



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.12

УДК 539.3:534

## МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИИ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПАНЕЛИ С ЖЕСТКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Н.В. Осадчий, В.А. Малышев, В.Т. Шепель

ПАО «ОДК – Сатурн», Рыбинск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 12 декабря 2018 г.  
Принята: 20 июня 2019 г.  
Опубликована: 28 июня 2019 г.

#### Ключевые слова:

пятислойная панель, жесткий наполнитель, перемещения, аналитическая и конечно-элементная модель, верификация.

### АННОТАЦИЯ

На основе решения вариационной задачи получена система дифференциальных уравнений и естественных граничных условий, которая описывает деформацию изотропной пятислойной панели с жестким при поперечном сдвиге наполнителем при ее нагружении силами, действующими как в поперечном направлении, так и по ее контуру. Система дифференциальных уравнений включает в себя три уравнения. Первые два уравнения описывают деформацию от действия нагрузки по контуру панели. Третье уравнение описывает деформацию панели от действия равномерно распределенной поперечной нагрузки. Система граничных условий включает в себя как условия на кромках панели, так и условия в ее углах. Решение системы дифференциальных уравнений в перемещениях для случая равномерно распределенной поперечной нагрузки при шарнирном закреплении соответствует решению в двойных тригонометрических рядах, а для сил, равномерно распределенных по контуру панели, в виде линейных функций этих сил. В качестве примера, подтверждающего практическую полезность предложенного подхода, проведена верификация конечно-элементной модели пятислойной панели с использованием полученного аналитического решения. Показано, что для совпадения результатов аналитического и конечно-элементного решений необходимо в конечно-элементной модели базовую поверхность совместить со срединной поверхностью панели. Верифицированная конечно-элементная модель может быть использована для исследования конструкций, относящихся к классу биконструкций, которые нашли широкое применение в различных отраслях промышленности. Область применения аналитической модели распространяется на стадию эскизного проектирования, а верифицированной конечно-элементной модели – на стадию опытно-конструкторских работ по созданию пятислойных панелей с жестким наполнителем.

© ПНИПУ

© Осадчий Николай Васильевич – к.т.н., эксперт, e-mail: nikosadchii@yandex.ru, ID: 0000-0002-2756-2770

Малышев Владимир Алексеевич – д.ф.-м.н., проф., вед. спец., e-mail: malysheva314@mail.ru, ID: 0000-0002-5074-7212

Шепель Вячеслав Тимофеевич – д.т.н., вед. спец., e-mail: sshapel@yandex.ru, ID: 0000-0003-4243-3034

Nykolay V. Osadchy – CSc in Technical Sciences, Expert, e-mail: nikosadchii@yandex.ru, ID: 0000-0002-2756-2770

Vladimir A. Malyshev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Specialist,

e-mail: malysheva314@mail.ru, ID: 0000-0002-5074-7212

Vyacheslav T. Shepel – Doctor of Technical Sciences, Professor, Leading Specialist,

e-mail: sshapel@yandex.ru, ID: 0000-0003-4243-3034



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

## DEFORMATION MODEL OF A FIVE-LAYER PANEL WITH A HARD FILLER

N.V. Osadchy, V.A. Malyshev, V.T. Shepel

UEC-Saturn, Rybinsk, Russian Federation

### ARTICLE INFO

Received: 12 December 2018

Accepted: 20 June 2019

Published: 28 June 2019

#### Keywords:

five-layer panel, solid filler, transitions, analytical and finite-element model, verification.

### ABSTRACT

The system of differential equations and natural boundary conditions was obtained based on the variational problem solution. The system describes deformation of a five-layer isotropic panel with a solid filler under transverse shear loaded with forces acting both in a transverse direction and over the panel contour. The differential equation system includes three equations. The first two equations describe deformation due to loads applied to the panel contour. The third equation describes the panel deformation due to the regularly distributed transverse loading. The system of boundary conditions includes conditions at the panel edges and at its corners. The differential equation system solution in transitions for the case of a regularly distributed load at pin-edge fixing corresponds to the solution of double trigonometric sequences. As for the forces regularly distributed on the panel contour, it is represented in the form of linear functions of these forces. As an example confirming the applicability of the proposed approach, the verification of the finite-element model of a five-layer panel with the use of the obtained analytical solution has been conducted. It has been demonstrated that for an agreement of the analytical and finite-element solution results it is required to superpose in the finite-element model the datum surface and median surface of the panel. The verified finite-element model can be used for examination of the structures referred to the biostructures class, which found a wide application in various branches of industry. The analytical model application is extended to the design definition stage; the application of the verified finite-element model is extended to the design experimental work for creation of five-layer panels with a solid filler.

© PNRPU

### Введение

В настоящее время промышленность проявляет все больший интерес к многослойным сотовым конструкциям с различного типа заполнителями [1–32] и, в частности, к пятислойным конструкциям с жестким заполнителем, так называемым биконструкциям. Использование для оценки напряженно-деформированного состояния метода конечных элементов при всех его преимуществах требует верификации расчетных моделей. Необходимо отметить, что верификация конечно-элементных моделей многослойных панелей на основе прямого эксперимента затруднена из-за невозможности задания граничных условий на торцах многослойной панели, что приводит к значительным погрешностям в напряжениях на ее концах [1]. Особенно это касается вопросов исследования механических свойств панелей, когда они испытываются как балочные элементы при трехточечной схеме нагружения. Поэтому для верификации конечно-элементных моделей целесообразно использовать аналитические модели. При построении аналитических моделей используются, как правило, два подхода. Первый основывается на рассмотрении элемента конструкции при статическом равновесии выделенного элемента панели, второй, на основе вариационного принципа Лагранжа, преимуществом которого является возможность непосредственного нахождения естественных граничных условий.

