8v_{1S}^2 - v_{1P}^2}{2v_{1P}} - \frac{4v_{1S}^3}{v_{1P}^2 \rho_1} + \frac{8v_{2S}^2 - v_{2P}^2}{2v_{2P}} - \frac{4v_{2S}^3}{v_{2P}^2 \rho_2} \right),$$

$$s_{03} = - \left(\frac{v_{1S}^2}{v_{1P}^2} \cdot \frac{2v_{1P}^2 + 8v_{1S}^2}{\rho_1} + \frac{v_{1S}}{v_{1P}} \cdot \frac{v_{1P}^2 - 11v_{1S}^2}{\rho_1} - \frac{v_{2S}^2}{v_{2P}^2} \cdot \frac{2v_{2P}^2 + 8v_{2S}^2}{\rho_2} - \frac{v_{2S}}{v_{2P}} \cdot \frac{v_{2P}^2 - 11v_{2S}^2}{\rho_2} \right).$$

В результате получается асимптотическое представление ядра (13) граничного интегрального уравнения (8) в окрестности нуля по α :

$$\begin{aligned} L_{as} &= \omega L_{as}^{(1)} + \alpha L_{as}^{(2)} + \frac{\alpha^2}{\omega} L_{as}^{(3)} + \frac{\alpha^3}{\omega^2} L_{as}^{(4)} = \\ &= \omega \begin{pmatrix} B_{01} & 0 \\ 0 & B_{03} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & iB_{02} \\ -iB_{02} & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{\alpha^2}{\omega} \begin{pmatrix} C_{01} & 0 \\ 0 & C_{03} \end{pmatrix} + \frac{\alpha^3}{\omega^2} \begin{pmatrix} 0 & iC_{02} \\ -iC_{02} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$B_{01} = \frac{1}{m_{01}}, \quad B_{02} = -\frac{m_{03}\alpha}{m_{01}m_{02}}, \quad B_{03} = \frac{1}{m_{02}},$$

$$C_{01} = \frac{m_{03}^2 - m_{02}s_{01}}{m_{01}^2m_{02}},$$

$$C_{02} = -\frac{m_{03}(m_{03}^2 - m_{02}s_{01} - m_{01}s_{02}) + m_{01}m_{02}s_{03}}{m_{01}^2m_{02}^2},$$

$$C_{03} = \frac{m_{03}^2 - m_{01}s_{02}}{m_{01}m_{02}^2}.$$

Для иллюстрации хорошего приближения к значениям ядра интегрального уравнения (7), полученным асимптотическим представлением (14), найдены модули отношений соответствующих элементов матриц (рис. 2). В окрестности нуля можно видеть равенство этих отношений 1 для всех пар материалов из таблицы. На горизонтальной оси α/ω звездочкой отмечены нормированное на частоту значение волнового числа P -волны для оксида алюминия, которое является наименьшим из волновых чисел k_{jm} . В этих точках происходит резкое ухудшение сходимости асимптотики для пары алюминий – оксид алюминия.

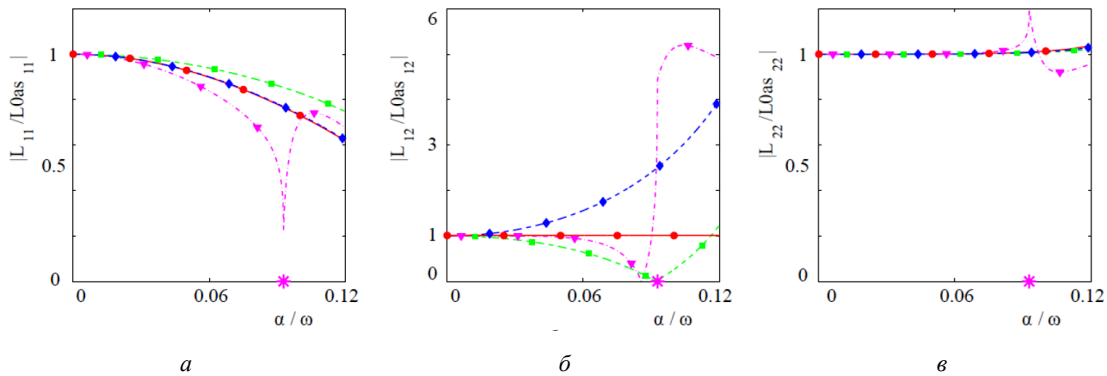


Рис. 2. Модули отношений элементов матриц ядра $\mathbf{L}(\alpha)$ и асимптотического представления ядра $\mathbf{L}\mathbf{0}_{as}$ в окрестности нуля: —●— алюминий; —◆— сталь; —■— свинец; —▼— оксид алюминия

Fig. 2. The modules ratio between elements of the kernel $\mathbf{L}(\alpha)$ and the asymptotic kernel $\mathbf{L}\mathbf{0}_{as}$ around zero point: —●— aluminum; —◆— steel; —■— lead; —▼— alumina

Упругие постоянные материалов
Material elastic constants

Материал	Постоянная Ляме, $\lambda \cdot 10^9$ ГПа	Постоянная Ляме, $\mu \cdot 10^9$ ГПа	Плотность ρ , 10^3 кг/м ³
Алюминий	51	26,3	2,70
Оксид алюминия	139,5	162,5	4,00
Свинец	36,32	8,4	1,61
Сталь	110,7	80,99	2,20

4. Построение асимптотического решения гиперсингулярного уравнения

Матрица системы (10) раскладывается на сумму матриц, каждая из которых соответствует области интегрирования согласно введенному разбиению:

$$\mathbf{A}_{tt'} = \mathbf{A}_{tt'}^{\text{inf}} + \mathbf{A}_{tt'}^0, \quad (15)$$