Исследование многослойных конструкций с прямой и круговой осью, как правило, требует введения гипотез о перемещениях и напряжениях по толщине панели. Поэтому многочисленные исследования по напряженно-деформированному состоянию многослой-

ных панелей, в особенности за рубежом, посвящены нахождению различных приближенных решений путем аппроксимации функций перемещения полиномами от переменной, изменяющейся по толщине, в слоях многослойной панели. Анализ литературы [16–30] показал, что для аппроксимации могут использоваться различные типы элементарных функций: полиномиальные [29], тригонометрические [20–23], гиперболические [24], а также их комбинации [25]. В [18] проанализировано 246 работ зарубежных и отечественных авторов, которые посвящены вопросам расчета многослойных панелей с применением как аналитических, так и конечно-элементных моделей. За последние 5 лет в [16] проанализировано 515 работ зарубежных авторов, посвященных вопросам построения аналитических многослойных балочных моделей статической прочности, частот собственных колебаний и устойчивости. Обзор моделей с сотовым заполнителем представлен в [17].

Из проведенного анализа следует, что задача верификации конечно-элементных моделей на основе разработки аналитических моделей напряженно-деформированного состояния многослойных панелей при тех или иных допущениях относительно поперечных и касательных напряжений по толщине слоя заполнителя не потеряла своей актуальности. Особенно это касается практического применения при расчете биконструкций, используемых при проектировании летательных аппаратов.

### 1. Постановка задачи

В работе ставится задача верификации конечно-элементной модели прогиба пятислойной панели с жестким заполнителем при ее нагружении поперечно-

ми и продольными равномерно распределенными силами с помощью аналитической модели.

## 2. Решение вариационной задачи

Рассмотрим многослойную панель, размерами  $(0, a)$  вдоль координатной оси  $X$  и  $(0, b)$  вдоль оси  $Y$ . Пусть поперечный прогиб панели описывается функцией  $w(x, y)$ .

Рассмотрим вариационную задачу относительно функционала

$$J(w) = \int_0^a \int_0^b F(x, y, w, w'_x, w'_y, w''_{xx}, w''_{xy}, w''_{yy}) dx dy \quad (1)$$

в прямоугольнике  $[0, a] \times [0, b]$  с искомой функцией  $w(x, y)$ . Для удобства изложения введем следующие обозначения для производных:

$$p = w'_x, \quad q = w'_y, \quad A = w''_{xx}, \quad B = w''_{xy}, \quad C = w''_{yy}.$$

Предполагается, что искомое решение  $w(x, y)$  на горизонтальных и вертикальных отрезках прямоугольника  $[0, a] \times [0, b]$  удовлетворяет граничным условиям Дирихле

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= f_0(x), \quad w(x, b) = f_1(x), \\ w(0, y) &= g_0(y), \quad w(a, y) = g_1(y) \end{aligned}$$

или граничным условиям Неймана

$$\begin{aligned} w'_y(x, 0) &= f_0(x), \quad w'_y(x, b) = f_1(x), \\ w'_x(0, y) &= g_0(y), \quad w'_x(a, y) = g_1(y). \end{aligned}$$

Поскольку в последующих вычислениях повсеместно применяются выражения, использующие суперпозицию с функцией  $\omega(x, y)$ , громоздкие выражения вида

$$F[x, y, w(x, y), w'_x(x, y), w'_y(x, y), w''_{xx}(x, y), w''_{xy}(x, y), w''_{yy}(x, y)],$$

целесообразно редуцировать до более кратких выражений вида  $F(x, y)$ , для которых функция  $w(x, y)$  и ее производные до второго порядка не записываются, но предполагаются.

Обозначим через  $w = f(x, y)$  решение вариационной задачи, получим дифференциальное уравнение и набор граничных условий, которым оно должно удовлетворять. Обозначив через  $\varphi = \varphi(x, y)$  вариацию для независимой переменной  $\alpha$ , рассмотрим возмущенное решение вида  $w(x, y, \alpha) = w(x, y) + \alpha\varphi(x, y)$ .

Из предположения, что функция  $w(x, y, \alpha)$  является решением вариационной задачи, следует, что функция

$L(\alpha) = J(w + \alpha\varphi)$  при  $\alpha = 0$  имеет минимум по переменной  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_0^a \int_0^b (F'_w\varphi + F'_p\varphi'_x + F'_q\varphi'_y + \\ &+ F'_A\varphi''_{xx} + F'_B\varphi''_{xy} + F'_C\varphi''_{yy}) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получим выражение для производной в виде