где элементы матрицы $\mathbf{A}_{tt'}^{\text{inf}}$ выражаются через интегралы с областями интегрирования $(-\infty; -a]$ и $[a; \infty)$, а элементы матрицы $\mathbf{A}_{tt'}^0$ – через интегралы по интервалу $[-a; a]$. При вычислении $\mathbf{A}_{tt'}^{\text{inf}}$ используется асимптотика ядра на бесконечности (12), а для вычисления \mathbf{A}_{kt}^0 асимптотика ядра в окрестности нуля (14). Рассматривается построение решения граничного интегрального уравнения (8) при условии $t = t' = 0$, т.е. с использованием одной функции разложения $p_0(x)$. Фурье-преобразование полинома Чебышева нулевого порядка выражаются через функцию Бесселя первого порядка $J_1(x)$ следующим образом:

$$P_0(\alpha l) = \int_{-l}^l p_0(x) e^{i\alpha x} dx = \frac{\pi J_1(\alpha l)}{\alpha}.$$

Матрицы системы (15) имеют следующие интегральные представления:

$$\mathbf{A}_{00}^{\text{inf}} = \frac{\pi}{2} \left[\mathbf{L}_{as}^{(1)} \left(\int_{-\infty}^{-a} \frac{J_1^2(\alpha l)}{\alpha} d\alpha + \int_a^{\infty} \frac{J_1^2(\alpha l)}{\alpha} d\alpha \right) + \omega^2 \mathbf{L}_{as}^{(2)} \left(\int_{-\infty}^{-a} \frac{J_1^2(\alpha l)}{\alpha^3} d\alpha + \int_a^{\infty} \frac{J_1^2(\alpha l)}{\alpha^3} d\alpha \right) \right],$$

$$\mathbf{A}_{00}^0 = \frac{\pi}{2} \left[\omega \mathbf{L}_{0as}^{(1)} \int_{-a}^a \frac{J_1^2(\alpha l)}{\alpha^2} d\alpha + \mathbf{L}_{0as}^{(2)} \int_{-a}^a \frac{J_1^2(\alpha l)}{\alpha} d\alpha + \right]$$

$$+ \frac{\mathbf{L}0_{as}^{(3)}}{\omega} \int_{-a}^a J_1^2(\alpha l) d\alpha + \frac{\mathbf{L}0_{as}^{(4)}}{\omega^2} \int_{-a}^a \alpha J_1^2(\alpha l) d\alpha \Big]. \quad (16)$$

С учетом того, что матрица ядра \mathbf{L}_{as} четная по α в элементах главной диагонали и нечетная по α в элементах побочной диагонали, матрица \mathbf{A}_{00}^{inf} после аналитического вычисления интегралов в формуле (16) получается диагональной:

$$\mathbf{A}_{00}^{inf} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \frac{\pi B_1}{2} HG_1(-a^2 l^2) + \frac{\pi l^2 C_1}{32} \left(2 - 8\gamma + a^2 l^2 HG_2(-a^2 l^2) - 8 \ln \frac{al}{2} \right) \omega^2,$$

$$A_{22} = \frac{\pi B_1}{2} HG_1(-a^2 l^2) + \frac{\pi l^2 C_3}{32} \left(2 - 8\gamma + a^2 l^2 HG_2(-a^2 l^2) - 8 \ln \frac{al}{2} \right) \omega^2,$$

где $\gamma = 0,577216$ – постоянная Эйлера, а $HG(z) = {}_pF_q(\{a_1, \dots, a_p\}, \{b_1, \dots, b_q\}, z)$ – гипергеометрические функции,

$$HG_1(z) = {}_1F_2(\{0.5\}, \{1, 2\}, z),$$

$$HG_2(z) = {}_3F_4(\{1, 1, 2.5\}, \{2, 2, 3, 4\}, z).$$

При вычислении матрицы \mathbf{A}_{00}^0 второе и четвертое слагаемые в формуле (16) обращаются в ноль и элементы матрицы также выражаются через гипергеометрические функции:

$$\mathbf{A}_{00}^0 = \begin{pmatrix} A_{11}^0 & 0 \\ 0 & A_{22}^0 \end{pmatrix},$$

$$A_{11}^0 = \frac{\pi a l^2 B_{01}}{4} HG_3(-a^2 l^2) \omega + \frac{\pi a^3 l^2 C_{01}}{12 \omega} HG_4(-a^2 l^2),$$

$$A_{22}^0 = \frac{\pi a l^2 B_{03}}{4} HG_3(-a^2 l^2) \omega + \frac{\pi a^3 l^2 C_{03}}{12 \omega} HG_4(-a^2 l^2),$$

где $HG_3(z) = {}_1F_2(\{0.5\}, \{2, 3\}, z)$, $HG_4(z) = {}_2F_3(\{1.5, 1.5\}, \{2, 2.5, 3\}, z)$.

Правая часть системы (10) зависит от типа падающей волны. В случае падения P-волны

$$\mathbf{g}_{0P} = - \frac{i(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)k_{1P}k_{2P}}{(\lambda_1 + 2\mu_1)k_{1P} + (\lambda_2 + 2\mu_2)k_{2P}} l \pi \mathbf{p}_P,$$

и в случае падения SV-волны

$$\mathbf{g}_{0S} = - \frac{i\mu_1\mu_2k_{1S}k_{2S}}{\mu_1k_{1S} + \mu_2k_{2S}} l \pi \mathbf{p}_S.$$

Для $\omega \rightarrow 0$ можно получить квазистатическое решение рассматриваемых ГИУ, которое совпадает с решением, найденным в [21]:

$$\mathbf{A}_{00}^{inf} \rightarrow \mathbf{A}_{00}^{KCT} = \text{diag} \left\{ \frac{m_1 \pi}{2(m_1^2 - m_3^2)}, \frac{m_1 \pi}{2(m_1^2 - m_3^2)} \right\}.$$

Матрица \mathbf{A}_{00}^0 в квазистатическом случае при условии $a \ll k_{jm}$ бесконечно мала и не вносит существенного вклада в решение.

Подставив квазистатическое решение $\tilde{\mathbf{c}}_{0m}^0$ системы (10) в разложение (9) при условии $t = 0$, можно определить скачки перемещений, причем решения являются чисто мнимыми и для падающей P-волны:

$$\Delta \mathbf{u}_P^{KCT} = \{0, \tilde{c}_{0P}^0 p_0(x)\} = \left\{ 0, \frac{2ik_{1P}k_{2P}(m_3^2 - m_1^2)(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{m_1(k_{1P}(\lambda_1 + 2\mu_1) + k_{2P}(\lambda_2 + 2\mu_2))} \sqrt{l^2 - x^2} \right\},$$

и для падающей SV-волны:

$$\Delta \mathbf{u}_S^{KCT} = \{\tilde{c}_{0S}^0 p_0(x), 0\} = \left\{ \frac{2ik_{1S}k_{2S}(m_3^2 - m_1^2)\mu_1\mu_2}{m_1(k_{1S}\mu_1 + k_{2S}\mu_2)} \sqrt{l^2 - x^2}, 0 \right\}.$$

При определении зависимых от частоты решений $\Delta \mathbf{u}_m^{q3}$ используется полное представление матрицы системы (15), учитывающее и асимптотику в окрестности нуля, и асимптотику в бесконечно удаленных точках; в результате решения $\tilde{\mathbf{c}}_{0m}$ получаются комплекснозначными. В случае падающей P-волны скачок перемещений имеет вид

$$\Delta \mathbf{u}_P^{q3} = \{0, \tilde{c}_{0P}^q p_0(x)\} = \left\{ 0, - \frac{i\pi k_{1P}k_{2P}(m_3^2 - m_1^2)(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(k_{1P}(\lambda_1 + 2\mu_1) + k_{2P}(\lambda_2 + 2\mu_2))(A_{11} + A_{11}^0)} \times \sqrt{l^2 - x^2} \right\}, \quad (17)$$

а в случае падающей SV-волны

$$\Delta \mathbf{u}_S^{q3} = \{\tilde{c}_{0S}^q p_0(x), 0\} = \left\{ - \frac{i\pi k_{1S}k_{2S}\mu_1\mu_2}{(k_{1S}\mu_1 + k_{2S}\mu_2)(A_{22} + A_{22}^0)} \sqrt{l^2 - x^2}, 0 \right\}. \quad (18)$$

На рис. 3 приведены отношения действительных и мнимых частей квазистатического решения, найденного в работе [21] и зависящего от частоты решения для пар материалов *алюминий – алюминий* и *алюминий – оксид алюминия*. Здесь и далее на рисунках за единицу

круговой частоты принимается значение 2π МГц. На низких частотах ($\omega < 5$) наблюдается очень хорошее совпадение решений, тогда как с ростом частоты погрешность квазистатического решения становится существенной.

5. Сравнение численного и асимптотического решений

Частотно-зависимые решения (17) и (18) зависят от выбранного значения точки a , которая разделяет области интегрирования при вычислении элементов системы уравнений (10). Каждой области интегрирования соответствуют различные асимптотические представления интегрируемых функций. Поэтому выбор значения a может существенно повлиять на вычисление элементов матрицы системы.

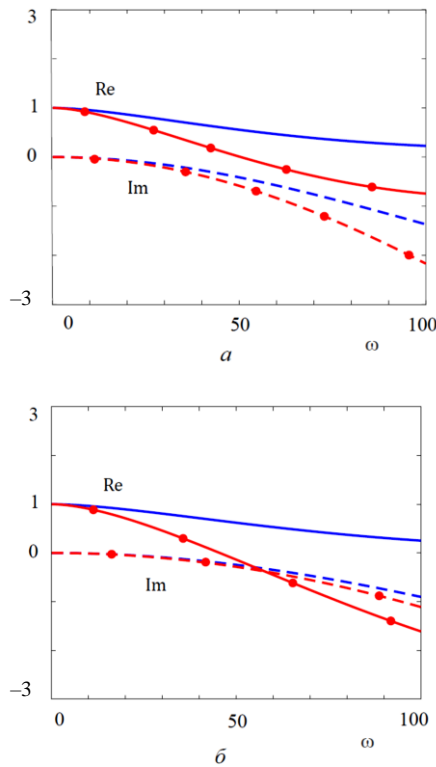


Рис. 3. Отношение действительных и мнимых частей квазистатического решения \tilde{c}_{0m}^0 и частотно-зависимого решения \tilde{c}_{0m} для пар материалов: a – алюминий – алюминий; b – алюминий – оксид алюминия: — — — $\text{Re}(\tilde{c}_p^0/\tilde{c}_p)$; —●— $\text{Re}(\tilde{c}_s^0/\tilde{c}_s)$; - - - $\text{Im}(\tilde{c}_p^0/\tilde{c}_p)$; -●- $\text{Im}(\tilde{c}_s^0/\tilde{c}_s)$

Fig. 3. The real and imaginary parts of the ratio between the quasistatic solution \tilde{c}_{0m}^0 and the frequency-dependent solution \tilde{c}_{0m} for pair of materials: a – aluminum – aluminum; b – aluminum – alumina: — — — $\text{Re}(\tilde{c}_p^0/\tilde{c}_p)$; —●— $\text{Re}(\tilde{c}_s^0/\tilde{c}_s)$; - - - $\text{Im}(\tilde{c}_p^0/\tilde{c}_p)$; -●- $\text{Im}(\tilde{c}_s^0/\tilde{c}_s)$

При определении значения a естественным оказывается стремление уменьшить расхождение между численным и асимптотическим решениями. Следует заметить, что численное решение включает в себя более одного члена разложения (9) и, соответственно, векторы численного и асимптотического решений системы (10) имеют разные размерности. Поэтому в качестве сравнения решений используется средний скачок перемещений, вычисляемый по формуле

$$\overline{\Delta u_m} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \Delta u_m(x) dx. \quad (19)$$

Поскольку $\int_{-l}^l p_t(x) dx = 0$ при $t \geq 1$, вклад в средний скачок перемещений дает только коэффициент c_0 при $p_0(x)$. Соответственно, сравниваются асимптотическое решение \tilde{c}_0 и численное решение c_0 системы (10).