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_0^a \int_0^b (F'_w - F''_{px} - F''_{qy} + F'''_{Axx} + F'''_{Bxy} + F'''_{Cyy}) \varphi dx dy + \\ &+ \int_0^b (F'_p(a, y) - F''_{Ax}(a, y) - F''_{By}(a, y)) \varphi(a, y) dy - \\ &- \int_0^b (F'_p(0, y) - F''_{Ax}(0, y) - F''_{By}(0, y)) \varphi(0, y) dy + \\ &+ \int_0^a (F'_q(x, b) - F''_{Bx}(x, b) - F''_{Cy}(x, b)) \varphi(x, b) dx - \\ &- \int_0^a (F'_q(x, 0) - F''_{Bx}(x, 0) - F''_{Cy}(x, 0)) \varphi(x, 0) dx + \\ &+ \int_0^b F'_A(a, y) \varphi'_x(a, y) dy - \int_0^b F'_A(0, y) \varphi'_x(0, y) dy + \\ &+ \int_0^a F'_C(x, b) \varphi'_y(x, b) dx - \int_0^a F'_C(x, 0) \varphi'_y(x, 0) dx + \\ &+ F'_B(a, b) \varphi(a, b) - F'_B(a, 0) \varphi(a, 0) - \\ &- F'_B(0, b) \varphi(0, b) + F'_B(0, 0) \varphi(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Для получения дифференциального уравнения в частных производных возьмем вариацию  $\varphi$ , равную нулю на периметре прямоугольника  $[0, a] \times [0, b]$ . Из произвольности вариации  $\varphi$  следует, что искомое решение  $w$  должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$F'_w - F''_{px} - F''_{qy} + F'''_{Axx} + F'''_{Bxy} + F'''_{Cyy} = 0. \quad (2)$$

Пусть на решение  $w$  наложены граничные условия Дирихле. В этом случае выбор вариации  $\varphi$  в рамках однородных условий Дирихле

$$\varphi(x, 0) = \varphi(x, b) = 0, \quad \varphi(0, y) = \varphi(a, y) = 0,$$

может быть произвольным. В частности, варьируя производные по  $\varphi$  на периметре прямоугольника  $[0, a] \times [0, b]$ , дополнительно к условиям Дирихле получим граничные условия вида

$$F'_C(x, 0) = F'_C(x, b) = 0, \quad F'_A(0, y) = F'_A(a, y) = 0. \quad (3)$$

Пусть на решение  $w$  наложены граничные условия Неймана. В этом случае, выбрав вариации  $\varphi$  в рамках однородных условий Неймана, получим

$$\varphi'_y(x, 0) = \varphi'_y(x, b) = 0, \quad \varphi'_x(0, y) = \varphi'_x(a, y) = 0.$$

В частности, варьируя значения  $\varphi$  на периметре прямоугольника  $[0, a] \times [0, b]$  дополнительно к условиям Неймана, соотношение для естественных граничных условий запишем на периметре панели:

$$F'_q(x, 0) - F''_{B_x}(x, 0) - F''_{C_y}(x, 0) = F'_q(x, 0) - F''_{B_x}(x, b) - F''_{C_y}(x, b) = 0, \quad (4)$$

$$F'_p(0, y) - F''_{A_x}(0, y) - F''_{B_y}(0, y) = F'_p(a, y) - F''_{A_x}(a, y) - F''_{B_y}(a, y) = 0 \quad (5)$$

и для условий в углах панели

$$[0, a] \times [0, b]$$

$$F'_B(0, 0) = F'_B(a, 0) = F'_B(0, b) = F'_B(a, b) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, выражения (4)–(6) отражают естественные граничные условия. Следует отметить, что в классической теории панелей [11] условие (6) не рассматривается.

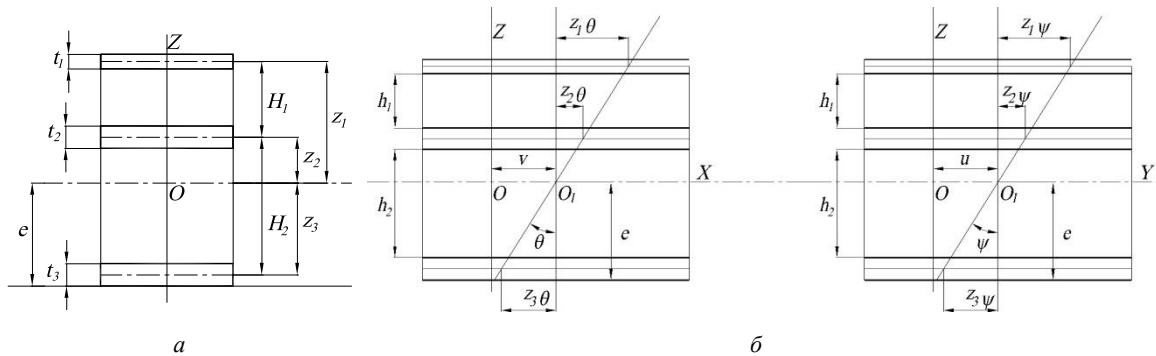


Рис. 1. Геометрические размеры пятислойной панели (а) и перемещения элементов панели вдоль осей  $OX, OY$  (б)

Fig. 1. Geometrical sizes of the five-layer panel (a) and displacement elements of the panel along axes  $OX, OY$  (b)

В соответствии с гипотезой плоских сечений углы поворота панели вокруг осей  $OX, OY$  равны:

$$\vartheta(x, y) = -w'_x, \quad \psi(x, y) = -w'_y,$$

где  $w(x, y)$  – перемещение панели вдоль оси  $OZ$  (рис. 1).

Перемещения обшивок панели по оси  $X$  в соответствии с гипотезой плоских сечений (см. рис. 1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} - (i=1) \quad v_1(x, y) &= v(x, y) + z_1\vartheta(x, y) = \\ &= v(x, y) - (H_1 + H_2 - e + t_3/2)w'_x, \\ - (i=2) \quad v_2(x, y) &= v(x, y) + z_2\vartheta(x, y) = \\ &= v(x, y) - (H_2 + t_3/2 - e)w'_x, \\ - (i=3) \quad v_3(x, y) &= v(x, y) + z_3\vartheta(x, y) = \\ &= v(x, y) + (e - t_3/2)w'_x. \end{aligned}$$

При этом координата  $z$  срединной поверхности (рис. 1, б)

### 3. Аналитическая и численная модель изгиба пятислойной панели

Проиллюстрируем предложенный подход нахождения естественных граничных условий в задаче оценки изгиба пятислойной плоской панели с последующей верификацией ее конечно-элементной модели для двух наиболее важных для практики случаев нагружения: равномерно распределенными по кромкам нагрузками в плоскости панели с интенсивностью  $p_x, p_y$  и поперечной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $Q$ . Для этого рассмотрим прямоугольную пятислойную панель (рис. 1, а) шириной  $a$  и длиной  $b$  и тремя несущими обшивками с толщинами  $t_{i=1,2,3}$ . Материал обшивок изотропный с модулями упругости  $E$  и модулем сдвига в плоскости обшивок  $G$ . Слои заполнителя не сопротивляются изгибу и являются абсолютно жесткими при поперечном сдвиге и поперечном сжатии. Зависимость между относительными деформациями и перемещениями описывается с помощью соотношений Коши.

$$e = \left[ (H_1 + H_2 + t_3/2)t_1 + (H_2 + t_3/2)t_2 + t_2^2/2 \right] / (t_1 + t_2 + t_3).$$

Аналогичным образом записываются перемещения  $u_i$  ( $i=1,2,3$ ) вдоль оси  $Y$ .

Для вывода дифференциальных уравнений используем функционал, равный сумме потенциальной энергии деформации панели и работе внешней силы:

$$F = \frac{1}{2} \left[ \left( D_2 (u'_x + v'_y)^2 + D_1 \left( (u'_x)^2 + 2\mu u'_y v'_x + (v'_x)^2 \right) \right) + \left( D_3 \left[ (w''_x)^2 + 2\mu v''_x w''_y + (w''_y)^2 \right] + 4D_4 (w''_{xy})^2 \right) + 2[Qw(x, y) + p_x v(x, y) + p_y u(x, y)] \right]. \quad (7)$$

В выражении (7) приняты следующие обозначения:

$$D_1 = \frac{E}{1-\mu^2} (t_1 + t_2 + t_3), \quad D_2 = G(t_1 + t_2 + t_3),$$

$$D_3 = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{(H_1 + H_2)^2 t_1 t_3 + H_1^2 t_1 t_2 + H_2^2 t_2 t_3}{t_1 + t_2 + t_3} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{t_i^3}{12} \right) \right],$$

$$D_4 = G \left[ \frac{(H_1 + H_2)^2 t_1 t_3 + H_1^2 t_1 t_2 + H_2^2 t_2 t_3}{t_1 + t_2 + t_3} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{t_i^3}{12} \right) \right],$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Необходимо отметить, что гипотеза плоских сечений применима для панелей, отношение ширины которых к толщине больше пяти [31].

Записав уравнение (2) для каждой из функций  $u, v, w$  (7), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial v'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial v'_y} \right) =$$

$$= D_1 v''_{xx} + (D_2 + D_1 \mu) u''_{xy} + D_2 v''_{yy} - P_x = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) =$$

$$= D_2 u''_{xx} + (D_2 + D_1 \mu) v''_{xy} + D_1 u''_{yy} - P_y = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''_{yy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial xy} \left( \frac{\partial F}{\partial w''_{xy}} \right) =$$

$$= D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (4D_4 + 2D_3 \mu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + Q = 0.$$

Первые два уравнения описывают перемещения панели по осям  $X, Y$ , а третье – перемещение от поперечного изгиба вдоль оси  $Z$ .

Естественные граничные условия для оси  $X$  могут быть получены с использованием выражений (3)–(6):

– нормальная составляющая силы,  $N_x$  приложенная в направлении оси  $OX$  на сторонах  $x=0, x=a$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial v'_x} \right)_0^y = D_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0^y = N_x(0, y) = 0,$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial v'_x} \right)_a^y = D_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_a^y = N_x(a, y) = 0; \quad (9)$$

– касательная составляющая  $T$  на сторонах  $x=0, x=a$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right)_0^y = D_2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_0^y = T_{xy}(0, y) = 0,$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right)_a^y = D_2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_a^y = T_{xy}(a, y) = 0; \quad (10)$$

– изгибающие моменты  $M$  на кромках панели  $x=0, x=a$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial w'_x} \right)_x^0 = D_3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0^y = M_x(0, y) = 0,$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial w'_x} \right)_x^a = D_3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0^y = M_x(a, y) = 0; \quad (11)$$

– удельные силы давления  $R$  на кромки панели  $x=0, x=a$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial w''_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial w''_y} \right) = R(0, y) =$$

$$= (4D_4 + D_3 \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_3 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial w''_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial w''_x} \right) = R(a, y) =$$

$$= (4D_4 + D_3 \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_3 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) = 0; \quad (13)$$

– силы  $H$  в углах панели, уравнивающие крутящие моменты на ее кромках

$$\left( \frac{\partial F}{\partial w''_{xy}} \right)_{x=0, y=0} = H(0, 0) = 4D_4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)_{x=0, y=0} = 0,$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial w''_{xy}} \right)_{x=0, y=b} = H(0, b) = 4D_4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)_{x=0, y=b} = 0, \quad (14)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial w''_{xy}} \right)_{x=a, y=0} = H(a, 0) = 4D_4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)_{x=a, y=0} = 0,$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial w''_{xy}} \right)_{x=a, y=b} = H(a, b) = 4D_4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)_{x=a, y=b} = 0. \quad (15)$$

Получение естественных граничных условий по оси  $Y$  аналогично.