На рис. 4 построены для разных пар материалов поверхности абсолютной погрешности асимптотического решения, вычисляемой как модуль разности \tilde{c}_0 и c_0 . Анализ полученных результатов позволяет заключить, что для получения хорошо согласованного асимптотического решения необходимо правильно подобрать параметр a , оптимальное значение которого зависит от частоты. Параметр a может быть представлен в виде $a = \eta \cdot k$, где k – наименьшее из волновых чисел рассматриваемой пары материалов. Значение η отложено по вертикальной оси. Выбор точки деления зависит от частоты, типа падающей волны и сочетания свойств материалов. Соответственно, для каждой пары материалов выбирается свой параметр η . Только в случае P -волны для однородных материалов (алюминий – алюминий) и разнородных материалов (алюминий – оксид алюминия, алюминий – сталь) оптимальное значение точки $a = \eta_p k$ подбирается однозначно, поскольку наблюдаются практически вертикальные зоны минимумов. В случае S -волны выбор точки $a = \eta_s k$ меняется с изменением частоты как для однородных, так и для разнородных материалов.

На рис. 5 показаны зависящее от частоты асимптотическое решение (сплошная линия), квазистатическое асимптотическое (точечная линия), а также численное решение (пунктирная линия) для пар материалов алюминий – алюминий и алюминий – оксид алюминия, причем лучшая согласованность наблюдается для S -волны, если выбрать параметр асимптотической модели $\eta_s = 1,5$. В пределах 30 МГц расхождение численного c_0 и асимптотического \tilde{c}_0 решений для P -волны и S -волны менее 10 %.

Аналогичные графики только для пары алюминий – оксид алюминий, полученные для параметров

$\eta_p = 2$, $\eta_s = 1,7$, изображены на рис. 6. Можно видеть, что погрешность, полученных асимптотических формул в частотном диапазоне до 30 МГц не превышает 5%. На графики также нанесены линии, соответствующие квазистатическому решению \tilde{c}_{0m}^0 , иллюстрирующие хорошее качество аппроксимации на низких частотах. Графики отношения модулей решений асимптотических к численному наглядно демонстри-

руют расширение диапазона применимости частотно-зависимой асимптотики по сравнению с квазистатическим приближением.

Построенные частотно-зависимые решения для скачков перемещений в дальнейшем могут быть использованы для получения частотно-зависимых коэффициентов пружинной жесткости (4) аналогично тому, как были найдены квазистатические коэффициенты пружинной жесткости в работах [21, 23].

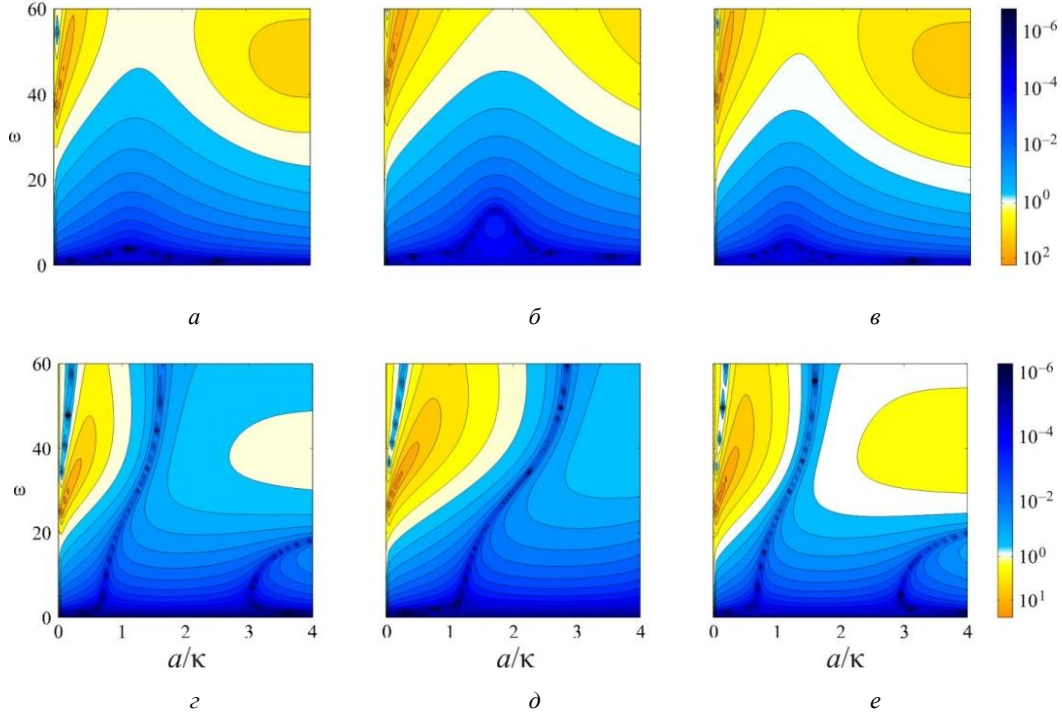


Рис. 4. Абсолютная погрешность асимптотических формул в зависимости от частоты колебаний и параметра a для падающей P -волны ($a, б, в$) и S -волны ($г, д, е$), а также разных пар материалов: алюминий–алюминий ($a, г$); алюминий–оксид алюминий ($б, д$) и алюминий–сталь ($в, е$)

Fig. 4. The absolute accuracy of asymptotic formula depending on the frequency range ω and the parameter a for the incident P -wave (a, b, c) and S -wave (d, e, f) for the various pairs of materials: aluminum–aluminum (a, d), aluminum–alumina (b, e) and aluminum–steel (c, f)