Рассмотрим решения (8) для наиболее часто используемых в практике способов закрепления панели.

Пусть  $p_x$  – равномерно распределенная по граням нагрузка приложена к кромке  $x=a$  по оси  $OX$ , а  $p_y$  – к кромке  $y=b$  по оси  $OY$ . По кромкам  $x=0, y=0$  панель закреплена в направлении осей  $OY$  и  $OX$ .

Решение первых двух уравнений системы (8) можно записать в виде

$$v(x) = C_1 + C_2 x; \quad u(y) = C_3 + C_4 y. \quad (16)$$

Константы  $C_1 \dots C_4$  находятся из естественных граничных условий:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial v'_x} \right)_a^y = D_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_a^y = p_x a,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_y}\right)_x = D_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x}\right)_x = p_y b.$$

Окончательно функции перемещений  $v(x), u(y)$  вдоль осей  $X, Y$  преобразуются к виду

$$v(x) = \frac{ap_x - \mu bp_y}{D_1(1-\mu^2)} x; \quad u(y) = \frac{ap_y - \mu bp_x}{D_1(1-\mu^2)} y. \quad (17)$$

Последнее уравнение системы дифференциальных уравнений (8) для равномерно распределенной нагрузки решается методом Навье и может быть представлено двойными тригонометрическими рядами. Сходимость двойных тригонометрических рядов продемонстрирована в [11].

Для поперечных прогибов точность в 1 % достигается удержанием 4-го члена ряда, а для изгибающих моментов (напряжений) точность в 2 % достигается удержанием не менее 200 членов ряда.

Функция  $w(x, y)$  позволяет найти все параметры напряженно-деформированного состояния панели, а с помощью выражений (9)–(15) можно получить реакции и удельные силы давления по кромкам панели, силы в углах и уравновешивающие крутящие моменты на кромках, отражающие влияние краевого эффекта.

Для верификации конечно-элементной модели пятислойной панели использовались результаты аналитического расчета пятислойной квадратной панели со сторонами  $a = b = 250$  мм. Толщины несущих обшивок

$t_{i=1,2,3}$  принимались соответственно равными 1, 2, 3 мм. Модуль упругости несущих обшивок  $2 \times 10^5$  МПа, а модуль сдвига в плоскости несущих обшивок  $10^4$  МПа. Толщина слоя первого заполнителя принята равной 15 мм, второго – 10 мм. Панель нагружена в плоскости равномерно распределенными силами с интенсивностью  $p_x = p_y = 10$  Н/мм, приложенными к ее сторонам, а также равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью  $Q = 0,1$  МПа. Для построения конечно-элементной модели использован элемент многослойной оболочки Shell 181. Одним из основных параметров указанного элемента является положение базовой поверхности, от которой производится отсчет координат  $z$  для всех слоев по толщине панели.

Для случая нагружения панели в плоскости равномерно распределенными силами с интенсивностью  $p_x, p_y$ , приложенными к ее граням, было выполнено сравнение аналитического и численного решения, полученного с использованием невалидированной конечно-элементной модели. Сравнение показало, что максимальные перемещения вдоль осей  $OX, OY$  не совпадают. При этом они распределены нелинейно, а перемещения вдоль вертикальной оси  $OZ$  отличны от нуля. Нормальные напряжения по толщине несущих обшивок также распределены нелинейно. Эпюры углов поворотов поперечных сечений отличны от нуля. Это означает, что панель кроме растяжения испытывает также изгиб. Указанные отличия обусловлены смещением базовой поверхности относительно срединной поверхности (рис. 2).

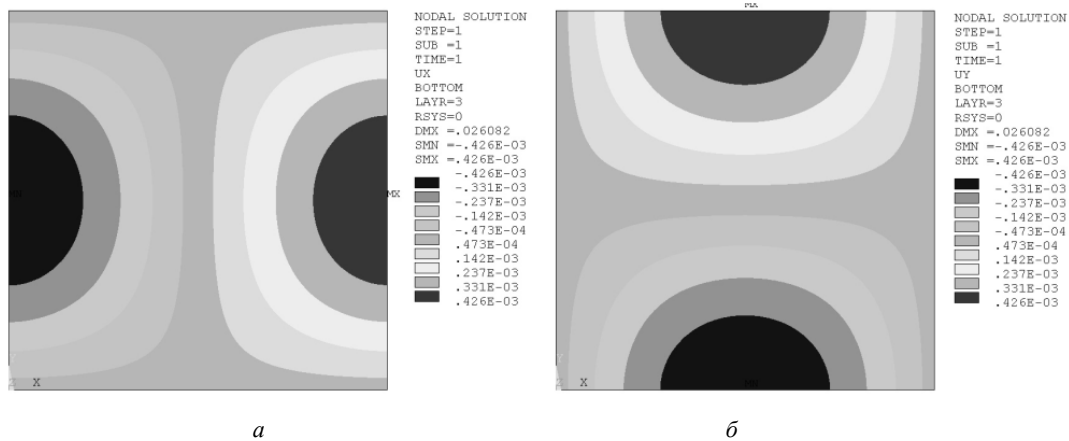


Рис. 2. Эпюры перемещений базовой поверхности вдоль осей  $OX(a), OY(b)$  до верификации конечно-элементной модели

Fig. 2. Epure of displacements of a base surface along axes  $OX(a), OY(b)$  to verifications of the finite-element model

Чтобы базовая поверхность стала срединной поверхностью, ее необходимо сместить на величину, равную отношению максимального перемещения ( $UX_{\max}$ ) вдоль оси  $OX$  к максимальному углу ( $RotY_{\max}$ ) поворота вокруг оси  $OY$ :

$$z = UX_{\max} / RotY_{\max} = -0,426 \cdot 10^{-3} / 0,341 \cdot 10^{-3} = -1,25.$$

При таком смещении базовой поверхности результаты по аналитической и конечно-элементной модели совпали с приемлемой для инженерных расчетов точностью. Следует отметить, что если сечение панели сим-

метрично относительно ее базовой поверхности, то различий между аналитическим и конечно-элементным решениями не возникает, так как в этом случае базовая поверхность панели является и ее серединой поверхностью. Таким образом, при верификации двухмерной конечно-элементной модели пятислойной панели, нагруженной силами, действующими на ее кромки, необходимо совмещение базовой поверхности со срединной поверхностью.

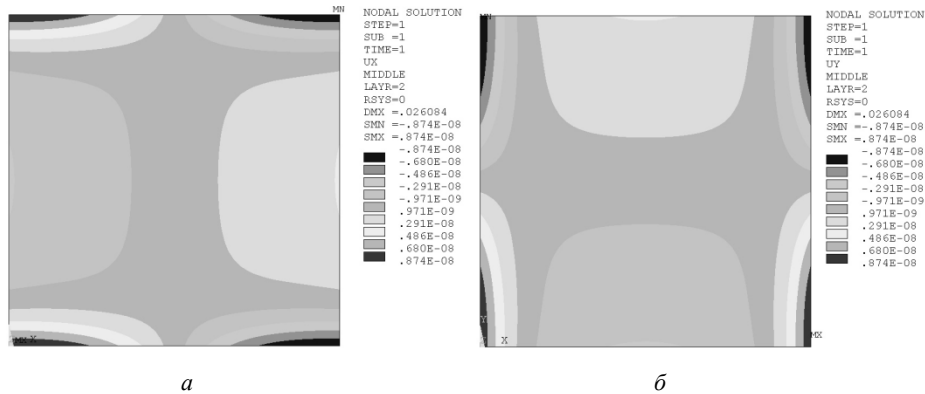


Рис. 3. Эпюра перемещений базовой поверхности вдоль осей  $OX(a)$ ,  $OY(b)$  после верификации конечно-элементной модели

Fig. 3. Epure of displacements of a base surface along axes  $OX(a)$ ,  $OY(b)$  after verification of its finite-element model

Таким образом, верификация конечно-элементной модели прогиба пятислойной панели аналитической моделью дает хорошее совпадение аналитического и численного решений.

Область применения аналитической модели распространяется на стадию эскизного проектирования, а верифицированной конечно-элементной модели – на стадию опытно-конструкторских работ по созданию пятислойных панелей с жестким наполнителем, относящихся к классу биконструкций.

## Заключение

1. Областью применения предлагаемой модели является оценка напряженно-деформированного состояния панели пятислойной биконструкции, которая характеризуется наличием поясов (обшивок), воспринимающих изгибающий момент и оказывающих основное

сопротивление изгибу, разделенных плоскими стенками, связывающими обшивки между собой и не оказывающих сопротивления изгибу.

2. Новизна предлагаемого подхода обусловлена получением дифференциальных уравнений для нахождения естественных граничных условий многослойной панели и получении для пятислойной панели с жестким наполнителем системы дифференциальных уравнений, описывающих интегральное поле деформаций при ее нагружении равномерно распределенными силами, действующими как на кромки панели, так и в поперечном направлении.

3. Сферой практического применения предлагаемой аналитической модели является верификация двухмерной конечно-элементной модели деформации панели, поскольку ее верификация на основе прямого эксперимента затруднена из-за невозможности реализации граничных условий на ее торцах.

## Библиографический список

1. Панин В.Ф., Гладков Ю.А. Конструкции с наполнителем: справочник. – М.: Машиностроение, 1991. – 272 с.
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композитных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 264 с.
3. Тостоедов Н.А., Наговицин В.Н., Пермяков М.Ю. Применение трехслойных конструкций в космических аппаратах // Вестник СибГАУ. – 2016. – Т. 17, № 1. – С. 200–211.
4. Johnson A., Sims G. Mechanical properties and design of sandwich materials // Composites. – 1986. – Vol. 17. – P. 321–328.
5. Осадчий Н.В., Шепель В.Т. Решение задачи изгиба пятислойной панели с использованием вариационного исчисления

// Изв. вузов. Авиационная техника. – 2017. – № 1. – С. 26–31.

6. Kaszynski Alexander A., Beck Joseph A., Brown Jeffrey M. Experimental validation of a mesh quality optimized morphed geometric mistuning model // Proceedings of ASME Turbo Expo–2015. Turbine Technical Conference and Exposition, June 15 – 19, 2015, Montreal. – Canada, 2015. – P. 1–13.

7. Salih N. Akour, Hussein Z. Maaitah. Effect of core material stiffness on sandwich panel behavior beyond the yield limit // Proceedings of the World Congress on Engineering. – WCE 2010. – June 30 – July 2. – London, U.K., 2010. – P. 1321–1330.

8. Strength, stiffness, and panel peeling strength of carbon fiber-reinforced composite sandwich structures with aluminum honeycomb cores for vehicle body / Wang Jianfeng, Shi Chengyang, Yang Na, Sun Haonan, Liu Yiqun, Song Baoyu // *Composite Structures*. – 2018. – Vol. 184. – P. 1189–1196.