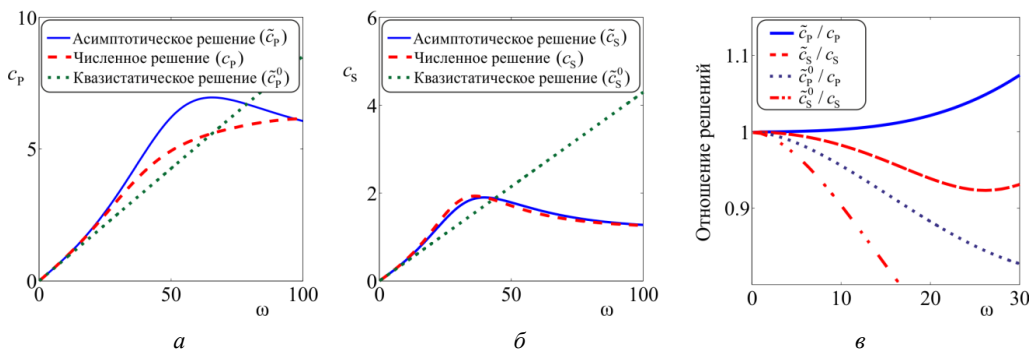


Рис. 5. Сравнение модулей решений численного и асимптотических: квазистатического и частотно-зависимого для пары алюминий–алюминий при $\eta_p = \eta_s = 1,5$: a – для P -волны; $б$ – для S -волны: — асимптотическое решение; - - - численное решение; ... – квазистатическое решение, и $в$ – отношение модулей решений: — $|\tilde{c}_p|/|c_p|$; - - - $|\tilde{c}_s|/|c_s|$; ... – $|\tilde{c}_p^0|/|c_p|$; - - - $|\tilde{c}_s^0|/|c_s|$

Fig. 5. Comparison of modules of the numerical solution, the quasistatic asymptotic solution and frequency dependent asymptotic solution for pair aluminum-aluminum and $\eta_p = \eta_s = 1,5$: a – for P -wave; b – for S -wave: — asymptotic solution; - - - numerical solution; ... – quasistatic solution, and c – relations of modules solutions: — $|\tilde{c}_p|/|c_p|$; - - - $|\tilde{c}_s|/|c_s|$; ... – $|\tilde{c}_p^0|/|c_p|$; - - - $|\tilde{c}_s^0|/|c_s|$

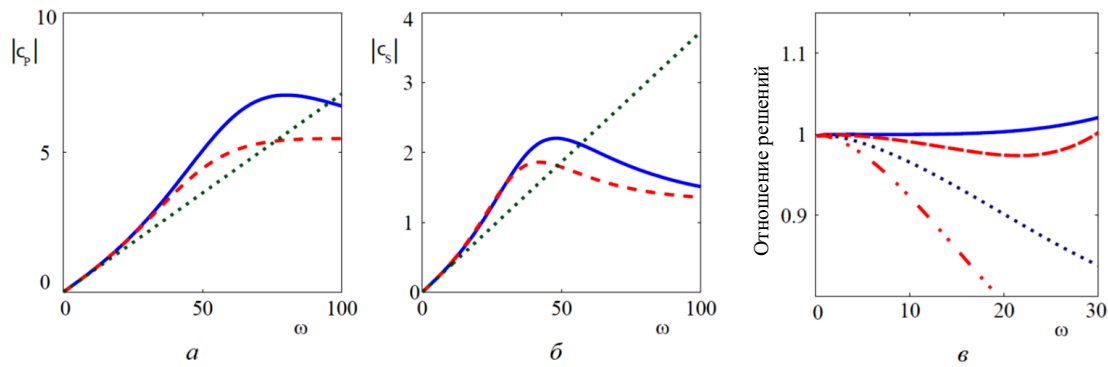


Рис. 6. Сравнение модулей решений численного и асимптотических: квазистатического и частотно-зависимого для пары алюминий-оксид алюминия при $\eta_P=2, \eta_S=1,7$: *a* – для *P*-волны; *b* – для *S*-волны: — асимптотическое решение; - - - численное решение; ... – квазистатическое решение; *c* – отношение модулей решений: — $|\tilde{c}_P|/|c_P|$; - - - $|\tilde{c}_S|/|c_S|$; ... – $|\tilde{c}_P^0|/|c_P|$; - - - $|\tilde{c}_S^0|/|c_S|$

Fig. 6. Comparison of modules of the numerical solution, the quasistatic asymptotic solution and frequency dependent asymptotic solution for pair aluminum-alumina and $\eta_P=2, \eta_S=1,7$: *a* – for *P*-wave; *b* – for *S*-wave: — asymptotic solution; - - - numerical solution; ... – quasistatic solution; *c* – relations of modules solutions: — $|\tilde{c}_P|/|c_P|$; - - - $|\tilde{c}_S|/|c_S|$; ... – $|\tilde{c}_P^0|/|c_P|$; - - - $|\tilde{c}_S^0|/|c_S|$

Заключение

В настоящей работе рассматривалась задача рассеяния упругих волн полосовой трещиной, расположенной на границе раздела двух сред с разными упругими свойствами. Дифракция волн на одиночном дефекте описывается граничным интегральным уравнением. Построенная частотно-зависимая асимптотика ядра ГИУ для бесконечно удаленных точек параметра преобразования Фурье совпадает с решением, приведенным в [21] для квазистатического случая, что дает полное соответствие между решениями на низких частотах. При больших значениях угловой частоты существенный вклад в решение дает также асимптотика ядра ГИУ в нуле. Сравнение построенного в этой работе асимптотического решения с численным показало хорошую согласованность для более широкого диапазона частот, чем в случае ранее полученного квазистатического решения. Найденные частотно-зависимые средние скачки перемещений на полосовой трещине могут быть использованы для определения частотно-зависящих пружинных

жесткостей, моделирующих ослабление адгезионных связей на интерфейсе.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 9.1022.2017/4.6), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-501-12069), Министерства образования и науки ФРГ (BMBF, Grant No. 13FH009IX5) и Немецкой службы академических обменов (DAAD).