9. Experimental and numerical study on honeycomb sandwich panels under bending and in panel compression / Guangyong Sun, Xintao Huo, Dongdong Chen, Qing Li // *Materials and Design*. – 2017. – Vol. 133. – P. 154–168.

10. Осадчий Н.В., Малышев В.А., Шепель В.Т. Методы выбора плотности и типа конечных элементов в задачах статической прочности многослойных конструкций // *Деформация и разрушение материалов*. – 2017. – № 1. – С. 10–17.

11. Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

12. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

13. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.

14. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.

15. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. – Изд. 2-е. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 392 с.

16. Atteshamuddin S. Sayyad, Yuwaraj M. Ghugal. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature // *Composite Structures*. – 2017. – Vol. 171. – P. 486–504.

17. Groh R.M.J., Weaver P.M. On displacement-based and mixed-variational equivalent single layer theories for modelling highly heterogeneous laminated beams//*International Journal of Solids and Structures*. – 2015. – Vol. 59. – P. 147–170.

18. Groh A. literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels // *Central European Journal of Engineering*. – 2011. – Vol. 1(1). – P. 59–80.

19. Srinivas S., Rao A.K. Bending, vibration and bulking of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates // *International Journal of Solids and Structures*. – 1970. – Vol. 6. – P. 1463–1481.

20. Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics // *Composite Structures*. – 2005. – Vol. 83. – P. 2225–2237.

21. Sayyad A.S., Ghugal Y.M. Static flexure of soft core sandwich beams using trigonometric shear deformation theory // *Mechanics of Advanced Composite Structures*. – 2015. – Vol. 2(1). – P. 45–53.

22. Ghugal Y.M., Shimpi R.P. A trigonometric shear deformation theory for flexure and free vibration of isotropic thick beams // *Structural Engineering Convention (SEC-2000)*, Bombay, India, 2000. – P. 58–72.

23. Ghugal Y.M. Flexure and vibration of thick beams using trigonometric shear deformation theory // *Experimental and Applied Mechanics*. – 2010. – Vol. 1(1). – P. 1–27.

24. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates / A.M.A. Neves, A.J.M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C.M.C. Roque, R.M.N. Jorge, C.M.M. Soares // *Composite Structures*. – 2012. – Vol. 94. – P. 1814–1825.

25. Analysis of laminated composites and sandwich structures by trigonometric, exponential and miscellaneous polynomials and a MITC9 plate element / M. Filippi, M. Petrolo, S. Valvano, E. Carrera // *Composite Structures*. – 2016. – Vol. 150. – P. 103–114.

26. Static and free vibration analysis of laminated beams by refined theory based on Chebyshev polynomials / M. Filippi, A. Pagani, M. Petrolo, G.Colonna, E. Carrera // *Composite Structures*. – 2015. – Vol. 132. – P. 1248–1259.

27. Analysis of laminated beams via Unified Formulation and Legendre polynomial expansions / A. Pagani, A.G. de Miguel, M. Petrolo, E. Carrera // *Composite Structures*. – 2016. Vol. 156. – P. 78–92.

28. Best Theory Diagrams for cross-ply composite plates using polynomial, trigonometric and exponential thickness expansions / J. Yarasca, J.L. Mantari, M. Petrolo, E. Carrera // *Composite Structures*. – 2017. – Vol. 161. – P. 362–383.

29. Cook G., Tessler A.A. 3, 2-order bending theory for laminated composite and sandwich beams // *Composites*. Part B: Engineering. – 1998. – Vol. 29. – No. 5. – P. 565–576.

30. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates // *Applied Mechanics*. – 1984. – Vol. 51. – P. 745–752.

31. Курнаев В.М. Расчет ортотропных пластин с учетом поперечного сдвига: учеб. пособие. – Л., 1976. – 33 с.

32. Осадчий Н.В., Малышев В.А., Шепель В.Т. Исследование изгиба трехслойной прямоугольной панели вариационным методом // *Деформация и разрушение материалов*. – 2016. – № 7. – С. 6–10.

## References

1. Panin V.F., Gladkov Yu.A. *Konstrukcii s zapolnitelem. Spravochnik [Structures with filler: Guide]*. Moscow, *Mashinostroenie*, 1991, 272 p.

2. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstrukcij iz kompozitnyh materialov [Mechanics for structures made of composite materials]*. Moscow, *Mashinostroenie*, 1988, 264 p.

3. Tostoedov N.A., Nagovicin V.N., Permyakov M.Yu. *Primenenie trekhslonnyh kon-strukcij v kosmicheskikh apparatah [The use of three-layer structures in spacecraft]*. *Vestnik SibGAU*, 2016, vol. 17, no. 1, pp. 200-211.

4. Johnson A., Sims G. Mechanical properties and design of sandwich materials. *Composites*, 1986, vol. 17, pp. 321-328.

5. Osadchij N.V., SHepel' V.T. Reshenie zadachi izgiba pyatislojnoj paneli s ispol'zo-vaniem variacionnogo ischisleniya [Five-layer beam bending problem solution using the calculus of variation]. *Izvestiya vuzov. Aviacionnaya tekhnika*, 2017, no. 1, pp. 26-31.

6. Kaszynski Alexander A., Beck Joseph A., Brown Jeffrey M. Experimental validation of a mesh quality optimized morphed geometric mistuning model. *Montreal, Canada, Proceedings of ASME Turbo Expo 2015: Turbine Technical Conference and Exposition*, June 15-19, 2015, pp. 1-13.