Acknowledgment

The work is supported by the Ministry of Science and Education of the Russian Federation (Project 9.1022.2017/4.6), the Russian Foundation for Basic Research (Project 18-501-12069), the Ministry of Science and Education of the German Federal Republic (BMBF, Grant No. 13FH009IX5) and DAAD.

Библиографический список

1. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М.: Наука, 1966. – 320 с.
2. Achenbach J.D. Modeling for quantitative non-destructive evaluation // Ultrasonics. – 2002. – Vol. 40. – P. 1–10.
3. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 60, № 2. – С. 282–289.
4. An analytically based computer model for surface measurements in ultrasonic crack detection / E. Glushkov, N. Glush-

kova, A. Ekhlov, E. Shapar // Wave Motion. – 2006. – No. 43. – P. 458–473.

5. Ватульян А.О., Баранов И.В. Об определении конфигурации трещины в анизотропной упругой среде // Акустический журнал. – 2005. – Т. 51, № 4 – С. 456–462.

6. Углова Е.В., Тиратуриян А.Н., Ляпин А.А. Комплексный подход к исследованию характеристик динамического деформирования на поверхности нежестких дорожных одежд с использованием методов неразрушающего контроля // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 2. – С. 111130.

7. On the solution of crack identification problems in composite materials / A. Karmazin, E. Kirillova, W. Seemann, P. Syromyatnikov // Proc. Int. Symp. NDT Aerospace 2010. – 2010. – P. 11–22.
8. Itou S. Three-dimensional wave propagation in a cracked elastic solid // J. Appl. Mech. – 1978. – Vol. 45. – P. 807–811.
9. Visscher W. Scattering of elastic waves from planar cracks in isotropic media // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – Vol. 69. – No. 1. – P. 50–53.
10. Krenk S., Schmidt H. Elastic wave scattering by a circular crack // Phil. Trans. R. Soc. London, Series A. – 1982. – Vol. 308. – No. 1502. – P. 167–198.
11. Sumbatyan M.A., Remizov M.Yu. Asymptotic analysis in the anti-plane high-frequency diffraction by interface cracks // Appl. Math. Letters. – 2014. – Vol. 34. – P. 72–75.
12. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 513 с.
13. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. – М.: Наука, 1989. – 344 с.
14. Martin P.A., Rizzo F.J. On boundary integral equation for crack problems // Proc. R. Soc. London, Ser. A. – 1989. – Vol. 421. – P. 341–355.
15. Zhang C., Gross D. On wave propagation in elastic solid with cracks. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 2001. – P. 272.
16. Греков М.А. Сингулярная плоская задача теории упругости. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2001. – 192 с.
17. Nishimura N., Kobayashi S. A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems // Computational Mech. – 1989. – Vol. 4. – P. 319–328.
18. Boström A. Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation // Appl. Mech. Rev. – 2003. – Vol. 56. – P. 383–405.
19. Перельмутер М.Н. Исследование напряженно-деформированного состояния стоматологических имплантов методом граничных интегральных уравнений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 2. – С. 83–95.
20. Boström A., Golub M.V. Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modelled by spring boundary condition // Q.J. Mech. Appl. Math. – 2009. – Vol. 62. – P. 39–52.
21. Golub M.V., Boström A. Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves // Wave Motion. – 2011. – Vol. 48(2). – P. 105–115. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2010.09.003
22. Дорошенко О.В. Асимптотическое решение задачи о рассеянии плоских упругих волн на круговой интерфейсной трещине // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2015. – № 2 – С. 30–38.
23. Golub M.V., Doroshenko O.V. Effective spring boundary conditions for modelling wave transmission through a composite with a random distribution of interface circular cracks // Int. J. Sol. Struct. – 2019. – Vol. 165. – P. 115–126. DOI: 0.1016/j.ijsolstr.2015.11.021
24. Ватульян А.О., Явруян О.В. Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // Прикладная математика и механика. – 2006. – № 4. – С. 714–725.
25. Ohyoshi T. Effect of orthotropy on singular stress produced near a crack tip by incident SH waves // ZAMM – J. Appl. Math. Mech. – 1973. – Vol. 53. – P. 409–411.
26. Айзикович С.М., Васильев А.С. Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства // Прикладная математика и механика. – 2013. – Т. 77, № 1. – С. 129–137.
27. Андреев А.В. Суперпозиция степенно-логарифмических и степенных сингулярных решений в двумерных задачах теории упругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 1. – С. 5–30.
28. Перельмутер М.Н. Модели и методы расчета процессов разрушения по границам соединения материалов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – 2015. – 356 с.
29. Немирович-Данченко М.М. Возможности обнаружения множественной трещиноватости сплошной среды на основе оценки спектральной плотности энергии отраженного сигнала // Физическая мезомеханика – 2013. – Т. 16, № 1. – С. 105–110.
30. Castaings M., Singh D., Viot P. Sizing of impact damages in composite materials using ultrasonic guided waves // NDT and E International. – 2012. – Vol. 46. – P. 22–31.
31. Leckey C.A.C., Parker F. Raymond. Simulation based investigation of hidden delamination damage detection in CFRP composites // AIP Conference Proceedings. – 2014. – № 1. – Vol. 1581. – P. 1114–1121.
32. Ishii Y., Biwa S. Transmission of ultrasonic waves at oblique incidence to composite laminates with spring-type interlayer interfaces // J. Acoust. Soc. Am. – 2015. – Vol. 138. – P. 2800–2810. DOI.org/10.1121/1.4934265
33. Ishii Y., Biwa S. Ultrasonic bandgaps and interlaminar interface echoes of composite laminates: Analysis and experiments // J. Acoust. Soc. Am. – 2017. – Vol. 142. – No. 4. – P. 2600–2623.
34. Guided wave propagation and scattering for structural health monitoring of stiffened composites / V. Memmolo, E. Monaco, N.D. Boffa, L. Maio, F. Ricci // Composite Structures. – 2018. – Vol. 184. – P. 568–580.
35. Baik J.M., Thompson R.B. Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model // J. Nondestruct. Eval. – 1984. – Vol. 4. – P. 177–196.
36. Effective spring stiffness for a planar periodic array of collinear cracks at an interface between two dissimilar isotropic materials / H. Lekesiz, N. Katsube, S.I. Rokhlin, R.S. Seghi // Mech. Materials. – 2011. – Vol. 43. – P. 87–98.
37. Голуб М.В., Дорошенко О.В. Моделирование прохождения упругих волн через зоны неидеального контакта с помощью граничных условий пружинного типа // Проблемы прочности и пластичности. – 2015. – № 77. – С. 113–120.
38. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Интегральные преобразования и волновые процессы. – Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2017. – 201 с.
39. Численный анализ сингулярных решений двумерных задач несимметричной теории упругости / В.В. Корепанов, В.П. Матвеев, А.Ю. Федоров, И.Н. Шардаков // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 4 – с. 50–58.
40. Сметанин Б.И., Соболев Б.В., Волков С.С. Об одном эффективном методе решения сингулярных уравнений задач механики со смешанными граничными условиями // Вестник ДГТУ. – 2009. – Т. 9, № 4(43). – С. 589–598.
41. Ворович И.И. Метод Бубнова-Галеркина, его развитие и роль в прикладной математике // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 121–133.
42. Golub M.V., Zhang Ch. In-plane motion and resonance phenomena in a periodically layered composite with a strip-like crack // Wave Motion. – 2014. – Vol. 54. – P. 308–322.

References

1. Victorov I.A. Fizicheskie osnovy primeneniia ul'trazvukovykh voln Releia i Lemba v tekhnike [Physical fundamentals of using ultrasonic Rayleigh and Lamb waves in engineering]. *Moscow, Nauka*, 1966, P. 320.
2. Achenbach J.D. Modeling for quantitative non-destructive evaluation. *Ultrasonics*, 2002, vol. 40, pp. 1–10.
3. Glushkov E.V., Glushkova N.V. Difraktsiia uprugikh voln na prostranstvennykh treshchinakh proizvol'noi v plane formy [Diffraction of elastic waves by three-dimensional cracks of arbitrary shape in a plane]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 60, no. 2, pp. 277–283.
4. Glushkov E., Glushkova N., Ekhlakov A., Shapar E. An analytically based computer model for surface measurements in ultrasonic crack detection. *Wave Motion*, 2006, no. 43, pp. 458–473.
5. Vatulin A.O., Baranov I.V. Ob opredelenii konfiguratsii treshchiny v anizotropnoi uprugoi srede [On the determination of the configuration of a crack in an anisotropic elastic medium]. *Akusticheskij zhurnal, Journal of Acoustics*, 2005, vol. 51, no. 4, pp. 456–462.
6. Uglova E.V., Tiraturyan A.N., Lyapin A.A. Integrated approach to studying characteristics of dynamic deformation on flexible pavement surface using nondestructive testing. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no.2, pp. 111–130.
7. Karmazin A., Kirillova E., Seemann W., Syromyatnikov P. On the solution of crack identification problems in composite materials, *Proc. Int. Symp. NDT Aerospace 2010*, 2010, pp. 11–22.
8. Itou S. Three-dimensional wave propagation in a cracked elastic solid, *J. Appl. Mech.*, 1978, vol. 45, pp. 807–811.
9. Visscher W. Scattering of elastic waves from planar cracks in isotropic media, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1981, vol. 69, no.1, pp. 50–53.
10. Krenk S., Schmidt H. Elastic wave scattering by a circular crack, *Phil. Trans. R. Soc. London, Series A.*, 1982, vol. 308, no.1502, pp. 167–198.
11. Sumbatyan M.A., Remizov M.Yu. Asymptotic analysis in the anti-plane high-frequency diffraction by interface cracks, *Appl. Math. Letters*, 2014, vol. 34, pp. 72–75.
12. Muskhelishvili N.I. Singuliarnye integral'nye uravneniia [Singular Integral Equations]. *Moscow, Nauka*, 1968, P. 513.
13. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. Dinamika neodnorodnykh lineino-uprugikh sred [Dynamics of inhomogeneous linearly elastic media]. *Moscow, Nauka*, 1989, P. 344.
14. Martin P.A., Rizzo F.J. On boundary integral equation for crack problems, *Proc. R. Soc. London, Ser. A.*, 1989, vol. 421, pp. 341–355.
15. Zhang C., Gross D. On wave propagation in elastic solid with cracks, *Southampton: Computational Mechanics Publications*, 2001, P. 272.
16. Grekov M.A. Singuliarnaia ploskaia zadacha teorii uprugosti [Singular plane problem of the theory of elasticity]. *St. Petersburg, Izdatel'stvo S.-Peterburgskogo universiteta*, 2001, P. 192.
17. Nishimura N., Kobayashi S. A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems, *Computational Mech*, 1989, vol. 4, pp. 319–328.
18. Boström A. Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation, *Appl. Mech. Rev.*, 2003, vol. 56, pp. 383–405.
19. Perelmuter M.N. Issledovanie napriazhenno-deformirovannogo sostoiianiia stomatologicheskikh implantov metodom granichnykh integral'nykh uravnenii [Analysis of stress-strain state of dental implants by the boundary integral equations method]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no.2, pp. 83–95.
20. Boström A., Golub M.V. Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modelled by spring boundary condition, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 2009, vol. 62, pp. 39–52.
21. Golub M.V., Boström A. Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic waves, *Wave Motion*, 2011, vol. 48(2), pp. 105–115. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2010.09.003.
22. Doroshenko O.V. Asimptoticheskoe reshenie zadachi o rasseianii ploskikh uprugikh voln na krugovoi interfeisnoi treshchine [An asymptotic solution of the plane elastic wave scattering problem on a circular interface crack]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*, 2015, no. 2, pp. 30–38.
23. Golub, M.V., Doroshenko, O.V., 2019b. Effective spring boundary conditions for modelling wave transmission through a composite with a random distribution of interface circular cracks. *International Journal of Solids and Structures* 165, 115–126. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2019.02.002
24. Vatulyan A., Yavruyan O. Asimptoticheskii podkhod v zadachakh identifikatsii treshchin [An asymptotic approach in problem of crack identification]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, no. 4, pp. 647–656. DOI: org/10.1016/j.jappmathmech.2006.09.015
25. Ohyoshi T. Effect of orthotropy on singular stress produced near a crack tip by incident SH waves, *ZAMM – J. Appl. Math. Mech.*, 1973, vol. 53, pp. 409–411.
26. Aizikovich S.M., Vasiliev A.S. Dvukhstoronniia asimptoticheskii metod resheniia integral'nogo uravneniia kontaktnoi zadachi o kruchenii neodnorodnogo po glubine uprugogo poloprostranstva [A bilateral asymptotic method of solving the integral equation of the contact problem of the torsion of an elastic half-space inhomogeneous in depth]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 91–97.
27. Andreev A.V. Superpozitsiia stepenno-logarifmicheskikh i stepennykh singuliarnykh reshenii v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti [Superposition of power-logarithmic and power singular solutions in two-dimensional elastic problem]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no.1, pp. 5–30.
28. Perelmuter M.N. Modeli i metody rascheta protsessov razrusheniia po granitsam soedineniia materialov [Models and methods for calculating the destruction processes at the compound materials boundaries]. *Dissertatsiia na soiskanie uchenoi stepeni doktora fiz.-mat. nauk*, 2015, P. 356.
29. Nemirovich-Danchenko M.M. Vozmozhnosti obnaruzheniia mnozhestvennoi treshchinovatosti sploshnoi sredy na osnove otsenki spektral'noi plotnosti energii otrazhennogo signala [The opportunity of detecting multiple fracturing of a continuum based on an estimate of the spectral energy density of the reflected signal]. *Physical Mesomechanics*, 2013, vol. 16, no. 1, 105–110.
30. Castaings M., Singh D., Viot P. Sizing of impact damages in composite materials using ultrasonic guided waves, *NDT and E International*, 2012, vol. 46, pp. 22–31.
31. Leckey C.A.C., Parker F. Raymond. Simulation based investigation of hidden delamination damage detection in CFRP composites, *AIP Conference Proceedings*, 2014, no.1, vol. 1581, pp. 1114–1121.
32. Ishii Y., Biwa S. Transmission of ultrasonic waves at oblique incidence to composite laminates with spring-type interlayer interfaces, *J. Acoust. Soc. Am.*, 2015, vol. 138, pp. 2800–2810. DOI.org/10.1121/1.4934265
33. Ishii Y., Biwa S. Ultrasonic bandgaps and interlaminar interface echoes of composite laminates: Analysis and experiments, *J. Acoust. Soc. Am.*, 2017, vol. 142, no.4, pp. 2600–2623.