7. Salih N. Akour, Hussein Z. Maaitah. Effect of Core Material Stiffness on Sandwich Panel Behavior Beyond the Yield Limit. *London, UK., Proceedings of the World Congress on Engineering. WCE 2010*, June 30 – July 2, 2010, 2010, pp.1321-1330.

8. Wang Jianfeng, Shi Chengyang, Yang Na, Sun Haonan, Liu Yiqun, Song Baoyu, Strength, stiffness, and panel peeling strength of carbon fiber-reinforced composite sandwich structures with aluminum honeycomb cores for vehicle body. *Composite Structures*. 2018, vol. 184, pp. 1189-1196.

9. Guangyong Sun, Xintao Huo, Dongdong Chen, Qing Li. Experimental and numerical study on honeycomb sandwich panels



under bending and in panel compression. *Materials and Design*, 133, 2017, pp.154-168.

10. Osadchij N.V., Malyshev V.A., Shepel' V.T. Metody vybora plotnosti i tipa konech-nyh ehlementov v zadachah sticheskoy prochnosti mnogoslojnyh konstrukcij [Methods of selection of density and type of finite elements in multilayered designs static strength problems]. *Deformaciya i razrushenie materialov*, 2017, no. 1, pp.10-17.

11. Timoshenko S.P., Vojnovskij – Kriger S., Plastinki i obolochki [Plates and shells]. *Moscow, Nauka*, 1966, 636 p.

12. Lancosh K. Variacionnye principy mekhaniki [Variational principles of mechanics]. *Moscow, Nauka*, 1965, 408 p.

13. Andreev A.N., Nemirovskij YU.V. Mnogoslojnye anizotropnye obolochki i plastiny: Izgib, ustojchivost', kolebaniya [Multi-layer anisotropic shells and plates: Bending, steadiness, displacement]. *Novosibirsk, Nauka*, 2001, 288 p.

14. Gorshkov A.G., Starovojtov EH.I., Yarovaya A.V. Mekhanika cloistyh vyazkouprugopla sticheskikh ehlementov konstrukcij [Mechanics of multilayered layered viscous-elastic structure elements]. *Moscow, FIZMATLIT*, 2005, 576 p.

15. Birger I. A. Sterzhni, plastinki, obolochki. Izdanie 2–e [Bars, plates and shells. Second edition]. *Moscow, LENAND*, 2015, 392 p.

16. Atteshamuddin S. Sayyad, Yuwaraj M. Ghugal. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature. *Composite Structures*, 2017, vol. 171, pp. 486-504.

17. Groh R.M.J., Weaver P.M. On displacement-based and mixed-variational equivalent single layer theories for modelling highly heterogeneous laminated beams. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 59, pp.147-170.

18. Groh. A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. *Central European Journal of Engineering*, 2011, vol. 1(1), pp.59-80.

19. Srinivas S., Rao A.K. Bending, vibration and bulking of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *International Journal of Solids and Structures*. 1970, vol. 6, pp.1463-1481.

20. Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Composite Structures*, 2005, vol. 83, pp. 2225-2237.

21. Sayyad AS, Ghugal YM. Static flexure of soft core sandwich beams using trigonometric shear deformation theory. Me-

chanics of Advanced. *Composite Structures*, 2015, vol.2 (1), pp. 45-53.

22. Ghugal YM, Shimpi RP. A trigonometric shear deformation theory for flexure and free vibration of isotropic thick beams. *Structural Engineering Convention (SEC-2000)*, Bombay, India, 2000, pp. 58-72.

23. Ghugal YM. Flexure and vibration of thick beams using trigonometric shear deformation theory. *Experimental and Applied Mechanics*. 2010, vol. 1(1), pp. 1-27.

24. Neves A.M.A., Ferreira A.J.M., Carrera E., Cinefra M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N., Soares C.M.M. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, pp. 1814-1825.

25. Filippi M., Petrolo M., Valvano S., Carrera E. Analysis of laminated composites and sandwich structures by trigonometric, exponential and miscellaneous polynomials and a MITC9 plate element. *Composite Structures*, 2016, vol. 150, pp.103-114.

26. Filippi M., Pagani A., Petrolo M., Colonna G., Carrera E. Static and free vibration analysis of laminated beams by refined theory based on Chebyshev polynomials. *Composite Structures*, 2015, vol. 132, pp. 1248-1259.

27. Pagani A., A.G. de Miguel, Petrolo M., Carrera E., Analysis of laminated beams via Unified Formulation and Legendre polynomial expansions. *Composite Structures*. 2016, vol.156, pp. 78-92.

28. Yarasca J., Mantari J.L., Petrolo M., Carrera E. Best Theory Diagrams for cross-ply composite plates using polynomial, trigonometric and exponential thickness expansions. *Composite Structures*. 2017, vol.161, pp. 362-383.

29. Cook G., Tessler A.A. 3, 2-order bending theory for laminated composite and sandwich beams. *Composites. Part B: Engineering*, 1998, vol. 29, no.5, pp. 565-576.

30. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Applied Mechanics*, 1984, vol. 51, pp.745-752.

31. Kurnaev V.M. Raschyot ortotropnyh plastin s uchyotom poperechnogo sdviga [Calculation of orthotropic plates taking into account transverse shear. Uchebnoe. posobie]. *LKI*, 1976, 33p.

32. Osadchij N.V., Malyshev V.A., Shepel' V.T. Issledovanie izgiba trekh-slojnoj pryamougol'noj paneli variacionnym metodom [Investigation of three-layer rectangular panel bending by variational method]. *Deformaciya i razrushenie materialov*, 2016, no.7, p. 6-10.