34. V. Memmolo, E. Monaco, N.D. Boffa, L. Maio, F. Ricci. Guided wave propagation and scattering for structural health monitoring of stiffened composites, *Composite Structures*, 2018, vol. 184, pp. 568–580.
35. Baik J.M., Thompson R.B. Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model, *J. nondestruct. Eval.*, 1984, vol. 4, pp. 177–196.
36. Lekesiz H., Katsube N., Rokhlin S.I., Seghi R.S. Effective spring stiffness for a planar periodic array of collinear cracks at an interface between two dissimilar isotropic materials, *Mech. Materials*, 2011, vol. 43, pp. 87–98.
37. Golub M.V., Doroshenko O.V. Modelirovanie prokhozheniia uprugikh voln cherez zony neideal'nogo kontakta s pomoshch'iu granichnykh uslovii pruzhinnogo tipa [Modelling passing of elastic waves through the imperfect contact zone using spring boundary conditions]. *Problems of Strength and Plasticity*, 2015, no. 77, pp. 113–120.
38. Glushkov E.V., Glushkova N.V. Integral'nye preobrazovaniia i volnovye protsessy [Integral transforms and wave processes]. *Krasnodar, Kuban State University*, 2017, P. 201.
39. Korepanov V.V., Matveenko V.P., Fedorov A.Yu., Shar-dakov I.N. Chislennyi analiz singuliarnykh reshenii dvumernykh zadach nesimmetrichnoi teorii uprugosti [Numerical analysis of singular solutions of two-dimensional problems of asymmetric elasticity]. *Mechanics of solid. A Journal of Russian Academy of Science*, 2013, no. 4, pp. 397–404.
40. Smetanin B.I., Sobol' B.V., Volkov S.S. Ob odnom effektivnom metode resheniia singuliarnykh uravnenii zadach mekhaniki so smeshannymi granichnymi usloviiami [An effective method of solving of singular integral equations in mechanical problems with mixed boundary conditions]. *Vestnik of Don State Technical University*, 2009, vol. 9, no. 4, pp. 589–598.
41. Vorovich I.I. Metod Bubnova-Galerkina, ego razvitie i rol' v prikladnoi matematike [Method of Bubnov-Galerkin, and its development and role in applied mathematics]. *Uspekhi mekhaniki deformiruemyykh sred*, Moscow, Nauka, 1975, pp. 121–133.
42. Golub M.V., Zhang Ch. In-plane motion and resonance phenomena in a periodically layered composite with a strip-like crack, *Wave Motion*, 2014, vol. 54, pp. 308–322.